نامساویها

نوشتهٔ پاول پتروویچ کاروکین
ترجمهٔ پرویز شهریاری

نامساویها

نوشتهٔ پاول پترویچ کاروکین

ترجمهٔ پرویز شهریاری

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

پ . پ . کاروکین
نامساویها

Павел Петрович Коровкин

НЕРАВЕНСТВА

چاپ اول، ۱۳۵۰ ه . ش. - تهران
چاپ و صحافی: چاپخانه بیست و پنجم شهریور (شرکت سهامی افست)
تعداد ۲۲۰۰ نسخه

شمارهٔ ثبت کتابخانهٔ ملی ۱۴۱ به‌تاریخ ۵۰/۲/۹

مقدمهٔ مؤلف

دانش‌آموزان در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی با نامعادلات درجهٔ اول و درجهٔ دوم و روش حل آنها آشنا می‌شوند.

قصد مؤلف این کتاب این نیست که اصول حل این نامعادلات را بازگو کند، بلکه توجه اصلی بر این بوده است که دانش‌آموزان را با بعضی از نامساویهای معروف، که در رشته‌های مختلف ریاضیات عالی نقش اساسی دارند و کاربرد این نامساویها در جستجوی مقادیر ماکزیمم و می‌نیمم و محاسبهٔ بعضی از حدود، آشنا کند.

در کتاب ۶۲ مسئله داده شده است که از آنها ۳۶ مسئله با حل تفصیلی آنها به عنوان مسائل اساسی و۲۶ مسئله به عنوان تمرین در بندهای ۱، ۴ و ۵ آمده است. برای حل این مسائل هم می‌توان به‌آخر کتاب مراجعه کرد.

طبیعی است که حل مسائلی که در ابتدای کار مشکل بنظر می‌رسد، بیش از حل مسائل ساده می‌تواند برای دانش‌آموزان مفید باشد. به همین مناسبت بهتر است که دانش‌آموزان تنها وقتی به حل مسائل در آخر کتاب مراجعه کنند که یا مسئله را حل کرده باشند ویا به اندازهٔ کافی در مورد آنها کار کرده باشند.

برای اثبات نامساویها و حل مسائل این کتاب، کوشش شده است از خواص و قضایائی استفاده شود که مربوط به دورهٔ دبیرستانی است و در نتیجه بتواند برای هر دانش‌آموز علاقمند دبیرستانی مورد استفاده قرار گیرد.

۱

قسمت صحیح عدد x (که به‌صورت $[x]$ نشان داده می‌شود)، به بزرگترین عدد صحیحی گفته می‌شود که از x تجاوز نکند.

از این تعریف نتیجه می‌شود که $x \geqslant [x]$ است، زیرا قسمت صحیح از x تجاوز نمی‌کند. از طرف دیگر، چون $[x]$ بزرگترین عدد صحیحی است که در نامساوی اخیر صدق می‌کند، $x < [x] + ۱$ می‌شود.

بنابراین، $[x]$ عدد صحیحی است که با نامساویهای زیر معین می‌شود:

$$[x] \leqslant x < [x] + ۱$$

مثلاً از نامساویهای:

$$۳ < \pi < ۴,\ ۵ < \frac{۱۷}{۳} < ۶,\ -۲ < -\sqrt{۲} < -۱,$$
$$۵ = ۵ < ۶$$

نتیجه می‌شود:

$$[\pi] = ۳,\ \left[\frac{۱۷}{۳}\right] = ۵,\ [-\sqrt{۲}] = -۲,\ [۵] = ۵$$

مسئلهٔ ۱. قسمت صحیح عدد زیر را پیدا کنید:

$$x = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۴}} + \frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

حل ـ نامساویهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$۱ \leqslant ۱ \leqslant ۱$$

$$۰,۷ < \sqrt{\frac{۱}{۲}} < ۰,۸$$

$$۰,۵ < \sqrt{\frac{۱}{۳}} < ۰,۶$$

$$۰,۵ \leqslant \sqrt{\frac{۱}{۴}} \leqslant ۰,۵$$

$$۰,۴ < \sqrt{\frac{۱}{۵}} < ۰,۵$$

(این نامساویها را با محاسبهٔ جذر تقریبی نقصانی و اضافی با ۰,۱ تقریب بدست آورده‌ایم). از جمع این نامساویها بدست می‌آید:

$$۱ + ۰,۷ + ۰,۵ + ۰,۵ + ۰,۴ < x < ۱ + ۰,۸ + ۰,۶ + + ۰,۵ + ۰,۵ \Rightarrow ۳,۱ < x < ۳,۴$$

یعنی داریم: $[x] = ۳$.

مسئلهٔ ۲. قسمت صحیح این عدد را بدست آورید:

$$y = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۴}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}$$

حل. اختلاف این مسئله با مسئلهٔ قبل، در تعداد جمله‌های آنست: در مسئلهٔ اول ۵ جمله و در مسئلهٔ دوم ۱ ۰۰۰ ۰۰۰ جمله وجود دارد. ولی همین وضع، استفاده از روش حل مسئلهٔ قبل را، برای این مسئله، در عمل غیر ممکن می‌سازد.

برای حل مسئله، مجموع زیر را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۴}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}}$$

ابتدا، نامساوی زیر را ثابت می‌کنیم:

$$۲\sqrt{n+۱} - ۲\sqrt{n} < \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n} - ۲\sqrt{n-۱} \qquad (۱)$$

در حقیقت، چون داریم:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}=\frac{۲(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})(\sqrt{n+۱}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{۲}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}$$

و

$$\sqrt{n+۱}>\sqrt{n}$$

خواهیم داشت:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۲}{۲\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n}}$$

به‌این ترتیب، قسمت اول نامساویهای (۱) ثابت شد؛ قسمت دوم آنرا هم بترتیب مشابهی می‌توان ثابت کرد.

اگر در نامساویهای (۱) فرض کنیم: $n=۲,۳,۴,\ldots,n$، بدست می‌آید:

$$۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}<\frac{۱}{\sqrt{۲}}<۲\sqrt{۲}-۲$$

$$۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}<\frac{۱}{\sqrt{۳}}<۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$$

$$۲\sqrt{۵}-۲\sqrt{۴}<\frac{۱}{\sqrt{۴}}<۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n}<\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}$$

که اگر این نامساویها را باهم جمع کنیم، می‌شود:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲}<\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲$$

اگر به طرفین این نامساویها یک واحد اضافه کنیم، بدست می‌آید:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲}+۱<۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۱ \qquad (۲)$$

چـون $\sqrt{۲} < ۳$ ۲ و $\sqrt{n} < \sqrt{n+۱}$ است، از نـامساویهـای (۲) نتیجه می‌شود:

$$۲\sqrt{n} - ۲ < ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n} - ۱ \quad (۳)$$

حالا، با استفاده از نامساویهای (۳)، بسادگی قسمت صحیح عدد زیـر را بدست می‌آوریم:

$$y = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}$$

برای این منظور، در نامساویهای (۳) فرض می‌کنیم $n = ۱۰۰۰۰۰۰$، بدست می‌آید:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰} - ۲ < ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}} < ۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰} - ۱$$

و یا

$$۱۹۹۸ < y < ۱۹۹۹ \Rightarrow [y] = ۱۹۹۸$$

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید:

$$x = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۳}{۴} \cdot \frac{۵}{۶} \cdots \frac{۹۹}{۱۰۰} < \frac{۱}{۱۰}$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$y = \frac{۲}{۳} \cdot \frac{۴}{۵} \cdot \frac{۶}{۷} \cdots \frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

از نامساویهای:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳}, \quad \frac{۳}{۴} < \frac{۴}{۵}, \quad \frac{۵}{۶} < \frac{۶}{۷}, \quad \ldots, \quad \frac{۹۹}{۱۰۰} < \frac{۱۰۰}{۱۰۱}$$

نتیجه می‌شود $x < y$ و بنابراین:

$$x^۲ < xy = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{۲}{۳} \cdot \frac{۳}{۴} \cdot \frac{۴}{۵} \cdot \frac{۵}{۶} \cdots \frac{۹۹}{۱۰۰} \cdot \frac{۱۰۰}{۱۰۱} = \frac{۱}{۱۰۱}$$

که اگر از طرفین نامساوی جذر بگیریم، بدست می‌آید:

$$x < \frac{۱}{\sqrt{۱۰۱}} < ۰,۱$$

تمرین:

۱. صحت نامساویهای زیر را ثابت کنید:

$$۲\sqrt{n+۱} - ۲\sqrt{m} < \frac{۱}{\sqrt{m}} + \frac{۱}{\sqrt{m+۱}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n} - ۲\sqrt{m-۱}$$

۲. ثابت کنید:

$$۱۸۰۰ < \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}} < ۱۸۰۰,۰۲$$

۳. مطلوبست محاسبهٔ $[۵۰z]$ بشرطی که داشته باشیم:

$$z = \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}$$

جواب: $[۵۰z] = ۹۰۰۰۰$

۴. با استفاده از روش استقراء ریاضی، این نامساوی را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۳}{۴} \cdot \frac{۵}{۶} \cdots \frac{۲n-۱}{۲n} < \frac{۱}{\sqrt{۳n+۱}}$$

۵. این نامساوی را ثابت کنید:

$$\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۳}{۴} \cdot \frac{۵}{۶} \cdots \frac{۹۹}{۱۰۰} < \frac{۱}{۱۲}$$

۲

حالا به مطالعهٔ بعضی نامساویهای مهم می‌پردازیم، که در حل بسیاری از مسائل می‌توان از آنها استفاده کرد.

از نامساوی واضح $(x_۱ - x_۲)^۲ \geqslant ۰$ نتیجه می‌شود:

$$x_۱^۲ + x_۲^۲ \geqslant ۲x_۱x_۲$$

ضمناً علامت تساوی تنها برای موقعی است که $x_۱ = x_۲$ باشد.

اگر $x_۱$ و $x_۲$ عددهای مثبتی باشند، با تقسیم طرفین نامساوی اخیر بر $x_۱x_۲$ بدست می‌آید:

$$\frac{x_۱}{x_۲} + \frac{x_۲}{x_۱} \geqslant ۲ \qquad (۴)$$

با استفاده از نامساوی (۴) بسادگی ثابت می‌شود که اگر حاصلضرب دو عدد مثبت مساوی واحد باشد، مجموع آنها کمتر از ۲ نیست.

در حقیقت اگر $xy = ۱$ باشد، $y = \frac{۱}{x}$ می‌شود و نامساوی $x + y \geqslant ۲$، یعنی $x + \frac{۱}{x} \geqslant ۲$ از نامساوی (۴)، با فرض $x_۱ = x$ و $x_۲ = ۱$ نتیجه می‌شود.

حالا این حکم را به صورت کلی‌تر قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱. **اگر حاصلضرب n عدد مثبت مساوی واحد باشد، مجموع آنها از n کمتر نیست.**

به عبارت دیگر از تساوی $x_1x_2x_3 \cdots x_n = 1$ نتیجه می‌شود:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \geqslant n$$

ضمناً نامساوی:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n > n$$

بشرطی برقرار است که بین عددهای:

$$x_1 , x_2 , x_3 ,\cdots , x_n$$

لااقل دو عدد مختلف وجود داشته باشد.

اثبات. این قضیه را با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم[1].

قبلاً صحت قضیهٔ ۱ را برای حالت دوعدد مثبت ثابت کردیم ($n = 2$).

فرض می‌کنیم که قضیه برای $n = k \geqslant 2$ صحیح باشد، یعنی‌نامساوی:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k \geqslant k$$

با شرط $x_1x_2x_3 \cdots x_k = 1$ بر قرار باشد، ثابت می‌کنیم که قضیه برای $n = k + 1$ هم صحیح است، یعنی نامساوی:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} \geqslant k + 1$$

هم با شرط:

$$x_1x_2x_3 \cdots x_kx_{k+1} = 1$$

برقرار است، ضمناً می‌دانیم:

$$x_1 > 0 ،x_2 > 0 ،\ldots ،x_k > 0 ،x_{k+1} > 0.$$

وقتی که داشته باشیم:

$$x_1x_2x_3 \cdots x_kx_{k+1} = 1$$

دو حالت پیش می‌آید:

۱) همهٔ عوامل x_1، x_2، x_3، $\ldots$، x_k، x_{k+1} باهم برابرند یعنی:

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_k = x_{k+1}$$

---

۱. برای آشنائی کامل با روش استقراء ریاضی به ترجمهٔ فارسی کتاب «استقراء ریاضی» مراجعه کنید.

۲) همهٔ این عوامل برابر نیستند، یعنی لااقل دو عامل مختلف بین آنها وجود دارد.

در حالت اول هریک از عوامل مساوی واحدند و بنابراین مجموع آنها مساوی $k+1$ می‌شود، یعنی:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} = k + 1$$

در حالت دوم بین عوامل ضرب $x_1 x_2 \cdots x_k x_{k+1}$ هم عدد بزرگتر از واحد و هم عدد کوچکتر ازواحد پیدا می‌شود (اگر همهٔ عوامل کوچکتر از واحد باشند، حاصلضرب آنها کوچکتر از واحد می‌شود و اگر همهٔ عوامل بزرگتر از واحد باشند، حاصلضرب آنها بزرگتر ازواحد می‌شود) .

مثلاً فرض می‌کنیم $x_1 < 1$ و $x_{k+1} > 1$. داریم:

$$(x_1 x_{k+1})\, x_2 x_3 \cdots x_k = 1$$

که با فرض $y_1 = x_1 x_{k+1}$ بدست می‌آید:

$$y_1 x_2 x_3 \cdots x_k = 1$$

چون در اینجا حاصلضرب k عدد مثبت مساوی واحد است، طبق فرض استقراء، مجموع آنها کمتر از k نیست، یعنی:

$$y_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k \geqslant k$$

ولی داریم:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} &= \\ = (y_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k) + x_{k+1} - y_1 + x_1 &\geqslant \\ \geqslant k + x_{k+1} - y_1 + x_1 = (k+1) + x_{k+1} - y_1 + x_1 - 1 & \end{aligned}$$

که با در نظر گرفتن رابطهٔ $y_1 = x_1 x_{k+1}$ بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} &\geqslant \\ \geqslant (k+1) + x_{k+1} - x_1 x_{k+1} + x_1 - 1 &= \\ = (k+1) + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) & \end{aligned}$$

چون $x_1 < 1$ و $x_{k+1} > 1$ فرض کردیم، بدست می‌آید:

$$(x_{k+1} - 1)(1 - x_1) > 0$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} &\geqslant (k+1) + \\ + (x_{k+1} - 1)(1 - x_1) &> k + 1 \end{aligned}$$

به این ترتیب قضیهٔ ۱ ثابت شد.

مسئلهٔ ۱. اگر x_1، x_2، x_3، . . .، x_n عددهای مثبتی باشند، ثابت کنید:

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n$$

ضمناً علامت تساوی تنها برای وقتی است که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n$$

حل. چون داریم:

$$\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdots\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}=1$$

نامساوی مطلوب از قضیهٔ ۱ نتیجه می‌شود. علامت تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_2}{x_3}=\cdots=\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n}{x_1}=1$$

یعنی وقتی که $x_1=x_2=x_3=\cdots=x_n$

مسئلهٔ ۲. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$$

حل. داریم:

$$\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

چون حاصلضرب دو جملهٔ سمت راست تساوی فوق برابر واحد است، مجموع آنها کمتر از ۲ نیست. علامت تساوی برای وقتی است که $x=0$ باشد.

مسئلهٔ ۳. اگر $a>1$ باشد، ثابت کنید[1]:

$$\lg a+\log_a 10\geqslant 2$$

---

۱. $\lg a$ یعنی $\log_{10}^{a}$

حل. چون داریم: $\log_a ۱۰ \cdot \lg a = ۱$، پس:

$$\lg a + \log_a ۱۰ = \lg a + \frac{۱}{\lg a} \geqslant ۲$$

مسئلهٔ ۴. این نامساوی را ثابت کنید:

$$\frac{x^۲}{۱ + x^۴} \leqslant \frac{۱}{۲}$$

حل. صورت و مخرج سمت چپ نامساوی را بر $x^۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{x^۲}{۱ + x^۴} = \frac{۱}{\frac{۱}{x^۲} + x^۲}$$

و چــون $\frac{۱}{x^۲} \cdot x^۲ = ۱$، پس $\frac{۱}{x^۲} + x^۲ \geqslant ۲$ و بنا براین:

$$\frac{۱}{\frac{۱}{x^۲} + x^۲} \leqslant \frac{۱}{۲}$$

تعریف. عدد $g = \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n}$ را واسطهٔ هندسی عـددهـای مثبت $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n و عدد $a = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n}$ را واسطهٔ عـددی این عددها می‌نامند.

قضیهٔ ۲. واسطهٔ هندسی عددهای مثبت از واسطهٔ عــددی آنها بزرگتر نیست.

اگر همهٔ عددهای مثبت $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n باهــم مساوی نباشند، واسطهٔ هندسی آنها کوچکتر از واسطهٔ عددی آنها خواهد بود.

اثبات. از تساوی $g = \sqrt[n]{x_۱ x_۲ \ldots x_n}$ نتیجه می‌شود:

$$۱ = \sqrt[n]{\frac{x_۱}{g} \cdot \frac{x_۲}{g} \cdot \frac{x_n}{g}} \Rightarrow \frac{x_۱}{g} \cdot \frac{x_۲}{g} \cdots \frac{x_n}{g} = ۱$$

چون حاصلضرب n عــدد مثبت مساوی واحـد است، طبق قضیهٔ ۱، مجموع آنها

کوچکتر از n نیست یعنی:

$$\frac{x_1}{g} + \frac{x_2}{g} + \cdots + \frac{x_n}{g} \geqslant n$$

طرفین نامساوی اخیر را در g ضرب و سپس بر n تقسیم می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$a = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant g$$

متذکر می‌شویم که علامت تساوی تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{x_1}{g} = \frac{x_2}{g} = \cdots = \frac{x_n}{g} = 1 \Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n = g$$

و اگر بین عددهای x_1، x_2، . . .، x_n لااقل دو عدد مختلف وجـود داشته باشد، داریم:

$$a > g$$

مسئلهٔ ۵. از بین همهٔ مکعب مستطیلهائی که مجموع سه یال دو به‌دو عمود بر آنها مقداری ثابت باشد، آن را پیدا کنید که حداکثر حجم را داشته باشد.

حل. $m = a + b + c$ را مجموع سه یـال و $V = abc$ را حجم مکعب مستطیل می‌گیریم، چون داریم:

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3} = \frac{m}{3}$$

در اینصورت $V \leqslant \frac{m^3}{27}$ خواهد بود. علامت تساوی تنها وقتی بر قرار است که $a = b = c = \frac{m}{3}$، یعنی وقتی که مکعب مستطیل بشکل مکعب درآید.

مسئلهٔ ۶. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad (n \geqslant 2) \qquad (5)$$

حل. با استفاده از قضیهٔ ۲ بدست می‌آید:

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{۱\cdot۲\cdot۳\cdots n}<\frac{۱+۲+۳+\cdots+n}{n}=$$

$$=\frac{(n+۱)\,n}{۲n}=\frac{n+۱}{۲}$$

اگر طرفین نامساوی اخیر را به توان n برسانیم، بلافاصله نامساوی (۵) بدست می‌آید.

تعریف. عدد $C_\alpha=\left(\frac{a_۱^\alpha+a_۲^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$ را واسطهٔ توانی عددهای $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n از مرتبهٔ α گویند. در حالتهای خاص، عدد:

$$C_۱=\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}$$

را واسطهٔ عددی عددهای $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n و عدد:

$$C_۲=\left(\frac{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲}{n}\right)^{\frac{۱}{۲}}$$

را واسطهٔ مربعی و عدد:

$$C_{-۱}=\left(\frac{a_۱^{-۱}+a_۲^{-۱}+\cdots+a_n^{-۱}}{n}\right)^{-۱}=\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}$$

را واسطهٔ توافقی عددهای $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n گویند.

مسئلهٔ ۷. اگر $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n عددهائی مثبت و $\alpha<۰<\beta$ باشد، ثابت کنید:

$$C_\alpha\leqslant g\leqslant C_\beta \tag{۶}$$

یعنی واسطهٔ توانی با نمای منفی از واسطهٔ هندسی بزرگتر نیست، و واسطهٔ توانی با نمای مثبت از واسطهٔ هندسی کوچکتر نیست.

حل. از این قضیه استفاده می‌کنیم که واسطهٔ هندسی عددهای مثبت از واسطهٔ عددی آنها بزرگتر نیست، داریم:

$$\sqrt[n]{a_1^\alpha a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha} \leqslant \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}$$

طرفین این نامساوی را به توان $\frac{1}{\alpha}$ می‌رسانیم، با توجه به اینکه $\frac{1}{\alpha} < 0$، بدست می‌آید:

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geqslant \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = C_\alpha$$

به این ترتیب قسمت اول نامساویهای (۶) ثابت شد؛ قسمت دوم را هم بهمین ترتیب می‌توان ثابت کرد.

از نامساویهای (۶) نتیجه می‌شود که در حالت خاص، واسطهٔ توافقی C_{-1} از واسطهٔ عددی C_1 بزرگتر نیست.

مسئلهٔ ۸. ثابت کنید که اگر a_1، a_2، ...، a_n عددهائی مثبت باشند، داریم:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$$

حل. چون داریم: $C_{-1} \leqslant g \leqslant C_1$، بنابراین:

$$C_{-1} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = C_1$$

و از این نامساوی نتیجه می‌شود:

$$n^2 \leqslant (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

مسئلهٔ ۹. ثابت کنید که برای هر دو عدد مثبت a و b $(a \neq b)$، نامساوی زیر صحیح است:

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a + nb}{n+1}$$

حل. داریم:

$$\sqrt[n+1]{ab^n}=\sqrt[n+1]{a\underbrace{bb\ldots b}_{n\text{ مرتبه}}}<\frac{a+\overbrace{b+b+\cdots+b}^{n\text{ مرتبه}}}{n+1}=$$

$$=\frac{a+nb}{n+1}$$

مسئلهٔ ۱۰. ثابت کنید با بزرگ شدن عدد n، مقادیر:

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ و } z_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

بزرگ می‌شوند، یعنی:

$$x_n<x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ و } z_n<z_{n+1}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

حل. اگر در مسئلهٔ قبل فرض کنیم: $a=1$ و $b=1+\frac{1}{n}$، بدست می‌آید:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}<\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$$

طرفین نامساوی اخیر را به توان $n+1$ می‌رسانیم، خواهیم داشت :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\Rightarrow x_n<x_{n+1}$$

نامساوی دوم هم بهمین طریق ثابت می‌شود.

مسئلهٔ ۱۱. ثابت کنید که:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

با بزرگ شدن n، کوچک می‌شود یعنی:

$$y_n > y_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}$$

حل. داریم:

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}} = \frac{1}{z_{n+1}}$$

(مسئلهٔ ۱۰ را برای علامت z_{n+1} ببینید). چون z_n با بزرگ شدن n، صعودی است، بنابراین y_n نزولی می‌شود.

در مسئله‌های ۱۰ و ۱۱ ثابت کردیم:

$$x_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 = 2 < x_2 = \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= 2{,}25 < x_3 < x_4 < \cdots < x_n < \cdots,$$

$$y_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = 4 > y_2\left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 =$$
$$= 3{,}375 > y_3 > y_4 > \cdots > y_n > \cdots$$

از طرف دیگر داریم:

$$2 = x_1 < x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = y_n < y_1 = 4$$

به این ترتیب مقدار متغیر x_n در دو شرط زیر صدق می‌کند:

۱) x_n بطور یکنوا (مونوتون) همراه با بزرگ شدن n صعودی است.

۲) x_n مقداری است محدود: $2 < x_n < 4$.

واضح است که هر کمیت یکنوا، صعودی و محدود دارای حد است، بنابراین کمیت x_n هم حدی دارد. این حد را با حرف e نشان می‌دهند، یعنی:

$$e = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n = \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

از آنجا که مقدار x_n به حد خود بطور صعودی نزدیک می‌شود، بنابراین:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) < e \qquad (۷)$$

بسادگی می‌توان ثابت کرد $e < ۳$. در حقیقت اگر n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد داریم:

$$x_n < y_n < y_5 = \left(1 + \frac{1}{5}\right)^6 = 2{,}985984$$

و بنابراین

$$e = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n \leqslant 2{,}985984 < 3$$

عدد e، مثل عدد π، اهمیت زیادی در ریاضیات دارد. مثلاً این عدد به عنوان مبنای لگاریتم، در دستگاه لگاریتمی بنام لگاریتم طبیعی بکار می‌رود. لگاریتم عدد N را در مبنای e به صورت $ln\ N$ نشان می‌دهند (بخوانید: لگاریتم طبیعی N).

واضح است که عددهای e و π گنگ هستند[1]. هریک از این عددها را تا ۸۰۸ رقم بعد از اعشار حساب کرده‌اند، ضمناً داریم:

$$e = 2{,}71828182845 90\ldots$$

حالا ثابت می‌کنیم که حد کمیت متغیر y_n هم مساوی e است. در حقیقت داریم:

$$\text{حد}\, y_n = \text{حد} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \text{حد} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] =$$
$$= e \cdot 1 = e$$

و چون y_n بطور نزولی به عدد e نزدیک می‌شود (مسئلهٔ ۱۱)، در اینصورت

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > e \qquad (۸)$$

مسئلهٔ ۱۲. این نامساوی را ثابت کنید

---

۱. به‌ترجمهٔ فارسی کتاب «لگاریتم» مراجعه کنید.

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \tag{۹}$$

حل . نامساوی (۹) را با روش استقراء ریاضی ثابت می‌کنیم . صحت نامساوی به ازای $n = ۱$ بسادگی بدست می‌آید. در حقیقت داریم :

$$۱! = ۱ > \left(\frac{۱}{e}\right)^{۱}$$

فرض می‌کنیم که نامساوی (۹) به ازای $n = k$ صحیح باشد، یعنی داشته باشیم:

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}$$

طرفین نامساوی اخیر را در $k + ۱$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$(k+۱)\,k! = (k+۱)! > \left(\frac{k}{e}\right)^{k}(k+۱) =$$

$$= \left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱} \cdot \frac{e}{\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k}}$$

چون طبق نامساوی (۷) داریم :

$$\left(۱+\frac{۱}{k}\right)^{k} < e$$

بنابراین

$$(k+۱)! > \left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱} \cdot \frac{e}{e} = \left(\frac{k+۱}{e}\right)^{k+۱}$$

یعنی نامساوی (۹) برای $n = k + ۱$ هم صحیح است . بنابراین نامساوی (۹) برای هر مقدار n صحیح خواهد بود. چون $e < ۳$، از نامساوی (۹) نتیجه می‌شود:

$$n! > \left(\frac{n}{۳}\right)^{n}$$

از نامساوی اخیر با قراردادن $n = ۳۰۰$، بسادگی بدست می‌آید :

$$۳۰۰! > ۱۰۰^{۳۰۰}$$

کاملاً شبیه نامساوی مسئلهٔ ۱۲ می‌توان نامساوی زیررا هم ثابت کرد :

$$n! < e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$$

مسئلهٔ ۱۳. اگر a_1، a_2، . . .، a_n عددهائی مثبت باشند، ثابت کنید:

$$n\,a_1\,a_2\cdots a_n \leqslant a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \qquad (10)$$

حل . چون واسطهٔ هندسی بزرگتر از واسطهٔ عددی نیست، داریم:

$$a_1\,a_2\cdots a_n = \sqrt[n]{a_1^n\,a_2^n\cdots a_n^n} \leqslant \frac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n}$$

با ضرب طرفین این نامساوی در n، به همان نامساوی (۱۰) می‌رسیم.

از نامساوی (۱۰) نتیجه می‌شود :

$$2a_1\,a_2 \leqslant a_1^2 + a_2^2\ ,\ 3a_1\,a_2\,a_3 \leqslant a_1^3 + a_2^3 + a_3^3\ ,$$
$$4a_1\,a_2\,a_3\,a_4 \leqslant a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + a_4^4\ ,\ \cdots$$

یعنی دو برابر حاصلضرب دو عدد مثبت از مجموع مربعهای آنها بزرگتر نیست، سه برابر حاصلضرب سه عدد مثبت ازمجموع مکعبهای آنها بزرگتر نیست و غیره.

۳

برای حل مسائل بند قبل، از این مطلب استفاده کردیم که واسطهٔ هندسی عددهای مثبت از واسطهٔ عددی آنها بزرگتر نیست، یعنی:

$$\sqrt[n]{x_۱ x_۲ \cdots x_n} \leqslant \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n}$$

ضمناً علامت تساوی تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_۱ = x_۲ = \cdots = x_n$$

در قضیهٔ زیر، با استفاده از همین نامساوی، نامساوی مهم دیگری را ثابت می‌کنیم که بطوری که خواهیم دید می‌توان از آن برای حل بسیاری ازمسائل استفاده کرد.

قضیهٔ ۳. اگر $x \geqslant -۱$ و $۰ < \alpha < ۱$ باشد، داریم:

$$(۱ + x)^\alpha \leqslant ۱ + \alpha x \qquad (۱۱)$$

و اگر $\alpha < ۰$ یا $\alpha > ۱$ باشد، داریم:

$$(۱ + x)^\alpha \geqslant ۱ + \alpha x \qquad (۱۲)$$

علامت تساوی در (۱۱) و (۱۲) وقتی برقرار است که $x = ۰$ باشد.

اثبات. فرض می‌کنیم که α عددی گویا و ضمناً $۰ < \alpha < ۱$ باشد.

$\alpha = \dfrac{m}{n}$ می‌گیریم که در آن m و n عددهای صحیح و مثبت و $1 \leqslant m < n$ باشد. چون طبق شرط $0 \leqslant 1 + x$ است، داریم :

$$(1+x)^{\alpha} = (1+x)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(1+x)^m \cdot 1^{n-m}} =$$

$$= \sqrt[n]{\underbrace{(1+x)\ (1+x)\ \cdots (1+x)}_{\text{مرتبه } m} \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1}_{\text{مرتبه } n-m}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1+x)+(1+x)+\cdots+(1+x)+1+1+\cdots+1}{n} =$$

$$= \frac{m(1+x)+n-m}{n} = \frac{n+mx}{n} =$$

$$= 1 + \frac{m}{n}x = 1 + \alpha x$$

علامت تساوی وقتی برقرار است که همهٔ عوامل واقع در زیر رادیکال با هم برابر باشند، یعنی وقتی که $1 + x = 1$ یا $x = 0$ باشد. در حالتی که $x \neq 0$ است داریم :

$$(1+x)^{\alpha} < 1 + \alpha x$$

به‌این‌ترتیب قسمت اول قضیه را برای موردی‌که α عددی‌گویا باشد ثابت‌کردیم.

حالا فرض می‌کنیم α عددی گنگ باشد و ضمناً $0 < \alpha < 1$. دنبالهٔ عددهای گویای :

$$r_1 , r_2 , r_3 , \cdots , r_n , \cdots$$

را درنظر می‌گیریم که حدی مساوی α داشته باشد، ضمناً داریم : $0 < r_n < 1$. از نامساوی

$$(1+x)^{r_n} \leqslant 1 + r_n x \qquad (x \geqslant -1 , n = 1, 2, 3, \cdots)$$

که در مورد نمای گویا ثابت کردیم، نتیجه می‌شود :

$$(1+x)^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} (1+x)^{r_n} \leqslant \lim_{r_n \to \alpha} (1 + r_n x) =$$

$$= 1 + \alpha x$$

بنابراین نامساوی (۱۱) برای مقادیر گنگ α هم صحیح است. این مطلب باقی می‌ماند که برای مقادیر گنگ α و $x \neq ۰$ و $۰ < \alpha < ۱$ ثابت کنیم:

$$(۱ + x)^{\alpha} < ۱ + \alpha x$$

یعنی وقتی $x \neq ۰$ باشد، در نامساوی (۱۱) علامت تساوی نمی‌تواند وجود داشته باشد. برای این منظور عدد گویای r را بنحوی انتخاب می‌کنیم که $۰ < \alpha < r < ۱$ باشد. واضح است که داریم:

$$(۱ + x)^{\alpha} = \left[(۱ + x)^{\frac{\alpha}{r}}\right]^{r}$$

چون $۰ < \frac{\alpha}{r} < ۱$ است، باید داشته باشیم:

$$(۱ + x)^{\frac{\alpha}{r}} \leqslant ۱ + \frac{\alpha}{r} x$$

و بنابراین

$$(۱ + x)^{\alpha} \leqslant \left(۱ + \frac{\alpha}{r} x\right)^{r}$$

و وقتی که $x \neq ۰$ باشد داریم:

$$\left(۱ + \frac{\alpha}{r} x\right)^{r} < ۱ + r\frac{\alpha}{r} x = ۱ + \alpha x \Rightarrow (۱ + x)^{\alpha} < ۱ + \alpha x$$

به این ترتیب قسمت اول قضیه بطور کامل ثابت شد.

حالا به اثبات قسمت دوم قضیه می‌پردازیم.

اگر $۱ + \alpha x < ۰$ باشد، نامساوی (۱۲) واضح است، زیرا سمت چپ آن غیر منفی و سمت راست آن منفی است.

اگر $۱ + \alpha x \geqslant ۰$ باشد، $\alpha x \geqslant -۱$ می‌شود و دوحالت را بطور جداگانه در نظر می‌گیریم.

وقتی $\alpha > ۱$ باشد، با توجه به قسمت اول قضیه داریم:

$$(۱ + \alpha x)^{\frac{۱}{\alpha}} \leqslant ۱ + \frac{۱}{\alpha} \alpha x = ۱ + x$$

ضمناً علامت تساوی تنها برای وقتی است که $x = ۰$ باشد. طرفین نامساوی

اخیر را به توان α می‌رسانیم، بدست می‌آید:

$$۱ + \alpha x \leqslant (۱ + x)^{\alpha}$$

حالا $\alpha < ۰$ می‌گیریم. اگر $۱ + \alpha x < ۰$ باشد، نامساوی (۱۲) واضح‌است. اگر $۱ + \alpha x \geqslant ۰$ باشد، عدد صحیح ومثبت n را طوری‌انتخاب می‌کنیم که نامساوی $-\frac{\alpha}{n} < ۱$ برقرار باشد. با توجه به قسمت اول قضیه بدست می‌آید:

$$(۱ + x)^{-\frac{\alpha}{n}} \leqslant ۱ - \frac{\alpha}{n} x ,$$

$$(۱ + x)^{\frac{\alpha}{n}} \geqslant \frac{۱}{۱ - \frac{\alpha}{n} x} \geqslant ۱ + \frac{\alpha}{n} x$$

(نامساوی اخیر صحیح است زیرا داریم: $۱ - \frac{\alpha^۲}{n^۲} x^۲ \leqslant ۱$). طرفین نامساوی اخیر را به توان n می‌رسانیم، بدست می‌آید:

$$(۱ + x)^{\alpha} \geqslant \left(۱ + \frac{\alpha}{n} x\right)^{n} \geqslant ۱ + n \frac{\alpha}{n} x = ۱ + \alpha x$$

متذکر می‌شویم که علامت تساوی هم تنها برای حالت $x = ۰$ برقرار است. قضیه بطور کامل ثابت شد.

قضیهٔ ۴. اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n عددهائی مثبت و $\alpha < \beta$ باشد، $C_{\alpha} \leqslant C_{\beta}$ خواهد بود و ضمناً تنها وقتی $C_{\alpha} = C_{\beta}$ است که داشته باشیم:

$$a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$$

اثبات. قضیهٔ ۴ را قبلا برای حالتی که α و β علامتهای مختلف داشته باشند، ثابت کردیم (مسئلهٔ ۷ بند قبل و تعریف قبل از آن را ببینید). قضیه را باید برای حالتی ثابت کنیم که α و β هم‌علامت‌اند.

$۰ < \alpha < \beta$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

$$k = C_{\alpha} = \left(\frac{a_۱^{\alpha} + a_۲^{\alpha} + \cdots + a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{۱}{\alpha}}$$

با تقسیم C_β بر k بدست می‌آید:

$$\frac{C_\beta}{k}=\frac{C_\beta}{C_\alpha}=\left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\beta+\left(\frac{a_2}{k}\right)^\beta+\cdots+\left(\frac{a_n}{k}\right)^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

حالا فرض می‌کنیم:

$$d_1=\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha,\ d_2=\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha,\ \cdots,\ d_n=\left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha$$

بدست می‌آید:

$$\frac{C_\beta}{k}=\left(\frac{d_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+d_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+\cdots+d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} \tag{۱۳}$$

و چون داریم:

$$\left(\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\left(\frac{\left(\frac{a_1}{k}\right)^\alpha+\left(\frac{a_2}{k}\right)^\alpha+\cdots+\left(\frac{a_n}{k}\right)^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{k}\left(\frac{a_1^\alpha+a_2^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\frac{1}{k}C_\alpha=\frac{1}{C_\alpha}C_\alpha=1$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{d_1+d_2+\cdots+d_n}{n}=1\Rightarrow d_1+d_2+\cdots+d_n=n$$

فرض می‌کنیم:

$$d_1=1+x_1,\ d_2=1+x_2,\cdots,\ d_n=1+x_n$$

از تساوی $d_1+d_2+\cdots+d_n=n$ نتیجه می‌شود:

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$$

با توجه به قضیهٔ ۳ (متذکر می‌شویم که $\frac{\beta}{\alpha}>1$ است) داریم:

$$\begin{cases} d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_1)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_1 , \\ d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_2)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 , \quad (*) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} = (1 + x_n)^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant 1 + \frac{\beta}{\alpha} x_n \end{cases}$$

از مجموع این نامساویها بدست می‌آید:

$$d_1^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_2^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}} \geqslant n + + \frac{\beta}{\alpha}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = n \qquad (14)$$

از (۱۳) و (۱۴) نتیجه می‌شود:

$$\frac{C_\beta}{k} \geqslant \left(\frac{n}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1 \Rightarrow C_\beta \geqslant k = C_\alpha$$

معلوم است که تساوی $C_\beta = k = C_\alpha$ تنها وقتی برقرار است که در (*) همه جا علامت تساوی برقرار باشد، یعنی وقتی که داشته باشیم $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ (قضیهٔ ۳). در اینحالت داریم:

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_n = 1$$

و بنابراین

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = k$$

در حالتی که بین عددهای a_1، a_2، ...، a_n لااقل دو عدد مختلف وجود داشته باشد، داریم:

$$C_\beta > C_\alpha$$

به این ترتیب قضیهٔ ۴ برای حالتی که $0 < \alpha < \beta$ باشد ثابت شد.

اگر $\alpha < \beta < 0$ باشد داریم:

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$$

اگر مثل حالت قبل استدلال کنیم، در (*) و (۱۴) علامت نامساویها در جهت

عکس خواهد بود. ولی چون $\beta < ۰$ است، از نامساوی:

$$\frac{d_۱^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_۲^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n} \leqslant ۱$$

نتیجه می‌شود که:

$$\frac{C_\beta}{k} = \left(\frac{d_۱^{\frac{\beta}{\alpha}} + d_۲^{\frac{\beta}{\alpha}} + \cdots + d_n^{\frac{\beta}{\alpha}}}{n}\right)^{\frac{۱}{\beta}} \geqslant ۱^{\frac{۱}{\beta}} = ۱$$

یعنی

$$C_\beta \geqslant k = C_\alpha$$

و قضیهٔ ۴ بطور کامل ثابت شد.

از این به بعد واسطهٔ هندسی را واسطهٔ توانی از مرتبهٔ صفر می‌نامیم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$g = C_۰$$

متذکر می‌شویم که قضیهٔ ۴ در اینحالت هم بقوت خود باقی است، زیرا (مسئلهٔ ۷ بند ۲) در حالت $\alpha < ۰$ داریم $C_\alpha \leqslant g = C_۰$ و در حالت $\beta > ۰$ داریم:

$$C_\beta \geqslant g = C_۰$$

از قضیه‌ای که ثابت کردیم نتیجه می‌شود که در حالت خاص:

$$C_{-۱} \leqslant C_۰ \leqslant C_۱ \leqslant C_۲$$

یعنی واسطهٔ توافقی از واسطهٔ هندسی تجاوز نمی‌کند، واسطهٔ هندسی از واسطهٔ عددی تجاوز نمی‌کند و واسطهٔ عددی از واسطهٔ مربعی تجاوز نمی‌کند (برای عددهای مثبت). مثلاً اگر $a_۱ = ۱$ ، $a_۲ = ۲$ و $a_۳ = ۴$ باشد، داریم:

$$C_{-۱} = \left(\frac{a_۱^{-۱} + a_۲^{-۱} + a_۳^{-۱}}{۳}\right)^{-۱} =$$

$$= \frac{۳}{۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴}} = \frac{۱۲}{۷} = ۱,۷\ldots ,$$

$$C_۰ = \sqrt[۳]{a_۱ a_۲ a_۳} = \sqrt[۳]{۱\cdot۲\cdot۴} = ۲ ,$$

$$C_1 = \frac{1+2+4}{3} = \frac{7}{3} = 2{,}3\cdots,$$

$$C_2 = \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1+4+16}{3}} = \sqrt{7} = 2{,}6\cdots$$

و بنابراین

$$C_{-1} = 1{,}7\cdots < 2 = C_0 < 2{,}3\cdots =$$
$$= C_1 < 2{,}6\cdots = C_2$$

مسئلهٔ ۱. اگر $x+y+z=6$ باشد، ثابت کنید :

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant 12$$

حل . چون واسطهٔ عددی از واسطهٔ مربعی تجاوز نمی‌کند داریم :

$$\frac{x+y+z}{3} \leqslant \left(\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}$$

و در مسئلهٔ ما

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{6^2}{3} = 12$$

علامت تساوی تنها برای وقتی است که داشته باشیم :

$$x=y=z=2$$

مسئلهٔ ۲. ثابت کنید که اگر x و y و z عددهائی مثبت و :

$$x^2+y^2+z^2 = 8$$

باشد، داریم :

$$x^3+y^3+z^3 \geqslant 16\sqrt{\frac{2}{3}}$$

حل . چون $C_2 \leqslant C_3$ است داریم :

$$\left(\frac{x^۲+y^۲+z^۲}{۳}\right)^{\frac{۱}{۲}} \leqslant \left(\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{۳}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

و در مسئلهٔ ما با توجه به فرض

$$\left(\frac{x^۳+y^۳+z^۳}{۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} \geqslant \sqrt{\frac{۸}{۳}}$$

و از آنجا

$$x^۳+y^۳+z^۳ \geqslant ۳\cdot\frac{۸}{۳}\sqrt{\frac{۸}{۳}} = ۱۶\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

مسئلهٔ ۳. ثابت کنید که برای عددهای مثبت $a_۱$ ، $a_۲$ ، $a_۳$ ، ... ، a_n نامساویهای زیر صحیح است:

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)^\alpha \leqslant n^{\alpha-۱}(a_۱^\alpha+a_۲^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)\quad,\quad \alpha\geqslant ۱ \tag{۱۵}$$

$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)^\alpha \geqslant n^{\alpha-۱}(a_۱^\alpha+a_۲^\alpha+\cdots+a_n^\alpha)\,,\ ۰<\alpha\leqslant ۱ \tag{۱۶}$$

حل. اگر $۱<\alpha$ باشد داریم:

$$C_\alpha = \left(\frac{a_۱^\alpha+a_۲^\alpha+\cdots+a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{۱}{\alpha}} \geqslant \frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n} = C_۱$$

از این نامساوی بسادگی نامساوی (۱۵) نتیجه می‌شود. بهمین ترتیب می‌توان نامساوی (۱۶) را هم ثابت کرد. در حالت خاص از نامساویهای (۱۵) و (۱۶) نتیجه می‌شود:

$$(x+y)^\alpha \leqslant ۲^{\alpha-۱}(x^\alpha+y^\alpha),\ \alpha\geqslant ۱\ ,\ x>۰\ ,\ y>۰$$
$$(x+y)^\alpha \geqslant ۲^{\alpha-۱}(x^\alpha+y^\alpha),\ ۰<\alpha<۱,\ x>۰,\ y>۰$$

مسئلهٔ ۴. اگر داشته باشیم:

$$x^۳+y^۳+z^۳=۸۱\ ,\ x>۰\ ,\ y>۰\ ,\ z>۰$$

ثابت کنید :

$$z + y + z \leqslant ۹$$

حل. چون داریم (نامساوی ۱۵) :

$$(x + y + z)^{۳} \leqslant ۳^{۲} (x^{۳} + y^{۳} + z^{۳}) = ۹ \cdot ۸۱ = ۷۲۹$$

بنابراین نتیجه می‌شود :

$$x + y + z \leqslant \sqrt[۳]{۷۲۹} = ۹$$

مسئلهٔ ۵. با شرط ۱ − < α < ۰ ثابت کنید :

$$\frac{(n + ۱)^{\alpha + ۱} - n^{\alpha+۱}}{\alpha + ۱} < n^{\alpha} < \frac{n^{\alpha+۱} - (n - ۱)^{\alpha+۱}}{\alpha + ۱} \quad (۱۷)$$

حل. چون داریم :

$$۰ < \alpha + ۱ < ۱$$

با توجه به نامساوی (۱۱) بدست می‌آید :

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{\alpha+۱} < ۱ + \frac{\alpha + ۱}{n}$$

$$\left(۱ - \frac{۱}{n}\right)^{\alpha+۱} < ۱ - \frac{\alpha + ۱}{n}$$

با ضرب این نامساویها در $n^{\alpha+۱}$ بدست می‌آید :

$$(n + ۱)^{\alpha+۱} < n^{\alpha+۱} + (\alpha + ۱)\, n^{\alpha}$$

$$(n - ۱)^{\alpha+۱} < n^{\alpha+۱} - (\alpha + ۱)\, n^{\alpha}$$

و از این نامساویها بسادگی نامساویهای (۱۷) نتیجه می‌شود.

مسئلهٔ ۶. اگر ۱ − < α < ۰ باشد ثابت کنید :

$$\frac{(n + ۱)^{\alpha+۱} - m^{\alpha+۱}}{\alpha + ۱} <$$

$$< m^{\alpha} + (m + ۱)^{\alpha} + \cdots + n^{\alpha} <$$

$$< \frac{n^{\alpha+۱} - (m - ۱)^{\alpha+۱}}{\alpha + ۱} \quad (۱۸)$$

حل · اگر در نامساویهای (۱۷) بجای n بترتیب :

$$m\,,\, m+1\,,\, \cdots,\, n$$

قرار دهیم، بدست می‌آید :

$$\frac{(m+1)^{1+\alpha}-m^{1+\alpha}}{1+\alpha}<m^{\alpha}<\frac{m^{1+\alpha}-(m-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

$$\frac{(m+2)^{1+\alpha}-(m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}<(m+1)^{\alpha}<$$

$$<\frac{(m+1)^{1+\alpha}-m^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

$$\frac{(m+3)^{1+\alpha}-(m+2)^{1+\alpha}}{1+\alpha}<(m+2)^{\alpha}<$$

$$<\frac{(m+2)^{1+\alpha}-(m+1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

. . . .

$$\frac{(n+1)^{1+\alpha}-n^{1+\alpha}}{1+\alpha}<n^{\alpha}<\frac{n^{1+\alpha}-(n-1)^{1+\alpha}}{1+\alpha}$$

از مجموع این نامساویها، نامساویهای (۱۸) بدست می‌آید.

مسئلهٔ ۷. قسمت صحیح عدد زیر را پیدا کنید :

$$x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{1}{\sqrt[3]{6}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{1000000}}$$

حل · در نامساویهای (۱۸) فرض می‌کنیم :

$$\alpha=-\frac{1}{3}\,,\, n=1000000\,,\, m=4$$

بدست می‌آید :

$$\frac{1000001^{\frac{2}{3}}-4^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}<x<\frac{1000000^{\frac{2}{3}}-3^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}$$

یعنی :

$$\frac{۳}{۲}\cdot ۱۰۰۰۰۰۱^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۳}{۲}\cdot ۴^{\frac{۲}{۳}}<x<\frac{۳}{۲}\cdot ۱۰۰۰۰۰۰^{\frac{۲}{۳}}-\frac{۳}{۲}\cdot ۳^{\frac{۲}{۳}}$$

از آنجا که داریم :

$$\frac{۳}{۲}\cdot ۱۰۰۰۰۰۱^{\frac{۲}{۳}}>\frac{۳}{۲}\cdot ۱۰۰۰۰۰۰^{\frac{۲}{۳}}=$$

$$=\frac{۳}{۲}\cdot ۱۰۰۰۰=۱۵۰۰۰\ ,$$

$$\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۱۶}=\sqrt[۳]{۵۴}<۴ \quad \text{و} \quad \frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۹}>\frac{۳}{۲}\sqrt[۳]{۸}=۳$$

خواهیم داشت :

$$۱۵۰۰۰-۴<x<۱۵۰۰۰-۳\Rightarrow ۱۴۹۹۶<x<۱۴۹۹۷$$

و از نامساویهای اخیر نتیجه می‌شود :

$$[x]=۱۴۹۹۶$$

۴

در این بند از کاربرد نامساویهائی که ثابت کرده‌ایم، در مسائل مربوط به جستجوی ماکزیمم و می‌نیمم گفتگو می‌کنیم.

مسئلهٔ ۱. اگر $a > 0$، $x \geqslant 0$ و $\alpha > 1$ باشد، حداقل تابع $x^\alpha - ax$ را پیدا کنید.

حل. در حالت $\alpha = 2$ مسئله بسادگی حل می‌شود. در حقیقت چون داریم:

$$x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$$

حداقل مقدار تابع به‌ازای $x = \frac{a}{2} > 0$ بدست می‌آید و ضمناً مقدار این حداقل مساوی $-\frac{a^2}{4}$ است.

در حالت دلخواه $\alpha > 1$، مسئله به کمک نامساوی (۱۲)، که در قضیهٔ ۳ ثابت شد، حل می‌شود. چون $\alpha > 1$ است داریم:

$$(۱ + z)^\alpha \geqslant ۱ + \alpha z \ , \ z \geqslant -۱$$

ضمناً حالت تساوی تنها به‌ازای $z = ۰$ بدست می‌آید. $y = z + ۱$ می‌گیریم، بدست می‌آید :

$$y^\alpha \geqslant ۱ + \alpha(y - ۱) \ , \ y^\alpha - \alpha y \geqslant ۱ - \alpha \ , \ y \geqslant ۰$$

تساوی تنها به ازای $y = ۱$ برقرار است. طرفین نـامساوی اخـیر را در C^α ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید :

$$(C y)^\alpha - \alpha C^{\alpha - ۱}(C y) \geqslant (۱ - \alpha) C^\alpha \ , \ y \geqslant ۰$$

و اگر فرض کنیم :

$$C = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha - ۱}} \text{، } \alpha C^{\alpha - ۱} = a \text{، } x = C y$$

بدست می‌آید :

$$x^\alpha - ax \geqslant (۱ - \alpha) C^\alpha = (۱ - \alpha) \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - ۱}}$$

و ضمناً علامت تساوی تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$x = c = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha - ۱}}$$

به این ترتیب تابع

$$x^\alpha - ax, \alpha > ۱, a > ۰, x \geqslant ۰$$

در نقطهٔ $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha - ۱}}$ به حداقل خود می‌رسد و این حـداقل بـرابر است بـا $(۱ - \alpha) \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - ۱}}$. در حالت خاص $\alpha = ۲$، حداقل تابع $x^۲ - ax$ درنقطهٔ $x = \left(\frac{a}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲ - ۱}} = \frac{a}{۲}$ بدست می‌آید که برابراست با $-\frac{a^۲}{۴} = (۱ - ۲)\left(\frac{a}{۲}\right)^{\frac{۲}{۲ - ۱}}$

و این همان نتیجه‌ای است که قبلاً از راه دیگری بدست آورده بـودیم. تـابع

$۲۷x - x^۳$ در نقطهٔ ۳ $= \left(\frac{۲۷}{۳}\right)^{\frac{۱}{۳-۱}} = x$ بــه حــداقــل مــقــدار خــود

$-۵۴ = \left(\frac{۲۷}{۳}\right)^{\frac{۳}{۳-۱}} (۳ - ۱)$ می‌رسد.

تبصره. متذکر می‌شویم که تابع:

$$ax - x^{\alpha} = -(x^{\alpha} - ax)$$

با شرایط $\alpha > ۱,\ a > ۰,\ x \geqslant ۰$ در نقطهٔ $x = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$ به حداکثر مقدار

خود که مساوی $\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}} (\alpha - ۱)$ است می‌رسد.

مسئلهٔ ۲. از تیر چوبی گردی، تخته چوبی بشکل مکعب مستطیل با حداکثر مقاومت بیرون بیاورید[۱].

حل. $AB = x$ را عرض و $BC = y$ را طول و $AC = d$ را قطر مقطع تیر چوبی می‌گیریم (شکل ۱). اگر مقاومت تیر را P فرض کنیم، بدست می‌آید:

$$P = kxy^۲ = kx(d^۲ - x^۲) = k(d^۲x - x^۳)$$

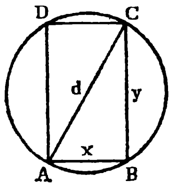
تابع $d^۲x - x^۳$ وقتی حداکثر می‌شود که داشته باشیم:

$$x = \left(\frac{d^۲}{۳}\right)^{\frac{۱}{۳-۱}} = \frac{d}{\sqrt{۳}},\ y^۲ = d^۲ - x^۲ = \frac{۲}{۳}d^۲,$$

$$y = \frac{d}{\sqrt{۳}}\sqrt{۲} = x\sqrt{۲} \approx ۱,۴x = \frac{۷}{۵}x\ .$$

---

۱. مقاومت تیر مکعب مستطیل شکل، با حاصلضرب طول در عرض آن نسبت مستقیم دارد.



شکل ۱

به این ترتیب، تیر چوبی وقتی حداکثر مقاومت را دارد که نسبت طول به عرض مقطع آن مساوی $\frac{۷}{۵}$ (و یا دقیق‌تر مساوی $\sqrt{۲}$) باشد.

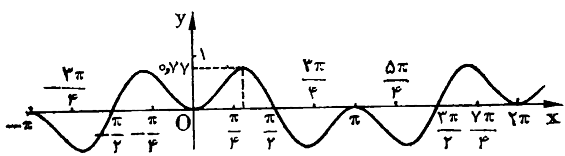
مسئلهٔ ۳. حداکثر مقدار تابع زیر را بدست‌آورید:

$$y = \sin x \sin ۲x$$

حل. داریم:

$$\sin x \sin ۲x = ۲\cos x \sin^{۲} x = ۲\cos x\,(۱ - \cos^{۲} x) = \\ = ۲(z - z^{۳}),$$

که در آن $z = \cos x$ و بنابراین $-۱ \leqslant z \leqslant ۱$. وقتی که $-۱ \leqslant z < ۰$ باشد، تابع $z - z^{۳} = z\,(۱ - z^{۲})$ منفی و وقتی $۰ < z \leqslant ۱$ باشد، این تابع مثبت می‌شود. بنابراین حداکثر مقدار تابع در فاصلهٔ $۰ < z \leqslant ۱$ بدست می‌آید.



شکل ۲

در مسئلهٔ ۱ دیدیم که حداکثر تابع $z - z^{۳}$، $z \geqslant ۰$ در نقطهٔ:

$$z = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{\frac{۱}{۳-۱}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

بدست می‌آید و در این نقطه داریم:

$$\sin x \sin ۲x = ۲z\,(۱ - z^{۲}) = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\left(۱ - \frac{۱}{۳}\right) = \frac{۴}{۳\sqrt{۳}}$$

به این ترتیب تابع $y = \sin x \sin ۲x$ در نقطه‌هائی که:

$$z = \cos x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

باشد به حداکثر مقدار خود می‌رسد که مساوی $\frac{۴}{۳\sqrt{۳}}$ است. منحنی تابع:

$$y = \sin x \sin ۲x$$

در شکل ۲ رسم شده است.

مسئلهٔ ۴. تابع:

$$y = \cos x \cos ۲x$$

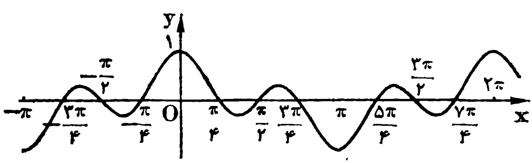
از ۱ تجاوز نمی‌کند، زیرا هریک از عوامل $\cos x$ و $\cos ۲x$ از واحد تجاوز نمی‌کنند. ضمناً در نقطه‌هائی که x مساوی ۰، $\pm ۲\pi$، $\pm ۴\pi$، ... باشد داریم:

$$\cos x \cos ۲x = ۱$$

به این ترتیب تابع $y = \cos x \cos ۲x$ در نقطه‌های $x = ۲k\pi$ به حداکثر مقدار خود، یعنی واحد می‌رسد. منحنی تابع:

$$y = \cos x \cos ۲x$$

در شکل ۳ داده شده است.



شکل ۳

مسئلهٔ ۵. حداقل تابع زیر را پیدا کنید:

$$x^{\alpha} + ax$$

که در آن $a > ۰$، $\alpha < ۰$ و $x > ۰$.

حل. چون $\alpha < ۰$ است، طبق نامساوی (۱۲) داریم:

$$(۱ + z)^\alpha \geqslant ۱ + \alpha z,$$

ضمناً علامت تساوی تنها به ازای $z = ۰$ برقرار است. با فرض :

$$۱ + z = y \Rightarrow z = y - ۱$$

بدست می‌آید :

$$y^\alpha \geqslant ۱ + \alpha (y - ۱), \; y \geqslant ۰$$

ضمناً علامت تساوی وقتی برقـرار است کــه $y = ۱$ باشد. از نـامساوی اخیر نتیجه می‌شود :

$$y^\alpha - \alpha y \geqslant ۱ - \alpha, \; (Cy)^\alpha - \alpha C^{\alpha - ۱} (Cy) \geqslant (۱ - \alpha) C^\alpha$$

اگر $a = - \alpha C^{\alpha - ۱}$، $x = Cy$ فرض‌کنیم، بدست می‌آید :

$$x^\alpha + ax \geqslant (۱ - \alpha)C^\alpha = (۱ - \alpha) \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - ۱}}$$

ضمناً علامت تساوی وقتی برقرار است که داشته باشیم :

$$x = C = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha - ۱}}$$

به این ترتیب تابع $x^\alpha + ax$ در نقطهٔ :

$$x = \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha - ۱}}$$

به حداقل مقدار خود می‌رسد و این حداقل برابر است با :

$$(۱ - \alpha) \left(\frac{a}{-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha - ۱}}$$

مثلاً تابع :

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}} + ۲۷x \; , \; x \geqslant ۰$$

به ازای :

$$x = \left(\frac{۲۷}{\frac{۱}{۳}}\right)^{\frac{۱}{-\frac{۱}{۳}-۱}} = \frac{۱}{۲۷}$$

به حداقل خود می‌رسد و این حداقل چنین است:

$$\left(۱ + \frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۲۷}{\frac{۱}{۳}}\right)^{\frac{-\frac{۱}{۳}}{-\frac{۱}{۳}-۱}} = ۴$$

مسئلهٔ ۶. با صرفه‌ترین اندازه‌های یک ظرف استوانه‌ای شکل را پیدا کنید[1]، بطوری که از دو قاعده پوشیده باشد (مثل قوطی کنسرو).

حل. $V = \pi r^۲ h$ را حجم ظرف می‌گیریم، که در آن r شعاع و h ارتفاع استوانه باشد. سطح کل استوانه چنین است:

$$S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r h$$

و چون $h = \frac{V}{\pi r^۲}$، بنابراین:

$$S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r \frac{V}{\pi r^۲} = ۲\pi r^۲ + \frac{۲V}{r}$$

اگر $\frac{۱}{r} = x$ بگیریم، بدست می‌آید:

$$S = ۲\pi x^{-۲} + ۲Vx = ۲\pi\left(x^{-۲} + \frac{V}{\pi} x\right)$$

تابع $x^{-۲} + \frac{V}{\pi} x$، با توجه به مسئلهٔ قبل، وقتی حداقل است که داشته باشیم:

---

۱. اندازه‌های یک ظرف را با صرفه‌ترین حالت گویند، وقتی که برای یک حجم معین حداقل مصالح برای آن بکار رود، یعنی سطح کل ظرف حداقل باشد.

$$x = \left(\frac{V}{2\pi}\right)^{\frac{1}{-2-1}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}$$

که از آنجا بدست می‌آید:

$$\frac{1}{r} = \sqrt[3]{\frac{2\pi}{V}}, \quad r^3 = \frac{V}{2\pi} = \frac{\pi r^2 h}{2\pi}, \quad r = \frac{h}{2}, \quad h = 2r = d$$

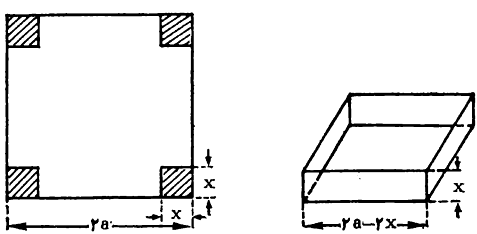
بنابراین با صرفه‌ترین اندازه‌های ظرف وقتی است که ارتفاع آن با قطر قاعده برابر باشد.

تمرین:

۶. حداکثر مقدار تابع $x(6-x)^2$ را در فاصلهٔ $6 > x > 0$ پیدا کنید.

راهنمائی. $y = 6 - x$ فرض کنید.

۷. می‌خواهیم از صفحهٔ مربع شکلی به ضلع $2a$ یک قوطی بدون سرپوش بسازیم، برای این منظور از گوشه‌های صفحه مربعهای کوچکتری جدا کرده‌ایم و سپس طبق شکل ۴ آنرا بصورت قوطی درآورده‌ایم. ارتفاع قوطی چقدر باشد تا حجم آن حداکثر مقدار ممکن شود؟



شکل ۴

۸. حداقل تابع زیر را بدست آورید:

$$x^6 + 8x^2 + 5$$

۹. حداقل تابع زیر را بدست آورید:

$$x^6 - 8x^2 + 5$$

۱۰. حداکثر تابع زیر را بدست آورید:

$$x^\alpha - \alpha x$$

بشرطی که $0 < \alpha < 1$، $\alpha > 0$، $x \geqslant 0$.

۱۱. ثابت کنید که وقتی $x \geqslant 0$ باشد، نامساوی زیر صحیح است:

$$\sqrt[4]{x} \leqslant \frac{3}{8} + 2x$$

۱۲. ثابت کنید که وقتی $n \geqslant 3$ باشد، نامساوی زیر صحیح است:

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

راهنمائی. از نامساوی (۷) استفاده کنید.

۱۳. از عددهای زیر کدام بزرگترند:

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots, \sqrt[n]{n}, \ldots$$

۱۴. نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}}$$

۱۵. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_n) \geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

بشرطی که عددهای a_i همعلامت باشند و از -1 هم کوچکتر نباشند.

۱۶. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant a_n^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \qquad (19)$$

راهنمائی. قبلاً ثابت کنید که کثیرالجملهٔ:

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 = x^2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) - 2x(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots$$

$$+ a_nb_n) + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

نمی‌تواند دو ریشهٔ حقیقی مختلف داشته باشد.

۱۷. با استفاده از نامساوی (۱۹) ثابت کنید واسطهٔ حسابی بزرگتر از واسطهٔ مربعی نیست.

۱۸. این نامساوی را ثابت کنید:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

۱۹. با استفاده از نامساوی تمرین ۱۸، نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{2} > 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

۲۰. حداکثر توابع زیر را پیدا کنید:

$$\frac{x^3}{x^4+5} \ , \quad x^6 - 0{,}6x^{10}$$

۲۱. به ازای چه مقدار a حداقل تابع $\sqrt{x} + \frac{a}{x^2}$ مساوی ۲,۵ است؟

۵

در این بند هم به مطالعهٔ بعضی از نامساویهای مهم دیگر و مطالعـهٔ مورد استعمال آنها در محاسبهٔ بعضی حدود می‌پردازیم .

مسئلهٔ ۱. ثابت کنید با شرایط :

$$y>0,\ x>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1$$

داریم :

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \qquad (20)$$

حل. در ابتدای بند ۴ (مسئلهٔ ۱) این نامساوی را ثابت کردیم :

$$x^\alpha - ax \geqslant (1-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

که در آن $\alpha>1$, $a>0$ و $x\geqslant 0$.

اگر در این نامساوی $\alpha=p$ و $a=py$ فرض کنیم، بدست می‌آید :

$$x^p-(py)\,x \geqslant (1-p)\left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} = (1-p)\,y^{\frac{p}{p-1}} \qquad (21)$$

و چون $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ است، پس:

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \;,\; q = \frac{p}{p-1} \;,\; p-1 = \frac{p}{q}$$

که با قراردادن در رابطهٔ (۲۱) بدست می‌آید:

$$x^p - pyx \geqslant -\frac{p}{q} y^q$$

اگر طرفین این رابطه را بر p تقسیم کنیم و سپس جمله‌های منفی را بطرف دیگر ببریم، بهمان نامساوی (۲۰) می‌رسیم.

مسئلهٔ ۲. اگر a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n عددهائی مثبت باشند و p و q در شرط مسئلهٔ ۱ صدق کنند، ثابت کنید:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n) \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{\frac{1}{p}} \; (b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q)^{\frac{1}{q}} \qquad (22)$$

حل. فرض می‌کنیم:

$$a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p = A^p \;,\; b_1^q + b_2^q + \cdots + b_n^q = B^q$$

در اینصورت سمت راست نامساوی (۲۲) چنین می‌شود:

$$(A^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (B^q)^{\frac{1}{q}} = AB$$

حال فرض می‌کنیم:

$$a_1 = Ac_1, a_2 = Ac_2, \cdots, a_n = Ac_n,$$
$$b_1 = Bd_1, b_2 = Bd_2, \cdots, b_n = Bd_n$$

چون داریم:

$$A^p = a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p =$$
$$= A^p c_1^p + A^p c_2^p + \cdots + A^p c_n^p =$$
$$= A^p (c_1^p + c_2^p + \cdots + c_n^p)$$

بنابراین بدست می‌آید:

$$c_1^p + c_2^p + \cdots + c_n^p = 1$$

بهمین ترتیب می‌توان تحقیق کرد:

$$d_1^q + d_2^q + \cdots + d_n^q = 1$$

حالا با استفاده از نامساوی (۲۰) بدست می‌آید:

$$(*)\quad \begin{cases} a_1b_1 = AB\,(c_1d_1) \leqslant AB\left(\dfrac{c_1^p}{p} + \dfrac{d_1^q}{q}\right), \\ a_2b_2 \leqslant AB\left(\dfrac{c_2^p}{p} + \dfrac{d_2^q}{q}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_nb_n \leqslant AB\left(\dfrac{c_n^p}{p} + \dfrac{d_n^q}{q}\right) \end{cases}$$

از این نامساویها نتیجه می‌شود:

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant$$
$$\leqslant AB\left(\frac{c_1^p + c_2^p + \cdots + c_n^p}{p} + \frac{d_1^q + d_2^q + \cdots + d_n^q}{q}\right) =$$
$$= AB\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = AB$$

به‌این ترتیب ثابت کردیم که سمت چپ نامساوی (۲۲) از AB، یعنی سمت راست نامساوی، تجاوز نمی‌کند.

بسادگی می‌توان حالتی را که درآن علامت تساوی برقرار است، بدست آورد. در حقیقت علامت تساوی در (۲۱) تنها وقتی وجود دارد که داشته باشیم:

$$x = \left(\frac{py}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{1}{p-1}} = y^{\frac{q}{p}} \Rightarrow x^p = y^q$$

(مسئلهٔ ۱ فصل ۴ را ببینید). بهمین ترتیب علامت تساوی در هر یک ازسطرهای (*) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$c_1 = d_1^{\frac{q}{p}},\ c_2 = d_2^{\frac{q}{p}},\ \ldots,\ c_n = d_n^{\frac{q}{p}}$$

یعنی وقتی که داشته باشیم:

$$c_1^p = d_1^q,\ c_2^p = d_2^q,\ \ldots,\ c_n^p = d_n^q$$

بالاخره با ضرب این تساویها در A^pB^p بدست می‌آید:

$$B^q(Ac_1)^p = A^p(Bd_1)^q \Rightarrow B^q a_1{}^p = A^p b_1{}^q$$

$$\frac{a_1{}^p}{b_1{}^q} = \frac{A^p}{B^q}, \frac{a_2{}^p}{b_2{}^q} = \frac{A^p}{B^p}, \ldots, \frac{a_n{}^p}{b_n{}^q} = \frac{A^p}{B^q},$$

بنابراین علامت تساوی در (۲۲) وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\frac{a_1{}^p}{b_1{}^q} = \frac{a_2{}^p}{b_2{}^q} = \cdots = \frac{a_n{}^p}{b_n{}^q}$$

تبصره. اگر در نامساوی (۲۲) فرض کنیم $p = 2$، $q = 2$، همان نامساوی (۱۹) بدست می‌آید (تمرین ۱۶ را ببینید):

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$$

مسئلهٔ ۳. نامساوی زیر را ثابت کنید[1]:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{۲۳}$$

حل. با توجه به نامساویهای (۷) و (۸) فصل دوم بدست می‌آید:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

با لگاریتم گرفتن از این نامساویها (در مبنای e)، خواهیم داشت:

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

---

۱. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ یعنی لگاریتم $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ در مبنای e (مسئلهٔ ۱۱ بند ۲ را ببینید).

مسئلهٔ ۴. اگر داشته باشیم :

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2}\,,\ z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\,,\ z_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}\,,$$

$$z_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\,, \cdots, z_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

مطلوبست $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

حل. با تبدیل n به $n-1$ در نامساوی اول (۲۳)، بدست می‌آید:

$$\frac{1}{n} < \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \ln\frac{n}{n-1}$$

از این نامساوی و نامساوی دوم (۲۳) نتیجه می‌شود :

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1} \tag{۲۴}$$

حالا با استفاده از نامساویهای (۲۴)، نامساویهای زیر را می‌نویسیم :

$$\ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < \ln\frac{n}{n-1}$$

$$\ln\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n}$$

$$\ln\frac{n+3}{n+2} < \frac{1}{n+2} < \ln\frac{n+2}{n+1}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\ln\frac{2n+1}{2n} < \frac{1}{2n} < \ln\frac{2n}{2n-1}$$

با جمع این نامساویها، وتوجه به اینکه مجموع لگاریتمها برابر است بالگاریتم حاصلضرب، بدست می‌آید :

$$\ln\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(2n+1)}{n(n+1)(n+2)\cdots 2n} < \frac{1}{n} +$$

$$+\frac{۱}{n+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲n}<\ln\frac{n(n+۱)\,(n+۲)\cdots ۲n}{(n-۱)\,n\,(n+۱)\cdots(۲n-۱)}$$

یعنی:

$$\ln\frac{۲n+۱}{n}<\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲n}<\ln\frac{۲n}{n-۱}\quad(۲۵)$$

و چون داریم:

$$\frac{۲n+۱}{n}=۲+\frac{۱}{n}$$

بنابراین:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ln\frac{۲n+۱}{n}=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ln\left(۲+\frac{۱}{n}\right)=\ln ۲$$

بهمین ترتیب، از رابطهٔ

$$\frac{۲n}{n-۱}=۲+\frac{۲}{n-۱}$$

نتیجه می‌شود:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ln\frac{۲n}{n-۱}=\ln ۲$$

به این ترتیب جمله‌های دوطرف نامساویهای (۲۵) دارای یک حدند و بنابراین جملهٔ وسط نیز همان حد را دارد، یعنی:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n+۱}+\cdots+\frac{۱}{۲n}\right)=\underset{n\to\infty}{\text{حد}}z_n=\ln ۲$$

مسئلهٔ ۵. فرض می‌کنیم:

$$x_۱=۱\ ,\ x_۲=۱-\frac{۱}{۲}\ ,\ x_۳=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\ ,\ \ldots$$

$$\ldots,\ x_n=۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\cdots+(-۱)^{n-۱}\frac{۱}{n}$$

مطلوبست محاسبهٔ $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\,x_n$.

حل. داریم:

$$x_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-$$

$$-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}\right)-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

در مسئلهٔ قبل فرض کردیم:

$$z_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

بنابراین $x_{2n}=z_n-\frac{1}{n}$ و بنابراین (با توجه به مسئلهٔ قبل):

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(z_n-\frac{1}{n}\right)=\ln 2$$

همچنین توجه می‌کنیم که:

$$x_{2n+1}=x_{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

و بنابراین:

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(x_{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\ln 2$$

و به این ترتیب:

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\ln 2$$

تبصره. عددهای:

$$x_1=a_1,\ x_2=a_1+a_2,\ x_3=a_1+a_2+a_3,\ \cdots,$$
$$x_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

را مجموعهای جزئی رشتهٔ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

گویند. رشته را متقارب گویند وقتی که دنبالهٔ مجموعهای جزئی آن حد معینی داشته باشد. در این حالت $\lim_{n\to\infty} x_n = S$ را مجموع رشته گویند.

از مسئلهٔ ۵ نتیجه می‌شود که رشتهٔ :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \cdots$$

متقارب است و مجموعی مساوی $\ln 2$ دارد.

مسئلهٔ ۶. رشتهٔ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

را رشتهٔ توافقی گویند. ثابت کنید که رشتهٔ توافقی متباعد است.

حل. بنابر نامساوی (۲۳) داریم :

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$$

اگر در این نامساوی n را بترتیب مساوی $1, 2, 3, \ldots, n$ بگیریم، داریم :

$$1 > \ln\frac{2}{1}$$

$$\frac{1}{2} > \ln\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3} > \ln\frac{4}{3}$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n} > \ln\frac{n+1}{n}$$

از مجموع این نامساویها بدست می‌آید :

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n} >$$
$$> \ln \frac{۲ \cdot ۳ \cdot ۴ \cdots (n+۱)}{۱ \cdot ۲ \cdot ۳ \cdots n} = \ln (n+۱)$$

و از این نامساوی نتیجه می‌شود :

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, x_n \geqslant \underset{n\to\infty}{\text{حد}} \ln (n+۱) = \infty$$

بنابراین رشتهٔ توافقی متباعد است.

مسئلهٔ ۷. ثابت کنید که وقتی $۱ < \alpha$ باشد، رشتهٔ زیر متقارب است :

$$۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha}} + \frac{۱}{۳^{\alpha}} + \cdots + \frac{۱}{n^{\alpha}} + \cdots \qquad (۲۶)$$

حل. دنبالهٔ مجموعهای جزئی این رشته چنین است :

$$x_۱ = ۱$$
$$x_۲ = ۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha}}$$
$$x_۳ = ۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha}} + \frac{۱}{۳^{\alpha}}$$
$$x_۴ = ۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha}} + \frac{۱}{۳^{\alpha}} + \frac{۱}{۴^{\alpha}}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲^{\alpha}} + \frac{۱}{۳^{\alpha}} + \cdots + \frac{۱}{n^{\alpha}}$$

این دنباله بطور یکنوا (مونوتون) نزولی است، یعنی :

$$x_۱ < x_۲ < x_۳ < x_۴ < \cdots < x_n < \cdots$$

از طرف دیگر می‌دانیم که یک دنبالهٔ محدود یکنوا و نزولی دارای حد معینی است. بنابراین اگر ثابت کنیم که دنبالهٔ عددهای x_n محدود است، تقارب رشتهٔ (۲۶) ثابت شده است. فرض می‌کنیم :

$$y_{2n} = 1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} - \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

و چون داریم :

$$y_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{3^\alpha}\right) - \left(\frac{1}{4^\alpha} - \frac{1}{5^\alpha}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{(2n-2)^\alpha} - \frac{1}{(2n-1)^\alpha}\right) - \frac{1}{(2n)^\alpha}$$

بنابراین (عددهای داخل هر پرانتز مثبت است) :

$$y_{2n} < 1$$

از طرف دیگر داریم :

$$y_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - 2\left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) = \left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^\alpha} + \frac{1}{(2n)^\alpha}\right) - \frac{2}{2^\alpha}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

و بنابراین بدست می‌آید :

$$y_{2n} = x_{2n} - \frac{2}{2^\alpha} x_n$$

و چون $x_{2n} > x_n$ و $y_{2n} < 1$، بنابراین

$$1 > y_{2n} > x_n - \frac{2}{2^\alpha} x_n = \frac{2^\alpha - 2}{2^\alpha} x_n$$

از اینجا نتیجه می‌شود :

$$x_n < \frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$$

یعنی عدد x_n به ازای $\alpha > 1$ محدود است. به این ترتیب ثابت شد که رشتهٔ (۲۶) متقارب است و مجموع آن از $\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 2}$ تجاوز نمی‌کند.

مثلاً وقتی $\alpha = 2$ باشد، داریم:

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \frac{2^2}{2^2 - 2} = 2$$

$$S = \lim_{n\to\infty} x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots \leqslant 2$$

در دورهٔ ریاضیات عالی ثابت می‌کنند که:

$$S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \qquad (27)$$

تمرین:

۲۲. مجموع رشتهٔ زیر را بدست آورید:

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \\ + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots$$

راهنمائی: از تساوی (۲۷) استفاده کنید.

۲۳. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} < 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha < \\ < \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \qquad (\alpha > 0)$$

۲۴. با فرض:

$$x_n = 1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha$$

ثابت کنید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \frac{x_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha+1} \quad (\alpha > 0)$$

۲۵. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2a_2 + \cdots + a_nb_nc_n)^3 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3) \times$$
$$\times (c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3)$$

بشرطی که عددهای a_k و b_k و c_k مثبت باشند.

راهنمائی: از نامساوی (۱۰) و روش اثبات (۲۲) استفاده کنید.

۲۶. با فرض:

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn}$$

که در آن k عددی صحیح و مثبت است، ثابت کنید:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} x_n = \ln k$$

راهنمائی: از روش حل مسئلهٔ ۴ همین بند استفاده کنید.

حل تمرینها

۱. اگر در نامساوی (۱) (صفحهٔ ۶) مقدار n را بترتیب مساوی:

$$m, m+1, \cdots, n$$

فرض کنیم، بدست می‌آید:

$$2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} < 2\sqrt{m} - 2\sqrt{m-1}$$

$$2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1} < \frac{1}{\sqrt{m+1}} <$$
$$< 2\sqrt{m+1} - 2\sqrt{m}$$

$$2\sqrt{m+3} - 2\sqrt{m+2} < \frac{1}{\sqrt{m+2}} <$$
$$< 2\sqrt{m+2} - 2\sqrt{m+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$$

از مجموع این نامساویها خواهیم داشت:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{m} < \frac{1}{\sqrt{m}} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} + \frac{1}{\sqrt{m+2}} +$$

$$+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}-۲\sqrt{m-۱}$$

۲. اگر در نامساویهای تمرین ۱ فرض کنیم:

$$n=۱\,۰۰۰\,۰۰۰ ،m=۱۰\,۰۰۰$$

بدست می‌آید:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱}-۲\sqrt{۱۰۰۰۰}<\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}}+$$

$$+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}<$$

$$<۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}-۲\sqrt{۹۹۹۹}$$

و چون داریم:

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۱}>۲\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}=۲۰۰۰,$$

$$۲\sqrt{۱۰۰۰۰}=۲۰۰,$$

$$۲\sqrt{۹۹۹۹}=\sqrt{۳۹۹۹۶}>۱۹۹{,}۹۸,$$

خواهیم داشت:

$$۲۰۰۰-۲۰۰=۱۸۰۰<\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}}+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}}+$$

$$+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}<۲۰۰۰-۱۹۹{,}۹۸=$$

$$=۱۸۰۰{,}۰۲$$

۳. اگر نامساویهای تمرین ۲ را در ۵۰ ضرب‌کنیم، بدست می‌آید:

$$۹۰۰۰۰<۵۰z<۹۰۰۰۱$$

و از آنجا:

$$[۵۰z]=۹۰۰۰۰$$

۴. صحت نامساوی به ازای $n=۱$ واضح است :

$$\frac{۱}{۲}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳\cdot۱+۱}}=\frac{۱}{۲}$$

حالا فرض می‌کنیم که نامساوی به ازای $n=k$ صحیح باشد:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\qquad(a)$$

ثابت مـی‌کنیم کـه به ازای $n=k+۱$ هـم صحیح است، یعنی ثابت می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳k+۴}}\qquad(b)$$

طرفین نامساوی (a) را در $\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۲k-۱}{۲k}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}$$

حالا باید نامساوی زیر را ثابت کرد:

$$\frac{۱}{\sqrt{۳k+۱}}\cdot\frac{۲k+۱}{۲k+۲}<\frac{۱}{\sqrt{۳k+۴}}$$

طرفین این نـامساوی را در $(۲k+۲)\sqrt{۳k+۱}\cdot\sqrt{۳k+۴}$ ضرب می‌کنیم و سپس دو طرف را مجذور می‌نمائیم، بدست می‌آید:

$$(۲k+۱)^۲(۳k+۴)<(۲k+۲)^۲(۳k+۱)$$

و یا :

$$۱۲k^۳+۲۸k^۲+۱۹k+۴<۱۲k^۳+۲۸k^۲+۲۰k+۴$$

و نامساوی اخیر واضح است، زیرا داریم $k\geqslant۱$.

به این ترتیب ثابت می‌شود که نامساوی:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۲n-۱}{۲n}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳n+۱}}$$

به ازای همهٔ مقادیر n صحیح است.

۵. اگر درنامساوی تمرین ۴ فرض‌کنیم $n=۵۰$، بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}\cdot\frac{۳}{۴}\cdot\frac{۵}{۶}\cdots\frac{۹۹}{۱۰۰}\leqslant\frac{۱}{\sqrt{۳\,.\,۵۰+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۱۵۱}}<$$
$$<\frac{۱}{\sqrt{۱۴۴}}=\frac{۱}{۱۲}$$

۶. اگر $y - ۶ = x$ فرض کنیم، باید حداکثر مقدار تابع زیر را بدست آوریم:

$$(۶ - y)\, y^۲ = ۶y^۲ - y^۳ \qquad (۰ < y < ۶)$$

حال اگر $z = y^۲$ بگیریم به تابع زیر می‌رسیم:

$$۶z - z^{\frac{۳}{۲}}$$

که حداکثر آن چنین است (تبصرهٔ مسئلهٔ ۱ بند ۴ را ببینید):

$$\left(\frac{۳}{۲} - ۱\right)\left(\frac{۶}{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۳}{۲} - ۱}} = \frac{۱}{۲} \cdot ۴^۳ = ۳۲$$

و این حداکثر در نقطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$z = \left(\frac{۶}{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{۱}{\frac{۳}{۲} - ۱}} = ۴^۲$$

تابع $۶y^۲ - y^۳$ در نقطهٔ $y = ۴$ مساوی حداکثرخود ۳۲ می‌شود. تابع $x\,(۶ - x)^۲$ در نقطهٔ $x = ۶ - ۴ = ۲$ به حداکثر مقدار خود ۳۲ می‌رسد.

۷. حجم قوطی چنین است (شکل ۴ صفحهٔ ۴۲ را ببینید):

$$V = x\,(۲a - ۲x)^۲ = ۴x\,(a - x)^۲ ،\; ۰ < x < a$$

اگر $y = a - x$ و $z = y^۲$ فرض کنیم، بدست می‌آید:

$$V = ۴\left(az - z^{\frac{۳}{۲}}\right)$$

حداکثر مقدار تابع $az - z^{\frac{۳}{۲}}$ در نقطهٔ:

$$z = \left(\frac{a}{\frac{۳}{۲}}\right)^{\frac{۱}{\frac{۳}{۲} - ۱}} = \left(\frac{۲a}{۳}\right)^۲$$

بدست می‌آید و بنابراین:

$$y = \frac{۲a}{۳}, \quad x = a - \frac{۲a}{۳} = \frac{a}{۳}$$

به این ترتیب حجم قوطی وقتی حداکثر است که ضلع هریک از مربعهای بریده شده $\frac{۱}{۶}$ ضلع مربع مفروض باشد.

۸. حداقل تابع $x^۶ + ۸x^۲ + ۵$ مساوی ۵ است و به ازای $x = ۰$ بدست می‌آید.

۹. با فرض $x^۲ = y$، مسئله منجر به پیدا کردن حداقل مقدار تابع:

$$y^۳ - ۸y + ۵$$

به ازای مقادیر مثبت y می‌شود.

در مسئلهٔ ۱ بند ۴ ثابت کردیم که حداقل مقدار تابع $y^۳ - ۸y$ چنین است:

$$(۱ - ۳)\left(\frac{۸}{۳}\right)^{\frac{۳}{۳-۱}} = -۲ \cdot \frac{۸^{\frac{۳}{۲}}}{۳^{\frac{۳}{۲}}} = -\frac{۳۲\sqrt{۶}}{۹}$$

و بنابراین حداقل تابع $y^۳ - ۸y + ۵$ برابر است با:

$$-\frac{۳۲\sqrt{۶}}{۹} + ۵ = -۳,۶\ldots$$

۱۰. با فرض $y = x^{\alpha}$ به تابع زیر می‌رسیم:

$$y - ay^{\frac{۱}{\alpha}} = a\left(\frac{۱}{a}y - y^{\frac{۱}{\alpha}}\right) \text{ و } \alpha > ۰ , \frac{۱}{\alpha} > ۱$$

با توجه به مسئلهٔ ۱ بند ۴، حداکثر مقدار تابع $\frac{۱}{a}y - y^{\frac{۱}{\alpha}}$

چنین است:

$$\left(\frac{۱}{\alpha}-۱\right)\left(\frac{\frac{۱}{a}}{\frac{۱}{\alpha}}\right)^{\frac{\frac{۱}{\alpha}}{\frac{۱}{\alpha}-۱}}=\left(\frac{۱}{\alpha}-۱\right)\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{\frac{۱}{۱-\alpha}}=$$

$$=\frac{۱-\alpha}{\alpha}\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}$$

بـا ضرب عبارت اخیر در a، حـداکثر مقدار تابع $a\left(\frac{۱}{a}y-y^{\frac{۱}{\alpha}}\right)$ بدست می‌آید، که برابر است با :

$$(۱-\alpha)\frac{a}{\alpha}\cdot\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{۱}{\alpha-۱}}=(۱-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{۱+\frac{۱}{\alpha-۱}}=$$

$$=(۱-\alpha)\left(\frac{a}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-۱}}$$

۱۱. حـداکثـر مقدار تـابع $\sqrt[۴]{x}-۲x$ بـا فـرض $x\geqslant ۰$ $\left(a=۲ ، \alpha=\frac{۱}{۴}\right)$ چنین است:

$$\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\left(\frac{۲}{\frac{۱}{۴}}\right)^{\frac{\frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۴}-۱}}=\frac{۳}{۴}\cdot ۸^{-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۸}$$

بنابراین برای همهٔ مقادیر $x\geqslant ۰$ نامساوی زیر برقرار است:

$$\sqrt[۴]{x}-۲x\leqslant\frac{۳}{۸}\Rightarrow\sqrt[۴]{x}\leqslant\frac{۳}{۸}+۲x$$

۱۲. نامساوی (۷) از فصل ۲ را به اینصورت می‌نویسیم:

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e,\ (n+1)^n < e\cdot n^n$$

با شرط $e < 3 \leqslant n$. در اینصورت:

$$(n+1)^n < e\cdot n^n < 3n^n \leqslant n\cdot n^n = n^{n+1}$$

اگر طرفین رابطهٔ اخیر را به توان $\frac{1}{n(n+1)}$ برسانیم، بدست می‌آید:

$$\sqrt[n+1]{n+1} < \sqrt[n]{n}$$

۱۳. چون داریم:

$$1 < \sqrt{2} = \sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9} = \sqrt[3]{3}$$

بنابراین $\sqrt[3]{3}$ بزرگترین عدد از عددهای ۱، $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{3}$ است. ازطرف دیگر در مسئلهٔ قبل ثابت کردیم که عددهای:

$$\sqrt[3]{3}\ \text{و}\ \sqrt[4]{4}\ \text{و}\ \sqrt[5]{5}\ \text{و}\ \cdots\ \text{و}\ \sqrt[n]{n}\ \text{و}\ \cdots$$

نزولی‌اند. بنابراین بین عددهای ۱، $\sqrt{2}$، $\sqrt[3]{3}$، …، $\sqrt[n]{n}$، … بزرگترین عدد همان $\sqrt[3]{3}$ است.

۱۴. فرض می‌کنیم: $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$، $\alpha_n > 0$. اگر طرفین این تساوی را به توان n برسانیم، بدست می‌آید:

$$n = (1+\alpha_n)^n = \left[(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}}\right]^2$$

اگر $n \geqslant 2$، یعنی $\frac{n}{2} \geqslant 1$ بگیریم، بر اساس قضیهٔ ۳ بدست می‌آید:

$$(1+\alpha_n)^{\frac{n}{2}} > 1 + \frac{n}{2}\alpha_n,\ n > \left(1+\frac{n}{2}\alpha_n\right)^2 =$$

$$= 1 + n\alpha_n + \frac{n^2}{4}\alpha_n^2$$

از آنجا نتیجه می‌شود:

$$n > \frac{n^۲}{۴}\alpha_n^۲,\ \alpha_n^۲ < \frac{۴}{n},\ \alpha_n < \frac{۲}{\sqrt{n}},\ \sqrt[n]{n} =$$
$$= ۱ + \alpha_n < ۱ + \frac{۲}{\sqrt{n}}$$

تبصره. با استفاده از دو جمله‌ای نیوتون، بسادگی می‌توان تحقیق کـرد:

$$\sqrt[n]{n} < ۱ + \sqrt{\frac{۲}{n}}$$

زیرا داریم:

$$\left(۱ + \sqrt{\frac{۲}{n}}\right)^n = ۱ + n\sqrt{\frac{۲}{n}} + \frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۲}{n} +$$
$$+ \cdots > ۱ + \frac{n(n-۱)}{۲}\cdot\frac{۲}{n} = n$$

که از آنجا نتیجه می‌شود:

$$\sqrt[n]{n} < ۱ + \sqrt{\frac{۲}{n}}$$

۱۵. به ازای $n = ۱$ و $a_i > -۱$ نامساوی واضح است:

$$۱ + a_۱ \geqslant ۱ + a_۱$$

فـرض کنیم کـه نـامساوی بـه ازای $n = k$ صحیح بـاشد، یعنی داشته باشیم:

$$(۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_k) \geqslant ۱ + a_۱ +$$
$$+ a_۲ + \cdots + a_k$$

با ضرب طرفین این نامساوی در $۱ + a_{k+۱}$ بدست می‌آید:

$$(۱ + a_۱)(۱ + a_۲)\cdots(۱ + a_k)(۱ + a_{k+۱}) \geqslant$$
$$\geqslant (۱ + a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k)(۱ + a_{k+۱}) =$$
$$= ۱ + a_۱ + \cdots + a_k + a_{k+۱} + a_۱a_{k+۱} +$$
$$+ a_۲a_{k+۱} + \cdots + a_ka_{k+۱}$$

و چون عددهای $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_k، $a_{k+۱}$ همعلامتند، داریم:

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+1} + \cdots + a_ka_{k+1} \geqslant 0$$

و بنابراین بدست می‌آید:

$$(1 + a_1)(1 + a_2)\cdots(1 + a_k)(1 + a_{k+1}) \geqslant$$
$$\geqslant 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_k + a_{k+1}$$

یعنی نامساوی به ازای $n = k + 1$ هم صحیح است.

به این ترتیب نامساوی برای هر مقدار دلخواه n برقرار است.

۱۶. اگر کثیرالجملهٔ

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2$$

دارای ریشهٔ حقیقی $x = x_1$ باشد، یعنی:

$$(a_1x_1 - b_1)^2 + (a_2x_2 - b_2)^2 + \cdots +$$
$$+ (a_nx_1 - b_n)^2 = 0$$

هریک از عددهای $a_1x_1 - b_1$، $a_2x_1 - b_2$، $\ldots$، $a_nx_1 - b_n$ مساوی صفر می‌شوند، یعنی

$$0 = a_1x_1 - b_1 = a_2x_1 - b_2 = \cdots = a_nx_1 - b_n,$$

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \cdots = \frac{b_n}{a_n}$$

به این ترتیب ثابت کردیم که کثیرالجملهٔ

$$(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \cdots + (a_nx - b_n)^2 =$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)x^2 - 2\,(a_1b_1 + a_2b_2 +$$
$$+ \cdots + a_nb_n)\,x + (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

نمی‌تواند دو ریشهٔ مختلف حقیقی داشته باشد و بنابراین:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 - (a_1^2 + \cdots + a_n^2) \times$$
$$\times (b_1^2 + \cdots + b_n^2) \leqslant 0$$

و از آنجا نامساوی (۱۹) نتیجه می‌شود:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leqslant$$
$$\leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

متذکر می‌شویم که علامت تساوی تنها وقتی برقرار است که کثیرالجمله ریشهٔ حقیقی داشته باشد، یعنی وقتی که

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$$

۱۷. با استفاده از نامساوی (۱۹) بدست می‌آید:

$$c_1^2=\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^2=\left(\frac{a_1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots+\right.$$

$$\left.+\frac{a_n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\leqslant\left(\frac{a_1^2}{n}+\frac{a_2^2}{n}+\cdots+\frac{a_n^2}{n}\right)\times$$

$$\times\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\ \text{مرتبه}}=\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}=c_2^2$$

و از آنجا نتیجه می‌شود:

$$c_1\leqslant c_2$$

(یعنی واسطهٔ عددی از واسطهٔ مربعها تجاوز نمی‌کند).

۱۸. از نامساوی:

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})^2=n+1+2\sqrt{n^2-1}+$$

$$+n-1=2n+2\sqrt{n^2-1}<2n+2\sqrt{n^2}=4n$$

نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}<2\sqrt{n},$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{2},$$

و بالاخره:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}<\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$$

۱۹. در نامساوی تمرین ۱۸ بجای n مقادیر ۲، ۳، ...، را قرار می‌دهیم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<\sqrt{3}-1$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}} < \sqrt{۴} - \sqrt{۲}$$
$$\frac{۱}{\sqrt{۴}} < \sqrt{۵} - \sqrt{۳}$$
$$\frac{۱}{\sqrt{۵}} < \sqrt{۶} - \sqrt{۴}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{۱}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+۱} - \sqrt{n-۱}$$

از مجموع این نامساویها بدست می‌آید:

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+۱} + \sqrt{n} - \sqrt{۲} - ۱$$

و یا بعد از اضافه کردن یک واحد به دو طرف نامساوی:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+۱} + \sqrt{n} - \sqrt{۲}$$

تبصره. در فصل اول ثابت کردیم:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} > ۲\sqrt{n+۱} - ۲\sqrt{۲} + ۱$$

عددهای $\sqrt{n+۱} + \sqrt{n} - \sqrt{۲}$ و $۲\sqrt{n+۱} - ۲\sqrt{۲} + ۱$ کمتر از ۰٫۴۲ با یکدیگر اختلاف دارند. هریک از این دو عدد را می‌توان به عنوان مقدار تقریبی مجموع زیر در نظر گرفت:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} = z_n$$

بدون اثبات متذکر می‌شویم که عدد $\sqrt{n+۱} + \sqrt{n} - \sqrt{۲}$ به عدد z_n نزدیکتر است تا عدد $۲\sqrt{n+۱} - ۲\sqrt{۲} + ۱$.

۲۰. وقتی $x < ۰$ باشد تابع $\frac{x^۳}{x^۴ + ۵}$ منفی می‌شود. بنابراین

حداکثر مقدار تابع به ازای مقادیر مثبت x بدست می‌آید. داریم:

$$\frac{x^{۳}}{x^{۴}+۵}=\frac{۱}{۵\left(\frac{۱}{۵}x+x^{-۳}\right)}$$

بنابراین حداکثر تابع مفروض همراه بـا حداقل تابع $\frac{۱}{۵}x+x^{-۳}$ است. از مسئلهٔ ۵ بند ۴ نتیجـه می‌شود کـه حداقل تابع اخیر برابر است با

$$(۱+۳)\left(\frac{\frac{۱}{۵}}{۳}\right)^{\frac{-۳}{-۳-۱}}=۴\left(\frac{۱}{۱۵}\right)^{\frac{۳}{۴}}$$

و حـداکثر مقدار تابع $\frac{x^{۳}}{x^{۴}+۵}$ چنین است:

$$\frac{۱}{۵\cdot ۴\cdot\left(\frac{۱}{۱۵}\right)^{\frac{۳}{۴}}}=\frac{۱۵^{\frac{۳}{۴}}}{۲۰}=\frac{۱۵}{۲۰\sqrt[۴]{۱۵}}=\frac{۳}{۴\sqrt[۴]{۱۵}}$$

برای اینکه حـداکثر مقدار تابع $x^{۶}-۰{,}۶x^{۱۰}$ را بدست آوریـم، $x^{۶}=y$ می‌گیریم. واضح است کـه $y\geqslant ۰$ است، حداکثر تابع:

$$y-۰{,}۶y^{\frac{۱۰}{۶}}=۰{,}۶\left(\frac{۱۰}{۶}y-y^{\frac{۱۰}{۶}}\right)$$

برابر است با (مسئلهٔ ۱ بند ۴ را ببینید):

$$۰{,}۶\left(\frac{۱۰}{۶}-۱\right)\left(\frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۱۰}{۶}}\right)^{\frac{\frac{۱۰}{۶}}{\frac{۱۰}{۶}-۱}}=۰{,}۴$$

۲۱. $y=\frac{۱}{x^{۲}}$ فرض می‌کنیم، بدست می‌آید:

$$\sqrt{x}+\frac{a}{x^{۲}}=y^{-\frac{۱}{۴}}+ay$$

و حداقل تابع $y^{-\frac{۱}{۴}}+ay$ (مسئلهٔ ۵ بند ۴ را ببینید) برابر است با:

$$\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)(۴a)^{\frac{۱}{۵}}=\frac{۵}{۴}(۴a)^{\frac{۱}{۵}}$$

با در نظر گرفتن ۲,۵ $= \frac{۵}{۴}(۴a)^{\frac{۱}{۵}}$، بدست می‌آید:

$$(۴a)^{\frac{۱}{۵}}=۲\Rightarrow ۴a=۳۲\Rightarrow a=۸$$

۲۲. داریم:

$$S=۱-\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}-\frac{۱}{۴^{۲}}+\frac{۱}{۵^{۲}}-\frac{۱}{۶^{۲}}+\cdots=$$
$$=\left(۱+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\frac{۱}{۴^{۲}}+\frac{۱}{۵^{۲}}+\frac{۱}{۶^{۲}}+\cdots\right)-$$
$$-۲\left(\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۴^{۲}}+\frac{۱}{۶^{۲}}+\cdots\right)=$$
$$=\left(۱+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\frac{۱}{۴^{۲}}+\frac{۱}{۵^{۲}}+\frac{۱}{۶^{۲}}+\cdots\right)-$$
$$-\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\cdots\right)=$$
$$=\frac{۱}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲^{۲}}+\frac{۱}{۳^{۲}}+\cdots\right)=\frac{۱}{۲}\cdot\frac{\pi^{۲}}{۶}=\frac{\pi^{۲}}{۱۲}$$

(از نامساوی (۲۷) استفاده کردیم).

۲۳. چون $\alpha>۰$ است $۱+\alpha>۱$ می‌شود، بنابراین:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۱+\alpha}>۱+\frac{۱+\alpha}{n}$$
$$\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{۱+\alpha}>۱-\frac{۱+\alpha}{n}$$

با ضرب این نامساویها در $n^{۱+\alpha}$ بدست می‌آید:

$$(n+۱)^{۱+\alpha} > n^{۱+\alpha} + (۱+\alpha)\, n^{\alpha},$$
$$(n-۱)^{۱+\alpha} > n^{۱+\alpha} - (۱+\alpha)\, n^{\alpha}$$

از این نامساویها نتیجه می‌شود:

$$\frac{n^{۱+\alpha} - (n-۱)^{۱+\alpha}}{۱+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+۱)^{۱+\alpha} - n^{۱+\alpha}}{۱+\alpha}$$

این نامساویها را به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots, n$ می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۱+\alpha} < ۱ < \frac{۲^{۱+\alpha} - ۱}{۱+\alpha}$$
$$\frac{۲^{۱+\alpha} - ۱}{۱+\alpha} < ۲^{\alpha} < \frac{۳^{۱+\alpha} - ۲^{۱+\alpha}}{۱+\alpha}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{n^{۱+\alpha} - (n-۱)^{۱+\alpha}}{۱+\alpha} < n^{\alpha} < \frac{(n+۱)^{۱+\alpha} - n^{۱+\alpha}}{۱+\alpha}$$

از مجموع این نامساویها بدست می‌آید:

$$\frac{n^{۱+\alpha}}{۱+\alpha} < ۱ + ۲^{\alpha} + ۳^{\alpha} + \cdots + n^{\alpha} < \frac{(n+۱)^{۱+\alpha} - ۱}{۱+\alpha} < \frac{(n+۱)^{۱+\alpha}}{۱+\alpha}$$

۲۴. از نامساوی تمرین ۲۳ نتیجه می‌شود:

$$\frac{۱}{۱+\alpha} < \frac{۱ + ۲^{\alpha} + ۳^{\alpha} + \cdots + n^{\alpha}}{n^{۱+\alpha}} < \frac{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{۱+\alpha}}{۱+\alpha}$$

سمت چپ نامساویهای اخیر مقدار ثابت $\frac{۱}{۱+\alpha}$ است و سمت راست

تساوی هم بسمت حدی مساوی $\frac{1}{1+\alpha}$ میل مـی‌کند (وقتی n بسمت بی‌نهایت میل کند). بنابراین مقدار وسط ایـن نامساویها هـم بسمت همان حد میل می‌کند، یعنی:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{1+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha}$$

۲۵. قراردادهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A^3 = a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3,$$
$$B^3 = b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3,\ C^3 = c_1^3 + c_2^3 + \cdots + c_n^3$$
$$x_1 = \frac{a_1}{A},\ x_2 = \frac{a_2}{A},\ \ldots,\ x_n = \frac{a_n}{A};$$
$$y_1 = \frac{b_1}{B},\ y_2 = \frac{b_2}{B},\ \ldots,\ y_n = \frac{b_n}{B};$$
$$z_1 = \frac{c_1}{C},\ z_2 = \frac{c_2}{C},\ \ldots,\ z_n = \frac{c_n}{C}$$

بر اساس نامساوی (۱۰) داریم:

$$a_1b_1c_1 = ABC\ x_1y_1z_1 \leqslant ABC\ \frac{x_1^3 + y_1^3 + z_1^3}{3}$$
$$a_2b_2c_2 = ABC\ x_2y_2z_2 \leqslant ABC\ \frac{x_2^3 + y_2^3 + z_2^3}{3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nb_nc_n = ABC\ x_ny_nz_n \leqslant ABC\ \frac{x_n^3 + y_n^3 + z_n^3}{3}$$

از مجموع این نامساویها بدست می‌آید:

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n \leqslant$$
$$\leqslant ABC\left(\frac{x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3}{3} + \frac{y_1^3 + y_2^3 + \cdots + y_n^3}{3} + \right.$$
$$\left. + \frac{z_1^3 + z_2^3 + \cdots + z_n^3}{3}\right)$$

با توجه به قراردادهای ابتدای حل داریم:

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = \frac{a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3}{A^3} =$$
$$= \frac{A^3}{A^3} = 1$$

$$y_1^3 + y_2^3 + \cdots + y_n^3 = 1,\ z_1^3 + z_2^3 + \cdots z_n^3 = 1$$

و بنابراین بدست می‌آید:

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n \leqslant$$
$$\leqslant ABC\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = ABC$$

اگر طرفین این نامساوی را مکعب کنیم، بدست می‌آید:

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 + \cdots + a_nb_nc_n)^3 \leqslant A^3B^3C^3 =$$
$$= (a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3)(b_1^3 + b_2^3 + \cdots + b_n^3)(c_1^3 +$$
$$+ c_2^3 + \cdots + c_n^3)$$

۲۶. نامساویهای (۲۴) را برای مقادیر مختلف n می‌نویسیم:

$$ln\,\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} < ln\,\frac{n}{n-1}$$
$$ln\,\frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n+1} < ln\,\frac{n+1}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$ln\,\frac{kn+1}{kn} < \frac{1}{kn} < ln\,\frac{kn}{kn-1}$$

از مجموع این نامساویها بدست می‌آید:

$$ln\,\frac{(n+1)(n+2)\cdots(kn+1)}{n(n+1)\ldots kn} < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} +$$
$$+ \cdots + \frac{1}{kn} < ln\left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n+1}{n}\cdots\frac{kn}{kn-1}\right)$$

یعنی:

$$ln\,\frac{kn+1}{n} = ln\left(k + \frac{1}{n}\right) <$$

$$< \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} <$$

$$< \ln \frac{kn}{n-1} = \ln\left(k + \frac{k}{n-1}\right)$$

اگــر n بسمت بی‌نهایــت میل کــنــد، $\ln\left(k + \frac{1}{n}\right)$ بسمت $\ln k$ و $\ln\left(k + \frac{k}{n-1}\right)$ هــم بسمت همین حــد میل می‌کند. بنابرایــن خواهیم داشت :

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{kn}\right) = \ln k$$

کتابهای شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

۱۷- گلی برای تو (مجموعه شعر)	ازمجدالدین میرفخرائی (گلچین گیلانی)
۱۸- مبانی زمین‌شناسی	نوشتهٔ اوبروچف ترجمهٔ عبدالکریم قریب
۱۹- گزینهٔ ادب	مصطفی بی‌آزار، محمدحسن ظهوری، علی مرتضائیان ونعمت‌الله مطلوب
۲۰- انقلاب افریقا (چاپ دوم)	نوشتهٔ فرانتس فانون ترجمهٔ محمد امین کاردان
۲۱- اندیشه‌های میرزافتحعلی آخوندزاده	نوشتهٔ دکتر فریدون آدمیت
۲۲- بانگ جرس (راهنمای مشکلات دیوان حافظ)	نوشتهٔ پرتو علوی
۲۳- تحلیل ذهن	نوشتهٔ برتراندراسل ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر
۲۴- تمثیلات (شش نمایشنامه و یك داستان)	نوشتهٔ میرزا فتحعلی آخوندزاده ترجمهٔ میرزا جعفر قراجه‌داغی
۲۵- داستانها و قصه‌ها	تألیف مجتبی مینوی
۲۶- قضیه رابرت اوپنهایمر	نوشتهٔ هاینار کیپهارت ترجمهٔ نجف دریابندری
۲۷- مسیح بازمصلوب	نوشتهٔ نیکوس کازانتزاکیس ترجمهٔ محمد قاضی
۲۸- منطق سمبلیك	نوشتهٔ سوزان لنگر ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر
۲۹- تاریخ چیست؟	نوشتهٔ ای. اچ کار ترجمهٔ دکتر حسن کامشاد
۳۰- آلبرکامو	نوشتهٔ کانرکروز اوبراین ترجمهٔ عزت‌اله فولادوند
۳۱- سفرنامه ونیزیان در ایران	نوشتهٔ پنج سوداگر ونیزی در زمان حکومت آق‌قویونلو ترجمهٔ دکتر منوچهر امیری
۳۲- دربارهٔ کلیله و دمنه	نوشتهٔ دکتر محمدجعفر محجوب
۳۳- صداشناسی موسیقی	نوشتهٔ امین شهمیری
۳۴- استقراء ریاضی	نوشتهٔ سومینسکی - گولوونیایاگلوم ترجمهٔ پرویز شهریاری
۳۵- جبر و مقابله خوارزمی	نوشتهٔ محمدبن موسی خوارزمی ترجمهٔ حسین خدیوجم
۳۶- رسم فنی	نوشتهٔ امیرمنصور امیر صدری محمدجواد افتخاری
۳۷- سرگرمیهای هندسه	نوشتهٔ یاکوب ایسیدوروویچ پرلمان ترجمهٔ پرویز شهریاری
۳۸- مسائل مسابقات فیزیك ومکانیك	نوشتهٔ س. او. گونچارنکو ترجمهٔ غضنفر بازرگان
۳۹- مسائل مسابقات شیمی	نوشتهٔ باقر مظفرزاده

۴۰ـ معادلات دیفرانسیل	نوشتهٔ محمدجواد افتخاری
۴۱ـ آموزش شیمی (چاپ دوم)	نوشتهٔ دکتر پرویز ایزدی
۴۲ـ اصول خط‌کش محاسبه	نوشتهٔ م. ه. شفیعیها
۴۳ـ روشهای مثلثات	نوشتهٔ پرویزشهریاری ـ احمد فیروزنیا
۴۴ـ روش حل مسائل فیزیك	نوشتهٔ م. اسپرانسکی
۴۵ـ مسائل عمومی ریاضیات	نوشتهٔ باقر امامی
۴۶ـ ریاضیات چیست؟	نوشتهٔ ریچارد کورانت و هربرت رابینز
	ترجمهٔ حسن صفاری
۴۷ـ ۲۵۰ مسئله	نوشتهٔ واتسلاو سرپینسکی
	ترجمهٔ پرویز شهریاری
۴۸ـ فلسفهٔ ریاضی	نوشتهٔ استیفن س. بارکر
	ترجمهٔ احمد بیرشك
۴۹ـ لگاریتم	نوشتهٔ گ. استاکوف
	ترجمهٔ پرویز شهریاری

۵۰ـ سفر به فضا (کودکان)	نوشتهٔ لوسیل ساترلند
	ترجمهٔ احمد ایرانی
۵۱ـ خزندگان و دوزیستان (کودکان)	نوشتهٔ لوسیل ساترلند
	ترجمهٔ احمد ایرانی
۵۲ـ فردیناند	نوشتهٔ رابرت لاوسن
	ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی
۵۳ـ قورباغه را می‌شناسید	ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی
۵۴ـ اقبال و غول	نوشتهٔ بنیامین الکین
	ترجمهٔ مهدخت دولت‌آبادی
۵۵ـ علی و آذر (کتاب آموزش انگلیسی برای نوجوانان)	
۵۶ـ هدیه (کتاب آموزش انگلیسی برای نوآموزان)	
۵۷ـ آموزش حروف انگلیسی (برای نوآموزان زبانهای لاتین)	
۵۸ـ راهنمای نقاشی	غلامعلی گنجی
۵۹ـ سخن و سخنوران	نوشتهٔ بدیع‌الزمان فروزانفر
۶۰ـ ریاضیات‌نوین	نوشتهٔ سرژ برمان ـ رنه بزار
	ترجمهٔ احمد بیرشك
۶۱ـ تلویزیون	نوشتهٔ مهندس خداداد القابی
۶۲ـ روزهای سیاه غنا	نوشتهٔ قوام‌نکرومه
	ترجمهٔ جواد پیمان
۶۳ـ ژان‌پل‌سارتر	نوشتهٔ موریس کرانستون
	ترجمهٔ منوچهر بزرگمهر
۶۴ـ نامساویها	نوشتهٔ پاول‌پترویچ کاروکین
	ترجمهٔ پرویز شهریاری

کاوش در ریاضیات ۳

شرکت سهامی انتشارات خوارزمی

خیابان ابوریحان شمارهٔ ۱۰۷

بها ۵۰ ریال