مجموعه دانش

-۱-

ترجمه : پرویز شهریاری
ابراهیم عادل

المپیادهای ریاضی (مجارستان)

مجموعهٔ دانش

المپیادهای ریاضی مجارستان

(مسابقه‌های آتووش)

ترجمهٔ: پرویزشهریاری
ابراهیم عادل

مؤسسه انتشارات مشعل دانشجو

تهران/خیابان انقلاب/روبروی لاله‌زار نو/جنب آموزشگاه علمی دانشجو
پلاک/۴۹۴/تلفن ۸۲۸۹۵۶/۸۲۹۱۹۰/۸۳۳۵۷۶

مجموعهٔ کامل

المپیادهای ریاضی مجارستان
(مسابقه‌های آتووش)

ترجمه : پرویز شهریاری / ابراهیم عادل
چاپ اول / اردیبهشت ۶۸
چاپ دوم / آذر ۶۸ / ۵۰۰۰ نسخه
ناشر : مؤسسهٔ انتشارات مشعل دانشجو

امور فنی : حسن نیکبخت

چاپ : آذر

فهرست

پیش‌گفتار چاپ امریکائی

در زمان ما، تلاش زیادی برای بهبود کیفیت تدریس ریاضیات در همهٔ سطح‌ها، به‌عمل می‌آید. بنابراین کاملاً طبیعی است که ما هم در جست‌وجوی انگیزه‌های بیشتری در این راه باشیم و برای کشف و پرورش استعدادهای نهفته‌ای که در جامعهٔ ما وجود دارد، امکان‌های تازه‌ای را مورد آزمایش قرار دهیم. برنامهٔ پژوهشی گروه بررسی ریاضیات در دبیرستان، چنین هدفی را دنبال می‌کند. ترجمهٔ حاضر ازمجموعهٔ مسأله‌های مسابقه‌ای درمجارستان که به‌نام مسابقه‌های آت‌ووش *Eötvös* مشهور است، به‌این هدف یاری می‌رساند.

ازآن‌جاکه من، یکی ازچند حلقهٔ موجود بین نسل جدید علاقه‌مند به ریاضیات ونسل قدیمی‌که شاهد نخستین مرحلهٔ اشاعه و ترویج این‌مسابقه‌ها بود، هستم، از من خواسته شده است تا چندکلمه‌ای به‌عنوان پیش‌گفتار، برترجمهٔ انگلیسی این مجموعه بنویسم.

مسابقهٔ آت‌ووش درسال ۱۸۹۴، درکشور مجارستان پایه‌گذاری شد و نقش چشمگیری در ترویج ریاضیات، در آن کشور کوچك داشت.[1] همهٔ دانش‌آموزانی‌که تازه وارد دانشگاه می‌شدند، اجازهٔ شرکت در این مسابقه را داشتند؛ انتشار مسأله‌های مسابقه‌ای و نام برندگان آن، ازهمان آغاز،

---

۱) مجارستان، پیش‌از جنگ‌جهانی اول ۱۹ میلیون جمعیت داشت و امروز ۱۰ میلیون جمعیت دارد.

یك رویدار جالب و مورد علاقهٔ همگان بود. در میان برندگان ده سال اول این‌مسابقه، به‌نام کسانی چون *Fejer*، *Vonkármán*، *Harr* و *Riesz* برمی‌خوریم که بعدها، شهرت جهانی یافتند. صرف‌نظر از وقفه‌های کوتاهی که درنتیجهٔ جنگ‌ها و پیامدهای ناشی ازآن‌ها پیش آمد، این مسابقه‌ها تا به‌امروز ادامه یافته است، گرچه نام آن تغییرکرده و سازمان‌دهی و دامنهٔ آن، درسال‌های اخیر، گسترش بیشتری پیدا کرده است.

مسأله‌ها، تقریباً همه، براساس برنامهٔ دبیرستانی است (حساب دیفرانسیل و انتگرال شامل آن نمی‌شود) ؛ کیفیت آن‌ها مقدماتی، ولی به‌طور نسبی دشوار و، حل آن‌ها، مستلزم درجهٔ معینی بینش وقدرت‌خلاق است. در جلسه‌های مسابقه، می‌توان ازهرگونه جزوه یا کتاب‌کمك گرفت.

ریاضیات، فعالیت ذهن آدمی است و تقریباً بـه‌اندازهٔ فـکر و اندیشهٔ انسان، متنوع و گوناگون‌است. به‌همین‌جهت، برنامه‌ریزی برای ایجادشوق در ریاضیات به‌مقیاس وسیع، با استفاده از امکان‌ها و شیوه‌های خاص، غیرممکن به‌نظر می‌رسد، با وجود این، ایجاد رقابت، می‌تواند انگیزهٔ نیرومندی دراین‌راه باشد...

احتمالاً، در سازمان‌دهی مسابقه‌های آت‌ووش درکشور مجارستان، نمونه‌های انگلیسی وفرانسوی‌آن، موردتوجه قرارگرفته است. دراین‌باره، باید به‌ویژه از «آزمون افتخاری ریاضیات» درکمبریج انگلستان و «کنکور» ریاضیات برای ورود به «مدرسهٔ‌عالی» در فرانسه، یادکرد. درضمن، این نمونه‌های نخستین، دال برآن است‌که، برای جلب علاقهٔ افراد و جذب بهترین استعدادها و مشخص‌کردن آن‌ها، نوعی تدارك و سازمان‌دهی ضروری است. در انگلستان، شرکت دراین‌آزمون افتخاری، با سازمان‌دهی و تداوم قبلی همراه است. و در فرانسه، مدرسه‌های دولتی، امکان‌های لازم را برای آمادگی در امتحان «کنکور» ریاضیات، فراهم می‌کنند.

به‌همین‌منظور، در مجارستان، مجله‌ای پایه‌گذاری شدکه اساساً برای دانش‌آموزان دبیرستانی منتشر می‌شد. این مجله، انگیزهٔ دیگری بود، برای آماده‌ساختن دانش‌آموز برای شرکت درمسابقهٔ ورودی دانشگاه.

انتشار این مجله، تقریباً همزمان بـا آغـاز مسابقهٔ آت‌ووش در سال ۱۸۹۴ به‌وسیلهٔ دانیل آرنی (*Daniel Arany*) آغاز شد؛ سرپرستی آن را، سال‌ها، لازلوراز (*Laszlo Racz*)، معلم‌توانای دبیرستان‌ها به‌عهده‌داشت و، بعدها، معلمان شایسته وعالی‌قدر دیگری، آن را اداره می‌کردند. بخشی ازمقاله‌های این مجله را معلمان و بخشی دیگر را، ریاضی‌دانان دانشگاهی، و اکثراً جوان، تهیه می‌کردند. مقالـه‌ها اساساً، شامل ریاضیات مقدماتی و بیشتر هندسه، انـدکی هندسهٔ تصویری و تـرسیمی، جبر و نظریهٔ عددها و، بعدهـا، گریزهایی بـه حساب دیفرانسیل و انتگـرال می‌شد. اما بهترین و سودمندترین بخش مجله، بخش مسأله‌هـا بودکه، درضمن، بیشتر صفحه‌های مجله را دربر می‌گرفت و اساساً بـرای دانش‌آموزان بـود و به‌وسیلهٔ خود آن‌هـا تهیه می‌شد. بهترین راه‌حل‌هـایی‌کـه به‌دفتر مجله می‌رسید، بـا نام حل‌کنندهٔ آن و نـام مدرسهٔ او، همراه با نـام‌کسانی‌که راه‌حل‌هـای درست ارائه داده بودند، درمجله چاپ می‌شد.

زمانی را که من، در این مرحله از انتشار این نشریه (بین سال‌های ۱۹۰۸ و ۱۹۱۲) به نوعی شرکت داشتم، به‌روشنی به‌یاد دارم. همیشه با شوقی فـراوان، در انتظـار انتشار شمارهٔ تـازهٔ مجله بـودم و نخستین‌کار مورد علاقه‌ام، نظرانداختن به بخش مسأله‌ها بود و مشتاقانـه و بی‌درنگ درگیر حل آن‌ها می‌شدم. خیلی‌زود، ازطریق همین مجله، با نام‌کسانی‌آشنا شدم‌که دراین نبرد فکری شرکت داشتند و، بارها، با رشك وحسادتی‌فراوان از چگونگی موفقیت آن‌هـا درحل بعضی از مسأله‌ها کـه من درحل آن‌ها کاملاً موفق‌نبودم، وگاه از راه‌حل‌های‌بهتر، ساده‌تر، ظریف‌تر وابتکاری‌تر، آگاه‌می‌شدم. داستان‌زیر، شایدکاملاً دقیق‌نباشد، ولی به‌یقین، حقیقت‌هایی را بازگو می‌کند:

«حدود سال ۱۹۴۰ است. صحنهٔ داستان یـکی از اردوگـاه‌هـای‌کار اجباری مجارستان فـاشیست: درست در آغاز انتقال تأسف‌بار حکومت، از نظامی نیمه‌استبدادی بـه‌نظام جنایت‌کار از نـوع نـازیسم. اکثر افراد این اردوگاه‌ها را، یهودیان جوانی تشکیل می‌دادندکه مجبور به‌انجام وظایفی

کاملاً بی‌معنی، شاق و بی‌ثمر بودند. جوانی (که هم‌اکنون، یکی‌از ریاضی‌دانان برجستهٔ مجارستان است)، درآن اردو بود، اجازه بدهید او را آقای «ایکس» بنامیم. او، زیر بار تیرآهن سنگینی، نفس‌نفس می‌زد، گروهبان، با لحنی بی‌ادبانه و بافریاد، او را با نام خانوادگیش صدا زد. افسر ارشد او، درهمان نزدیکی‌ها بود، درست چند قدم‌آن‌طرف‌تر، برگشت و پرسید:

ـ بگو ببینم، درست شنیدم؟ نام شما «ایکس» است؟

ـ بله.

ـ شما همان‌کسی نیستید که، سال‌ها پیش، در «مجلهٔ دبیرستان» کار می‌کرد؟

ـ چرا.

ـ شما مسأله‌های زیادی را حل می‌کردید، مسأله‌های دشواری‌که ماها از حل‌آن‌ها عاجز بودیم. می‌دانیدکه‌ما به‌شما رشك می‌بردیم؟

پایان داستان چنین است‌که، ازآن پس، در اردوگاه، رفتاد نرم‌تری با آقای «ایکس» داشتند وحتی، بعدها، در رابطه با مسأله‌های ریاضی، توانست با افسر فرمانده، رابطه برقرارکند.»

علاقهٔ زیادی‌که، این جوانان، به‌نشریه پیدا کرده بودند، دربسیاری از جنبه‌های زندگی آن‌ها، موثر و تعیین‌کننده بود. اشتغال فکری‌آن‌ها با مسأله‌های جالب و، درعین‌حال، ساده ومقدماتی، وتلاش آن‌ها، دریافتن راه‌حل‌های صریح و روشن وکامل، تجربهٔ خوبی برای آن‌ها بود، تجربه‌ای همراه بالذت استفاده از قدرت وخلاقیت‌فکری خود. سرانجام، آن‌ها پای‌بند معشوقی حسادت‌برانگیز، یعنی ریاضیات شدند. تنها مشکلی‌که داشتند این بودکه: چه رشتهٔ خاصی را دنبال‌کنند، ریاضیات، فیزیك یا مهندسی؟ ولی این، موضوعی درجه دوم بود؛ آن‌ها در واقع، مسیر زندگی آیندهٔ خود را یافته بودند. در این‌جا، به‌یاد سخن کرونکر می‌افتم‌که ریاضیات را، با میوهٔ درخت سدر مقایسه‌کرده است: «هرکسی‌که یك‌باراین میوه را چشیده باشد، دیگر نمی‌تواند از خوردن آن صرف‌نظر کند».

Gábor Tzego

دانشگاه استانفورد، ژانویهٔ ۱۹۶۱

نکته‌هایی از پیش‌گفتار چاپ مجارستانی

نخستین دورهٔ این گونه مسابقه‌ها، در سال ۱۸۹۴، به‌وسیلهٔ انجمن ریاضی ـ فیزیک مجارستان، به‌افتخار بنیان‌گذار و رئیس آن انجمن، فیزیک‌دان برجسته، بارون لوراند آت‌ووش *Baron Loránd Eötvös*، که درهمان سال وزیر آموزش و پرورش کشور شده بود، برگزار شد. درپاییز هرسال، مسابقه‌هایی به‌یادبود این رویداد انجام می‌شود وکسانی که در همان سال، از دبیرستان فارغ‌التحصیل شده‌اند، می‌توانند درمسابقه شرکت کنند. انجمن دو ورقه از بهترین ورقه‌های امتحانی را انتخاب و جایزهٔ اول و دوم آت‌ووش را، با دست رئیس انجمن، به صاحبان آن‌ها می‌دهد.

این کتاب، همزمان بادهمین سالگرد درگذشت آت‌ووش انتشارمی‌یابد...

این کتاب تنها برای استفادهٔ دانش‌آموزان ومعلمان تدوین نشده است، بلکه برای همهٔ علاقه‌مندان به‌ریاضیات، می‌تواند جالب وآموزنده باشد...

خواننده چگونه می‌تواند از این کتاب استفاده کند؟ به‌نظرمن، اگر بدون هیجان و شوق لحظه‌ای، با علاقه و درعین‌حال حوصله و پشتکار، به‌کار بپردازد، هرکسی می‌تواند مناسب‌ترین راه را، برای بهره‌بردن از مطالب متنوع این کتاب پیدا کند...

ژوزف کورچاک

بوداپست، نهم آوریل ۱۹۲۹

اگرچه در چاپ جدید این کتاب، تغییرهایی صورت گرفته است، ولی

درمجموع، اصالت وشیوهٔ کار کورچاک حفظ شده است.

. . . . .

امید است که به‌انتظار علاقه‌مندان پاسخ داده باشیم و این اثر، برای بسیاری، شادی‌آفرین وسودمند باشد.

بوداپست. مجارستان ۱۹۵۵

مسأله‌ها

۱۸۹۴

۰۱ به‌فرض درست بودن عددهای x و y، ثابت کنید، اگر $2x+3y$ بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، $9x+5y$ هم بر ۱۷ بخش‌پذیر است و برعکس.

۰۲ دایرهٔ k به‌مرکز O ودونقطهٔ P و Q مفروض‌اند. مثلث قائم‌الزاویه‌ای دردایره محاط کنید که دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن، به‌ترتیب، ازنقطه‌های P و Q بگذرند. درچه موقعیتی از P و Q، مسأله جواب ندارد؟

۰۳ طول‌های سه ضلع مثلثی، تشکیل یك تصاعد حسابی می‌دهند. اگر قدر نسبت این تصاعد برابر d ومساحت مثلث برابر t باشد، طول هرضلع و اندازهٔ هرزاویهٔ مثلث را پیدا کنید. جواب مسأله را، برای حالت $d=1$ و $t=6$ به‌دست آورید.

۱۸۹۵

۰۴ ثابت کنید، nکارت را می‌توان به $2(2^{n-1}-1)$ طریق، بین‌دونفر تقسیم کرد.

۰۵ مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده است. نقطهٔ N را در درون مثلث طوری پیدا کنید که زاویه‌های NBC، NCA و NAB برابر باشند.

۰۶ شعاع دایرهٔ محیطی مثلثی برابر R است. اگر طول یکی ازضلع‌های مثلث برابر c ونسبت دوضلع دیگر آن برابر $\frac{a}{b}$ باشد، طول هریك از سه ضلع و اندازهٔ هریك از سه زاویهٔ مثلث را پیدا کنید.

۱۸۹۶

۷. ثابت کنید: $\log n \geqslant k \cdot \log 2$؛ که در آن، n عددی طبیعی و k تعداد مقسوم‌علیه‌های اول و متمایز عدد n است.

۸. ثابت کنید که دستگاه معادله‌های

$$x^2 - 3xy + 2y^2 + x - y = 0,\ x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 7y = 0$$

با معادلهٔ $xy - 12x + 15y = 0$ سازگار است.

۹. پای ارتفاع‌های یك مثلث داده شده‌اند، مثلث را رسم کنید. مثلث جواب را Y می‌نامیم. پای ارتفاع‌های مثلث Y را به هم وصل می‌کنیم؛ مثلث X به‌دست می‌آید. طول ضلع‌های مثلث Y را برحسب طولِ ضلع‌های مثلث X به‌دست آورید.

۱۸۹۷

۱۰. α، β و γ، زاویه‌های یك مثلث‌قائم‌الزاویه‌اند. درستی این رابطه را ثابت کنید:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)+$$
$$+\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)+\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=0$$

۱۱. درستی نابرابری زیر را، برای α، β و γ (زاویه‌های یك مثلث غیرمشخص) ثابت کنید:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{4}$$

۱۲. $ABCD$ را یك مستطیل می‌گیریم ونقطه‌های برخورد خط‌راست e را، با ضلع‌های AB، CD، AD و BC، ویا امتدادآن‌ها، به‌ترتیب M، N، P و Q می‌نامیم. اگر نقطه‌های M، N، P و Q و، همچنین، مقدار p، طول ضلع AB مفروض باشند، مستطیل را رسم کنید. باچه شرط‌هایی مسأله جواب دارد؟ مسأله چند جواب دارد؟

۱۸۹۸

۱۳. همهٔ عددهای طبیعی n را پیدا کنید، به‌نحوی که به‌ازای آن‌ها،

عدد $1 + 2^n$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۱۴. این قضیه را ثابت کنید:

اگر دومثلث، یك زاویهٔ برابر داشته باشند، آن‌گاه، مجموع سینوس‌های دوزاویهٔ دیگر از مثلثی که، در آن، این دوزاویه، تفاضل کمتری دارند، از مجموع سینوس‌های دوزاویهٔ مثلث دوم، بیشتر است.

برمبنای این قضیه، شکل مثلثی را مشخص کنید که مجموع سینوس‌های سه زاویهٔ آن، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱۵. A، B، C و D را، چهار نقطهٔ واقع بریك خط راست l می‌گیریم. مربعی رسم کنید که دو ضلع موازی آن (و یا امتدادهای آن‌ها) ازنقطه‌های A و B ودوضلع دیگر آن (یاامتدادهای آن‌ها) ازنقطه‌های C و D بگذرند.

۱۸۹۹

۱۶. نقطه‌های A_0، A_1، A_2، A_3 و A_4، پیرامون دایرهٔ به‌شعاع واحد را به‌پنج کمان برابر تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید، برای وترهای A_0A_1 و A_0A_2، داریم:

$$(A_0A_1 \cdot A_0A_2)^2 = 5$$

۱۷. اگر x_1 و x_2، ریشه‌های معادلهٔ

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

باشند، ثابت کنید، x_1^3 و x_2^3، ریشه معادلهٔ زیرهستند:

$$y^2 - (a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd)y + (ad - bc)^3 = 0$$

۱۸. ثابت کنید، عبارت

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

به‌ازای هرعددطبیعی n، بر ۱۸۹۷ بخش‌پذیر است.

۱۹۰۰

۱۹. a، b، c و d، عددهایی درست‌اند و درضمن، d مضربی از ۵

نیست. می‌دانیم، برای عدد درست m، عدد am^3+bm^2+cm+d بر ۵ بخش‌پذیر است؛ ثابت کنید، عدد درستی مثل n می‌توان پیدا کرد، به‌نحوی که عدد dn^3+cn^2+bn+a هم، بر ۵ بخش‌پذیر باشد.

۲۰. مثلثی را با معلوم بودن c (طول ضلع AB)، r (شعاع دایرهٔ محاطی داخلی) و r_c (شعاع دایره محاطی خارجی مماس برضلع AB و امتدادهای BC و AC)، رسم کنید.

۲۱. ارتفاع تخته‌سنگی ۳۰۰متر است. سقوط آزاد دوقطره باران را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم، قطرهٔ دوم وقتی از سنگ جداشده است که، قطرهٔ اول، به‌اندازهٔ ۰/۰۰۱ میلی‌متر پایین آمده است. فاصلهٔ بین دوقطره را، در لحظه‌ای که قطرهٔ اول به‌زمین می‌رسد، پیدا کنید. جواب را با دقت ۰/۱ میلی‌متر محاسبه کنید. نیروی مقاومت هوا را به‌حساب نیاورید.

۱۹۰۱

۲۲. ثابت کنید، برای هرعدد درست ومثبت n، عدد

$$S=1^n+2^n+3^n+4^n$$

بر ۵ بخش‌پذیر است، اگر وتنها اگر n مضربی از ۴ نباشد.

۲۳. $u=cotg\ 22°30'$ و $v=\frac{1}{sin\ 22°30'}$ می‌گیریم ثابت کنید:

اولاً معادلهٔ درجهٔ دومی، با ضریب‌های درست وضریب درجهٔ دوم واحد، می‌توان پیداکردکه یکی ازریشه‌های آن برابر u باشد؛ ثانیاً معادلهٔ درجهٔ چهارمی، با ضریب‌های درست وضریب درجهٔ چهارم واحد، پیدا می‌شودکه یکی از ریشه‌های آن برابر v باشد.

۲۴. d را بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترك دوعدد طبیعی a و b می‌گیریم $[(a, b)=d]$. ثابت کنید، تعداد عددهای به‌صورت

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \dots,\ (b-1)a,\ ba$$

که بر b بخش‌پذیرند، درست برابر است با d.

۱۹۵۲

۰۲۵ ثابت کنید، هر عبارت درجهٔ دوم به‌صورت زیر را

$$Q(x)=Ax^{2}+Bx+C$$

الف) می‌توان به‌طور منحصر به‌فرد به‌صورت

$$Q(x)=k\frac{x(x-1)}{1\times 2}+lx+m$$

نوشت که، در آن، k و l و m بستگی به‌ضریب‌های A و B و C دارند؛

ب) $Q(x)$، برای هرمقدار درست x، وقتی‌وتنها وقتی عددهای‌درست را می‌پذیرد که k و l و m، عددهایی درست باشند.

۰۲۶ کرهٔ S، به‌مرکز O و به‌شعاع r، داده شده است. P را نقطه‌ای‌در بیرون کرهٔ S، و S' راکره‌ای به‌مرکز P و به‌شعاع PO فرض می‌کنیم. اگر مساحت بخشی از کرهٔ S' راکه در درون کرهٔ S قراردارد، F بنامیم، ثابت کنید، مقدار F بستگی به‌جای نقطهٔ P ندارد.

۰۲۷ ازمثلثی، مقدار T مساحت آن، واندازهٔ زاویهٔ γ از آن داده‌شده است. مطلوب است محاسبهٔ طول ضلع‌های a و b، به‌شرطی‌که بدانیم، طول ضلع c روبه‌رو به‌زاویهٔ γ ازاین مثلث، کمترین مقدار ممکن است.

۱۹۵۳

۰۲۸ می‌دانیم $n=2^{p-1}(2^{p}-1)$، و $2^{p}-1$ عـددی است اول. ثابت‌کنید مجموع همهٔ مقسوم علیه‌های مثبت عدد n (به‌جز خـود n)، برابر است با n.

۰۲۹ برای دومقـدار $x=\sin\alpha$ و $y=\sin\beta$، چهارمقـدار متمایز برای $z=\sin(\alpha+\beta)$ وجود دارد.

الف) رابطه‌ای بین x و y و z پیداکنیدکـه شامل تابع مثلثاتی یـا رادیکالی نباشد.

ب) برای زوج عدد (x, y)، مقدارهای x و y را طوری پیدا کنید که، برای آن‌ها، $z=\sin(\alpha+\beta)$، کمتر ازچهارمقدار متمایز را بپذیرد.

۳۰. A، B، C و D را رأس‌های یک لوزی فرض می‌کنیم. k_1 دایره‌ای است که از سه نقطهٔ B، C و D گذشته است. همچنین دایرهٔ k_2 از نقطه‌های A، C و D؛ دایرهٔ k_3 از نقطه‌های A، B و D و، سرانجام، دایرهٔ k_4 ازنقطه‌های A، B و C گذشته‌اند. ثابت کنید، زاویهٔ بین مماس‌های بردو دایرهٔ k_1 و k_3 درنقطهٔ B، برابر است با زاویهٔ بین مماس‌های بردو دایرهٔ k_2 و k_4 درنقطهٔ A.

۱۹۵۴

۳۱. ثابت کنید، اگریك پنج‌ضلعی دارای زاویه‌های برابروقابل‌محاط دریك دایره باشد، یك پنج‌ضلعی منتظم است (یعنی ضلعی‌هایی برابر دارد).

۳۲. a، عددی طبیعی‌است. ثابت کنید، تعداد ریشه‌های مثبت ودرست معادلهٔ

$$x_1+2x_2+\dots+nx_n=a \qquad (1)$$

برابراست با تعداد ریشه‌های نامنفی ودرست، درمعادلهٔ

$$y_1+2y_2+\dots+ny_n=a-\frac{n+1}{2}\cdot n \qquad (2)$$

[مجموعهٔ جواب را درمعادلهٔ (۱)، به‌صورت $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ نشان می‌دهیم.]

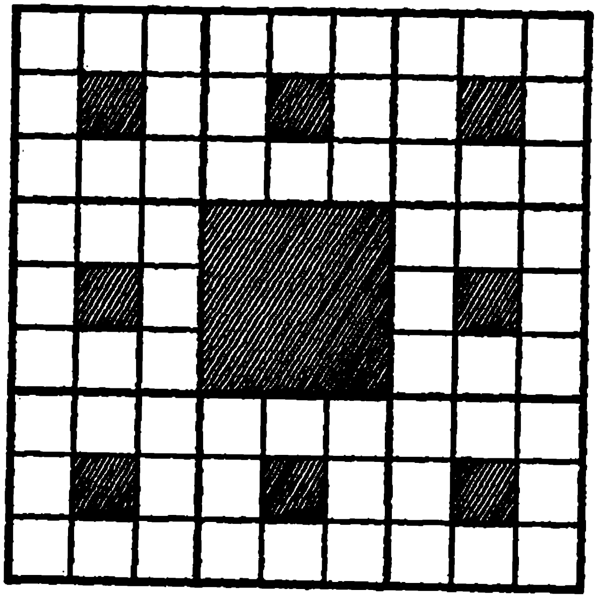
۳۳. O را مرکز مستطیل و A_1A_2 و B_1B_2 را قطرهای آن‌می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی‌نقطهٔ P ورسم آن، به‌شرطی‌که، نقطهٔ P، درهرچهار نابرابری زیرصدق کند:

$$A_1P>OP;\ A_2P>OP;\ B_1P>OP;\ B_2P>OP$$

۱۹۵۵

۳۴. n و p، عددهایی درست و مثبت‌اند. مطلوب است شرط لازم و کافی، برای این‌که، دستگاه معادله‌های

$$x+py=n,\ \ x+y=p^z$$



شکل ۱

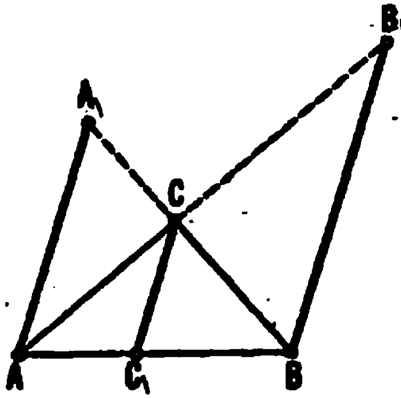
برای (x, y, z)، جوابی درست ومثبت داشته باشد. ثابت کنید، جواب این دستگاه (درصورت وجود)، منحصر به‌فرد است.

۳۵. مربع به‌ضلع واحد را به‌کمك خطهای راستی کـه موازی با ضلع‌های مربع رسم شده‌اند، به‌۹مربع برابر تقسیم می کنیم (شکل ۱). مربع وسط را حذف و، سپس، همین عمل‌را با ۸ مربع باقی‌مانده انجام می‌دهیم. اگراین عمل را n بار تکرار کنیم:

الف) چندمربع به‌ضلع $\frac{1}{3^n}$ باقی می‌ماند؟

ب) اگـر n به‌سمت بی‌نهایت میل کنـد ($n \to \infty$)، حـد مجموع مساحت‌های مربع‌های وسط را (که حذف شده‌اند)، به‌دست آورید.

۳۶. C_1 را نقطـهٔ دلخواهی برضلـع AB از مثلث ABC می گیریم (شکل ۲) وخط راست CC_1 را رسم می کنیم. BC را امتداد می‌دهیم‌تاخط راستی راکه از A مـوازی CC_1 رسم شده است، در A_1 قطع کند؛ همچنین ACرا امتداد می‌دهیم، تاخط راستی راکه از B موازی CC_1 رسم‌شده‌است در B_1 قطع کند. ثابت کنیا :



شکل ۲

$$\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1}=\frac{1}{CC_1}$$

۱۹۰۶

۳۷. ثابت کنید، اگر مقدار $tg\frac{\alpha}{2}$ عددی گویا باشد، آن‌گاه $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ هم با عددهایی گویا بیان می‌شوند (مگر درحالتی که α، مضرب فردی از π باشدکه، دراین صورت، $tg\frac{\alpha}{2}$ قابل تعریف نیست). برعکس، اگر $\cos\alpha$ و $\sin\alpha$ عددهایی گویا باشند، $tg\frac{\alpha}{2}$ هم عددی گویاست، مگر آن‌که α، مضرب فردی از π باشد.

۳۸. مربع‌هایی روی ضلع‌های یك لوزی ودربیرون لوزی ساخته‌ایم و مرکزهای آن‌ها را M، N، L و K نامیده‌ایم. ثابت‌کنید، چهارضلعی $KLMN$، یك مربع است.

۳۹. $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ تبدیلی از عددهای $(1, 2, 3, \ldots, n)$ هستند. ثابت‌کنید، به‌فرض فرد بودن عدد n، حاصل ضرب زیر، عددی زوج است:

$$(a_1-1)(a_2-2)(a_3-3)\ldots(a_n-n)$$

۱۹۵۷

۴۰. p و q، عددهایی فردند. ثابت کنید، معادلهٔ

$$x^2+2px+2q=0$$

نمی‌تواند ریشهٔ گویا داشته باشد.

۴۱. P. نقطهٔ دلخواهی از درون متوازی‌الاضلاع $ABCD$، و R شعاع دایره‌ای است که از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P، از نزدیک‌ترین رأس متوازی‌الاضلاع، بزرگتر از R است.

۴۲. $0/k_1k_2k_3\ldots = \frac{r}{s}$ را بسط دهدهی عددی گویا می‌گیریم.*

ثابت کنید بین عددهای

$$\sigma_1=10.\frac{r}{s}-k_1,\ \sigma_2=10^2.\frac{r}{s}-(10k_1+k_2),$$

$$\sigma_3=10^3.\frac{r}{s}-(10^2k_1+10k_2+k_3),\ldots$$

دست‌کم دو عدد باهم برابرند.

۱۹۵۸

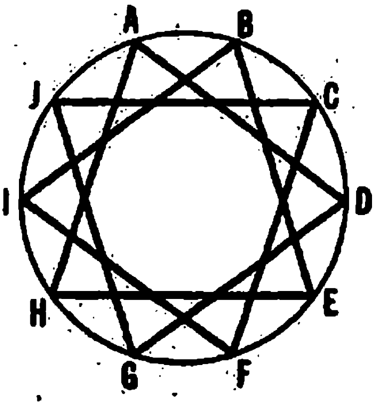
۴۳. a و b دو عدد فردند. ثابت کنید a^3-b^3 وقتی، وتنها وقتی، بر 2^n بخش‌پذیر است که $a-b$ بر 2^n بخش‌پذیر باشد.

۴۴. $n>2$. عددی است طبیعی. ثابت کنید: توان nام طول وتر مثلث قائم‌الزاویه. از مجموع توان‌های nام طول‌های دوضلع دیگر، بزرگتر است.

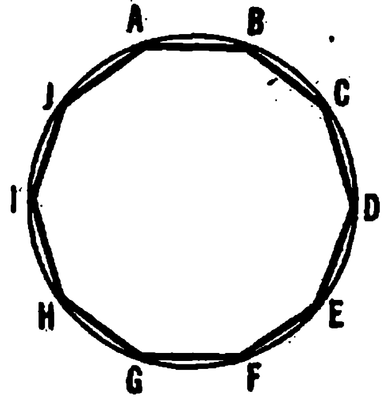
۴۵. ده‌ضلعی منتظم را می‌توان با یکی از دو روش زیر، در دایره محاط کرد: ۱) محیط دایره را به ۱۵ کمان برابر تقسیم و، سپس، نقطه‌های

---

*) در حالتی که بسط عددی پایانی داشته باشد، همهٔ kها، به‌جز چند تا از اولین آن‌ها، برابر صفرند.



شکل ۴



شکل ۳

تقسیم متوالی را با پاره‌خط‌های راست به‌هم وصل کنیم؛ ۲) نقطه‌های تقسیم را دودرمیان با پاره‌خط‌های راست به‌هم وصل کنیم (شکل‌های ۳ و ۴). ثابت کنید تفاضل ضلع‌های این دو ده‌ضلعی، برابراست باشعاع دایره‌محیطی آن‌ها.

۱۹۵۹

۴۶. سه عدد متوالی دلخواه در نظر بگیرید. ثابت کنید؛ مکعب عدد بزرگتر، نمی‌تواند برابر با مجموع مکعب‌های دوعدد دیگر باشد.

۴۷. ثابت کنید اندازهٔ یك زاویه (برحسب رادیان)، ازواسطهٔ حسابی سینوس و تانژانت آن کوچکتر است.

۴۸. A_1، B_1 و C_1 را به‌ترتیب، پای ارتفاع‌های وارد از رأس‌های A، B و C درمثلث ABC، و M را مرکز ارتفاعی مثلث می گیریم (نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های هرمثلث را، مرکز ارتفاعی آن مثلث گویند). فرض کنید، مثلث ارتفاعیهٔ $A_1B_1C_1$ وجود دارد (ازوصل پای سه ارتفاع مثلث به‌یکدیگر، مثلث ارتفاعیه آن مثلث به‌دست می‌آید). ثابت کنید: هریك از نقطه‌های M، A، B و C، مرکزدایره‌ای است که برسه‌ضلع مثلث $A_1B_1C_1$ (یا درصورت لزوم، برامتداد آن‌ها) مماس است. اگریکی از زاویه‌های مثلث ABC منفرجه باشد، چه تفاوتی باحالتی دارد که هرسه زاویهٔ مثلث حاده‌اند؟

۱۹۱۰

۴۹. a، b و c عددهایی حقیقی‌اند و می‌دانیم $a^2+b^2+c^2=1$.
ثابت کنید، این نابرابری‌ها، همیشه برقرارند:

$$-\frac{1}{2}\leqslant ab+bc+ca\leqslant 1$$

۵۰. a، b، c، d و u، عددهائی درست‌اند و می‌دانیم، هر کدام از عددهای ac، $bc+ad$ و bd، مضربی از u هستند. ثابت کنید، عددهای bc و ad هم، مضربی از u هستند.

۵۱. a و b را، به‌ترتیب، طول ضلع‌های BC و AC از مثلث ABC می‌گیریم. زاویهٔ بین این دو ضلع، برابر است با $\gamma=120°$. طول نیمساز زاویهٔ γ را برحسب a و b محاسبه کنید.

۱۹۱۱

۵۲. ثابت کنید، اگر عددهای حقیقی a، b، c و A، B، C باشرطهای $ac-b^2>0$ و $aC-2bB+cA=0$ سازگار باشند، آن‌گاه داریم: $AC-B^2\leqslant 0$.

۵۳. Q را نقطه‌ای از محیط دایره و $P_1P_2P_3 \ldots P_8$ را هشت ضلعی منتظم محاط در این دایره می‌گیریم. ثابت کنید: مجموع توان‌های چهارم فاصله‌های نقطهٔ Q از قطرهای P_1P_5، P_2P_6، P_3P_7 و P_4P_8 هشت‌ضلعی، به‌انتخاب جای نقطهٔ Q برمحیط دایره، بستگی ندارد.

۵۴. ثابت کنید: عدد 3^n+1، به‌ازای $n>1$، بر 2^n بخش‌پذیر نیست.

۱۹۱۲

۵۵. چندعدد nرقمی می‌توان با رقم‌های ۱و۲و۳ درست کرد؟ درچند تا از این عددها، دست‌کم از هررقم ۱و۲و۳، یکبار استفاده شده است؟

۵۶. ثابت کنید، برای هرعدد طبیعی n، عدد

$$A_n=5^n+2\times 3^{n-1}+1$$

بر ۸ بخش‌پذیر است.

۵۷. ثابت کنید: قطرهای یک چهارضلعی وقتی، و تنها وقتی، برهم عمودند که، در آن، مجموع مربع‌های دو ضلع روبه‌رو، برابر با مجموع مربع‌های دوضلع روبه‌روی دیگر باشد.

۱۹۱۳

۵۸. ثابت کنید، برای هرعدد درست $n>۲$ داریم:

$$(۱\times ۲\times ۳\times \dots \times n)^{۲}>n^{n}$$

۵۹. O و O' رادوسرقطری ازیک‌مکعب فرض می‌کنیم. همهٔ یال‌هایی ازمکعب را در نظر می‌گیریم که از رأس O یا O' گذشته‌اند. ثابت کنید: نقطه‌های وسط این یال‌ها بریک صفحه قراردارند و رأس‌های یک‌شش‌ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

۶۰. d را بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a و b می‌گیریم $d=(a, b)$. همچنین، d' بزرگترین‌مقسوم‌علیه مشترک دوعدد a' و b'است $d'=(a', b')$. ثابت کنید، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک چهارعدد

$$aa', bb', ab', ba'$$

برابراست با dd'.

۱۹۱۴

۶۱. A و B را دونقطه ازمحیط دایرهٔ k می‌گیریم. فرض می‌کنیم، دوانتهای کمانی مانند k' از دایرهٔ دیگری مانند l، بردو نقطهٔ A و B منطبق باشد ومساحت دایرهٔ k را به‌دو بخش برابرتقسیم کند. ثابت کنید: طول کمان k' ازقطر دایرهٔ k بزرگتر است.

۶۲. a و b و c، عددهایی حقیقی‌اند و، به ازای $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ داریم:

$$-۱\leqslant ax^{۲}+bx+c\leqslant ۱$$

ثابت کنید، برای $-1 \leqslant x \leqslant 1$ داریم:

$$-4 \leqslant 2ax+b \leqslant 4$$

۶۳. دایرهٔ k، ضلع‌های BC و AC و AB از مثلث ABC را، به‌ترتیب، در نقطه‌های A_1 و A_2؛ B_1 و B_2؛ C_1 و C_2 قطع کرده است. از نقطه‌های A_1 و B_1 و C_1، عمودهایی به‌ترتیب بر BC و AC و AB وارد می‌کنیم. می‌دانیم، این سه عمود در نقطه‌ای مثل M یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید: عمودهای وارد از نقطه‌های A_2 و B_2 و C_2 بر ضلع‌های BC و AC و AB هم، یکدیگر را در یك نقطه قطع می‌کنند.

۱۹۱۵

۶۴. A و B و C، سه عدد دلخواه حقیقی‌اند. ثابت کنید: عددی مانند ν وجود دارد، به‌نحوی که برای هر عدد طبیعی $n>\nu$ داشته باشیم:

$$An^2+Bn+C<n!$$

۶۵. مثلث ABC، به‌طور کامل درداخل یك چندضلعی قراردارد. ثابت کنید: محیط مثلث نمی‌تواند بزرگتر از محیط چندضلعی باشد.

۶۶. ثابت کنید: مساحت مثلث محاط دریك متوازی‌الاضلاع، حداکثر می‌تواند برابر با نصف مساحت متوازی‌الاضلاع باشد.

۱۹۱۶

۶۷. a و b، دوعدد مثبت‌اند. ثابت کنید: یکی از ریشه‌های معادلهٔ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$$

بین $\frac{a}{3}$ و $\frac{2a}{3}$ و ریشهٔ دیگر آن بین $-\frac{2b}{3}$ و $-\frac{b}{3}$ است.

۶۸. نیمساز زاویهٔ C از مثلث ABC، ضلع AB را در نقطهٔ P قطع کرده است. ثابت کنید. پاره‌خط CD، از واسطهٔ هندسی دوضلع AC و BC،

کوتاه‌تر است.*

۶۹. مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ را به‌دو زیرمجموعهٔ دلخواه افراز می‌کنیم. ثابت کنید: یکی از زیرمجموعه‌ها، شامل دوعضو و تفاضل آن‌دوعضو است.

۱۹۱۷

۷۰. a و b، عددهایی درست‌اند. ثابت کنید: اگردستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} y-۲x-a=۰ \\ y^۲-xy+x^۲-b=۰ \end{cases}$$

جواب‌های گویا داشته باشد، حتماً این جواب‌ها، عددهایی درست‌اند.

۷۱. برای مجذور عدد طبیعی a، عددی به‌دست آمده است که، رقم دهگان آن، برابر ۷ شده است. رقم یکان $a^۲$ را پیدا کنید.

۷۲. A و B را دونقطه در درون دایرهٔ k فرض کنید. ثابت کنید: بی‌نهایت دایره وجود دارد که از A و B بگذرند و در درون دایرهٔ k باشند.

۱۹۱۸

۷۳. برای دوقطر متوازی‌الاضلاع $ABCD$، می‌دانیم $AC>BD$. از نقطهٔ C، عمودهایی برخط‌های راست AB و AD فرودمی‌آوریم وپای‌عمودها را E و F می‌نامیم. ثابت کنید:

$$AB\cdot AE+AD\cdot AF=AC^۲$$

۷۴. سه‌عدد طبیعی متمایز پیدا کنید، به‌نحوی که مجموع عکس‌های آن‌ها، عددی درست باشد.

۷۵. a، b، c و p، q، r عددهایی حقیقی‌اند و، برای هر عدد حقیقی x، داریم:

---

*) واسطهٔ هندسی دوعدد مثبت، برابر است با ریشهٔ دوم حاصل‌ضرب آن‌ها. در حالت کلی، واسطهٔ هندسی n عدد مثبت، برابراست با ریشهٔ nام حاصل‌ضرب آن n عدد.

$$ax^2+2bx+c\geqslant 0 \quad \text{و} \quad px^2+2qx+r\geqslant 0$$

ثابت‌کنید: برای هرمقدار حقیقی x، نابرابری زیر برقرار است:

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0$$

[درسال‌های ۱۹۱۹، ۱۹۲۰ و ۱۹۲۱، المپیادهای داخلی مجارستان برگزار نشده است.]

۱۹۲۲

۷۶. چهار نقطهٔ A، B، C و D، در فضا، داده شده‌اند. صفحه‌ای مانند S مشخص کنید که چهار نقطهٔ فوق از آن به‌یک‌فاصله باشند؛ درضمن، نقطه‌های A و C دریك طرف ونقطه‌های B و D درطرف دیگر صفحهٔ S واقع باشند.

۷۷. ثابت‌کنید: عبارت x^4+2x^2+2x+2 را نمی‌توان به‌صورت ضرب دو عامل درجهٔ دوم به‌صورت x^2+ax+b و x^2+cx+d تجزیه کرد، به‌نحوی که a، b، c و d، عددهایی درست باشند.

۷۸. ثابت کنید: اگر a، b، c، ...، n عددهای طبیعی متمایزی باشند که، هیچ کدام ازآن‌ها، مقسوم‌علیه اولی بزرگتر از ۳ نداشته باشند، آن‌وقت

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\dots+\frac{1}{n}<3$$

۱۹۲۳

۷۹. سه‌دایره، هرکدام به‌شعاع r، از نقطهٔ O می‌گذرند ویکدیگر را درنقطه‌های A،BوC قطع می‌کنند. ثابت‌کنید: دایره‌ای که ازسه‌نقطهٔ A وB و C بگذرد، شعاعی برابر r دارد.

۸۰. اگر داشته باشیم:

$$s_n=1+q+q^2+\dots+q^n,$$

$$S_n=1+\frac{1+q}{2}+\left(\frac{1+q}{2}\right)^2+\dots+\left(\frac{1+q}{2}\right)^n$$

ثابت‌کنید:

$$\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}s_1+\binom{n+1}{3}s_2+\cdots+\binom{n+1}{n+1}s_n=2^n S_n$$

[منظور از $\binom{m}{k}$ همان C_m^k است.]

۸۱. ثابت کنید: اگر جمله‌های یك تصاعد حسابی نامتناهی، عددهایی طبیعی ومتمایز باشند. این جمله‌ها نمی‌توانند همگی عددهایی اول باشند.

۱۹۲۴

۸۲. a و b و c عددهایی طبیعی‌اند و می‌دانیم، برای هر عدد درست ومثبت n، مثلثی با ضلع‌های a^n و b^n و c^n وجود دارد. ثابت کنید: همهٔ این مثلث‌ها متساوی‌الساقین‌اند.

۸۳. نقطهٔ O، خط راست l و عدد حقیقی $\alpha > 0$ معلوم‌اند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، به‌شرطی که مجموع فاصله‌های آن از نقطهٔ O و خط راست l، برابر α باشد.

۸۴. سه‌نقطهٔ A و B و C، روی یك صفحه داده شده‌اند. سه‌دایرهٔ k_1 و k_2 و k_3 را طوری رسم کنیدکه k_2 و k_3 در نقطهٔ A، k_1 و k_3 در نقطهٔ B و k_1 و k_2 درنقطهٔ C، مماس مشترکی داشته باشند.

۱۹۲۵

۸۵. ثابت کنید: اگر a، b، c و d، عددهایی درست باشند، حاصل‌ضرب ۶ تفاضل $b-a$، $c-a$، $d-a$، $d-c$، $d-b$ و $c-b$، بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۸۶. عدد $1000! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 999 \times 1000$ به‌چند صفرختم می‌شود؟

۸۷. r را شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌گیریم. ثابت کنید: r از نصف هریك از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه و، همچنین، از $\frac{1}{4}$ طول وتر مثلث ABC، کوچکتر است.

۱۹۲۶

۸۸. ثابت کنید: اگر a و b، عددهای درست مفروضی باشند، دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x+y+2z+2t=a \\ 2x-2y+z-t=b \end{cases}$$

برای (x, y, z, t)، درمجموعهٔ عددهای درست، دارای جواب است.

۸۹. ثابت کنید: حاصل‌ضرب چهارعدد طبیعی متوالی، نمی‌تواندمربع یك عدد درست باشد.

۹۰. دایرهٔ k' مماس بردایرهٔ k، وروی آن، می‌لغزد. شعاع دایرهٔ k، دو برابرشعاع دایرهٔ k' است. مسیر (یا مکان هندسی) نقطه‌ای ازمحیط‌دایرهٔ k' را مشخص کنید.

۱۹۲۷

۹۱. a، b، c و d، عددهایی درست ونسبت به‌عدد

$$m=ab-bc$$

اول‌اند. ثابت کنید: دوتایی‌هـای مرتب ازعددهای درست، مثـل (x, y)، وجود دارند، به‌نحوی که، اگـر $ax+by$ مضرب m باشد، برای همـان مقدارهای x و y، عدد $cx+dy$ هم‌مضرب m است.

۹۲. با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵، واز هر کدام یکبار، همهٔ عددهای‌چهار رقمی متمایز را ساخته‌ایم. مجموع این عددهای چهاررقمی را پیدا کنید.

۹۳. چهار دایره درنظرمی گیریم که،هرکدام از آن‌ها، برسه‌خط‌راست منطبق برضلع‌هـای مثلث ABC مماس باشند. فـرض کنید، نقطه‌های تماس دایره‌های k و k_c با ضلع AB، بین دونقطهٔ A و B واقع باشند. ثابت‌کنید: واسطهٔ هندسی طول شعاع‌های دودایرهٔ k و k_c، از نصف طـول AB تجاوز نمی‌کند.

۱۹۲۸

۹۴. ثابت کنید: بین عددهای مثبت

$$a,\ ۲a,\ ۳a,\ \ldots,\ (n-۱)a$$

یك عدد وجود دارد که، حداکثر، به اندازهٔ $\frac{1}{n}$ با عدد درست اختلاف دارد.

۹۵. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n را روی محیط دایره، به‌ترتیبی قرار می‌دهیم که اختلاف بین دوعدد مجاور، حداکثر برابر با ۲ باشد. ثابت کنید: مسأله تنها یك جواب دارد.

۹۶. خط راست l ونقطه‌های A و B، در یك صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند P واقع بر l طوری پیدا کنید که بزرگترین پاره‌خط از بین پاره‌خط‌های AP و BP، کمترین مقدار ممکن باشد (درحالت $AP=BP$، هردو پاره‌خط را می‌توان، بزرگترین، به‌حساب آورد).

حل مسأله‌ها

۱۸۹۴

۰۱ راه‌حل اول. a) ببینیم به‌ازای چه عددهای درستی از x و y، عبارت $۲x+۳y$ برابر با عدد درست مفروضی مثل k می‌شود. ازمعادلهٔ

$$۲x+۳y=k \qquad (۱)$$

نتیجه می‌شود:

$$x=\frac{k-۳y}{۲}=-y+\frac{k-y}{۲} \qquad (۲)$$

از (۲) معلوم است که وقتی، و تنها وقتی، x عددی درست است که $\frac{k-y}{۲}$ عددی درست باشد؛ یعنی باید داشته باشیم:

$$\frac{k-y}{۲}=s \implies y=k-۲s$$

وبا توجه به‌رابطهٔ (۲):

$$x=-y+s=-(k-۲s)+s=۳s-k$$

به‌این ترتیب، برای این‌که، به‌ازای مقدارهای درست x و y، رابطهٔ (۱) برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$x=-k+۳s,\ \ y=k-۲s \qquad (۳)$$

که درآن‌ها، k و s، عددهایی درست‌اند. برعکس، به‌ازای هرمقداردرست دلخواه s، عددهای درست x و y، به‌وسیلهٔ رابطه‌های (۳) معین می‌شوند.

b) باهمین روش می‌توان جواب‌های درست معادلهٔ

$$۹x+۵y=l \qquad (۴)$$

را معین کرد، که در آن، l عـدد درست معلومی است. از رابطهٔ (۴) به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{l-۹x}{۵}=-۲x+\frac{l+x}{۵} \qquad (۵)$$

برای درست بودن عدد y، بایـد $\frac{l+x}{۵}$ عددی درست باشد، یعنی

$$\frac{l+x}{۵}=t \Rightarrow x=۵t-l$$

وبا توجه به‌رابطهٔ (۵)، به‌دست می‌آید:

$$y=-۲x+t=-۲(۵t-l)+t=-۹t+۲l$$

به‌این‌ترتیب، جواب‌های درست معادلهٔ (۴) به‌این صورت‌اند:

$$x=۵t-l,\ \ y=-۹t+۲l \qquad (۶)$$

(t و l، عددهایی درست‌اند). برعکس، ازرابطه‌های (۶) می‌تـوان، به‌ازای هرمقدار درست t، عددهای درست x و y را به‌دست آورد.

c) اکنون فرض می‌کنیم $۲x+۳y$، مضربی از ۱۷ و، مثـلاً، برابر $۱۷n$ باشد. دراین صورت باتوجه به (۳) داریم:

$$x=-۱۷n+۳s,\ \ y=۱۷n-۲s$$

(n و s، عددهایی درست‌اند). بنابراین

$$۹x+۵y=۹(-۱۷n+۳s)+۵(۱۷n-۲s)=۱۷(-۴n+s)$$

یعنی، اگر $۲x+۳y$ بر۱۷ بخش‌پذیر باشد، $۹x+۵y$ هم‌بر۱۷ بخش‌پذیر است.

به‌همین‌ترتیب، وبا استفاده از رابطه‌های (۶)، می‌توان ثابت کرد که،

اگر $9x+5y$ مضربی از ۱۷ باشد، $2x+3y$ هم مضربی است از ۱۷.

یادداشت. بخش‌پذیری و طبقه‌بندی عددهای درست.

تعریف. برای دو عدد درست a و b، گویند a بر b بخش‌پذیر است، وقتی که عدد درستی مانند k وجود داشته باشد، به‌نحوی که داشته باشیم: $a=b\cdot k$. دراین صورت، عدد b را مقسوم‌علیهی یا شمارنده‌ای ازعدد a گویند؛ همچنین عدد a، مضربی ازعدد b است.

عددهای a و b می‌توانند مثبت یا منفی باشند؛ a و k می‌توانند برابر صفر باشند، ولی همیشه $b\neq 0$.

اگر a بر b، و b بر c بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت a بر c بخش‌پذیر است.

اگر a و a' بر b بخش‌پذیر باشند، $a+a'$ و $a-a'$ هم بر b بخش‌پذیرند. اگر b مقسوم‌علیهی از a و a مخالف صفر باشد، آن‌وقت، قدرمطلق b نمی‌تواند ازقدرمطلق a بزرگتر باشد. هرعدد مخالف صفر، تعداد محدودی مقسوم‌علیه دارد. مثلاً، مقسوم علیه‌های عدد ۱۲ عبارتند از: ± 1، ± 2، ± 3، ± 4، ± 6، ± 12.

برای به‌دست‌آوردن مقسوم‌علیه‌های یک‌عدد، کافی است مقسوم‌علیه‌های مثبت آن را پیدا کنیم؛ مقسوم‌علیه‌های منفی عدد، باتغییر علامت مقسوم‌علیه‌های مثبت آن به‌دست می‌آیند (صفر، مقسوم‌علیه هیچ عددی نیست).

تنها مقسوم‌علیه مثبت واحد، اعم ازاین‌که مثبت باشد یا منفی (یعنی $+1$ و -1) عبارت است از ۱.

هرعدد درست با قدرمطلق بزرگتراز واحد، دست‌کم دو مقسوم‌علیه مثبت دارد: قدرمطلق خود عدد و ۱.

اگرعدد درست p، که قدرمطلقی بزرگتر از واحد دارد، به‌جز $|p|$ و ۱، مقسوم‌علیه مثبت دیگری نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود.

اگر عدد درست a، با قدرمطلق بزرگتر از واحد، مقسوم‌علیه مثبتی مثل b، غیراز $|a|$ و ۱، داشته باشد، آن‌وقت، a را می‌توان این‌طورنوشت:

$$a=kb$$

نه تنها b، بلکه $|k|$ هم، عددی است بین ۱ و $|a|$. پس a را می‌توان به‌صورت ضرب دو عددی نوشت که قدرمطلق آن‌ها، بزرگتر از واحد و کوچکتر از $|a|$ باشند. عددی مثل a را، عدد مرکب یا عدد تجزیه‌پذیر گویند.

صفر، بر هر عدد درستی بخش‌پذیر است.

مجموعهٔ عددهای درست را می‌توان به‌چهار طبقه تقسیم کرد:

عدد واحد، مثبت یا منفی، یعنی ۱$\pm$؛

عددهای اول؛

عددهای مرکب؛

صفر.

راه حل دوم. فرض می‌کنیم: $u=۲x+۳y$ و $v=۹x+۵y$؛ به‌سادگی به دست می‌آید: $۳v-۵u=۱۷x$. از این‌جا، به‌دو رابطهٔ زیر می‌رسیم:

$$۳v=۵u+۱۷x \qquad (۱)$$

$$۵u=۳v-۱۷x \qquad (۲)$$

اگر x و y عددهای درستی باشند که، به‌ازای آن‌ها، u بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $۳v$ هم بر ۱۷ بخش‌پذیر است و چون عدد ۳ بر ۱۷ بخش‌پذیر نیست [۳ و ۱۷ نسبت به‌هم اول‌اند: $(۳،۱۷)=۱$]، بنابراین به‌ناچار v بر ۱۷ بخش‌پذیر خواهد بود. به‌همین ترتیب، با استفاده از رابطهٔ (۲)، معلوم می‌شود که اگر v بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد، u هم بر ۱۷ بخش‌پذیر است.

یادداشت. ویژگی‌های مهم عددهای اول. راه‌حل دوم، بر پایهٔ ویژگی مهمی از عددهای طبیعی استوار است:

a) p را عددی اول و a و b را دو عدد طبیعی فرض کنید؛ در این صورت: اگر هیچ‌کدام از دو عدد a و b بر p بخش‌پذیر نباشند، ab هم بر p بخش‌پذیر نیست.

این قضیه را، به‌صورت دیگری هم می‌توان تنظیم کرد: اگر عدد طبیعی

a برعدد اول p بخش‌پذیر نباشد، آن‌گــاه عدد ab وقتی، وتنها وقتی، بر p بخش‌پذیر است که b بر p بخش‌پذیر باشد.

p را عددی اول می‌گیریم و فرض می‌کنیم a بر p بخش‌پذیر نباشد. B را مجموعهٔ عددهای طبیعی مانند b می‌گیریم که، برای آن‌هــا، عدد ab بر p بخش‌پذیر باشد. روشن است که B، مجموعه‌ای تهی نیست (زیرا p و همهٔ مضربهای p، متعلق به‌مجموعهٔ B هستند). کوچکترین عدد مجموعهٔ B را پیدا می‌کنیم. بی‌شک، چنین عددی وجود دارد کافی است مشخص کنیم، کدام یك ازعددهای

$$a\cdot ۱,\ a\cdot ۲,\ \dots,\ a(p-۱),\ a\cdot p \qquad (۱)$$

بر p بخش‌پذیرند. روشن است که $a\cdot p$ بر p بخش‌پذیر است. اگر در دنبالهٔ عددهای (۱)، $a\cdot m$ نخستین‌عدد بخش‌پذیر بر p باشد، آن‌وقت، m کوچکترین عدد مجموعهٔ B خواهد بود. ثابت خواهیم کــرد، هرعدد مجموعهٔ B، باید بر m بخش‌پذیر باشد، که دراین‌صورت، m برابر p می‌شود.

اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض کنید، عضوی از مجموعهٔ B، ومثلاً b، بر m بخش‌پذیر نباشد. mq را بزرگترین مضرب عدد m می‌گیریم که از b تجاوز نکرده باشد، یعنی

$$b=mq+r$$

که در آن، r برابراست با یکی ازعددهای ۱، ۲، ...، $m-۱$. دوطرف این رابطه را در a ضرب می‌کنیم:

$$ab=amq+ar \Rightarrow ar=ab-(am)q$$

درسمت راست این برابری، جملهٔ اول ab بر p بخش‌پذیر است، جملهٔ دوم هم بر p بخش‌پذیر است (زیرا am بر p بخش پذیر است). بنابراین، سمت چپ این برابری، یعنی ar، باید مضربی از p باشد واین، به‌معنای آن‌است که r متعلق به مجموعهٔ B است. ولی این، ممکن نیست، زیرا $۰<r<m$ و m راکوچکترین‌عددی گرفته بودیم که، حاصل‌ضرب آن‌در a، بر p بخش‌پذیر

بود. این تناقض نشان می‌دهد که فرض ما درست نیست، یعنی b بر m بخش‌پذیر است.

می‌دانیم که p، عضوی از مجموعهٔ B است و، بنابراین، طبق آن‌چه ثابت کردیم، p بر m بخش‌پذیر است. ولی تنها مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد اول p، واحد و خود p می‌باشند. m نمی‌تواند برابر واحد باشد، زیرا فرض ما براین بود که $a \times 1 = a$ برعدد p بخش‌پذیر نیست. به‌این‌ترتیب، m برابر p می‌شود. قضیهٔ موردنظرما، به‌طورکامل ثابت شد.

این قضیه را می‌توان، به‌صورت زیر، تعمیم داد:

b) اگرهیچ کدام ازعددهای a، b، c، d، ... بر p بخش‌پذیر نباشند، آن‌وقت، حاصل‌ضرب‌های

$$ab,\ abc=(ab)c,\ \ abcd=(abc)d,\ \dots$$

بر p بخش‌پذیر نیستند.

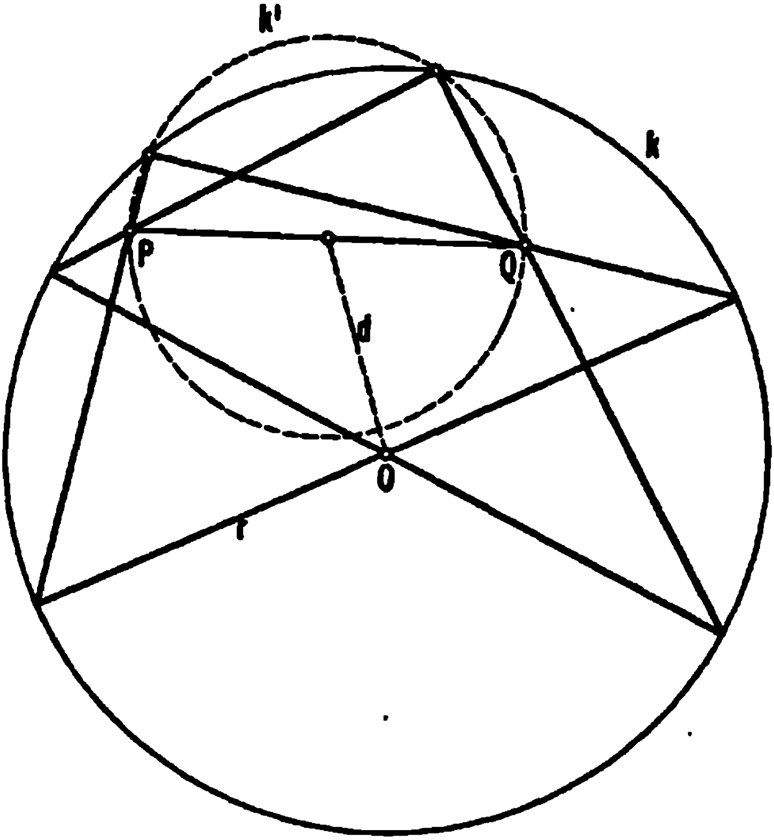
c) قضیهٔ سادهٔ زیر، درحل مسأله‌ها، کاربرد فراوان دارد:

هرزیرمجموعهٔ غیرتهی ازعددهای درست مثبت، دارای عضو ابتدا (یعنی کوچکترین عضو) است.

۴۰. اگر P' نقطه‌ای باشد که، برای آن، داشته باشیم: $\widehat{PP'Q}=90^\circ$، آن‌وقت، P' بردایره‌ای مثل k' به‌قطر PQ قراردارد (شکل ۵). نقطه‌های برخورد این دایره با دایرهٔ k، رأس‌های زاویه‌های قائمه‌ای را تشکیل می‌دهند که در دایرهٔ k محاط شده‌اند و ضلع‌های آن‌ها، ازنقطه‌های P و Q می‌گذرند. تکمیل مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ مطلوب، دشوار نیست.

اگر بخواهیم دوضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه ازمثلث (ونه امتدادآن‌ها)، ازنقطه‌های P و Q بگذرند، باید P و Q درداخل دایرهٔ k واقع باشند. ولی، این شرط، برای وجود جواب، کافی نیست. مسأله وقتی جواب دارد که دو دایرهٔ k و k' یکدیگررا قطع کنند (وتعداد جواب‌ها، برابراست باتعداد نقطه‌های برخورد دو دایره).

اگر r را شعاع دایرهٔ k و d را فاصلهٔ بین مرکزدایرهٔ k تا وسط



شکل ۵

پاره‌خط PQ بگیریم:

I. باشرط $\frac{۱}{۲}PQ > r-d$، مسأله دوجواب دارد؛

II. با شرط $\frac{۱}{۲}PQ < r-d$، مسأله جواب ندارد؛

III. وبالاخره، با شرط $\frac{۱}{۲}PQ = r-d$، مسأله یک‌جواب دارد. زیرا کوتاه‌ترین فاصلهٔ بین k و k' برابراست با $r-d$.

۴. ضلع‌های a و b و c ازمثلث را، می‌توان به‌این‌صورت نشان داد:

$$a=b-d,\ b,\ c=b+d\ \ (۰<d<b)$$

دستور هرون، برای محاسبهٔ مساحت مثلث، چنین است:

$$t^{۲}=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

که در آن $p=\frac{۱}{۲}(a+b+c)$. دراین‌جا داریم:

$$p=\frac{۳}{۲}b,\ \ p-a=\frac{b}{۲}+d,\ p-b=\frac{a}{۲}\ ,\ \ p-c=\frac{b}{۲}-d$$

وبنابراین، بااستفاده ازدستور هرون، خواهیم داشت:

$$t^{۲}=\frac{۳b^{۲}}{۴}\left(\frac{b^{۲}}{۴}-d^{۲}\right) \Rightarrow ۳b^{۴}-۱۶d^{۲}b^{۲}-۱۶t^{۲}=۰ \qquad (۱)$$

معادلهٔ (۱)، نسبت به‌مجهـول $b^{۲}$، ازدرجهٔ دوم است و ازآن به‌دست می‌آید:

$$b^{۲}=۲\left(d^{۲}\pm\sqrt{d^{۴}+\frac{۴t^{۲}}{۳}}\right)$$

$b^{۲}>۰$ و، بنابراین، تنها جواب مثبت قابل‌قبول است:

$$b^{۲}=۲\left(d^{۲}+\sqrt{d^{۴}+\frac{۴t^{۲}}{۳}}\right) \Rightarrow b=\sqrt{۲\left(d^{۲}+\sqrt{d^{۴}+\frac{۴t^{۲}}{۳}}\right)},$$

$$a=b-d,\ \ c=b+d$$

چون c را بزرگترین ضلع مثلث گرفته‌ایم، بنابراین، زاویه‌های α وβ روبه‌روی ضلع‌های a و b، زاویه‌هایی حاده‌اند و به سادگی از دستورهای

$$t=\frac{۱}{۲}bc\sin\alpha \text{ و } t=\frac{۱}{۲}ac\sin\beta$$

محاسبه می‌شوند. به‌دست می‌آید:

$$\sin\alpha=\frac{۲t}{bc},\ \sin\beta=\frac{۲t}{ac},\ \ \gamma=۱۸۰^{\circ}-(\alpha+\beta)$$

درحالت خاص $d=۱$ و $t=۶$، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$a=۳,\ \ b=۴,\ \ c=۵,$$

$$\sin\alpha=\frac{۳}{۵},\ \sin\beta=\frac{۴}{۵}=\cos\alpha$$

وازآن‌جا

$$\alpha=۳۶^\circ ۵۲',\ \ \beta=۹۰^\circ-\alpha=۵۳^\circ ۸',\ \ \gamma=۹۰^\circ$$

۱۸۹۵

۴. پیش ازحل مساله،اندکی دربارهٔ مفهوم «ترکیب» صحبت‌می‌کنیم. مجموعه‌ای شامل nعضو را در نظر بگیرید. یك زیرمجموعهٔ دلخواه kعضوی ازاین مجموعه را، بدون این‌که به‌ترتیب عضوهای آن توجه‌داشته باشیم، یك ترکیب kتاتی ازاین nشیء گویند.

قضیه. تعداد ترکیب‌های kتایی از nعنصر $(0\leqslant k\leqslant n)$ را،که بـا نماد C_n^k یا $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهند، می‌توان ازدستور زیر به‌دست آورد:

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

اثبات. دستور، برای $k=0$، $k=1$ و $k=2$ درست است:

$$C_n^0=\frac{n!}{0!n!}=1\,(0!=1);\ \ C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n;$$

$$C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$$

[دریك مجموعهٔ nعضوی، یك زیرمجموعهٔ تهی و nزیرمجموعهٔ یـك‌عضوی داریم. هرعضو با هریك از $n-1$ عضودیگر، یـك زیرمجموعهٔ دوعضوی تشکیل می‌دهد؛ ولی‌دراین صورت، اگر به‌ترتیب عضوها توجه نداشته‌باشیم، هرزیرمجموعه دوبار به‌حساب می‌آید. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌هـای دو عضوی ازیك مجموعهٔ nعضوی، برابر است بـا $\frac{1}{2}n(n-1)$.]

اکنون، فرض می‌کنیم ترکیب‌های $(k-1)$تایی از nعنصررا تشکیل

داده باشیم $(k-۱<n)$. اگر به‌هریك از این ترکیب‌ها، به‌ترتیب، هریك از $(n-k+۱)$ عنصری‌راکه‌درآن‌وجودندارد، اضافه‌کنیم،همهٔ‌ترکیب‌های kعنصری به‌دست می‌آید. ولی، ازاین طریق، هـریك از ترکیب‌های اخیر، kمرتبه تکرارشده‌اند، برای‌درك این‌مطلب، ترکیب دلخواهی شامل، kعنصر را درنظر می‌گیریم، مثلاً ترکیب

$$\{۱, ۲, ۳, \ldots, k-۱, k\}$$

این ترکیب، در روش ما، به k طریق زیر به‌دست می‌آید:

وقتی به‌ترکیب $\{۲, ۳, \ldots, k-۱, k\}$؛ عنصر ۱ را اضافه‌کنیم؛

وقتی به‌ترکیب $\{۱, ۳, \ldots, k-۱\}$، عنصر ۲ را اضافه‌کنیم؛

. . . .

وقتی به‌ترکیب $\{۱, ۲, \ldots, k-۱\}$، عنصر k را اضافه‌کنیم،

یعنی ترکیب حاصل k عنصری، از k طریق به‌دست می‌آید؛ یعنی

$$C_n^k = \frac{n-k+۱}{k} C_n^{k-۱} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ثابت شدکه اگردستور تعداد ترکیب‌ها، برای ترکیب‌های $(k-۱)$ تایی از nعنصر درست باشد، برای تعداد ترکیب‌های kتایی از nعنصر هم درست است. دستور تعداد ترکیب‌ها، بااستقرای ریاضی ثابت شد.

یادداشت ۱. اگر دربسط دوجمله‌ای

$$(x+۱)^n = C_n^۰ x^n + C_n^۱ x^{n-۱} + \ldots + C_n^{n-۱} x + C_n^n$$

$x=۱$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$C_n^۰ + C_n^۱ + C_n^۲ + \ldots + C_n^n = ۲^n$$

یادداشت ۲. یکی‌ازویژگی‌های مهم‌ترکیب‌ها،که درواقع، دوضریب متوالی بسط دوجمله‌ای را به‌هم مربوط می‌کند، رابطهٔ زیراست:

$$C_n^k + C_n^{k+۱} = C_{n+۱}^{k+۱}$$

که البته، با نمایش نمادی دیگر مربوط به‌ترکیب‌ها، این‌طور هم نوشته می‌شود:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

برای اثبات درستی این برابری، کافی است از دستور مربوط به‌تعداد ترکیب‌ها، استفاده کنیم.

□

اکنون، به‌حل مسأله برمی‌گردیم. وقتی که می‌خواهیم n کارت را بین دونفر تقسیم کنیم، می‌توانیم یك کارت را به A و $n-1$ کارت را به B (به C_n^1 طریق ممکن)، یا ۲ کارت را به A و $n-2$ کارت را به B (به C_n^2 طریق ممکن)، ...، یا بالاخره $n-1$ کارت را به A و یك کارت را به B بدهیم. بنابراین، تعداد روش‌های ممکن، برای تقسیم n کارت بین دونفر، برابراست با

$$\begin{aligned}
&C_n^1+C_n^2+\dots+C_n^{n-1}=\\
&=C_n^0+C_n^1+\dots+C_n^{n-1}+C_n^n-(C_n^0+C_n^n)=\\
&=2^n-2=2(2^{n-1}-1)
\end{aligned}$$

۵. راه حل اول. a) زاویه‌های مثلث ABC را α، β و γ می‌نامیم که در آن، $\gamma=90°$ (شکل ۶). اگر N نقطه‌ای در داخل مثلث ABC باشد و داشته باشیم:

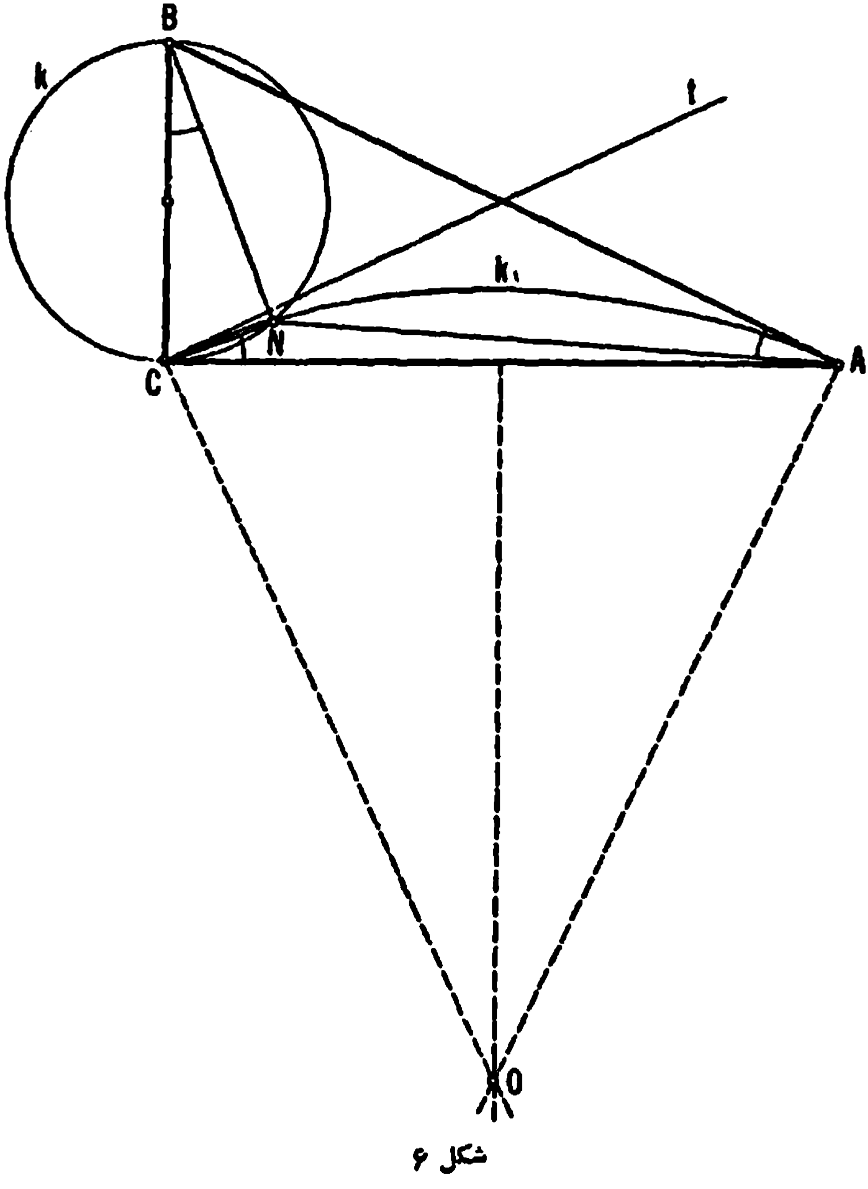
$$\widehat{NBC}=\widehat{NCA}=\widehat{NAB}$$

می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}
\widehat{BNC}&=180°-(\widehat{BCN}+\widehat{NBC})=180°-(\widehat{BCN}+\\
&+\widehat{NCA})=180°-\gamma
\end{aligned}$$

و به‌همین ترتیب:

$$\widehat{ANB}=180°-\beta \quad \text{و} \quad \widehat{ANC}=180°-\alpha$$



شکل ۶

b) جست‌وجوی نقطهٔ N. دایرهٔ به‌قطر BC را k می‌نامیم. از A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم؛ ازاین عمود، نیم‌خطی را درنظر می‌گیریم که بانقطهٔ C دریك‌طرف AB باشند. این نیم‌خط، باضلع CA، زاویه‌ای برابر $\alpha - {}^\circ ۹۰$ می‌سازد. ازنقطهٔ C، نیم‌خط راستی رسم می‌کنیم کـه با ضلع CA، زاویه‌ای برابر $\alpha - {}^\circ ۹۰$ بسازد ونیم‌خط‌راست عمود بر AB را در O قطع کند. به‌مرکز O و بشعاع OC کمانی رسم می‌کنیم که وتر آن AC باشد؛ این کمان را k_1 می‌نامیم. نقطهٔ برخورد دایرهٔ k باکمان k'؛ نقطهٔ N است.

c) اثبات. چون داریم: $\widehat{BNC}=180^\circ-\gamma=90^\circ$، بنابراین نقطهٔ N برمحیط دایرهٔ k قراردارد. درضمن، برای‌هرنقطهٔ P که برکمان k_1 واقع باشد، داریم: $\widehat{APC}=180^\circ-\alpha$ (یادداشت پایان حل را ببینید).

تنها این می‌ماند که ثابت‌کنیم، دودایرهٔ k و k_1، در نقطه‌ای واقع در درون مثلث، یکدیگررا قطع می‌کنند. دودایرهٔ k و k_1 ازنقطهٔ C گذشته‌اند، ولی این‌دودایره نمی‌توانند درنقطهٔ C برهم مماس باشند وحتماً نقطهٔ‌برخورد دیگری هم دارند،زیرابه‌روشنی دیده می‌شودکه CA بردایرهٔ k مماس‌است، درحالی‌که وتری از دایرهٔ k_1 را تشکیل می‌دهد. بنابراین، برای دودایرهٔ k و k_1، به‌جز C، نقطهٔ برخورد دیگری مثل N وجود دارد. چون دایرهٔ k، همراه بانقطهٔ B، دریك طرف AC قراردارند، بنابراین، نقطهٔ Nهم باید در همان طرف AC واقع باشد. واین، به‌معنای آن است که N، روی‌کمان k_1 است.

اکنون، اگر بتوانیم ثابت‌کنیم، تمامی‌کمان k_1 در درون مثلث ABC قراردارد، درواقع ثابت کرده‌ایم‌که، نقطهٔ N، در درون مثلث ABC است. AB درنقطهٔ A، برشعاع OA از دایرهٔ k_1 عمود است، یعنی AB برکمان k_1 درنقطهٔ A مماس است. بنابراین، اگر مماس t را ازنقطهٔ C بردایرهٔ k_1رسم کنیم، زاویهٔ بین مماس t باضلع AC، برابر بازاویهٔ مماس AB باضلع AC، یعنی برابرα می‌شود. ولی α از 90° کوچکتر است واین، به‌معنای آن است که تمامی‌کمان k_1، در درون مثلث ABC قرار دارد. زاویه‌های NBC و NCA، روبه‌رو به‌کمان CN از دایرهٔ k، و زاویه‌های NCA و NAB روبه‌رو به‌کمان NA ازدایرهٔ k_1 هستند وبنابراین

$$N\widehat{B}C=N\widehat{C}A=N\widehat{A}B$$

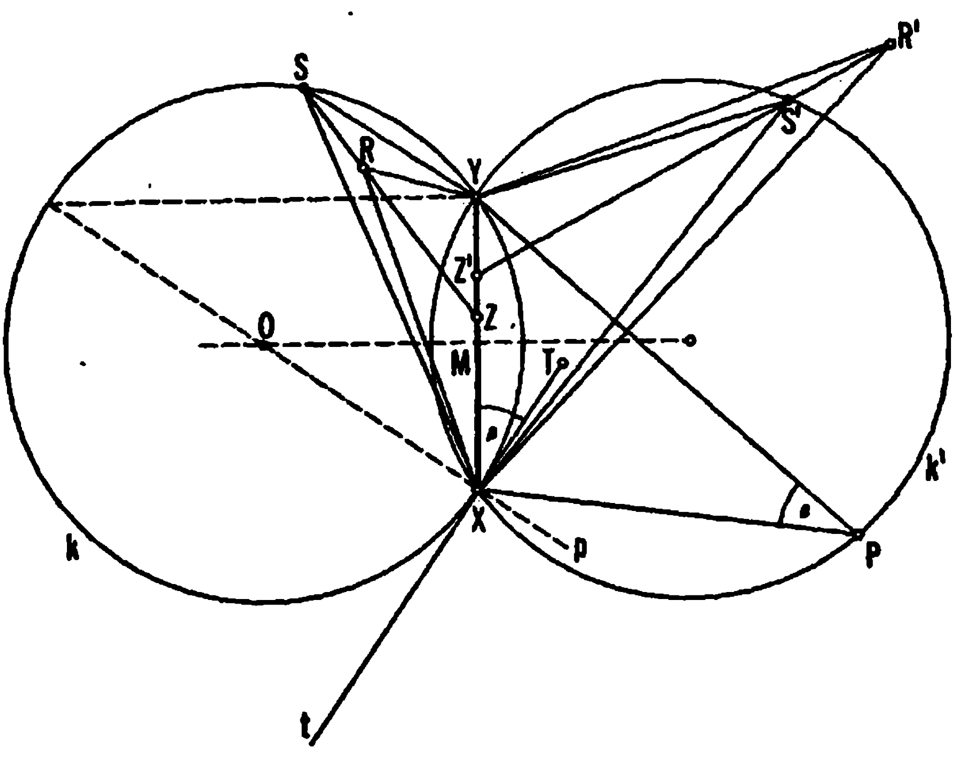
یادداشت. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، وقتی، از آن‌جا، پاره‌خط راست مفروض XY به‌زاویهٔ معلوم دیده می‌شود.

I. β را زاویه‌ای مفروض می‌گیریم $(0<\beta<180^\circ)$ و فرض

می‌کنیم، P نقطه‌ای باشد که، برای آن، داشته باشیم: $\widehat{XPY}=\beta$. اگر از سه‌نقطهٔ X و P و Y دایره‌ای بگذرانیم (دایرهٔ محیطی مثلث XPY). همهٔ نقطه‌های واقع بر کمان XPY (که‌آن را، کمان k' می‌نامیم)، به‌مکان‌هندسی مطلوب تعلق دارند. تنها دو نقطهٔ انتهائی این‌کمان، یعنی X و Y، جزو کمان نیستند، زیرا برای این نقطه‌ها، نمی‌توان مثلثی مثل XPY را مشخص کرد. اگر نقطهٔ دیگری، مثل Q، روی کمان XPY انتخاب کنیم، روشن است که‌دو زاویهٔ محاطی XPY و XQY باهم برابر می‌شوند.

واضح است که نقطه‌های واقع بر کمان k، قرینهٔ k' نسبت به‌پاره خط XY، نیزمتعلق به‌مکان مطلوب‌اند (شکل ۷).

اکنون، ثابت می‌کنیم که، مکان هندسی مطلوب، منحصر به‌دو کمان k' و k است. نقطه‌های واقع برخود پاره‌خط XY به‌مکان مطلوب تعلق ندارند، بنابراین، باتوجه به‌تقارن، کافی است تنها نقطه‌هایی را مورد تحقیق قراردهیم



شکل ۷

۱

که دریك طرف خط راست XY واقع باشند. نقطه‌ای مانند R را در درون دایرهٔ شامل کمان k درنظر می گیریم (شکل ۶). نقطهٔ Z را روی پاره‌خط XY انتخاب و از Z به R وصل می کنیم تا مکان k را درنقطهٔ S قطع کند. زاویه‌های XRZ و ZRY، به ترتیب، زاویه‌های خارجی برای مثلث‌های XRS و YRS هستند. بنابراین، این‌دو زاویه، از زاویه‌های داخلی نظیر به‌رأس S، بزرگترند. در ضمن، این دو زاویه، روی‌هم، زاویهٔ XRY را می‌سازند، در نتیجه

$$\widehat{XRY}=\widehat{XRZ}+\widehat{ZRY}>\widehat{XSZ}+\widehat{ZSY}=\widehat{XSY}=\beta$$

یعنی، R متعلق به‌مکان هندسی مطلوب نیست. به‌همین‌ترتیب، اگرمثل R' رادر خارج دایره درنظر بگیریم، خط‌راست $R'Z'$، دایرهٔ k' را درنقطهٔ S' قطع می کند وبنابراین

$$\widehat{XR'Y}=\widehat{XR'Z}+\widehat{Z'R'Y}<\widehat{XS'Z'}+\widehat{Z'S'Y}=\widehat{XS'Y}=\beta$$

یعنی R'، متعلق به‌مکان نیست.

به‌این ترتیب، روشن شدکه مکان هندسی مطلوب، شامل دوکمان است که نسبت به‌پاره‌خط XY قرینهٔ یکدیگرند و دوانتهای هردوکمان بر X و Y واقع‌اند؛ در ضمن، خود نقطه‌های X و Y متعلق به‌مکان نیستند. درحالتی‌که β برابر با ۹۰درجه باشد، مکان هندسی مطلوب، دایره‌ای است به‌قطر XY.

II. رسم این مکان دشوار نیست. مثلاً، می‌توان ازتقارن نسبت به‌خط راست XY، عمود منصف XY واین نکته استفاده‌کردکه مماس بردایرهٔ k درنقطهٔ X، زاویه‌ای به‌اندازهٔ β با XY می‌سازد. به‌این‌ترتیب، نیم‌خط‌راستی مانند t به‌مبداء X، به‌نحوی رسم می کنیم که داشته باشیم: $YXT=\beta$ (T، نقطه‌ای ازخط راست t است)؛ سپس خط راست p، عمود بر t درنقطهٔ X، و عمود منصف پاره‌خط XY را رسم می کنیم تا یکدیگررا درنقطهٔ O قطع کنند. دایرهٔ به‌مرکز O وبه‌شعاع OX، کمان k و قرینهٔ آن نسبت به XY، کمان k' را به‌ما می‌دهد.

III. در پایان، کوشش می کنیم، طول شعاع OX را پیداکنیم. اگر وسط پاره‌خط XY را M بنامیم، طول OX را می‌توانیم ازمثلث‌قائم‌الزاویهٔ MOX به‌دست آوریم:

$$\frac{XM}{OX}=\frac{XY}{۲OX}=\sin(MOX);$$

و ازآن‌جا: $OX=\frac{XY}{۲\sin(MOX)}$. زاویهٔ مرکزی متقابل به k، برای حالت $\beta<۹۰^\circ$، برابراست با ۲β، ودرحالت $\beta>۹۰^\circ$، برابر $۳۶۰^\circ-۲\beta$. بنابراین، درهرحال

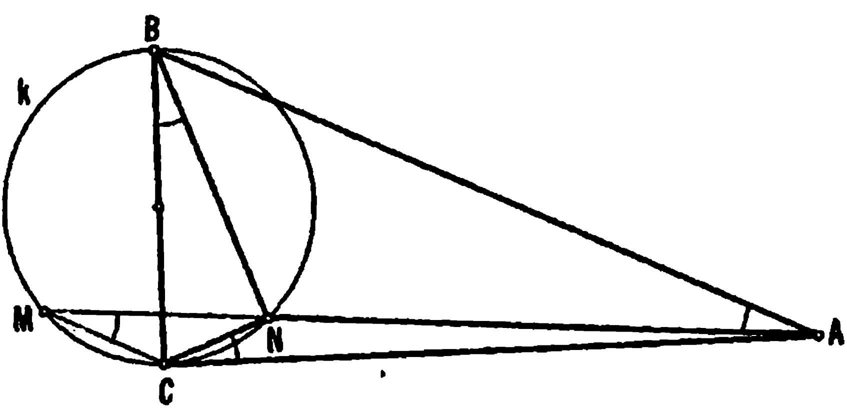
$$\sin(MOX)=\sin\left(\frac{۱}{۲}XOY\right)=\sin\beta$$

ودرنتیجه: $OX=\frac{XY}{۲\sin\beta}$.

راه‌حل دوم، دوباره توجه می‌کنیم که نقطهٔ N، بردایرهٔ به‌قطر BC قراردارد. برای تعیین جای دقیق N، کافی است امتداد خط راست AN را مشخص کنیم، با توجه به‌این شرط که داشته باشیم:

$$\widehat{NBC}=\widehat{NAB} \qquad (۱)$$

(شکل ۸ را ببینید).



شکل ۸

هر خط راستی که از نقطهٔ A در درون زاویهٔ BAC از مثلث ABC رسم شود، دایرهٔ k را در دو نقطهٔ N و M قطع می‌کند. زاویه‌های NBC و AMC برابرند، زیرا زاویه‌هایی محاطی و روبه‌رو به کمان CN هستند. از این‌رو. با توجه به (۱)، به‌دست می‌آید:

$$\widehat{AMC}=\widehat{NAB}=\widehat{MAB}$$

و این، به‌معنای آن است که AB با MC موازی است. بنابراین، N را می‌توان. بداین‌ترتیب پیدا کرد:

خط راستی رسم می‌کنیم که از C بگذرد و با AB موازی باشد. این خط راست. دایرهٔ k را در نقطهٔ دیگری غیر از C. قطع می‌کند. این نقطه را M می‌نامیم. خط راست MA، دایرهٔ k را در نقطهٔ موردنظر N قطع خواهد کرد. با این رسم، M درخارج مثلث ABC؛ و N در درون آن قرار می‌گیرد و. بنابراین. N همان نقطهٔ موردنظر است.

یادداشت. نقطه‌های بروکار (Brocard). در یک مثلث دلخواه ABC دم می‌توان. با روشی مشابه، نقطه‌های N_1 و N_2 را طوری پیدا کرد (در درون مثلث). که داشته باشیم:

$$\widehat{N_1BC}=\widehat{N_1CA}=\widehat{N_1AB} \quad \text{و} \quad \widehat{N_2CB}=\widehat{N_2AC}=\widehat{N_2BA}$$

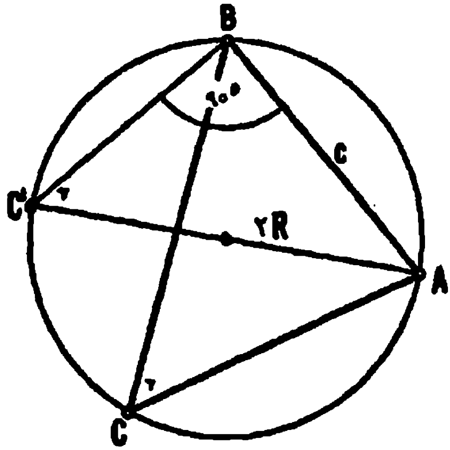
N_1 و N_2 را، نقطه‌های بروکار درمثلث ABC گویند.

۰۶ راه‌حل اول. زاویهٔ γ روبه‌رو به‌ضلع c را می‌توان از رابطهٔ

$$\sin\gamma=c:2R$$

به‌دست آورد. (شکل ۶). c نمی‌تواند از $2R$ بزرگتر باشد، زیرا مثلث در دایره محاط شده است. درحالت $c<2R$. دوجواب ودرحالت $c=2R$، یک جواب برای γ به‌دست می‌آید.

اکنون، با توجه به‌معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ γ، می‌توان بقیهٔ جزءهای مثلث را محاسبه کرد. با توجه به‌قانون تانژانت‌ها (یادداشت پایان حل را ببینید)، داریم:



شکل ۹

$$\frac{tg\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{tg\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}=\frac{a+b}{a-b}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)+1}{\left(\frac{a}{b}\right)-1}$$

(α و β، به‌ترتیب، زاویه‌های روبه‌رو به‌ضلع‌های a و b از مثلث‌اند).

چون $\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{180^\circ-\gamma}{2}$، بنابراین، می‌دانیم $\frac{\alpha-\beta}{2}$ را برحسب $\frac{a}{b}$ پیدا کنیم. با در دست داشتن $\frac{\alpha+\beta}{2}$ و $\frac{\alpha-\beta}{2}$، مقدارهای α و β به‌دست می‌آیند:

$$\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2},\ \beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (1)$$

و سرانجام، به‌کمک قانون سینوس‌ها، a و b محاسبه می‌شوند:

$$a=\frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma},\ b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}$$

یادداشت. قانون تانژانت‌ها. بنابر قانون سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$$

اگرمقدار مشترك این دونسبت را λ بگیریم (λ، برابر است با قطردایرهٔ محیطی مثلث، یعنی $2R$)، به‌دست می‌آید:

$$a=\lambda\cdot\sin\alpha \quad \text{و} \quad b=\lambda\cdot\sin\beta$$

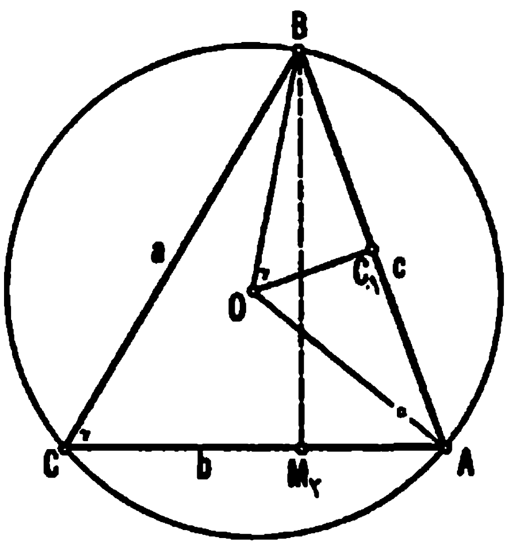
واز آن‌جا $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\lambda(\sin\alpha+\sin\beta)}{\lambda(\sin\alpha-\sin\beta)}=\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$ ؛ با تجزیه صورت ومخرج کسر سمت راست، نتیجه می‌شود:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

راه‌حل دوم. O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌گیریم (شکل ۱۰) و فرض می‌کنیم، C_1، پای عمود وارد از O بر AB باشد، روشن است که C_1 پاره‌خط AB را نصف می‌کند، به‌سادگی دیده می‌شود که:

$$\widehat{BOC_1}=\widehat{ACB}=\gamma$$

$$\sin\gamma=\frac{BC_1}{OB}=\frac{\frac{1}{2}c}{OB}=\frac{c}{2R}$$



شکل ۱۰

c نمی‌تواند از $۲R$ بزرگتر باشد. درحالت $c<۲R$، دوجواب برای γ، یکی حاده ودیگری منفرجه، به‌دست می‌آید؛ و درحالت $c=۲R$ داریم: $\gamma=۹۰^\circ$. با معلوم بودن γ، جزءهای دیگر مثلث، به‌این‌ترتیب، به‌دست می‌آیند:

یکی از ارتفاع‌های مثلث، و مثلاً ارتفاع $BM_۲$ را رسم می‌کنیم. داریم:

$$BM_۲=a.\sin\gamma=a.\frac{c}{۲R};$$

$$CM_۲=a.\cos\gamma=a.\frac{\pm\sqrt{۴R^۲-c^۲}}{۲R}$$

برای $CM_۲$، ریشهٔ مثبت، متناظربا زاویهٔ‌حادهٔ γ وریشهٔ منفی، متناظربازاویهٔ منفرجهٔ γ است. بداین‌ترتیب

$$AM_۲=b-CM_۲=b-a\cos\gamma,$$

وسرانجام

$$tg\alpha=\frac{BM_۲}{AM_۲}=\frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)\sin\gamma}{۱-\left(\frac{a}{b}\right)\cos\gamma}$$

این رابطه، برای حالتی هم‌که زاویهٔ α منفرجه باشد، درست است: دراین حالت، $AM_۲$ متناظربا مقداری‌منفی است و $b-a\cos\gamma$ منفی می‌شود.زاویهٔ β، به‌سادگی واز رابطهٔ $\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$ به‌دست می‌آید.

سرانجام، باتوجه بدقانون سینوس‌ها، داریم:

$$a=\frac{c.\sin\alpha}{\sin\gamma}=۲R\sin\alpha\ ;\ b=\frac{c\sin\beta}{\sin\gamma}=۲R\sin\beta$$

۱۸۹۶

۰۷ n را عــددی طبیعی وبزرگتر از واحـد. و $p_۱$، $p_۲$، ...، p_k را مقسوم‌علیه‌های اول عدد n می‌گیریم. درضمن، فرض می‌کنیم، ضمن تجــزیهٔ n به‌عامل‌های اول، $\alpha_۱$بار ازعامل $p_۱$، $\alpha_۲$بــار ازعامل $p_۲$، ... و α_kبار از عامل p_k آمده باشد. (یادداشت پایان حل را ببینید):

$$n = p_۱^{\alpha_۱} \cdot p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

هیچ‌کدام از عامل‌های $p_۱$، $p_۲$، ...، p_k، کوچکتر از ۲ نیست وهــرکدام از α_iها، دست‌کم، برابر واحد است ($\alpha_i \geqslant ۱$). پس

$$n = p_۱^{\alpha_۱} \cdot p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k} \geqslant ۲^k$$

این نابرابری، برای $n = ۱$ درست است، زیرا

$$n = ۱ = ۲^{\circ} = ۲^k \quad (k = \circ)$$

اگرمبنای لگاریتم را عددی بزرگتر از واحد، ومثلاً ۱۰، بگیریم، با لگاریتم‌گرفتن از دوطرف نابرابری $n \geqslant ۲^k$ به‌دست می‌آید:

$$\log n \geqslant k \cdot \log ۲$$

یادداشت. دربارهٔ تجزیهٔ عددها، به‌صورت ضرب توان‌هایی‌ازعددهای اول. ثابت می‌کنیم که، هرعــدد طبیعی مرکب، قابل تبدیل به‌صورت ضرب دویا چند عامل اول است. حکــم، برای کوچکترین عــدد مرکب، یعنی ۴، درست است: $۲ \times ۲ = ۴$. ثابت می‌کنیم، اگــر حکم برای همــهٔ عددهای مرکب کوچکتر ازعــدد مرکب a درست باشد، آن‌وقت، برای عدد a هــم درست است. درواقع، بنابرتعریف عدد مرکب (یادداشت پایان راه‌حل اول مسالهٔ ۱ را ببینید)، a را می‌توان به‌صورت ضرب دوعامل نوشت: $a = b.k$. b و k دربین این عددها، که کوچکتر از a هستند، قراردارند:

$$۲, ۳, ۴, \ldots, a - ۱$$

چون، طبق فرض، حکم برای همهٔ عددهای مرکب کوچکتر از a درست‌است،

بنابراین b و k، یا عددهایی اول‌اند و یا حاصل‌ضربی ازعددهای اول. یعنی $a = k.b$. درهرحال، می‌تواند به‌صورت ضرب عامل‌های اول نوشته شود.

هرعدد طبیعی، برابر است با حاصل‌ضرب توان‌های غیرمنفی عددهای اول. مثلاً

$$۱۲۰ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱$$

دربعضی موردها، می‌توان درصورت لزوم، عامل اولی را هم‌که درعدد مرکب وجود ندارد، با توان صفر واردکرد ومثلاً نوشت:

$$۱۲۰ = ۲^۳ \times ۳^۱ \times ۵^۱ \times ۷^۰ \times ۱۱^۰$$

به‌این‌ترتیب، هرعدد طبیعی n را می‌توان به صورت ضرب عامل‌های اول و به‌صورت

$$n = p_۱^{\alpha_۱} \cdot p_۲^{\alpha_۲} \cdots p_k^{\alpha_k} \qquad (۱)$$

نوشت. وقتی‌که p_iها عددهای اول متمایز و α_iها مثبت باشند، (۱) را، نمایش کانونی عدد n گویند.

ثابت می‌شود که، هرعدد طبیعی a، تنها یك نمایش کانونی دارد. فرض کنید، چنین نباشد وعدد a را بتوان به‌دوصورت مختلف

$$a = p^\alpha \cdot v = p^\beta \cdot w \qquad (۲)$$

نوشت که، در آن، $\alpha > \beta > ۰$ و، درضمن، هیچ‌کدام از دو عدد v و w، مضربی از p نباشند. ولی، بنابر (۲) و با توجه به $\alpha - \beta > ۰$، به‌دست می‌آید:

$$w = v \cdot p^{\alpha - \beta}$$

یعنی w مضربی است از p. این تناقض نشان می‌دهد که، در هردو نوعی که برای نمایش عدد a نوشته‌ایم، باید توان p یکی باشد: $\alpha = \beta$.

۸. راه‌حل اول. معادلهٔ اول را می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$(x - y)(x - ۲y + ۱) = ۰$$

بنابراین، اگر (x, y) جوابی از دستگاه مفروض باشد، باید در یکی از دو دستگاه زیر صدق کنند.

$$(1)\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-2xy+y^2-5x+7y=0 \end{cases}$$

یا

$$(2)\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x^2-2xy+y^2-5x+7y=0 \end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه (۱) به‌دست می‌آید: $y=x$، که اگر در معادلهٔ دوم دستگاه (۱) قراردهیم، به‌جواب منحصر $x=0$ و $y=0$ می‌رسیم.

به‌همین ترتیب، اگر جواب‌های دستگاه (۲) را پیدا کنیم، دو جواب $(x=3, y=2)$ و $(x=5, y=3)$ به‌دست می‌آید.

به‌این‌ترتیب، دستگاه معادله‌های مفروض، دارای سه‌جواب است:

$$(0,0), (3,2), (5,3)$$

وبا آزمایش مستقیم معلوم می‌شود که هرسه جواب درمعادلهٔ

$$xy-12x+15y=0$$

صدق می کنند.

راه‌حل دوم. اتحاد زیرروشن است:

$$(x^2-3xy+2y^2+x-y)(x-y-9)+(x^2-2xy+y^2-$$
$$-5x+7y)(-x+2y+5)=2(xy-12x+15y)$$

بنابراین، بلافاصله نتیجه می‌شود که، اگر دومعادلهٔ دستگاه مفروض ناسازگار نباشند،جواب‌های‌دستگاه، درمعادلهٔ $xy-12x+15y=0$صدق می کنند.

۹. حل مسأله، درحالتی که هرسه زاویهٔ مثلث Y، حاده باشند.

تعریف. مثلث X راکه ازوصل پای ارتفاع‌های مثلث Y به‌دست آمده

است، مثلث ارتفاعیهٔ مثلث Y گویند.*

a) قضیه. اگر مثلث ABC، سه‌زاویهٔ حـاده داشته باشد، ارتفاع‌های آن، نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعیهٔ آن هستند.

اثبات. نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های AA_1 و BB_1 را M مـی‌نامیم. دو مثلث A_1MC و CMB_1 قائـم‌الزاویه‌اند و CM وتـر مشترك آن‌هاست (شکل ۱۱)، بنابراین A_1 و B_1 روی محیط دایرهٔ k_c بـه‌قطـر CM قـرار دارند. علاوه بـراین، اگـر زاویه‌هـای مثلث ABC را α و β و γ بنامیم، داریم:

$$\widehat{MCB_1}=90^\circ-\alpha,\ \widehat{CMB_1}=\alpha=\widehat{BMC_1},\ \widehat{MBC_1}=90^\circ-\alpha$$

زاویه‌هـای MA_1B_1 و MCB_1 (دو زاویهٔ محاطی در دایـرهٔ k_c و روبه‌رو به‌کمان MB_1)، برابرند.

$$\widehat{MA_1B_1}=\widehat{MCB_1}=90^\circ-\alpha \Rightarrow \widehat{AA_1B_1}=90^\circ-\alpha$$

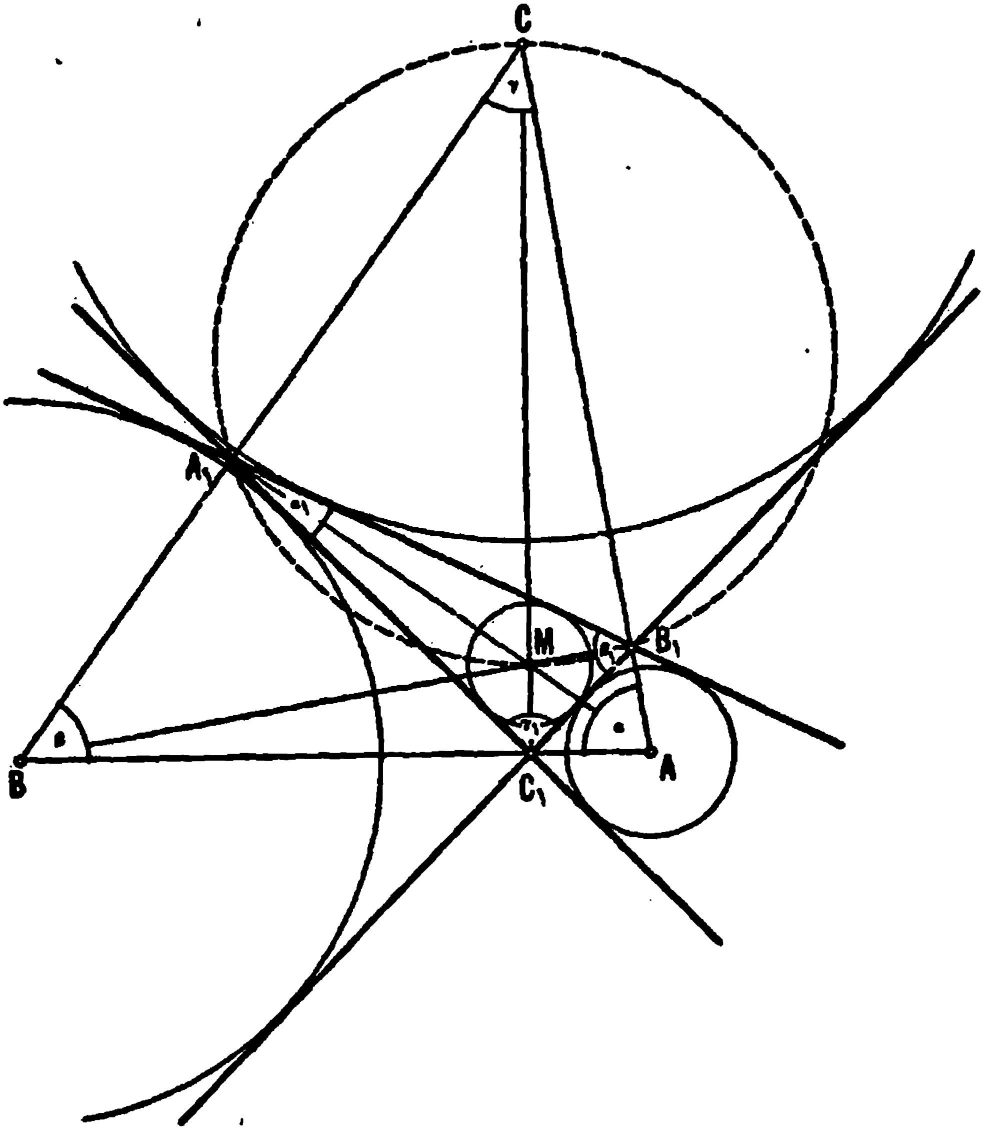
به‌همین‌ترتیب، بادرنظر گرفتن‌دایرهٔ k_B به‌قطر BM، روشن‌می‌شود که:

$$\widehat{MA_1C_1}=\widehat{MBC_1}=90^\circ-\alpha \Rightarrow \widehat{AA_1C_1}=90^\circ-\alpha$$

بنابراین، AA_1، نیمساز زاویهٔ A_1 از مثلث‌ارتفاعیهٔ $A_1B_1C_1$ است. باروش مشابهی، می‌توان به همین نتیجه، برای زاویه‌های دیگر مثلث ارتفاعیه رسید. درضمن، اگر زاویه‌های مثلث ارتفاعیهٔ $A_1B_1C_1$ را بـا α_1، β_1 و γ_1 نشان دهیم، داریم:

---

*) به‌طور کلی، اگر از نقطهٔ P واقع در داخل مثلث Y، سه عمـود برضلع‌های مثلث Y فرود بیاوریم، مثلثی راکه رأس‌های آن پاهای این سه‌عمـود باشد، مثلث پائی مثلث Y گویند درحالتی‌که P برمرکز ارتفاعی‌مثلث (یعنی برمحل برخورد ارتفاع‌ها) منطبق باشد، آن وقت، مثلث‌پائی، همان مثلث ارتفاعیه می‌شود.



شکل ۱۱

$$\frac{\alpha_1}{2}=90^\circ-\alpha,\ \frac{\beta_1}{2}=90^\circ-\beta,\ \frac{\gamma_1}{2}=90^\circ-\gamma$$

به‌این‌ترتیب، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC (که به‌آن، مرکز ارتفاعی مثلث گویند)، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث $A_1B_1C_1$ است.

b) روش رسم. نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 (پای ارتفاع‌های مثلث مطلوب) را به‌هم وصل می‌کنیم. اگر نیمسازهای زاویه‌های بیرونی این مثلث را رسم کنیم، از برخورد آن‌ها، مثلث مورد نظر ABC به‌دست می‌آید. به‌زبان دیگر،

رأس‌های مثلث ABC، عبارتند از مرکزهای سه‌دایرهٔ محاطی بیرونی‌درمثلث $A_1B_1C_1$.

c) توجیه رسم. در هر رأس مثلث، دونیمساز داخلی و خارجی برهم عمودند. درضمن، هردو نیمساز خارجی، با نیمساز داخلی رأس سوم،دریك نقطه به‌هم می‌رسند. بنابراین، مثلث ABC که ازبرخورد نیمسازهای خارجی مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید، همان مثلث مطلوب است، زیرا مثلاً AA_1، نیمساز داخلی زاویهٔ A_1 ازمثلث $A_1B_1C_1$ و، درضمن، بر B_1C_1 عموداست؛ یعنی AA_1، BB_1 و CC_1 ارتفاع‌های مثلث ABC هستند.

d) محاسبه. در a) دیدیم: $\frac{\alpha_1}{2}=90°-\alpha$. بنابراین[دستور(۱۲) را در یادداشت ۲، پایان حل ببینید]:

$$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)=\sin\frac{\alpha_1}{2}=\sqrt{\frac{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}{b_1c_1}}$$

که درآن $p_1=\frac{1}{2}(a_1+b_1+c_1)$.علاوه‌براین،دومثلث C_1AB_1 وCAB، در زاویهٔ α مشترك‌اند ودرضمن

$$\widehat{C_1B_1A}=90°-\frac{\beta_1}{2}=\beta=\widehat{CBA}$$

بنابراین، این دو مثلث متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{AC_1}{AC}=\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{a_1}{a}$$

درنتیجه، با توجه به‌رابطه‌ای که دربالا برای $\cos\alpha$ نوشتیم:

$$a=\frac{a_1}{\cos\alpha}=a_1\sqrt{\frac{b_1c_1}{(p_1-b_1)(p_1-c_1)}}\ .$$

و به‌همین‌ترتیب

$$b=\frac{b_1}{\cos\beta}=b_1\sqrt{\frac{a_1c_1}{(p_1-a_1)(p_1-c_1)}};$$

$$c=\frac{c_1}{\cos\gamma}=c_1\sqrt{\frac{a_1b_1}{(p_1-a_1)(p_1-b_1)}}$$

یادداشت ۱. مثلث ارتفاعیه درمثلث با زاویهٔ منفرجه.

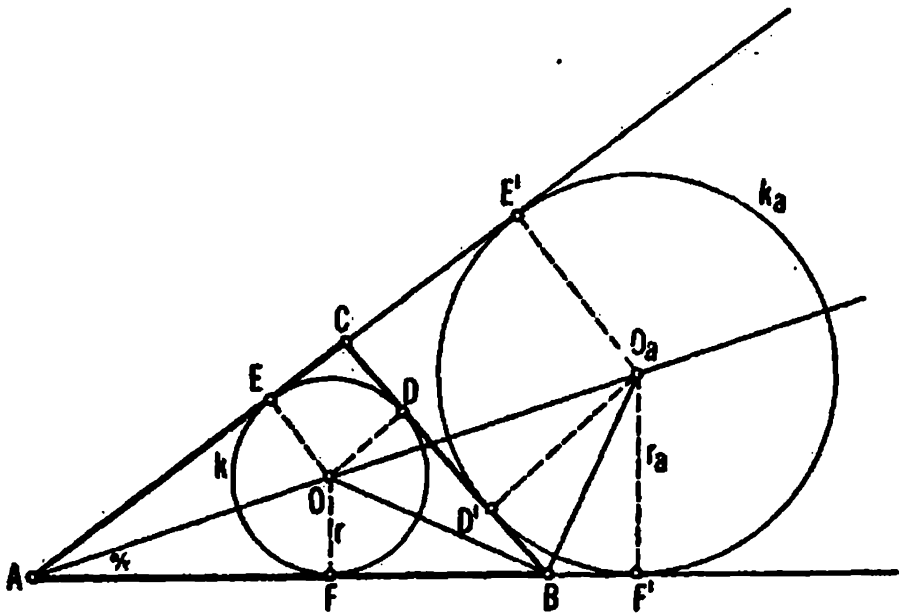
درمثلثی که یك زاویهٔ منفرجه داشته باشد، ارتفاع وارد ازرأس‌زاویهٔ منفرجه (مثل حالت مثلث با زاویه‌های حاده). نیمساز داخلی زاویهٔ مثلث ارتفاعیه است. ولی دوارتفاع دیگر، نیمسازهای زاویه‌های خارجی را در مثلث ارتفاعیه تشکیل می‌دهند. بنابراین، اگر مثلث مطلوب، بتواند با زاویهٔ منفرجه هم باشد، علاوه برمثلث ABC، مثلث‌های BCM، CAM و ABM هم جواب‌هایی از مسأله‌اند. ارتفاع‌های مربوط به‌این مثلث‌ها، به‌ترتیب، در نقطه‌های A، B و C به‌هم‌می‌رسند. به‌زبان‌دیگر، مرکزهای ارتفاعی‌مثلث‌های BCM، CAM، ABM(و ABC)، به‌ترتیب، عبارتند ازنقطه‌های A، B، C (و M).

برای هرچهار جواب مسأله، این ویژگی وجود دارد:

رأس‌ها ومرکزهای ارتفاعی هریك از مثلث‌های جواب. مرکزهای دایره‌هایی‌هستند که برضلع‌های مثلث $A_1B_1C_1$ (ویاامتداد آنها) مماس‌اند.

یادداشت ۲. a) دایره‌های مماس برضلع‌های مثلث. O را مرکز و r را شعاع‌دایرهٔ k می گیریم که‌برضلع‌های مثلث ABC، در داخل، مماس‌است، D و E و F را، به ترتیب، نقطه‌های تماس دایره با ضلع‌های BC و CA و AB فرض می‌کنیم (شکل۱۲). O_a و r_a را مرکزوشعاع دایره k_a می گیریم که درنقطهٔ D' برضلع BC و درنقطه‌های E' و F' برامتداد ضلع‌های AC و AB مماس است. ضلع‌های AB، BC و AC را با c، a و b نشان‌می‌دهیم وفرض می کنیم: $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

چون طول دومماسی که ازیك نقطه، بردایره‌ای رسم شوند، باهم



شکل ۱۲

برابرند، بنابراین

$$AE=AF,\ BC=BD,\ CD=CE,$$

ودرنتیجه

$$۲p=AB+AC+BC=۲(AE+BF+CD)$$

ویا

$$p=AE+BF+CD$$

ازاین‌جا، به‌دست می‌آید:

$$CD=p-(AE+BF)=p-(AF+BF)=p-c \quad (۱)$$

وبه‌همین‌ترتیب:

$$BF=p-b \text{ و } AE=p-a$$

برای دایرهٔ k_a داریم:

$$۲AE'=AE'+AF'=AC+CE'+AB+BF'=$$
$$=AB+AC+(CD'+BD')=AB+AC+BC=۲p$$

و بنا براین

$$AE' = AF' = p \qquad (۲)$$

و به‌همین ترتیب

$$CE' = AE' - AC = p - b \quad \text{و} \quad BF' = p - c \qquad (۳)$$

اگر مساحت مثلث ABC را با S_{ABC} نشان دهیم، داریم:

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{۱}{۲} r(a+b+c);$$

$$S_{ABC} = r \cdot p \qquad (۴)$$

ازطرف دیگر

$$S_{ABC} = S_{AO_aB} + S_{AO_aC} - S_{BO_aC} = \frac{۱}{۲} r_a(b+c-a);$$

$$S_{ABC} = r_a(p-a) \qquad (۵)$$

و به‌همین ترتیب

$$S_{ABC} = r_b(p-b) \qquad (۶)$$

$$S_{ABC} = r_c(p-c) \qquad (۷)$$

r_b و r_c، شعاع‌های دایره‌های k_b و k_c هستند که به‌ترتیب، برضلع‌های b و c و امتداد دوضلع دیگر مماس‌اند.

b) رابطه‌هایی بین زاویه‌ها و ضلع‌های مثلث. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث است و، بنابراین، به‌عنوان مثال $\widehat{OAF} = \frac{۱}{۲}\alpha$. با استفاده ازرابطهٔ (۴) و دستور هرون برای محاسبه مساحت مثلث، داریم:

$$tg\frac{\alpha}{۲} = \frac{OF}{AF} = \frac{r}{p-a} = \frac{S_{ABC}}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} =$$

$$=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (۸)$$

و به‌همین ترتیب

$$tg\frac{\beta}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad (۹)$$

$$tg\frac{\gamma}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad (۱۰)$$

ازطرف دیگر:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc\sin\alpha=bc\sin\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}=bc\,tg\frac{\alpha}{۲}\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲};$$

$$bc\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}=\frac{S_{ABC}}{tg\frac{\alpha}{۲}}=p(p-a)$$

وبنابراین، برای زاویه‌های مثلث خواهیم داشت:

$$\cos\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},\ \cos\frac{\beta}{۲}=\sqrt{\frac{p(p-\alpha)}{ac}},$$

$$\cos\frac{\gamma}{۲}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad (۱۱)$$

وچون $\sin\frac{\alpha}{۲}=tg\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}$، بنابراین

$$\sin\frac{\alpha}{۲}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},\ \sin\frac{\beta}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}},$$

$$\sin\frac{\gamma}{۲}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \qquad (۱۲)$$

۱۸۹۷

۱۰. $\alpha=\beta+\gamma=90^\circ$ می گیریم. دراین‌صورت داریم:

$$\sin\alpha=1,\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\gamma,\ \sin(\gamma-\alpha)=-\sin\beta$$

بنابراین، به‌ترتیب، داریم:

$$\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin\beta\sin\gamma,$$

$$\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)=\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma),$$

$$\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=-\sin\gamma\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=-\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)\sin\beta$$

واز مجموع این چهاربرابری، به‌اتحاد مطلوب می‌رسیم.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد که، این اتحاد، نه‌تنها برای زاویه‌های یك مثلث قائم‌الزاویه ونه‌تنها برای زاویه‌های هرمثلث دلخواه، بلکه برای هرسه زاویهٔ دلخواه α و β و γ برقرار است.

a) به‌کمك دستورهای مربوط به‌سینوس وکسینوس مجموع یا تفاضل دوزاویهٔ به‌دست می‌آید:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$$

$$\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos x\cos y,$$

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y$$

واز آن‌جا

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)+\cos(x+y)],$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

که درحالت خاص $y=x$، نتیجه می‌شود:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos^2 x),$$

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

اگر با ضرب تعداد بیشتری سینوس وکسینوس سروکار داشته باشیم، با استفادهٔ پشت سرهم از همین دستورها، می‌توان صورت‌های ضرب را به‌صورت‌های مجموع تبدیل کرد.

درهرجمله از سمت‌چپ اتحاد مفروض، ضرب سه‌سینوس وجود دارد و درحالت کلی داریم:

$$\sin x\sin y\sin z=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\sin z=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos(x-y)\sin z-\cos(x+y)\sin z]=$$

$$=\frac{1}{4}[\sin(x-y+z)+\sin(-x+y+z)-$$

$$-\sin(x+y+z)-\sin(-x-y+z)]=$$

$$=\frac{1}{4}[\sin(-x+y+z)+\sin(x-y+z)+$$

$$+\sin(x+y-z)-\sin(x+y+z)]$$

b) اکنون فرض می‌کنیم:

$$x=\alpha-\beta,\ y=\beta-\gamma,\ z=\gamma-\alpha$$

دراین‌صورت، خواهیم داشت:

$$-x+y+z=-2(\alpha-\beta),\ x-y+z=-2(\beta-\gamma),$$

$$x+y-z=-2(\gamma-\alpha),\ x+y+z=0$$

درضمن، باتوجه به‌رابطهٔ مربوط به‌بسط ضرب سه سینوس، به‌دست می‌آید:

$$۴\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)=-\sin ۲(\alpha-\beta)-$$
$$-\sin ۲(\beta-\gamma)-\sin ۲(\gamma-\alpha)$$

واگر در دوطرف برابری اخیر، ابتدا $\gamma=۰$، سپس $\alpha=۰$ وبالاخره $\beta=۰$ بگیریم، به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$۴\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha-\beta)=\sin ۲(\alpha-\beta)+\sin ۲\beta-\sin ۲\alpha,$$
$$۴\sin\beta\sin\gamma\sin(\beta-\gamma)=\sin ۲(\beta-\gamma)+\sin ۲\gamma-\sin ۲\beta,$$
$$۴\sin\gamma\sin\alpha\sin(\gamma-\alpha)=\sin ۲(\gamma-\alpha)+\sin ۲\alpha-\sin ۲\gamma$$

واز مجموع چهار برابری اخیر، به‌اتحاد موردنظر می‌رسیم.

۰۱۱ راه‌حل اول. چون $\alpha+\beta+\gamma=۱۸۰^\circ$، بنابراین، زاویه‌های $\frac{\alpha}{۲}$، $\frac{\beta}{۲}$ و $\frac{\gamma}{۲}$، حاده‌اند و می‌دانیم، سینوس یك زاویه، درفاصلهٔ ۰ و ۹۰ درجه، صعودی است، یعنی با بزرگ‌شدن زاویه، سینوس هم بزرگ می‌شود. بنابراین، از نابرابری‌های

$$\frac{\alpha}{۲}=۹۰^\circ-\frac{\beta+\gamma}{۲}<۹۰^\circ-\frac{\beta}{۲}<۹۰^\circ$$

به‌دست می‌آید:

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}<\sin\left(۹۰^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)\sin\frac{\beta}{۲}=\cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}$$

وچون $\cos\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}=\frac{۱}{۲}\sin\beta$ و $\sin\beta\leqslant ۱$، $\cos\beta\leqslant ۱$، پس

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}<\frac{۱}{۲}\sin\beta\leqslant\frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

اگر γ راکوچکترین زاویهٔ مثلث بگیریم، داریم:

$$\gamma\leqslant\frac{۱۸۰^\circ}{۳}=۶۰^\circ \Rightarrow \sin\frac{\gamma}{۲}\leqslant\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲} \qquad (۲)$$

واز نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}<\frac{1}{4} \qquad (3)$$

راه‌حل دوم. a) درهر مثلث داریم:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R} \qquad (1)$$

که درآن، r شعاع دایره محاطی داخلی و R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است (یادداشت ۱ را درپایان حل ببینید). چون درهر مثلث داریم $R>r$، بنابراین، حاصل‌ضرب سمت‌چپ برابری از $\frac{1}{4}$ کوچکتر است.

b) نابرابری موردنظر را، می‌توان تقویت کرد، به‌این معنا که می‌توان ثابت کرد:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8} \qquad (2)$$

اولر ثابت کرد (یادداشت ۲ را درپایان حل ببینید):

$$d^2=R^2-2Rr$$

که درآن، d عبارت‌است ازفاصلهٔ مرکزهای دودایرهٔ محاطی داخلی‌ومحیطی مثلث. از رابطهٔ اولــر به‌دست می‌آید $r\leqslant\frac{R}{2}$ و، بنابراین، باتــوجه به‌رابطهٔ (۱)، به‌دست می‌آید:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}$$

حالت $d=0$ مربوط به‌مثلث متساوی‌الاضلاع است و، دراین حالت، مقــدار $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$، درست برابــر $\frac{1}{8}$ است.

یادداشت ۱. یادآوری بعضی ضرب‌های مثلثاتی در مثلث. اگر p را نصف‌محیط ، S را مساحت، R را شعاع‌دایرهٔ محیطی وبالاخره، r را شعاع

دایرهٔ محاطی داخلی مثلث بگیریم، داریم:

$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}=\frac{S}{p^۲} \qquad (I)$$

که اگر $S=pr$ قرار دهیم [رابطهٔ (۴) در یادداشت ۲ ، پایان حل مسألهٔ ۹]:

$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}=\frac{r}{p} \qquad (II)$$

$$\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}=\frac{p}{۴R} \qquad (III)$$

$$\sin\frac{\alpha}{۲}\sin\frac{\beta}{۲}\sin\frac{\gamma}{۲}=\frac{r}{۴R} \qquad (IV)$$

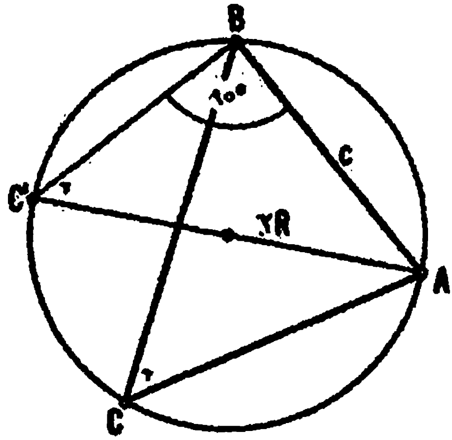
برای اثبات دستورهای (I) تا (IV)، ازرابطه‌های (۸) تا (۱۲)، دریادداشت ۲، ازحل مسألهٔ ۹، استفاده می کنیم:

$$tg\frac{\alpha}{۲}tg\frac{\beta}{۲}tg\frac{\gamma}{۲}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p^۲}=\frac{S}{p^۲}$$

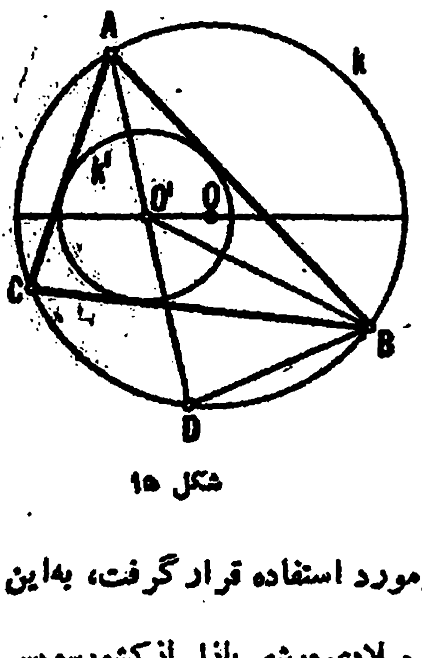
$$\cos\frac{\alpha}{۲}\cos\frac{\beta}{۲}\cos\frac{\gamma}{۲}=\frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc}=\frac{pS}{abc}$$

که با توجه به‌رابطه‌های $\sin\gamma=\frac{c}{۲R}$ و $R=\frac{c}{۲\sin\gamma}=\frac{abc}{۴S}$ (شکل ۱۳)، دستور (II) و، سرانجام، به‌کمک دستورهای (II) و (III)، دستور (IV) ثابت می‌شود.

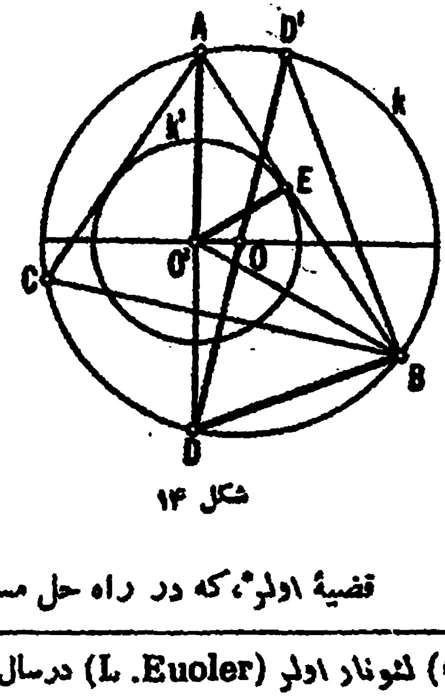
یادداشت ۲. دایره‌های محاطی و محیطی یک مثلث. دو دایرهٔ k و k' را، به‌نحوی درنظر می گیریم که یکی شامل دیگری ومثلاً، k شامل k' باشد (شکل‌های ۱۴و۱۵). O و O' را مرکزها، R و r را شعاع‌ها و d را فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره می گیریم.



شکل ۱۳



شکل ۱۵



شکل ۱۴

قضیهٔ اولر*، که در راه حل مسألهٔ بالا مورد استفاده قرار گرفت، به‌این

---

*) لئونارد اولر (L. Euoler) در سال ۱۷۰۷ میلادی در شهر بازل از کشور سویس متولد شد و در سال ۱۷۸۳ در شهر پترزبورگ (لنین‌گراد فعلی) از دنیا رفت. قبل از مرگ، رئیس بخش ریاضی فرهنگستان علوم پترزبورگ بود. او در همهٔ شاخه‌های ریاضیات، کار و تحقیق کرد و بخش عمده‌ای از نمادهای امروزی ریاضیات، از اوست. مثلاً او بود که حرف π را، به‌عنوان نمادی برای نسبت محیط دایره به‌قطر آن، به‌کار برد. همچنین، او حرف e را برای مبنای لگاریتم طبیعی انتخاب کرد و به‌عنوان حد دنبالهٔ زیر در نظر گرفت:

$$1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}, \left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}, \ldots$$

صورت است.

قضیه. شرط لازم وکافی، برای وجـود مثلثی با دایره‌هـای محیطی و محاطی k و k'، این است که داشته باشیم:

$$d^2 = R^2 - 2Rr \qquad (1)$$

اثبات. a) A را روی محیط دایرهٔ k در نظر می‌گیریم (شکل ۱۴). شرط لازم وکافی برای وجود نقطه‌های B و C، به‌نحوی‌که مثلث ABC در دایرهٔ k محاط و بردایرهٔ k' محیط باشد، چیست؟ اگر دونقطهٔ B و C وجود داشته باشند، باید در نقطه‌های برخورد دایرهٔ k با خطهای راستی باشندکه ازنقطهٔ A بردایـرهٔ k' مماس رسم شده‌اند. وقتی مثلث ABC بردایـرهٔ k' محیط می‌شودکه BC هم بر k' مماس باشد. شرط لازم وکافی، برای این‌که BC بر k' مماس باشد، این است‌که داشته باشیم:

$$\widehat{ABO'} = \widehat{O'BC} \qquad (2)$$

(درشکل ۱۴، این‌شرط برقرار نیست).

A را به O' وصل می‌کنیم و امتـداد می‌دهیم تا دایرهٔ k را در نقطهٔ دوم D قطع کند. روشن است‌که داریم:

$$\widehat{O'AB} = \widehat{O'AC}$$

علاوه براین، چون زاویه‌های CAO' و CBD، محاطی و روبه‌روی به‌کمان CD هستند:

$$\widehat{CAO'} = \widehat{CBD}$$

وبنابراین

$$\widehat{O'AB} = \widehat{CBD} \qquad (3)$$

ازطرف دیگر، باتوجه به‌مثلث ABO'، داریم:

$$\widehat{OAB}=\widehat{BO'D}-\widehat{ABO'}$$

و به‌همین ترتیب

$$\widehat{CBD}=\widehat{O'BD}-\widehat{O'BC}$$

که اگر آن‌ها را در رابطهٔ (۳) قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\widehat{BO'D}-\widehat{ABO'}=\widehat{O'BD}-\widehat{O'BC} \qquad (۴)$$

بنابراین، شرط (۲) وقتی، وتنها وقتی، برقرار است که داشته باشیم:

$$\widehat{BO'D}=\widehat{O'BD} \qquad (۵)$$

این دوزاویه، روبه‌رو به‌ضلع‌های BD و $O'D$ ازمثلث $BO'D$ هستند، بنابراین، می‌توان نتیجهٔ (۵) را به‌این‌ترتیب تنظیم کرد:

مثلث ABC وقتی، و تنها وقتی، بردایرهٔ k' محیط می‌شود که داشته باشیم: $BD=O'D$ (این شرط باشکل ۱۵ سازگار است).

b) برای این‌که ثابت کنیم، شرط لازم وکافی موردنظر مسألهٔ ما، با رابطهٔ (۱) هم‌ارز است، سعی می‌کنیم، نسبت $\frac{BD}{O'D}$ را برحسب R و r و d بنویسیم. نقطهٔ تماس خط راست AB با دایرهٔ k' را E و انتهای دیگر قطر DD' ازدایرهٔ k را D' می‌نامیم (شکل ۱۴). ثابت می‌کنیم، دومثلث $AO'E$ و $D'DB$ متشابه‌اند. اولاً این دو مثلث در رأس‌های E و B قائمه‌اند، ثانیاً زاویهٔ A از مثلث $AO'E$ و زاویهٔ D' از مثلث $D'DB$، محاطی و روبه‌رو به‌کمان DB از دایره k هستند. از تشابه این دومثلث نتیجه می‌شود:

$$\frac{AO'}{EO'}=\frac{D'D}{BD'} \Rightarrow \frac{AO'}{r}=\frac{۲R}{BD}$$

یعنی

$$AO'.BD=۲rR \qquad (۶)$$

می‌دانیم، اگر دو وتر در درون دایره‌ای یکدیگر را قطع کنند، حاصل‌-

ضرب دو بخش یکی از وترها، برابر است با حاصل‌ضرب دو بخش وتر دیگر.
اکنون دو قطر دایرهٔ k را، به‌عنوان دو وتری که در مرکز یکدیگر را قطع کرده‌اند، درنظر می‌گیریم: یکی قطر AD و دیگری قطری که از O و O' گذشته است. خواهیم داشت:

$$AO' \cdot O'D = (R+d)(R-d) \qquad (۷)$$

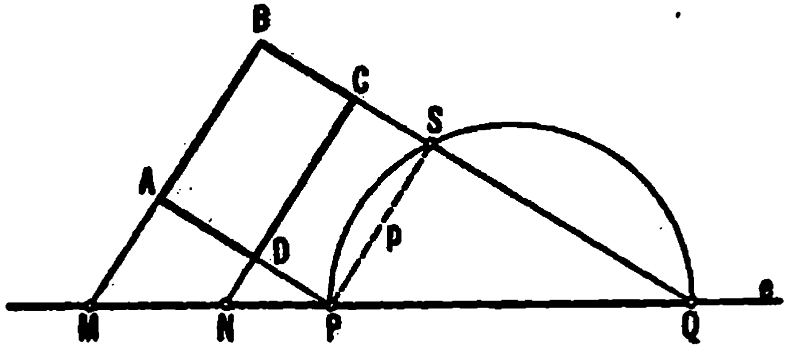
از تقسیم دو رابطهٔ (۶) و (۷) برهم، به‌دست می‌آید:

$$\frac{BD}{O'D} = \frac{۲Rr}{(R+d)(R-d)}$$

به‌این‌ترتیب، روشن می‌شود که BD و $O'D$ وقتی، و تنها وقتی، برابر می‌شوند که داشته باشیم:

$$۲Rr = (R+d)(R-d) \qquad (۸)$$

c) نتیجه‌های بخش‌های a) و b) را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:
اگر A، نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ k باشد، شرط لازم و کافی برای وجود نقطه‌های B و C، به‌نحوی که مثلث ABC در k محاط و بر k' محیط شده باشد، این است که رابطهٔ (۸) برقرار باشد.
درحالت خاص $d=۰$، به‌دست می‌آید $R=۲r$ و مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.
درضمن، با توجه به‌نابرابری $d^۲ \geqslant ۰$، از رابطهٔ ۸ نتیجه می‌شود:
$R \geqslant ۲r$.
شرط (۸)، بستگی به‌انتخاب جای نقطهٔ A روی محیط دایرهٔ k ندارد: اگر برای نقطه‌ای مثل A ازمحیط دایرهٔ k، رسم مثلثی مانند ABC محاط در k ومحیط بر k'، ممکن باشد، برای هر نقطهٔ دلخواه دیگری از محیط دایرهٔ k، این رسم ممکن است.
این قضیه، به وسیلهٔ پونسله، ریاضی‌دان فرانسوی، برای هرمقطع مخروطی دلخواه و برای هرچندضلعی (به‌جای مثلث) تعمیم داده شد.
۰۱۴. راه‌حل اول. مثلث قائم‌الزاویهٔ PSQ، با معلوم بودن وتر PQ و



شکل ۱۶

با دردست داشتن $PS=p$، قابل رسم است (شکل ۱۶). اکنون، اگر از M و N دو خط راست، موازی PS رسم کنیم واز P و Q، عمودهایی بر PS فرود آوریم، از چهارخط راست حاصل، مستطیلی به‌دست می‌آید که با شرط‌های مسأله سازگار است.

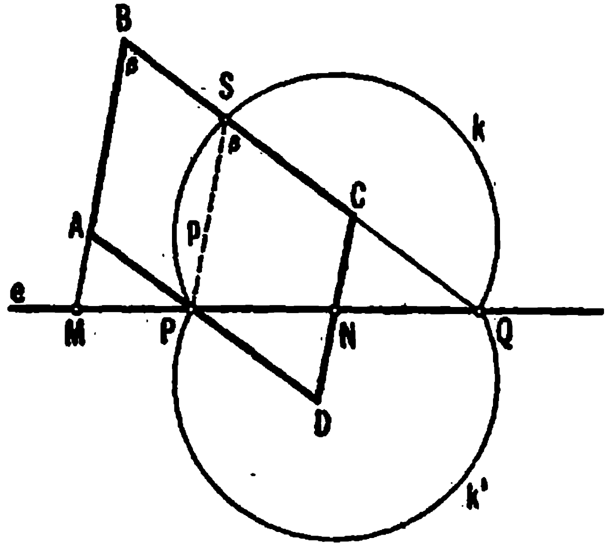
مسأله، وقتی وتنها وقتی جواب داردکه، مثلث PSQ قابل رسم باشد، یعنی وقتی‌که داشته باشیم: $p<PQ$. با این شرط، مثلث PSQ را می‌توان در هرطرف خط راست e رسم کرد. بنابراین، دوجواب برای مسأله به‌دست می‌آید که، نسبت به‌خط راست e، قرینهٔ یکدیگرند.

راه‌حل دوم. مسأله را می‌توان به‌صورت زیر تعمیم داد:

ضلع‌های AB، CD، AD و BC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$، و یا امتداد آن‌ها، خط راست e را در نقطه‌های M، N، P و Q قطع کرده‌اند (شکل ۱۷). اگر نقطه‌های M، N، P و Q وطول p از ضلع AB واندازهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع معلوم باشند، متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

ابتدا، نقطهٔ S، محل برخورد ضلع BC با خط‌راستی را که از P موازی AB رسم می‌شود، پیدا می‌کنیم. با پیدا شدن نقطهٔ S، رسم متوازی‌الاضلاع دشوار نیست.

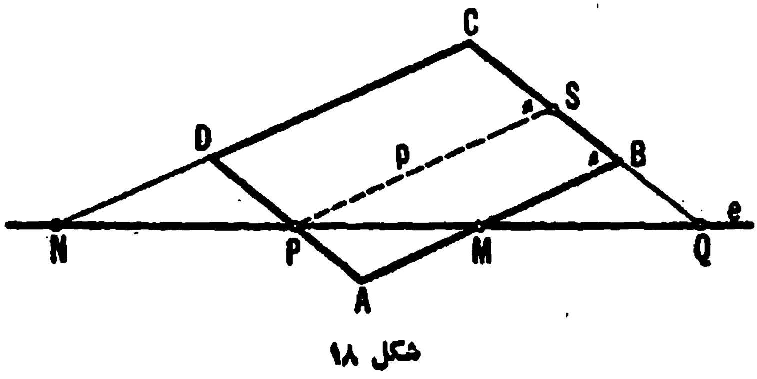
برای پیداکردن S، ازدوشرط‌مسأله استفاده می‌کنیم: $ABSP$ متوازی‌الاضلاع است، بنابراین، $PS=AB=p$؛ یعنی، نقطهٔ S، بردایره‌ای به‌مرکز P و به‌شعاع p قرار دارد. علاوه براین، PS با AB موازی است، یعنی زاویهٔ PSQ با زاویهٔ β رأس B برابریا مکمل آن است: اگرپاره‌خط‌های



شکل ۱۷

MN و PQ دریك جهت باشند (یعنی، وقتی که N درسمت راست M و Q درسمت راست P، ویا وقتی کـه N درسمت چپ M و Q درسمت چپ P باشند)، داریم: $\widehat{PSQ}=\beta$؛ و اگـر MN و PQ در دوجهت مخالف باشند (شکل ۱۸ را ببینید)، داریم: $\widehat{PSQ}=۱۸۰^\circ-\beta$.

درهردوحالت، مکان نقطهٔ S، عبارت است از دوکمان k و k' که‌یکی دربالای PQ ودیگری درزیر PQ قرار دارد [یادداشت زیـر راه‌حل اول مسالهٔ ۵ را ببینید]. شعاع دایره‌هایی که k و k' کمان‌هایی از آن‌هـا هستند، برابر است با $\frac{PQ}{۲\sin\beta}$ [بخش III از یادداشت زیرراه‌حـل اول مسألهٔ ۵ را ببینید]. بنابراین، نقطهٔ S، درمحل برخورد دایرهٔ به‌مرکز P و به‌شعاع p با



شکل ۱۸

کمان k یا کمان k' قراردارد.

به‌بررسی تعداد جواب‌ها می‌پردازیم. هرمتوازی‌الاضلاعی که جواب مسأله باشد، به‌خودی خود، جواب دومی را به‌ما می‌دهدکه قرینهٔ آن نسبت به‌خط راست e است. بنابراین، برای پیداکردن تعداد جواب‌ها، کافی است تعداد نقطه‌های برخورد دایرهٔ به‌مرکز P را باکمان k پیداکنیم، نقطه‌های برخورد باکمان k'، ازراه قرینه‌سازی به‌دست می‌آیند.

برای $\beta<90^\circ$، این‌حالت‌ها پیش می‌آید:

۱) $p>d$ [$d=\frac{PQ}{\sin\beta}$، یعنی دوبرابر شعاع دایره‌ای که، کمان k، روی آن‌است]. دراین‌حالت، دایرهٔ به‌مرکز P وشعاع p، کمان k را قطع‌نمی‌کند ومساله جواب ندارد.

۲) $p=d=\frac{PQ}{\sin\beta}$. دراین‌حالت دایرهٔ به‌مرکز P و به‌شعاع p، برکمان k مماس است. مسأله یک جواب دارد (والبته، یک جواب هم، به‌صورت قرینهٔ آن).

۳) $PQ<p<d=\frac{PQ}{\sin\beta}$. دراین‌حالت، دایره به‌مرکز P و شعاع p، کمان k را در دونقطه قطع می‌کند؛ مسأله دارای دو جواب است (و دو جواب هم، قرینهٔ آن‌ها نسبت به‌خط راست e).

۴) $p<PQ$. دراین حالت، دایره به‌مرکز P و به‌شعاع p، k را در یك نقطه قطع می‌کند ومسأله یك‌جواب دارد (وقرینهٔ آن نسبت به‌خط‌راست e). درشکل ۱۷، همین‌حالت، نشان داده شده است.

برای $\beta\geqslant 90^\circ$، تنها دوامکان وجود دارد:

۱) $p\geqslant PQ$. مسأله‌جواب ندارد.

۲) $p<PQ$. مسأله یك جواب دارد (ودرضمن، قرینهٔ آن).

درحالت‌خاص $\beta=90^\circ$، متوازی‌الاضلاع $ABCD$، به‌صورت‌مستطیل درمی‌آید وکمان‌های k و k'، نیم‌دایره‌هایی به‌قطر PQاند.

بعدازمشخص شدن نقطهٔ S، می‌توانیم متوازی‌الاضلاع را، به‌این‌ترتیب، رسم کنیم: ضلع BC برخط راستی قرار دارد که دو نقطهٔ Q و S می‌گذرد. ضلع AD برخط راستی واقع است که از P موازی QS رسم شود. سرانجام، از نقطه‌های M و N، خطهای راستی موازی PS رسم می‌کنیم که، همراه با خطهای راست قبلی، متوازی‌الاضلاع را می‌سازند.

۱۸۹۸

۰۱۳. این اتحاد را درنظر می‌گیریم:

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+ab^{n-۲}+b^{n-۱})$$

اگر دراین اتحاد قرار دهیم: $a=۲$ و $b=-۱$، به‌دست می‌آید:

$$۲^n-(-۱)^n=[۲-(-۱)][۲^{n-۱}+۲^{n-۲}(-۱)+\dots+(-۱)^{n-۱}]$$

که اگر کروشه دوم را، درسمت راست، A بنامیم:

$$۲^n-(-۱)^n=۳A \qquad (\text{عددی است درست } A)$$

اکنون می‌نویسیم:

$$۲^n+۱=۲^n-(-۱)^n+۱+(-۱)^n=۳A+۱+(-۱)^n$$

واین، نشان می‌دهد که، عدد $۲^n+۱$، وقتی بر ۳ بخش‌پذیر است که، n، عددی فرد باشد. در حالت زوج بودن n، در تقسیم $۲^n+۱$ بر ۳، به‌باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسیم.

یادداشت ۱. نظریهٔ هم‌نهشتی‌ها. بسیاری از مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری، وازآن‌جمله مسالهٔ بالا، به‌کمک مفهوم هم‌نهشتی ساده‌ترمی‌شوند. این مفهوم را، برای نخستین‌بار، گوس وارد در ریاضیات کرد و ما، در این یادداشت، شما را با جنبه‌های اساسی آن آشنا می‌کنیم.

تعریف. a، b و m را سه عدد درست می‌گیریم اگر $a-b$ بر m

بخش‌پذیر باشد، گویند a با b به‌مدول m هم‌نهشت است و می‌نویسند:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

مدول را پیمانه هم می‌گویند*. درضمن، رابطهٔ هم‌نهشتی را، بداین صورت هم می‌توان نوشت:

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

درواقع، دراین‌صورت، باید داشته باشیم: $a-b=km$ (که در آن، k عددی است درست).

ازومی ندارد که عددهای درست a، b، k و m حتماً مثبت باشند؛ حتی a، b و k، صفر هم می‌توانند باشند. ولی، از آن‌جا که بخش‌پذیری عددهای درست بر m، بستگی به‌علامت m ندارد، می‌توانیم، بی آن که لطمه‌ای به کلی‌بودن بحث وارد شود، همه‌جا m را مثبت به‌حساب آوریم. چندمثال:

$$۲^۲ \equiv ۱, ۲^۴ \equiv ۱, ۲^۶ \equiv ۱, \dots \pmod{۳}$$

یعنی، عددهای $۲^۲-۱=۳$، $۲^۴-۱=۱۵$، $۲^۶-۱=۶۳$، ... بر ۳ بخش‌پذیرند. وقتی که بنویسیم: $a \equiv ۰ \pmod{m}$ یا $a \overset{m}{\equiv} ۰$، به‌معنای آن است که عدد درست a برعدد درست m بخش‌پذیر است.

اکنون، فرض می‌کنیم $m=۳$ وعددهای درست‌را به‌ترتیب صعودی، طوری می‌نویسیم که، هرسه عدد درست متوالی، دریك ستون قرار گیرند؛ آرایشی به‌صورت زیر، به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dots & -۹ & -۶ & -۳ & ۰ & ۳ & ۶ & ۹ & \dots \\
\dots & -۸ & -۵ & -۲ & ۱ & ۴ & ۷ & ۱۰ & \dots \\
\dots & -۷ & -۴ & -۱ & ۲ & ۵ & ۸ & ۱۱ & \dots
\end{array}$$

*) درزبانِ فارسی، برای واژهٔ «مدول»، «پیمانه»، «مضرب»، «میزان»، «آهنگ» و «سنج» هم به‌کار برده‌اند. در اینجا، ترجیح داده‌ایم از همان واژهٔ «مدول» استفاده کنیم.

کاملاً روشن است که، هردو عدد درست دلخواه، در یک سطر، به‌مدول ۳ هم‌نهشت یکدیگرند. ولی، اگر دو عدد را از دوسطر متفاوت انتخاب کنیم، به‌مدول ۳، هم‌نهشت نیستند. باهمین‌روش می‌توانیم، برای‌هرعدد درست m، آرایشی شامل m سطر از عددهای درست تنظیم کنیم. این مطلب، نشان می‌دهد که‌برای‌هرعدد درست ومفروض a، تنها یک‌عدد مثل r از بین‌عددهای

$$0, 1, 2, \ldots, m-2, m-1$$

پیدا می‌شود، به‌نحوی که داشته باشیم: $a \equiv r(\mathrm{mod}\, m)$ درواقع، r همان باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m است.

ویژگی‌های زیر نشان می‌دهد که با رابطهٔ هم‌نهشتی، درمجموعهٔ‌عددهای درست، چگونه باید عمل کرد:

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه $b \overset{m}{\equiv} a$ (ویژگی تقارنی)؛ برای هرعدد درست a داریم: $a \overset{m}{\equiv} a$ (ویژگی بازتابی)؛

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $b \overset{m}{\equiv} c$، آن‌گاه $a \overset{m}{\equiv} c$ (ویژگی سرایت‌پذیری).

قضیه. اگر $a \overset{m}{\equiv} a'$ و $b \overset{m}{\equiv} b'$، آن‌گاه

$$a+b \overset{m}{\equiv} a'+b', \quad a-b \overset{m}{\equiv} a'-b', \quad ab \overset{m}{\equiv} a'b'.$$

اثبات. این حکم‌ها ساده است:

$$\left.\begin{aligned} a \overset{m}{\equiv} a' &\Rightarrow a = a' + mk \\ b \overset{m}{\equiv} b' &\Rightarrow b = b' + mk' \end{aligned}\right\} \Rightarrow a \pm b = a' \pm b' + m(k \pm k')$$

یعنی $a \pm b \overset{m}{\equiv} a' \pm b'$. به‌همین‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$ab = a'b' + m(b'k + a'k' + mkk')$$

یعنی $ab \overset{m}{\equiv} a'b'$.

قضیهٔ زیر، نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ بالاست:

اگر $a \overset{m}{\equiv} b$، آن‌گاه $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$؛ که باروش استقرای ریاضی، به‌سادگی، ثابت می‌شود.

توجه کنیم: ازرابطهٔ $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$، همیشه نمی‌توان رابطهٔ $a \overset{m}{\equiv} b$ رانتیجه گرفت (چرا؟)

یادداشت ۲. قضیهٔ اخیر را، در یادداشت ۱، می‌توان برای حل مسألهٔ ۱۳ به‌کاربرد:

$$۲ \equiv -۱ (\text{mod } ۳) \Rightarrow ۲^n \equiv (-۱)^n (\text{mod } ۳)$$

واگر n، عددی فرد باشد، به‌دست می‌آید:

$$۲^n \equiv -۱ (\text{mod } ۳) \Rightarrow ۲^n + ۱ \equiv ۰ (\text{mod } ۳)$$

ولی، درحالت زوج بودن n:

$$۲^n \equiv ۱ (\text{mod } ۳) \Rightarrow ۲^n + ۱ \equiv ۲ (\text{mod } ۳)$$

یعنی عدد $۲^n + ۱$، وقتی n زوج باشد، بر۳ بخش‌پذیر نیست.

۱۴. a) زاویه‌های دومثلث را α، β، γ و α'، β'، γ' می‌گیریم وفرض می‌کنیم $\alpha = \alpha'$. ببینیم، باچه شرطهایی نابرابری

$$\sin\beta + \sin\gamma < \sin\beta' + \sin\gamma' \qquad (۱)$$

برقرار است؟ نابرابری (۱) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$۲\sin\frac{\beta+\gamma}{۲}\cos\frac{\beta-\gamma}{۲} < ۲\sin\frac{\beta'+\gamma'}{۲}\cos\frac{\beta'-\gamma'}{۲} \qquad (۲)$$

چون $\alpha = \alpha'$، داریم: $\beta + \gamma = \beta' + \gamma' < ۱۸۰^\circ$ وبنابراین

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{۲} = \sin\frac{\beta'+\gamma'}{۲} > ۰$$

دوطرف نابرابری (۲) را، برمقدار مثبت $\sin\frac{\beta+\gamma}{۲}$ تقسیم می‌کنیم:

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{۲}<\cos\frac{\beta'-\gamma'}{۲}$$

واین نابرابری وقتی، و تنها وقتی، برقرار است که قدرمطلق $\beta'-\gamma'$ از قدرمطلق $\beta-\gamma$ کوچکتر باشد.

b) بنابرآن‌چه در a) گفتیم، اگردرمثلثی مثل Δ، سه زاویه باهم برابر نباشند، ومثلاً $\beta\neq\gamma$؛ آن‌وقت، می‌توان مثلثی مثل Δ' پیدا کرد، به‌نحوی‌که مجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ آن، از مجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ مثلث Δ بیشترباشد. برای مشخص کردن نمونه‌ای ازمثلث Δ'، یکی اززاویه‌های آن برابر α و هریك ازدو زاویهٔ دیگرآن را برابر واسطهٔ حسابی دو زاویهٔ‌دیگر می گیریم، یعنی

$$\alpha'=\alpha,\ \beta'=\gamma'=\frac{۱}{۲}(\beta+\gamma)$$

بنابراین، همیشه می‌توان مجموع سینوس‌های زاویه‌های مثلثی راکه متساوی‌الاضلاع نباشد، افزایش داد، وتنها مثلث متساوی‌الاضلاع می‌تواند حداکثر این مجموع را بهما بدهد.

یادداشت. وجود، ماکزیمم برای مجموع سینوس‌های زاویه‌های مثلث در استدلالی که برای حل مسالهٔ ۱۴ داشتیم، روشن کردیم که، اگر برای مجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ مثلث ماکزیممی وجود داشته باشد، این‌ماکزیمم متعلق به‌مثلث متساوی‌الاضلاع است. یادآوری می کنیم که «وجود ماکزیمم» نیاز به‌اثبات دارد، زیرا تعداد مثلث‌های با زاویه‌های مختلف، نامتناهی‌است و، بنابراین، درمیان بی‌نهایت عددی‌که برای مجموع سینوس‌ها به‌دست می‌آید، ممکن است بزرگترین عدد وجود نداشته باشد.

باید ثابت‌کنیم که، مجموع‌سینوس‌های سه‌زاویهٔ‌مثلث متساوی‌الاضلاع (Δ_E)، ازمجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ هرمثلث دیگری (Δ)، بیشتر است.

۱) اگریکی از زاویه‌های مثلث Δ برابر ۶۰درجه باشد، آن‌وقت دو مثلث Δ_E و Δ دارای یك زاویهٔ برابر می‌شود. ولی، تفاضل دوزاویهٔ دیگـر

در مثلث متساوی‌الاضلاع برابر صفر و، بنابراین، ازقدرمطلق تفاضل‌دوزاویهٔ دیگر مثلث Δ کمتر است.

۲) اگر هیچ کدام از زاویه‌های Δ برابر ۶۰ درجه نباشند و داشته باشیم: $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$، آن وقت خواهیم داشت $\alpha < 60^\circ < \beta$ و، بنابراین، $60^\circ - \alpha$ و $\gamma - 60^\circ$، عددهایی مثبت‌اند. مثلث Δ' را بازاویه‌های $\alpha' = 60^\circ$، $\beta' = \beta$ و $\gamma' = \alpha + \gamma - 60^\circ$ درنظر می گیریم. داریم:

$$\gamma' - \alpha' = (\alpha + \gamma - 60^\circ) - 60^\circ = (\gamma - 60^\circ) - (60^\circ - \alpha)$$

بنابراین $|\gamma' - \alpha'|$، برابر است با عددی‌که بین دوعدد

$$(\gamma - 60^\circ) - (60^\circ - \alpha) \text{ و } (60^\circ - \alpha) - (\gamma - 60^\circ)$$

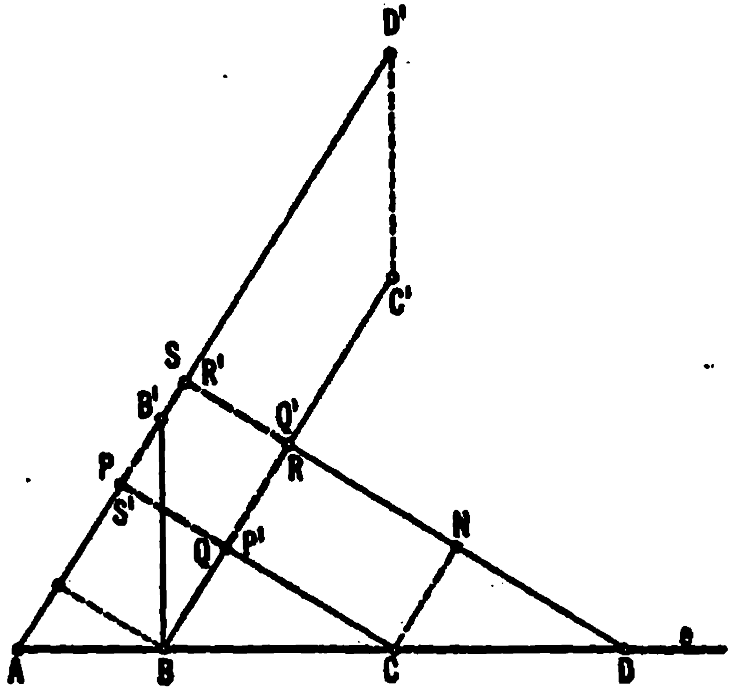
قرار گرفته است و درهر حال

$$|\gamma' - \alpha'| < (\gamma - 60^\circ) + (60^\circ - \alpha) = \gamma - \alpha = |\gamma - \alpha|$$

وچون $\alpha' = 60^\circ$، با توجه به ۱)، مجموع سینوس‌های سه زاویهٔ مثلث Δ' ازمجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ Δ_E کمتر است. علاوه براین، چون $\beta' = \beta$ و، درضمن، قدرمطلق تفاضل دوزاویهٔ دیگر Δ' ازقدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر Δ کمتراست، مجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ مثلث Δ ازمجموع سینوس‌های سه‌زاویه مثلث Δ' و، به‌طور بدیهی، ازمجموع سینوس‌های سه‌زاویهٔ Δ_E کمتر می شود.

۰۱۵ مسأله را حل شده و $PQRS$ را، مربع جواب، می گیریم (شکل ۱۹).

اگر مربع $PQRS$ را به‌اندازهٔ ۹۰درجه دور مرکز خودش دوران دهیم (روی شکل ۱۹، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، CD به‌صورت $C'D'$ درمی آید، به‌نحوی که $C'D' \perp CD$ و $C'D' = CD$. بی‌شك، نقطه‌ای مانند B' وجود دارد، به‌نحوی‌که BB' برخط راست e (که از C و D می گذرد) عمود وطولی برابر CD داشته باشد. B' برضلع PS واقع است. بنابراین، رسم مربع، به‌صورت زیرانجام می گیرد:



شکل ۱۹

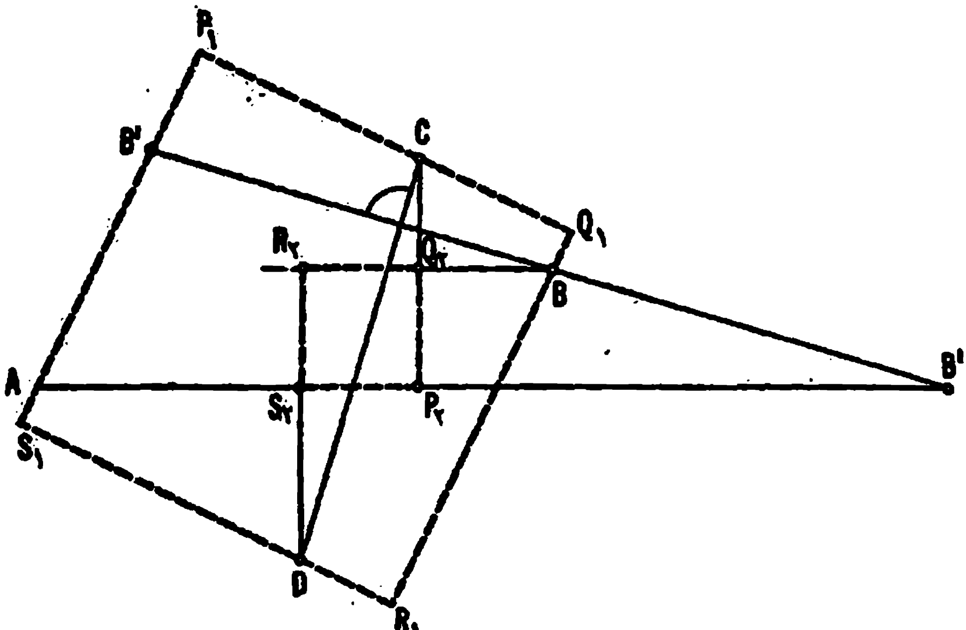
از نقطهٔ B عمودی برخـط راست e رسم وروی آن $BB'=CD$ را جدا می‌کنیم. ضلع‌های مربع $PQRS$، برایـن چهار خط راست واقع‌اند: ۱) خط راست AB'، ۲) خط‌راستی که از B موازی AB' رسم شود، ۳) و ۴) خط‌های راستی که عمود بر AB' از C و D رسم شده‌اند.

چـون BB' را در هـریك از دوطرف خـط راست e می‌توان رسم کرد، مسأله دو جواب دارد، که نسبت به‌خط راست e، قرینهٔ یکدیگرند. (در شکل ۱۹، تنها یکی از جواب‌ها داده شده است.)

بررسی درستی جواب. از نقطهٔ B، پاره‌خط BL را عمـود بر AB' و از نقطهٔ C، پاره‌خط CN راعمود بر DS رسم‌می کنیم. در دومثلث‌قائم‌الزاویهٔ BLB' و CND داریم:

$$\widehat{LBB'}=\widehat{NCD} \quad \text{و} \quad BB'=DC$$

(برابری دوزاویه، از این‌جا نتیجه می‌شود که ضلع‌های آن‌ها، دوبه‌دو، برهم عمودند). بنابراین، دو مثلث برابرند وداریـم: $BL=CN$، یعنی دوضلـع مجاور، در مستطیلی که رسم کرده‌ایم، برابرند.



شکل ۲۰

یادداشت. اگر چهار نقطهٔ مفروض A، B، C و D، نه بریک خط راست، بلکه در موقعیت‌های دلخواهی، بریک صفحه واقع باشند، بازهم تمامی بحث بالا، واژه به‌واژه، درست است (شکل ۲۰).

۱۸۹۹

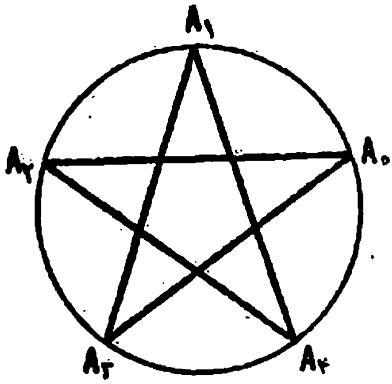
۱۶. راه‌حل اول. در دایرهٔ به‌شعاع واحد، طول هروتر برابر است با دو برابر سینوس نصف زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به‌آن. بنابراین (شکل‌های ۲۱ و ۲۲):

$$A_0A_1 = 2\sin 36^\circ = 4\sin 18^\circ \cdot \cos 18^\circ,$$

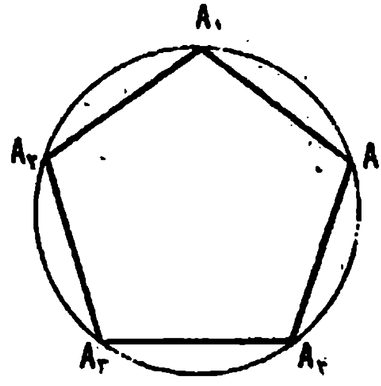
$$A_0A_2 = 2\sin 72^\circ = 2\cos 18^\circ,$$

$$A_0A_1 \cdot A_0A_2 = 8\sin 18^\circ \cdot \cos^2 18^\circ$$

ولی $2\sin 18^\circ$، برابر است با طول ضلع ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد. و می‌دانیم که، این طول، برابر $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ است. بنابراین



شکل ۲۲



شکل ۲۱

$$\cos^2 18^\circ = 1 - \sin^2 18^\circ = \frac{5+\sqrt{5}}{8} = \sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{8}$$

واز آن‌جا

$$8\sin 18^\circ\cdot\cos^2 18^\circ = 8\sqrt{5}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{8}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sqrt{5}$$

و درنتیجه:

$$(A_0A_1\cdot A_1A_2)^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

یادداشت. چندضلعی‌های منتظم. در مسألهٔ بالا، A_0A_1 یک‌ضلع پنج‌ضلعی در شکل ۲۱ و A_1A_2 یک‌ضلع پنج‌شاعی در شکل ۲۲ است. هردوشکل، یک پنج‌ضلعی منتظم‌را نشان می‌دهند: زیرا یک nضلعی منتظم را به‌این‌ترتیب، می‌توان تعریف کرد: ازنقطه‌ای مثل A_1 واقع برمحیط دایره آغاز و، پشت‌سرهم، وترهایی به‌طول a رسم می‌کنیم. اگر بعداز nمرحله، دوباره به‌نقطهٔ A_1 برسیم وتمام nرأس متمایز باشند. یک nضلعی منتظم باضلع به‌طول a رسم شده است.

برای هرعدد طبیعی n، می‌توانیم همهٔ nضلعی‌های منتظم را رسم‌کنیم، به‌شرطی‌که طول وتر روبه‌رو به‌کمان $\frac{k}{n}360^\circ$ را برابر a بگیریم. دراین‌جا، k باید نسبت به n اول و، درضمن، از $\frac{n}{2}$ کوچکتر باشد.

اگر k و n، نسبت به‌هم، اول نباشند: $(n,k)\neq ۱$، ضمن رسم، زودتر از n مرحله، به $A_۰$ می‌رسیم. مثلاً، برای $n=۱۰$ و $k=۴$، چندضلعی منتظمی به‌دست می‌آید که، به‌جای ۱۰ رأس، ۵ رأس دارد.

برای $k=۱$، چندضلعی منتظمی به‌دست می‌آید که، ضلع‌های آن، یکدیگر را تنها در نقطه‌های انتهائی خود قطع می‌کنند.

برای $k>۱$، در چندضلعی منتظم حاصل، ضلع‌ها، یکدیگر را در نقطه‌های دیگری غیر از رأس‌ها هم، قطع می‌کنند.

اگر n عددی اول و بزرگتر از ۲، مثل p، باشد، k می‌تواند همهٔ مقدارهای درست از ۱ تا $\frac{۱}{۲}(p-۱)$ را قبول کند. در این حالت، تعداد p ضلعی‌های منتظم مختلف محاط در دایره، برابر $\frac{۱}{۲}(p-۱)$ می‌شود.

اگر n عددی مرکب باشد، تعداد n ضلعی‌های منتظم، کمتر از $\frac{۱}{۲}(n-۱)$ می‌شود. مثلاً، برای $n=۲۲$، تنها ۴ نوع مختلف ۲۲ ضلعی منتظم به‌دست می‌آید.

راه‌حل دوم. اگر ۵φ را مضرب فردی از ۹۰ درجه بگیریم، یعنی داشته باشیم: $\cos ۵\varphi=۰$، به‌سادگی می‌توانیم پاره‌خطهای $A_۰A_۱$ و $A_۰A_۲$ را با کسینوس زاویه‌های φ مربوط کنیم. کافی است مقدارهایی از φ را در نظر بگیریم که بین ۰ و ۱۸۰ قرار دارند، زیرا برای مقدارهای $\varphi>۱۸۰^\circ$، همیشه می‌توان زاویه‌ای بین ۰ و ۱۸۰ درجه پیدا کرد که دارای همان کسینوس باشد. اکنون، این کسینوس‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\cos\left(\frac{۱}{۵}۹۰^\circ\right)=\cos ۱۸^\circ=\sin ۷۲^\circ=\frac{۱}{۲}A_۰A_۲,$$

$$\cos\left(\frac{۳}{۵}۹۰^\circ\right)=\cos ۵۴^\circ=\sin ۳۶^\circ=\frac{۱}{۲}A_۰A_۱,$$

$$\cos\left(\frac{۵}{۵}۹۰^\circ\right)=\cos ۹۰^\circ=۰,$$

$$\cos\left(\frac{7}{5}90°\right)=\cos 126°=-\sin 36°=-\frac{1}{2}A_0A_1,$$

$$\cos\left(\frac{9}{5}90°\right)=\cos 162°=-\sin 72°=-\frac{1}{2}A_0A_2$$

اگر بتوانیم، معادلهٔ $\cos 5\varphi=0$ را، به‌صورت یك معادلهٔ چندجمله‌ای برحسب $\cos\varphi$ (که آن را با x نشان خواهیم داد) بنویسیم، مقدارهایی که‌در بالا به‌دست آوردیم، ریشه‌های این معادله می‌شوند و، درنتیجه، حاصل $(A_0A_1\cdot A_0A_2)^2$، به‌سادگی به‌دست می‌آید.

برای این منظور، مقدارهای $\cos n\varphi$ و $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ را، پشت سرهم، به‌ازای $n=0,1,2,3,4,5$، برحسب $\cos\varphi=x$ بیان می‌کنیم [به‌جای $\sin(n+1)\varphi$، ازعبارت $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ استفاده کرده‌ایم، تا عبارت‌های حاصل گنگ نباشند]. عبارت‌های $T_n(x)$ و $U_n(x)$، برای $\cos n\varphi$ و $\frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$، برحسب $x=\cos\varphi$، به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\cos 0=T_0(x)=1,\ \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi}=U_0(x)=1,$$

$$\cos\varphi=T_1(x)=x,\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}=2\cos\varphi=U_1(x)=2x,$$

ودرحالت کلی، ازاتحاد زیراستفاده می‌کنیم:

$$\cos(n+1)\varphi=\cos\varphi\cos n\varphi-\sin\varphi\sin n\varphi=$$

$$=\cos\varphi\cos n\varphi-(1-\cos^2\varphi)\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}$$

که می‌توان آن را، با نمادهای انتخابی ما، این‌طور نوشت:

$$T_{n+1}(x)=xT_n(x)-(1-x^2)U_n(x) \qquad (1)$$

همچنین، اگر اتحاد

$$\frac{\sin(n+۲)\varphi}{\sin\varphi}=\frac{۱}{\sin\varphi}[\sin\varphi\cos(n+۱)\varphi+\cos\varphi\sin(n+۱)\varphi]$$

را به‌این صورت بنویسیم:

$$U_{n+۱}(x)=T_{n+۱}(x)+xU_n(x) \qquad (۲)$$

می‌توانیم بااستفادهٔ مکرر از (۱) و (۲)، به‌دست آوریم:

$$T_۲(x)=xT_۱(x)-(۱-x^۲)U_۰(x)=۲x^۲-۱,$$

$$U_۲(x)=T_۲(x)+xU_۱(x)=۴x^۲-۱,$$

$$T_۳(x)=۴x^۳-۳x,\ \ U_۳(x)=۸x^۳-۴x,$$

$$T_۴(x)=۸x^۴-۸x^۲+۱,\ \ U_۴(x)=۱۶x^۴-۱۲x^۲+۱$$

$$T_۵(x)=x(۱۶x^۴-۲۰x^۲+۵)=x[(۲x)^۴-۵(۲x)^۲+۵]$$

درنمادگذاری‌ما، $T_۵(x)=\cos ۵\varphi$ و $\cos ۵\varphi=۰$؛ بنابراین،ریشه‌های معادلهٔ $T_۵(x)=۰$، عبارتند از

$$-\frac{۱}{۲}A_۰A_۱,\ -\frac{۱}{۲}A_۰A_۱,\ ۰,\ \frac{۱}{۲}A_۰A_۱,\ \frac{۱}{۲}A_۰A_۲$$

ریشهٔ صفر معادلهٔ $T_۵(x)=۰$ روشن است. اگر $۲x=u$ قراردهیم،به‌معادلهٔ درجهٔ‌دوم $u^۲-۵u+۵=۰$ می‌رسیم که‌ریشه‌های‌آن، $(A_۰A_۱)^۲$ و $(A_۰A_۲)^۲$ هستند. چون ضریب درجهٔ دوم، برابر واحد است، حاصل‌ضرب دوریشهٔ آن برابر مقدار ثابت معادله می‌شود، یعنی

$$(A_۰A_۱\cdot A_۰A_۲)^۲=۵$$

دراین‌جا، یك نتیجهٔ اضافی هم به‌دست می‌آید:

$$(A_۰A_۱)^۲+(A_۰A_۲)^۲=۵$$

یادداشت ۱. چندجمله‌ای‌های «چه‌بی‌شف*». تعمیم مسألهٔ ۱۶.

مسألهٔ ۱۶ حالت خاصی از مسألهٔ زیر است:

اگر $n=p^k$ و p عددی اول و k عددی درست ومثبت باشد، و اگر n ضلعی‌های منتظم مختلف محاط در دایرهٔ واحد، ضلع‌هایی به‌طول‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_t داشته باشند؛ آن‌وقت

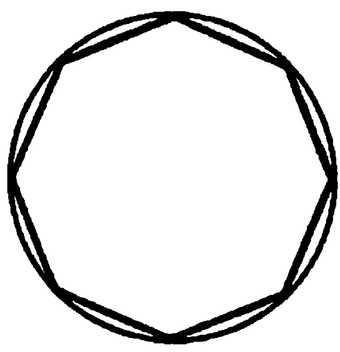
$$(a_۱ \cdot a_۲ \cdots a_t)^۲ = p$$

مثلاً برای $n=۲^۳$، طول ضلع هریک از دو ۸ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد، چنین‌اند (شکل‌های ۲۳ و ۲۴):

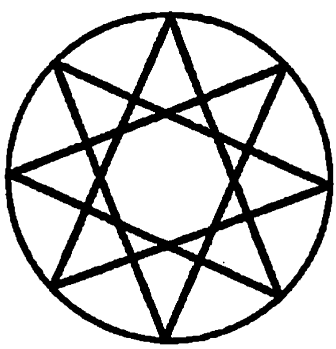
$$a_۱ = ۲\sin\frac{۴۵^\circ}{۲}\ ,\ a_۲ = ۲\sin\frac{۱۳۵^\circ}{۲} = ۲\cos\frac{۴۵^\circ}{۲}$$

وبنابراین، حاصل‌ضرب $a_۱a_۲$، چنین می‌شود:

$$a_۱a_۲ = ۴\sin\frac{۴۵^\circ}{۲}\cos\frac{۴۵^\circ}{۲} = ۲\sin ۴۵^\circ = \sqrt{۲};$$



شکل ۲۳



شکل ۲۴

---

*) چه‌بی‌شف (P.L. Chebyshev)، ریاضی‌دان روس، درسال ۱۸۲۱ میلادی درمسکو به‌دنیا آمد ودرسال ۱۸۹۴ در پترزبورگ (لنین‌گراد فعلی) ازدنیا رفت. قضیهٔ زیر، علاوه برچندجمله‌ای‌هایی‌که به‌نام او مشهور است، ازاوست، برای $x \geqslant ۲$، همیشه می‌توان عدد اولی مانند p پیداکردکه درنابرابری $x < p \leqslant ۲x$ صدق کند. مثلا، برای $x=۱$ داریم، $۱<۲\leqslant۲$ وبرای $x=۱۰$

$$۱۰ < ۱۱,۱۳,۱۷,۱۹ < ۲۰$$

$$(a_1 a_2)^2 = 2$$

اثبات این مسأله: درحالت کلی، به‌کمک همان معادله‌های $T_n(x) = 0$ و $u_n(x) = 0$ انجام می‌شود.

چندجمله‌ای‌های $T_n(x)$ و $U_n(x)$ که $\cos n\varphi$ و $\dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}$ را به صورت تابعی از $x = \cos\varphi$ بیان می‌کنند، چندجمله‌ای‌های چه‌بی‌شف می‌نامند.

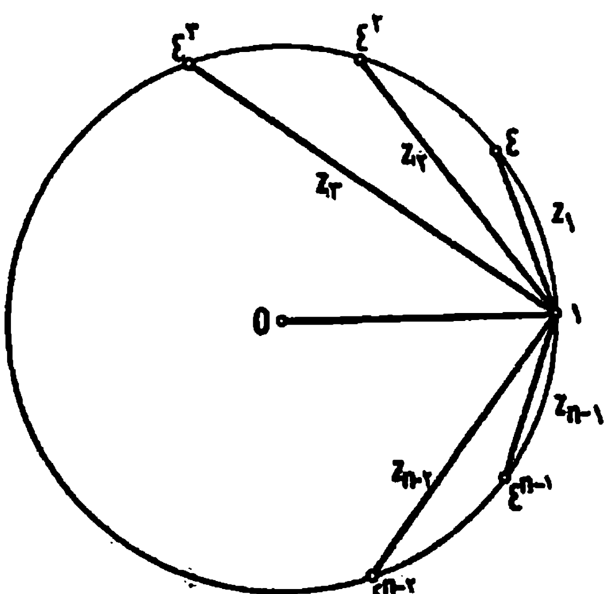
یادداشت ۲. کاربردهای هندسی عددهای مختلط. قضیهٔ زیر، برای هر چندضلعی منتظم، با هر تعداد ضلع، درست است:

اگر A_0، A_1، ...، A_{n-1}، رأس‌های یک nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ واحد باشند، داریم:

$$A_0A_1 \cdot A_1A_2 \cdot \ldots \cdot A_0A_{n-1} = n$$

دراین‌جا، برهان ساده‌ای‌را، برای کسانی که باعددهای مختلط آشنائی دارند، می‌آوریم.

nضلعی منتظم را در صفحهٔ عددهای مختلط درنظر می‌گیریم. مرکز



شکل ۳۵

دایره واحد را درمبداء ورأس $A_{\circ}$ را درنقطهٔ ۱، روی محور حقیقی انتخاب می کنیم (شکل۲۵). اگررأس مجاور $A_{\circ}$ رادرخلاف جهت‌حرکت‌عقربه‌های ساعت (یعنی درجهت مثلثاتی) باعدد مختلط ε ورأس مجاوربعدی را با عدد مختلط $\varepsilon^{۲}$ وغیره نشان دهیم، برای رأس‌های nضلعی منتظم، به‌عددهای‌مختلط

$$۱, \varepsilon, \varepsilon^{۲}, \ldots, \varepsilon^{n-۱}$$

می‌رسیم که، هر کدام از آن‌ها، قدرمطلق برابر واحد دارند و زاویه‌های متناظر این‌عددهای مختلط (زاویه‌ای که بردارمعرف عدد مختلط، باجهت‌مثبت محور افقی می‌سازد) به‌ترتیب، چنین‌اند:

$$\circ^{\circ}, \frac{۳۶۰^{\circ}}{n}, ۲\times\frac{۳۶۰^{\circ}}{n}, \ldots, (n-۱)\frac{۳۶۰^{\circ}}{n}$$

طول پاره‌خط‌هایی که $A_{\circ}$ رابه‌رأس‌های دیگروصل‌می‌کنند، به‌ترتیب، برابرند با قدرمطلق عددهای مختلط

$$۱-\varepsilon, ۱-\varepsilon^{۲}, ۱-\varepsilon^{۳}, \ldots, ۱-\varepsilon^{n-۱}$$

بنابراین، قضیهٔ ما، با بیان عددهای مختلط، به‌این صورت درمی‌آید که باید ثابت کنیم:

$$|(۱-\varepsilon)(۱-\varepsilon^{۲})\ldots(۱-\varepsilon^{n-۱})|=n \qquad (۱)$$

برای اثبات درستی رابطهٔ (۱)، توجه می‌کنیم که $\varepsilon^{n}=۱$، و درحالت کلی، برای هرعدد درست k داریم:

$$(\varepsilon^{k})^{n}=(\varepsilon^{n})^{k}=۱$$

بنابراین، عددهای ۱، ε، $\varepsilon^{۲}$، ...، $\varepsilon^{n-۱}$، ریشه‌های چندجمله‌ای زیرهستند:

$$z^{n}-۱=(z-۱)(z^{n-۱}+z^{n-۲}+\ldots+z+۱)$$

عدد ۱، ریشهٔ معادلهٔ $z-۱=\circ$ است، بنابراین، عددهای ε، $\varepsilon^{۲}$، ...، $\varepsilon^{n-۱}$، عبارتند از ریشه‌های چندجمله‌ای

$$f(z)=z^{n-۱}+z^{n-۲}+\ldots+z+۱$$

یعنی، می‌توان $f(z)$ را به‌این صورت تجزیه کرد:

$$f(z)=(z-\varepsilon)(z-\varepsilon^{2})\ \dots\ (z-\varepsilon^{n-1})$$

که اگر به‌جای z، درعبارت $f(z)$، عدد ۱ را قراردهیم، به‌دست‌می‌آید:

$$f(1)=(1-\varepsilon)(1-\varepsilon^{2})\ \dots\ (1-\varepsilon^{n-1})=n$$

واین، ازرابطهٔ (۱) قوی‌تر است، زیرا نشان می‌دهد کـه، تنها حاصل‌ضرب قدرمطلق عدد، بلکه حاصل‌ضرب خود عددها، برابراست با n.

۱۷- بنابررابطه‌های بین ریشه‌ها وضریب‌ها، درمعادلهٔ درجهٔ دوم‌برای معادلهٔ مفروض داریم:

$$x_1+x_2=a+d,\ x_1x_2=ad-bc$$

ضریب‌های معادلهٔ دوم را برحسب x_1 و x_2 به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}a^3+d^3+3abc+3bcd&=a^3+d^3+3bc(a+d)=\\&=(a+d)^3-3(a+d)(ad-bc)=\\&=(x_1+x_2)^3-3(x_1+x_2)x_1x_2=x_1^3+x_2^3;\end{aligned}$$

$$(ad-bc)^3=x_1^3x_2^3$$

بنابراین،معادلهٔ $y^2-(a^3+b^3+3abc+3bcd)y+(ad-bc)^3=0$ هم‌ارز است با معادلهٔ $y^2-(x_1^3+x_2^3)y+x_1^3x_2^3=0$ ومعادلهٔ اخیرهم، به‌صورت زیر قابل‌تجزیه است:

$$(y-x_1^3)(y-x_2^3)=0.$$

یعنی، ریشه‌هایش، برابرند با x_1^3 و x_2^3.

یادداشت. تبدیل معادله‌های گنگ. اگر $a+d=s$ و $ad-bc=p$ بگیریم، مسالهٔ ما، باید پاسخ پرسش زیررا پیداکند: اگر ریشهٔ سوم عدد y ($\sqrt[3]{y}$) درمعادلهٔ $x^2-sx+p=0$ صدق‌کند،آیا y می‌تواندریشهٔ‌معادله‌ای گویا نسبت به y (یعنی، معادله‌ای با توان‌های درست y) باشد؟ واگرپاسخ

مثبت است، این معادله چگونه به‌دست می‌آید؟

$\sqrt[3]{y}$ باید درمعادلهٔ $x^2-sx+p=0$ صدق کند، یعنی

$$\sqrt[3]{y^2}-s\sqrt[3]{y}+p=0 \qquad (1)$$

آیا این معادله را می‌توان به معادله‌ای گویا نسبت به y تبدیل کرد و چگونه؟ درمسالهٔ ما، جواب داده شده بود. ولی بدون دردست داشتن جواب هم، می‌توان آن‌را پیدا کرد.

دوطرف معادلهٔ (۱) را در $\sqrt[3]{y}$ ضرب می‌کنیم:

$$-s\sqrt[3]{y^2}+p\sqrt[3]{y}+y=0 \qquad (2)$$

دوطرف معادلهٔ (۲) را، دوباره، در $\sqrt[3]{y}$ ضرب می‌کنیم:

$$p\sqrt[3]{y^2}+y\sqrt[3]{y}-sy=0 \qquad (3)$$

ابتدا بین معادله‌های (۱) و (۲) و، سپس، بین معادله‌های (۱) و (۳)، $\sqrt[3]{y^2}$ را حذف می‌کنیم، به‌دو معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$(p-s^2)\sqrt[3]{y}+ps+y=0 \qquad (4)$$

$$(ps+y)\sqrt[3]{y}-(p^2+sy)=0 \qquad (5)$$

اکنون، بین معادله‌های (۴) و (۵)، $\sqrt[3]{y}$ را حذف می‌کنیم:

$$y^2-(s^3-3ps)y+p^3=0$$

که اگر به‌جای s و p، مقدارهای آن‌ها را قرار دهیم، به‌همان معادله‌ای می‌رسیم که درصورت مسأله داده شده است.

۱۸. عدد A را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$A=(2903^n-464^n)-(803^n-261)^n$$

پرانتز اول سمت‌راست برابری بر

$$2903-464=2439=9\times 271$$

وپرانتز دوم بر

$$۸۰۳-۲۶۱=۵۴۲=۲\times ۲۷۱$$

بخش‌پذیر است، بنابراین، عدد A مضربی است از ۲۷۱:

$$A=۲۷۱B \qquad (B\text{، عددی است درست})$$

ولی، A را به‌این صورت هم می‌توان نوشت:

$$A=(۲۹۰۳^n-۸۰۳^n)-(۴۶۴^n-۲۶۱^n)$$

دراین‌جا، پرانتز اول سمت راست برابری بر

$$۲۹۰۳-۸۰۳=۲۱۰۰=۷\times ۳۰۰$$

وپرانتز دوم بر

$$۴۶۴-۲۶۱=۲۰۳=۷\times ۲۹$$

وبنابراین، A بر ۷ بخش‌پذیر است. در $A=۲۷۱B$، عدد ۲۷۱ بر ۷ بخش‌پذیر نیست، بنابراین B باید مضربی از ۷ باشد:

$$B=۷C \qquad (C\text{، عددی است درست})$$

یعنی $A=۲۷۱\times ۷C=۱۸۹۷C$. A بر ۱۸۹۷ بخش‌پذیر است.

۱۹۰۰

۱۹. m نمی‌تواند بر ۵ بخش‌پذیر باشد، زیرا باتوجه به‌برابری

$$am^۳+bm^۲+cm+d=m(am^۲+bm+c)+d$$

وفرض مسأله، اگر m بر ۵ بخش‌پذیر باشد، باید d هم مضربی از ۵ باشدکه خلاف فرض است. بنابراین، باید داشته باشیم:

$$m=۵k+r$$

کـه درآن، k عـددی است درست و $۰<r<۵$. برای راحتی کار فرض می کنیم:

$$A=am^3+bm^2+cm+d,$$
$$B=dn^3+cn^2+bn+a$$

بین این دورابطه، d را حذف می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$An^3-B=a(m^3n^3-1)+bn(m^2n^2-1)+cn^2(mn-1)=$$
$$=(mn-1)[a(m^2n^2+mn+1)+bn(mn+1)+cn^2]$$

اکنون، اگر $m=5k+r$ عددی باشد که، به‌ازای آن، A بر ۵ بخش‌پذیر باشد، و اگر بتوانیم n را طوری پیدا کنیم که سمت‌راست برابری اخیر، بر ۵ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت، B هم مضربی از ۵ خواهد بود. با توجه به‌این‌که n مضربی از ۵ نیست، n راطوری انتخاب می‌کنیم که عامل $mn-1$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، چون $m=5k+r$، بنابراین

$$mn-n=5kn+(rn-1)$$

یعنی rn باید در تقسیم بر ۵، به‌باقی‌ماندهٔ واحد برسد. به‌این ترتیب:

اگر $r=1$، آن‌وقت $n=1$؛

اگر $r=2$، آن‌وقت $n=3$؛

اگر $r=3$، آن‌وقت $n=2$؛

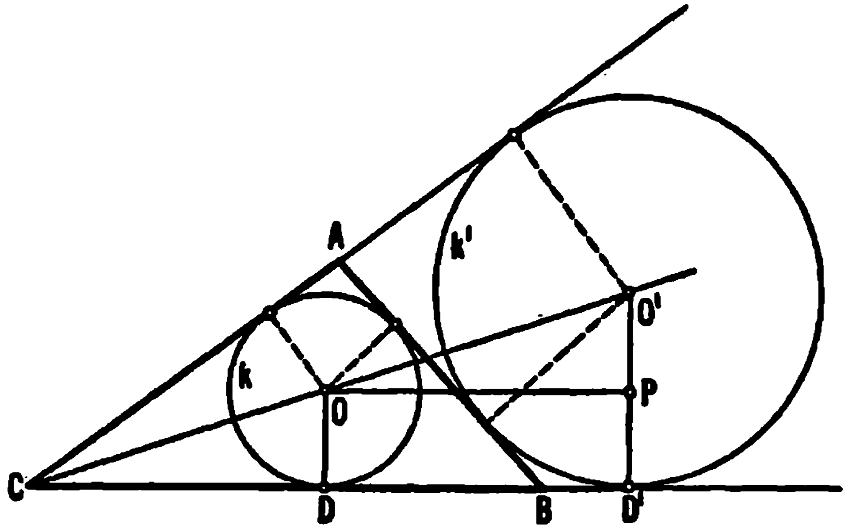
وبالاخره، اگر $r=4$، آن‌وقت $n=4$.

یعنی، برای هر m، می‌توان مقداری برای n به‌دست آورد، به‌نحوی که $mn-1$ مضربی از ۵ باشد و، به‌ازای همین مقدار n، B هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

۲۰. a) D را نقطهٔ تماس‌دایرهٔ محاطی داخلی k، با ضلع BC و D' را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی k'، با امتداد ضلع BC، می‌گیریم (شکل ۲۶).

می‌دانیم [یادداشت‌های ۱و۲ درپایان حل مسألهٔ ۹ را ببینید] که اگر a و b و c طول ضلع‌ها و p نصف محیط مثلث باشند:

$$CD=p-c,\ CD'=p,\ DD'=p-(p-c)=c$$



شکل ۲۶

b) با توجه به‌این که دایره‌های k و k' (به‌مرکزهای O و O') متقاطع نیستند، سعی می‌کنیم‌رابطه‌ای بین r، r_c و c پیدا کنیم. از نقطهٔ O، خط‌راستی موازی BC رسم می‌کنیم تا $O'D'$ را در P قطع کند. مثلث OPO'، با ضلع‌های $OP=DD'=c$ و $O'P=r_c-r$ و وتر $OO'\geqslant r_c+r$، یك مثلث قائم‌الزاویه است و، با توجه به‌قضیهٔ فیثاغورث، داریم:

$$OO'^{2}=c^{2}+(r_c-r)^{2}\geqslant(r_c+r)^{2}$$

که از آن‌جا، بعد از ساده‌کردن، به‌دست می‌آید:

$$\frac{c^{2}}{2}\geqslant rr_c \qquad (1)$$

c) به‌این ترتیب، اگر برای داده‌های c، r و r_c داشته باشیم:

$$\frac{c^{2}}{2}\geqslant r\cdot r_c \quad و \quad r_c>r$$

آن‌وقت، می‌توانیم مثلث ABC را، به‌ترتیب زیر، رسم کنیم:

پاره‌خط DD' را به‌طول c و، سپس، پاره‌خط‌های OD و $O'D'$ را به‌طول‌های r و r_c عمود بر DD'، رسم می‌کنیم. اکنون، دایرهٔ k به‌مرکز O و به‌شعاع r، ودایرهٔ k' به‌مرکز O' وشعاع r_c قابل رسم‌اند. چون $r_c>r$،

بنابراین خط‌راست $O'O$، خط‌راست $D'D$ را قطع می‌کند. نقطهٔ برخورد این دوخط راست. رأس C ازمثلث ABC را به‌ما می‌دهد. C تنها نقطه‌ای واقع بر OO' است که از آن‌جا می‌توان دومماس مشترك بیرونی را بردو دایره رسم کرد.

دو دایرهٔ k و k' یکدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا بنابر (۱) داریم:

$$OO'^2=c^2+(r_c-r)^2=(r_c+r)^2+c^2-4rr_c\geqslant(r_c+r)^2$$

اکنون، اگر یکی از دو مماس مشترك درونی دایره های k و k' را رسم کنیم، درنقطه‌های A و B (دورأس دیگرمثلث)، مماس‌های‌مشترك‌بیرونی را قطع می کند.

با رسم مماس مشترك درونی دوم، جواب دیگری به‌دست می آید که‌با جواب اول قابل انطباق است. درحالتی که دایره‌های k و k' برهم مماس باشند، تنها یك جواب به‌دست می‌آید.

۲۱. درحالت کلی، این نشانه‌ها را درنظرمی گیریم:

σ: فاصلهٔ بین دوقطره، درلحظه‌ای که قطرهٔ دوم ازسنگ جدا می‌شود؛

T: زمان لازم برای پیمودن فاصلهٔ σ؛

s: ارتفاع کامل تخته‌سنگ؛

t: زمان لازم برای سقوط‌کامل ازارتفاع s؛

s': مسافت پیموده شده به‌وسیلهٔ قطرهٔ دوم، ازلحظه‌ای که از تخته‌سنگ جداشده، تا زمانی که قطرهٔ اول به‌زمین می‌رسد، یعنی در فاصلهٔ زمانی $t-T$.

باید $s-s'$ را محاسبه کنیم. با توجه به‌قانون سقوط آزاد، تحت‌تأثیر نیروی ثقل، داریم:

$$\sigma=\frac{1}{2}gT^2,\quad s=\frac{1}{2}gt^2,\quad s'=\frac{1}{2}g(t-T)^2$$

ازدو رابطهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$T=\sqrt{\frac{۲\sigma}{g}},\ t=\sqrt{\frac{۲s}{g}}$$

وبنابراین، برای s'، خواهیم داشت:

$$s'=\frac{g}{۲}\left(\sqrt{\frac{۲s}{g}}-\sqrt{\frac{۲\sigma}{g}}\right)=s-۲\sqrt{\sigma s}+\sigma$$

وازآن‌جا

$$s-s'=۲\sqrt{s\sigma}-\sigma$$

برای مسألهٔ ما داریم:

$$\sigma=۰/۰۰۱\ (\text{میلی‌متر})\ \text{و}\ s=۳۰۰۰۰۰\ (\text{میلی‌متر})$$

بنابراین

$$s-s'=۲\sqrt{۳۰۰}-۰/۰۰۱\approx ۳۴/۶\ (\text{میلی‌متر})$$

۱۹۵۱

۴۲. راه‌حل اول. هریك ازعددهای

$$۱^۴=۱,\ ۲^۴=۱۶=۵\times۳+۱,\ ۳^۴=۸۱=۵\times۱۶+۱,$$
$$۴^۴=۲۵۶=۵\times۵۱+۱$$

به‌صورت $۵k+۱$ هستند (k، عددی است درست). علاوه براین، اگر A برابر با یکی از عددهای ۱،۲،۳ یا ۴، و l عددی درست ومثبت باشد، $A^{۴l}$ هم به‌صورت $۵k+۱$ درمی‌آید،زیرا:

$$A^{۴l}-۱=(A^۴)^l-۱=(A^۴-۱)[(A^۴)^{l-۱}+(A^۴)^{l-۲}+\dots+۱]$$

که درآن، عامل اول سمت راست، مضربی از ۵ و عامل دوم، عددی درست است.

هرعدد درست مثبت را می‌توان به‌صورت $۴l+r$ نوشت،که در آن، l عددی درست یا صفر، و r یکی ازعددهای ۰،۱،۲،۳ یا ۴ است. بنابراین،

عدد S را می‌توان، به‌ترتیب، این‌طور نوشت:

$$S=1^n+2^n+3^n+4^n=1+2^{4l+r}+3^{4l+r}+4^{4l+r}=1+$$
$$+2^{4l}.2^r+3^{4l}.3^r+4^{4l}.4^r=1+(5k_1+1)2^r+$$
$$+(5k_2+1)3^r+(5k_3+1)4^r=5(k_1\cdot 2^r+k_2\cdot 3^r+k_3\cdot 4^r)+$$
$$+(1+2^r+3^r+4^r)==5m+R$$

که در آن، m عددی است درست و $R=1+2^r+3^r+4^r$.

بنابراین S وقتی، و تنها وقتی، بر ۵ بخش‌پذیر است که R بر ۵ بخش‌پذیر باشد. اگر n مضرب ۴ باشد، داریم: $r=0$ و $R=4$؛ در این حالت، S مضرب ۵ نیست. ولی اگر n بر ۴ بخش‌پذیر نباشد، r یکی از عددهای ۱، ۲ یا ۳ خواهد بود و، متناظر با آن‌ها، برای R، عددهای ۱۰، ۳۰ یا ۱۰۰ به‌دست می‌آید؛ در این حالت‌ها، S بر ۵ بخش‌پذیر است.

راه‌حل دوم. با توجه به یادداشت ۱، در پایان حل مسالهٔ ۱۳، داریم:

$$1^4\overset{5}{\equiv}1,\ 2^4\overset{5}{\equiv}1,\ 3^4\overset{5}{\equiv}1,\ 4^4\overset{5}{\equiv}1$$

$n=4k+r$ می‌گیریم که، در آن، k عددی است درست و r یکی از عددهای ۰، ۱، ۲ یا ۳. اگر a برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ۳ یا ۴ باشد:

$$a^4\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow a^{4k}\equiv 1 \pmod 5;$$
$$a^n=a^{4k+r}=a^{4k}\cdot a^r\equiv a^r \pmod 5$$

و بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ مربوط به‌هم‌نهشتی‌ها، خواهیم داشت:

$$S=1^n+2^n+3^n+4^n\equiv 1^r+2^r+3^r+4^r \pmod 5$$

برای $r=0$: $S\equiv 4 \pmod 5$؛

برای $r=1$: $S\equiv 10\equiv 0 \pmod 5$؛

برای $r=2$: $S\equiv 30\equiv 0 \pmod 5$؛

و برای $r=3$: $S\equiv 100\equiv 0 \pmod 5$.

بنابراین، S وقتی، و تنها وقتی بر ۵ بخش‌پذیر است که n، مضربی از ۵ نباشد.

یادداشت. قضیه فرما. راه‌حلی که برای مسأله آوردیم، بر این اساس بود که

$$1^4 \equiv 2^4 \equiv 3^4 \equiv 4^4 \equiv 1 \pmod 5$$

این هم‌نهشتی، حالت خاصی است از قضیهٔ کلی زیر، که فرما آن را مطرح کرد و به‌قضیهٔ فرما مشهور است:

قضیه فرما*. اگر a عدد درست باشد و برعدد اول p بخش‌پذیر نباشد، داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad \text{یا} \quad a^p \equiv a \pmod p$$

اثبات. فرض کنیم a بر p بخش‌پذیر نباشد. در این‌صورت، هیچ کدام از عددهای

$$a, 2a, 3a, \dots, (p-1)a$$

بر p بخش‌پذیر نیستند. درضمن، از تقسیم آن‌ها بر p، باقی‌مانده‌های مختلف به‌دست می‌آید، زیرا اگر مثلاً فرض کنیم از تقسیم ka و la $(1 \leqslant l < k \leqslant p-1)$ بر p، باقی‌مانده‌های برابر به‌دست آید، آن‌وقت باید تفاضل

$$ka - la = (k-l)a$$

بر p بخش‌پذیر باشد که ممکن نیست، زیرا a بر p بخش‌پذیر نیست و $k-l$

---

*) ظاهراً چینی‌ها درحدود پنج سدهٔ پیش از میلاد می‌دانستند که، اگر p عددی اول باشد، عدد $2^p - 2$ بر p بخش‌پذیر است. فرما، ریاضی‌دان فرانسوی (۱۶۰۱–۱۶۶۵ میلادی)، در نامه‌ای به‌یکی از دوستان خود، مدعی‌شده بود که این حکم را ثابت کرده است. ولی اثبات فرما به‌ما نرسیده است. فرما این عادت را داشت که، جز در نامه‌های خود و یا در حاشیهٔ کتاب‌ها، چیزی نمی‌نوشت ولی درهمین نامه‌ها یا یادداشت‌ها، قضیه‌های زیادی را عنوان وادعا کرده است که، برای آن‌ها اثباتی دارد. برخی از قضیه‌های مطرح شده به‌وسیلهٔ فرما، هنوز مورد بحث ریاضی‌دانان است.

هم از p کوچکتر است.

همهٔ باقی‌مانده‌هایی که ممکن است از تقسیم بر p به‌دست آید، $p-۱$ عدد زیر است:

$$۱,۲,۳,\ \cdots,\ p-۱ \qquad (۱)$$

پس اگر $a_۱$، $a_۲$، …، $a_{p-۱}$ را باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای a، $۲a$، $۳a$، …، $(p-۱)a$ بر p بگیریم، تبدیلی از همان عددهای (۱) هستند، یعنی

$$a_۱ \times a_۲ \times \cdots \times a_{p-۱} = ۱ \times ۲ \times \cdots \times (p-۱)$$

اکنون فرض می کنیم:

$$a = pq_۱ + a_۱,\ \ ۲a = pq_۲ + a_۲,\ \cdots,$$
$$(p-۱)a = pq_{p-۱} + a_{p-۱}$$

ازضرب همهٔ این برابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$a \cdot ۲a \cdot ۳a \cdot \ \cdots\ \cdot (p-۱)a = N \cdot p + a_۱ a_۲ \cdots a_{p-۱}$$

و یا

$$[۱ \times ۲ \times \cdots (p-۱)]a^{p-۱} = N \cdot p \times ۱ \times ۲ \times \cdots \times (p-۱)$$

و بالاخره

$$[۱ \times ۲ \times \cdots \times (p-۱)](a^{p-۱} - ۱) = N \cdot p$$

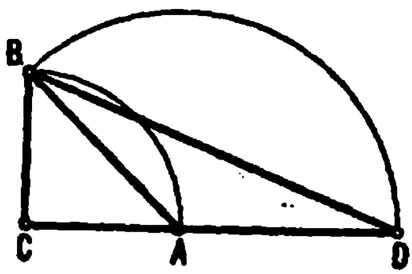
وچون p و $۱ \times ۲ \times \cdots \times (p-۱)$ نسبت به‌هم اول‌اند، بنابراین $a^{p-۱}-۱$ بر p بخش‌پذیر است، یعنی

$$a^{p-۱} \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ p)$$

ودرنتیجه $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\ p)$.

۲۳. ابتدا، زاویه‌ای برابر بـا $۲۲^\circ ۳۰'$ رسم می‌کنیم؛ ایـن زاویه برابر است با $\frac{۱}{۴}$ زاویهٔ ۹۰ درجه.

ABC را، مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای می گیریم که، در آن،



شکل ۲۷

$CA = CB$. ضلع CA را، از طرف A، تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم، به‌نحوی که داشته باشیم: $AD = AB$ و، سپس، پاره‌خط BD را رسم می کنیم. زاویهٔ به‌رأس D در مثلث متساوی‌الساقین BAD، نصف زاویهٔ CAB، یعنی برابر $۲۲^\circ ۳۰'$ است. اگر طول AC را واحد بگیریم، داریم:

$$DA = AB = \sqrt{۲},\ DC = AD + AC = \sqrt{۲} + ۱,$$

$$DB = \sqrt{CD^{۲} + BC^{۲}} = \sqrt{(\sqrt{۲}+۱)^{۲} + ۱} = \sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$$

ومقدارهای u و v، چنین‌اند:

$$u = cotg\ ۲۲^\circ ۳۰' = \frac{DC}{BC} = \sqrt{۲} + ۱,$$

$$v = \frac{۱}{\sin ۲۲^\circ ۳۰'} = \frac{DB}{BC} = \sqrt{۴ + ۲\sqrt{۲}}$$

بنابراین

$$(u-۱)^{۲} = ۲,\ v^{۲} = ۴ + ۲\sqrt{۲},\ (v^{۲} - ۴)^{۲} = ۸$$

واز آن‌جا

$$u^{۲} - ۲u - ۱ = ۰,\ \ v^{۴} - ۸v^{۲} + ۸ = ۰$$

یادداشت. عدد جبری وعدد غیرجبری. اگر α، ریشه‌ای ازمعادلهٔ جبری با ضریب‌های گویای

$$x^{n} + a_{۱}x^{n-۱} + \dots + a_{n} = ۰$$

باشد، α را عدد جبری گویند.

هرعدد گویا مثل r، یك‌عددجبری است، زیرا ریشه معادلهٔ $x-r=0$ با ضریب‌های گویا است. ولی، هرعدد جبری، گسویا نیست؛ مثلاً $\sqrt{2}$ یسك عدد جبری است، زیرا ریشه معادلهٔ $x^2-2=0$ است که ضریب‌هایی گویا دارد، درحالی که $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست.

هرعددی، جبری نیست. عددهای حقیقی یا مختلطی وجود دارند کـه جبری نیستند و آن‌ها را غیرجبری یـا ترانساندان گویند. عددهای e (مبنای لگاریتم طبیعی) و π (نسبت محیط برقطـر دایره)، نمونه‌هایی از عددهای غیرجبری‌اند. هرمیت*، نخستین کسی بود که غیرجبری بودن عـدد e را (در سال ۱۸۷۳ میلادی) ثابت کرد؛ همچنین، لیندمان** توانست غیرجبری‌بودن عدد π را (درسال ۱۸۸۲ میلادی) ثابت کند. همین غیرجبری بودن عدد π است که مانع رسم عدد π به‌کمك پرگار و خط‌کش می‌شود. و یا نمی‌توان، به‌کمك پرگار وخط‌کش، مربعی رسم کرد کـه مساحت آن، برابر با مساحت دایرهٔ مفروض باشد.

دربین عددهای جبری، می‌توان عددهای جبری درست را جدا کـرد. α را عددجبری درست گویند، وقتی که ریشهٔ یك معادلهٔ جبری با ضریب‌های درست وضریب بزرگترین درجهٔ واحد باشد. مثلاً، عددهای

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ و } \alpha_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

عددهای جبری درست‌اند، زیرا هردوی آن‌هـا، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ‌دوم

$$x^2-x-1=0$$

هستند که، ضریب بزرگترین درجهٔ آن واحد، و بقیهٔ ضریب‌ها، درست‌اند.

می‌توان ثابت کرد که مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب ونسبت دوعـدد

*) هرمیت، در سال ۱۸۳۲ متولـد شد و در سال ۱۹۰۱ درگـذشت. او استاد پلی‌تکنیك و، برای مدتی، رئیس فرهنگستان علوم‌بود، اوبه‌جزریاضیات، در زمینهٔ دانش‌های‌دیکرهم، پژوهش‌هایی دارد.

**) ف. لیندمان در سال ۱۸۵۱ متولـد شـد و در سال ۱۹۳۰ درهبانور درگذشت. استاد دانشگاه مونیخ بود.

جبری، خود یک‌عدد جبری است. همچنین، مجموع، تفاضل و حاصل‌ضرب دوعدد جبری درست، یک‌عدد جبری درست است.

درمسألهٔ ۲۳، درواقع، می‌خواستیم ثابت‌کنیم که کتانژانت و عکس سینوس زاویهٔ $\frac{۹۰^\circ}{۴}$، عددهای جبری درستی هستند.

۲۴. چون، $(a, b) = d$، بنابراین

$$a = dr \quad \text{و} \quad b = ds$$

وبنابراین (یادداشت شمارهٔ ۳، قضیه I را درپایان حل ببینید).

$$(r, s) = ۱$$

یعنی r و s نسبت به‌هم اول‌اند ومقسوم‌علیه مشترکی جزواحد ندارند.

از تقسیم عددهای a،$۲a$، ...، $(b-۱)a$ و ba بر b، به‌این نسبت‌ها می‌رسیم:

$$\frac{r}{s}, \frac{۲r}{s}, \frac{۳r}{s}, \ldots, \frac{(b-۱)r}{s}, \frac{br}{s} = \frac{(bs)r}{s}$$

چون r و s نسبت به‌هم‌اول‌اند، ازاین‌نسبت‌ها، تنها آن‌هایی‌درست‌اند که، درآن‌ها، ضریب r درصورت کسر، مضربی از s باشد. (یادداشت ۳، قضیهٔ II را درپایان حل ببینید). تعداد این نسبت‌ها برابر است با ds، بنابراین، ازبین عددهای ۱،۲،۳، ...، ds، درست d عدد بر s بخش‌پذیرند.

یادداشت ۱. مقسوم علیه‌ها یا شمارنده‌های یک عدد درست مثبت. روشن است که‌اگرعدد درست ومثبت مفروض‌را، به‌صورت ضرب توان‌هایی از عامل‌های اول آن بنویسیم (یادداشت پایان حل مسأله ۷ را ببینید)، می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن‌را پیداکنیم.

اگرداشته‌باشیم: $a = v \cdot p^\alpha$ و $b = w \cdot p^\beta$، که درآن‌ها، v و w عددهایی بخش‌ناپذیر برعدد اول p هستند، آن‌وقت، عدد ab، شامل توان $\alpha + \beta$ از عامل اول p خواهد بود. (با ضرب دوعدد a و b درهم، به‌سادگی به‌این

نتیجه می‌رسیم). بنابراین، عدد a وقتی، وتنها وقتی، برعدد b بخش‌پذیر است که، توان‌هیچ کدام ازعامل‌های اول‌درتجزیه b، بیشتر ازتوان‌عامل‌های متناظر خود درتجزیهٔ a، نباشند. به‌عنوان نمونه، عدد $a = ۲^m \cdot p$ (p، عددی است اول و بزرگتر از ۲)، دارای این مقسوم‌علیه‌هاست.

$$۱, ۲, ۲^۲, \ldots, ۲^{m-۱}, ۲^m,$$
$$p, ۲p, ۲^۲p, \ldots, ۲^{m-۱} \cdot p, ۲^m \cdot p$$

یادداشت ۲. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک. اگرهمهٔ عددهای a، b، ...، m برابرصفرنباشند، تعداد مقسوم‌علیه‌های مشترک آن‌ها، محدوداست. بزرگترین این مقسوم‌علیه‌های مشترک را، که عددی مثبت است، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک یا بزرگترین شمارندهٔ مشترک این عددها می‌گویند و، معمولاً، آن را به‌صورت $(a, b, \ldots, m)$ نشان می‌دهند.

چون صفر برعددی بخش‌پذیر است، بنابراین، بزرگترین مقسوم علیه مشترک مجموعه‌ای ازعددها، برابر است با بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای غیرصفر آن. علاوه براین، وقتی که بخواهیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک چندعدد را پیداکنیم، بهتراست، عددهای منفی را با قدرمطلق خوددر نظر بگیریم.

باتوجه به‌یادداشت ۱، برای پیداکردن بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای مثبت a، b، ...، m، ابتدا آن‌ها را به صورت ضرب توان‌هائی از عامل‌های اول تجزیه می‌کنیم و، سپس، حاصل ضرب عامل‌های مشترک را، با کوچکترین توان‌های خود، به‌دست می‌آوریم. مثلاً

$$(۲^۵ \times ۳^{۲۴} \times ۷^۹ \times ۱۱^{۱۵}, ۲^۹ \times ۳^{۱۰} \times ۱۳^۸) = ۲^۵ \times ۳^{۱۰}$$

ازاین‌جا روشن می‌شود که، عدد k، وقتی مقسوم‌علیهی از عددهای a، b،...،m است که مقسوم‌علیهی ازبزرگترین شمارندهٔ مشترک آن‌ها باشد.

یادداشت ۳. عددهایی که نسبت بههم اول‌اند. اگربزرگترین‌شمارندهٔ مشترک دویا چند عدد، برابرواحد باشد، آن‌ها را نسبت به‌هم اول گویند

(گاهی می‌گویند، این دو یا چند عدد متباین‌اند). مثلاً، اگر p و q، دو عدد اول متمایز باشند، آن‌وقت، دو عدد p^r و q^s، نسبت به‌هم اول‌اند (r و s، عددهایی طبیعی‌اند). درحل مسأله‌ها، می‌توان از دو قضیهٔ زیر استفاده کرد:

قضیه I. اگر همهٔ عددهای درست a، b، ...، m، باهم برابر صفر نباشند و اگر d را بزرگترین شمارندهٔ آن‌ها فرض کنیم، آن‌گاه عددهای

$$a'=\frac{a}{d}\,,\quad b'=\frac{b}{d}\,,\ \ldots,\ m'=\frac{m}{d}$$

نسبت به‌هم اول‌اند.

اثبات را با برهان خلف می‌دهیم. فرض می‌کنیم که چنین نباشد، یعنی

$$(a', b', \ldots, m')=d' \quad (d'>1)$$

دراین‌صورت، همهٔ عددهای

$$a=a'd,\ b=b'd,\ \ldots,\ m=m'd$$

بر $d'd>d$ بخش‌پذیرند، یعنی $d'd$، و نه d، بزرگترین شمارندهٔ مشترک آن‌هاست که متناقض با فرض است.

قضیه II. اگر a، عدد درست مخالف صفر و $(a, b)=1$ باشد، آن‌وقت اگر مضربی از a، یعنی ka بر b بخش‌پذیر باشد، k بر b بخش‌پذیر است.

اگر k بر b بخش‌پذیر نباشد، درتجزیه $|b|$ به‌عامل‌های اول، دست‌کم یک عامل اول p، با توان β پیدا می‌شود که، چون k بر b بخش‌پذیر نیست، توان این عامل درتجزیهٔ k برابر $\alpha<\beta$ است (وحتی ممکن است $\alpha=0$). a و b نسبت به هم اول‌اند، بنابراین، p نمی‌تواند a را بشمارد، یعنی در تجزیهٔ $|ka|$ به‌عامل‌های اول، p توانی کوچکتر از β دارد و این به‌معنای آن است که ka بر b بخش‌پذیر نیست. تناقض حاصل نشان می‌دهد که باید k بر b بخش‌پذیر باشد. [اگر a عددی اول باشد، به‌همان قضیه‌ای می‌رسیم

که در یادداشت پایان راه‌حل دوم، درمسالهٔ ۱، مطرح کردیم.]

قضیه III. اگرعدد درست A بردو عدد درست a و b بخش‌پذیر باشد و، درضمن، a و b نسبت به‌هم اول باشند، آن گاه A بر ab بخش‌پذیر است.

A بر a بخش‌پذیر است، بنابراین، عدد درستی مثل k وجـود دارد، به‌نحوی که داشته‌باشیم: $A=ak$. بنا برقضیهٔ II، به‌دلیل این که a و b نسبت به‌هم اول‌اند، $A=ak$ تنها وقتی بر b بخش‌پذیر است که k بر b بخش‌پذیر باشد، یعنی داشته‌باشیم: $k=bk'$. ازآن‌جا $A=abk'$ و A بر ab بخش‌پذیر است.

۱۹۵۲

۰۲۵. الف) داریم.

$$x^{۲}=x^{۲}-x+x=x(x-۱)+x=۲\cdot\frac{x(x-۱)}{۲}+x$$

که اگر درعبارت $Q(x)$ قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$Q(x)=۲A\frac{x(x-۱)}{۲}+(A+B)x+C$$

واین، همان چیزی است که مسأله خواسته است، که درآن

$$k=۲A,\ l=A+B,\ m=C$$

ب) I. اگر $Q(x)$، به ازای عددهای درست x، عـدد درستی باشد، مقدارهای $Q(۰)$، $Q(۱)$ و $Q(۲)$ هم، عددهایی درست‌اند.

$Q(۰)=m$، بنابراین، m عددی درست است؛

$Q(۱)=l+m$، یعنی $l=Q(۱)-m$ عددی درست است؛

$Q(۲)=k+۲l+m$، دراین‌صورت $k=Q(۲)-۲l-m$ عددی درست است.

II. برعکس، اگر k، l و m عددهایی درست باشند، آن‌وقت، برای هرمقدار درست x، مقـدار $Q(x)$ هم عـدد درستی می‌شود: وقتی x عددی

درست است، یکی ازدو مقدار x و $x-۱$ عددی زوج می‌شود و، بنابراین، $x(x-۱)$ بر ۲ بخش‌پذیر و $\frac{x(x-۱)}{۲}$ عددی‌درست‌است‌به‌این‌ترتیب، اگر k و l و m، عددهـای درست باشند، عبارت $Q(x)$ به‌ازای مقدارهای درست x، به‌صورت مجموع سه‌عدد درست درمی‌آید.

یادداشت ۱. چند جمله‌ای‌هایی کـه به‌ازای مقدارهای درست متغیر، خـود مقدارهای درست را می‌پذیرند. آن‌چه راکه در بخش الف) از مسألهٔ ۲۵ گفتیم، می‌توان تعمیم داد و، با روش استقرای ریاضی، ثابت‌کرد:

قضیه. هرچندجمله‌ای درجهٔ n به‌صورت

$$F(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+\cdots+a_nx^n$$

را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$F(x)=b_۰+b_۱\binom{x}{۱}+b_۲\binom{x}{۲}+\cdots+b_n\binom{x}{n} \qquad (۱)$$

که درآن

$$\binom{x}{۱}=x,\ \binom{x}{۲}=\frac{x(x-۱)}{۱\times ۲},\ \binom{x}{۳}=\frac{x(x-۱)(x-۲)}{۱\times ۲\times ۳},\ \ldots$$

وضریب‌های b_i، به‌صورتی منحصر به‌فـرد، به‌ضریب‌های a_i بستگی دارند. علاوه براین، اگرa_iها عددهایی درست باشند، b_iها هم عددهایی‌درست‌اند.

اثبات. قضیه، برای چند جمله‌ای درجهٔ اول به‌سادگی ثابت می‌شود؛ برای چندجمله‌ای درجهٔ دوم هم، در بخش الف) ازمسألهٔ ۲۵ ثابت‌کردیم. اکنون، قضیه را بـرای چند جمله‌ای از درجهٔ $(k-۱)$ ثابت شده فـرض می‌کنیم و ثابت می‌کنیم‌که، دراین‌صورت، برای چندجمله‌ای ازدرجهٔ k هم درست است.

روشن است‌که داریم:

$$P_k(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{k-1}x^{k-1}+a_kx^k=P_{k-1}(x)+a_kx^k$$

با ضرب مستقیم، به‌سادگی معلوم می‌شود که

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)=x^k+G_{k-1}(x)$$

که در آن، $G_{k-1}(x)$، یك چندجمله‌ای از درجهٔ $(k-1)$ است. بنابراین

$$x^k=x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)-G_{k-1}(x)$$

و از آن‌جا

$$P_k(x)=P_{k-1}(x)-a_kG_{k-1}(x)+k!a_k\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

تفاضل دو چندجمله‌ای از درجهٔ $(k-1)$ با ضریب‌های درست، یك چندجمله‌ای است با ضریب‌های درست و، حداکثر، از درجهٔ $(k-1)$. به‌این‌ترتیب، با توجه به‌فرض استقرا، تفاضل $P_{k-1}(x)-a_kG_{k-1}(x)$ را، درسمت راست برابری اخیر، می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$b_0+b_1\binom{x}{1}+\cdots+b_{k-1}\binom{x}{k-1}$$

ودرنتیجه، P_k، به‌این صورت درمی‌آید:

$$P_k(x)=b_0+b_1\binom{x}{1}+\cdots+b_{k-1}\binom{x}{k-1}+b_k\binom{x}{k}$$

که در آن: $b_k=k!a_k$. علاوه براین، اگر a_iها درست باشند، b_iها هم عددهایی درست‌اند. پایان استدلال استقرایی.

بخش ب) از مسألهٔ ۲۵ را، می‌توان به‌این‌ترتیب، تعمیم داد:

چندجمله‌ای $F(x)$، به‌شرط درست بودن x، وقتی‌وتنها وقتی مقدارهای درست را می‌پذیرد که ضریب‌های b_0، b_1، ...، b_n، دررابطهٔ (۱)، عددهایی درست باشند.

اثبات. حالت $n=2$ را درمسألهٔ ۲۵، بررسی کرده‌ایم.

I'. باید ثابت کنیم، عبارت‌های به‌صورت $\binom{x}{k}$، برای عدد درست

x و $k \geqslant \circ$، عددهایی‌درست‌اند، زیرادراین‌صورت، $F(x)$ شامل مجموعی از حاصل‌ضرب‌های عددهای درست می‌شود. عبارت

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-۱)(x-۲)\ldots(x-k+۲)(x-k+۱)}{۱\times ۲\times ۳\times\ldots\times(k-۱)\times k}$$

را درنظر می‌گیریم. سه‌حالت پیش می‌آید:

$k \geqslant x$، دراین صورت $\binom{x}{k}$ به‌معنای تعداد ترکیب‌های k به k از x عنصر است و، بنابراین، عددی است درست [حل مسألهٔ ۴ را ببینید].

$k > x \geqslant \circ$، دراین‌صورت، این تعداد ترکیب‌ها برابر صفر است.

$\circ > x$، دراین‌صورت $x=-y$ می‌گیریم، آن‌وقت.

$$\binom{-y}{k}=\frac{-y(-y-۱)\ldots(-y-k+۲)(-y-k+۱)}{k!}=$$

$$=(-۱)^k\cdot\frac{(y+k-۱)(y+k-۲)\ldots(y+۱)y}{k!}=$$

$$=(-۱)^k\binom{y+k-۱}{k}$$

که بازهم عددی درست است.

اکنون، باید ثابت کنیم که، برعکس، اگر $F(x)$، برای هر x درست، عددی درست باشد، آن‌وقت، ضریب‌های b_i هم درست‌اند.

II'. درحالت $n=۲$، می‌بینیم که $b_\circ=F(\circ)$، $b_۱=F(۱)-b_\circ$ و $b_۲=F(۲)-b_\circ-۲b_۱$، عددهایی درست‌اند.

درحالت کلی، برای هرعدد درست $r \leqslant n$ داریم:

$$F(r)=b_\circ+rb_۱+\binom{r}{۲}b_۲+\ldots+\binom{r}{r}b_r$$

می‌دانیم، برای $r<k$ داریم $\binom{r}{k}=\circ$ و در ضمن $\binom{r}{r}=۱$، بنابراین

به‌دست می‌آید:

$$b_r = F(r) - b_0 - rb_1 - \dots - \binom{r-1}{r} b_{r-1}$$

وچون طبق‌فرض، $F(r)$ عددی‌است درست، بنا براین، اگر b_0، b_1، ...، b_{r-1} عددهای درستی باشند، b_r هم عددی درست می‌شود. به‌این ترتیب، باروش استقرای ریاضی، ثابت می‌شود که همهٔ b_iها، عددهایی درست‌اند.

توضیح. از آن‌چه گفتیم، می‌توان قضیهٔ زیررا هم نتیجه گرفت:

قضیه. اگر چندجمله‌ای $F(x)$ ازدرجهٔ n، برای مقدارهای

$$x = 0, 1, 2, \dots, n$$

عددهای درستی را بپذیرد، آن‌وقت، $F(x)$، به‌ازای هرمقدار درستی از x، برابر عددی درست می‌شود.

یادداشت ۲. قضیهٔ دوجمله‌ای و رشته‌های دوجمله‌ای. عبارت $\binom{x}{k}$، برای عددهـای درست x و k، دو مطلب را به‌یـاد می‌آورد: اول، تعـداد ترکیب‌های k به k از x عنصر؛ ودوم، ضریب‌های بسط دوجمله‌ای $(a+b)^x$.
اگر x، عددی درست ومثبت باشد، داریم:

$$(a+b)^x = a^x + xa^{x-1}b + \dots + b^x =$$

$$= a^x + \binom{x}{1}a^{x-1}b + \dots + \binom{x}{k}a^{x-k}b^k + \dots +$$

$$+ \binom{x}{x-1}ab^{x-1} + \binom{x}{x}b^x$$

اندکی، این برابری را تجزیه و تحلیل کنیم: باید $(a+b)$ را x بار درخودش ضرب کرد، بنا براین، برای هرمقدارمشخص k (باشرط $x \geqslant k \geqslant 0$)، جمله‌هایی به‌صورت $a^{x-k}b^k$ (در x بـار ضرب $a+b$ در خودش) به‌دست

می‌آید. ببینیم تعداد این جمله‌ها (برای هر عدد مشخص k) چندتاست؟ درواقع، توان b برابر است با k. و روشن است که از بین x عنصر، به $\binom{x}{k}$ طریق می‌توان k عنصر را انتخاب کرد. بنابراین، تعداد جمله‌های شامل b^k برابر است با $\binom{x}{k}$، یعنی ضریب جملهٔ $a^{x-k}b^k$ برابراست با $\binom{x}{k}$ [البته، می‌توانستیم توان a، یعنی $x-k$ را درنظر بگیریم و به‌این نتیجه برسیم که ضریب جملهٔ $a^{x-k}b^k$ برابر است با $\binom{x}{x-k}$، ولی می‌دانیم که:

$$\binom{x}{k}=\binom{x}{x-k}\Big].$$

اگر در اتحاد مربوط به‌دوجمله‌ای $a=b=۱$ بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$۲^n=۱+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n-۱}+\binom{n}{n}$$

که همان برابری است که دریادداشت ۱، از مسألهٔ ۵ به‌دست‌آورده بودیم.

اگر z را عددی بین ۱ — و ۱ + ($-۱<z<+۱$) و x راعددی حقیقی که می‌تواند درست هم نباشد) بگیریم، آن‌وقت. بسط $(۱+z)^x$، به‌صورت یك‌رشتهٔ نامتناهی درمی‌آید:

$$(۱+z)^x=۱+\binom{x}{۱}z+\binom{x}{۲}z^۲+\cdots+\binom{x}{k}z^k+\cdots$$

وآن‌ها را، رشته‌های دوجمله‌ای نیوتون می‌نامند و برای هرتوان دلخواهی درست است. [اثبات این که، این رشتهٔ نامتناهی، معرف مقدار $(۱+z)^x$ است و، همچنین، بررسی ویژگی‌های این‌گونه‌رشته‌ها، درحساب دیفرانسیل وانتگرال داده می‌شود.]

درحالت خاص $x=-۱$، این رشته، به‌صورت تصاعد هندسی نامتناهی

$$1-z+z^2-z^3+\dots$$

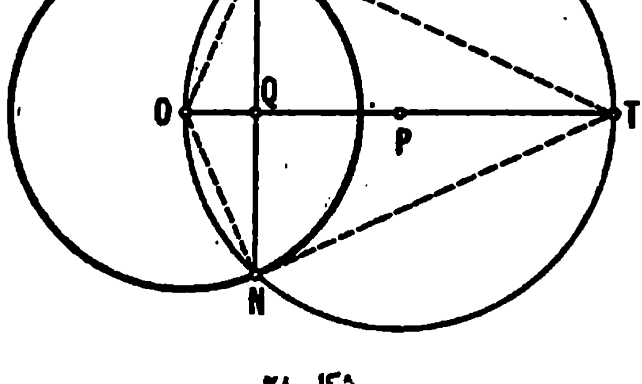
درمی‌آید که مجموع آن، برای $-1<z<1$، برابر $\frac{1}{1+z}$ می‌شود و درستی برابری زیرهم روشن است:

$$(1+z)^{-1}=\frac{1}{1+z}$$

۴۶. از O به P وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا کرهٔ S' را درنقطهٔ T قطع کند (نقطهٔ متقاطر O در کرهٔ S'). M را نقطهٔ مشترکی از دو کره می‌گیریم وصفحه‌ای از سه‌نقطهٔ O، T و M می‌گذرانیم (شکل ۲۸). k و k' را دایره‌های عظیمه‌ای می‌گیریم که از برخورد این صفحه، با کره‌های S و S' به‌دست می‌آیند. دودایرهٔ k و k'، نقطهٔ مشترك دومی هم خواهند داشت که آن را N می‌نامیم. دوخط راست MN و OT، یکدیگررا در نقطهٔ Q قطع می‌کنند.

مساحت سطح عرقچین F، بخشی از کرهٔ S' که در درون کرهٔ S قرار دارد، برابراست با حاصل‌ضرب محیط دایرهٔ k' درارتفاع OQ از عرقچین کروی، یعنی

$$F=\pi\cdot OT\cdot OQ \qquad (1)$$

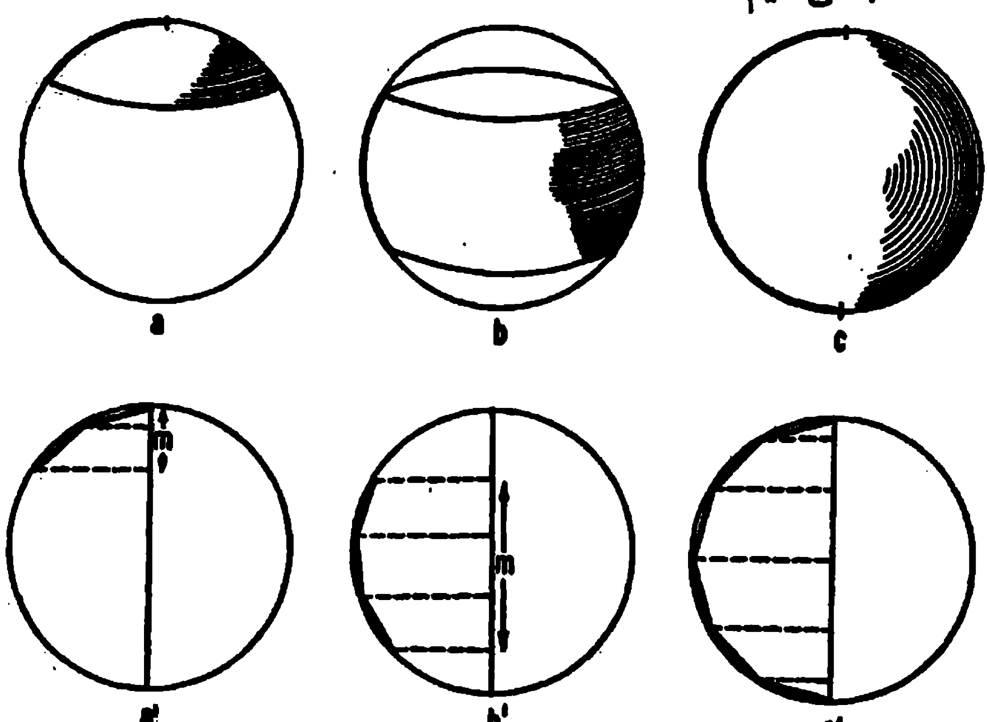


شکل ۲۸

که بستگی به‌جای نقطهٔ P، مرکز کرهٔ S'، ندارد.

دربارهٔ رابطهٔ (۱)، یادداشت ۱ را ببینید.

یادداشت ۱. مساحت عرقچین کروی، قطعه کروی و کره. a) این سه سطح، به‌وسیلهٔ بخش‌هایی از نیم دایره به‌دست می‌آیند: «کمان انتهائی، کمان درونی و نیم‌دایرهٔ کامل (شکل ۲۹، a و b و c). هریك ازاین سطح‌ها، بادوران کمان متناظرخود، دور قطر دایره به‌دست می‌آیند. مساحت این سطح‌ها را می‌توان به‌تقریب محاسبه کرد، به‌این‌ترتیب که کمان متناظر را به‌چند بخش برابر تقسیم کنیم و به‌جای کمان، خط‌شکسته‌ای را درنظر بگیریم که از وصل نقطه‌های متوالی تقسیم به‌دست آمده است.» (شکل ۲۹، 'a، و 'b و 'c). روشن است که، دراین صورت، مساحت‌حاصل، ازمساحت موردنظر کوچکتر می‌شود. درضمن، مساحت‌شکلی که از دوران این خط‌شکسته به‌دست می‌آید، برابر است بامجموع مساحت‌های چندمخروط ناقص. ابتدا، این مساحت‌ها را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۲۹

b) مخروط دواری باشعاع قاعدهٔ ρ_1 ومولد d درنظر می گیریم. اگر سطح مخروطی را روی یکی از مولدهای آن ببریم وروی صفحه پهن کنیم، قطاعی از یك دایره به‌دست می‌آیدکه شعاع آن برابر d وکمان روبه‌روی آن به‌طول $2\pi\rho_1$ است (شکل ۳۰). مساحت این قطاع را t_1 می گیریم. نسبت مساحت قطاع به مساحت تمامی دایره (یعنی $d^2\pi$)، برابر است با نسبت طول کمان قطاع به‌محیط دایره ($2\pi d$)، یعنی

$$\frac{t_1}{d^2\pi}=\frac{2\pi\rho_1}{2\pi d}=\frac{\rho_1}{d}$$

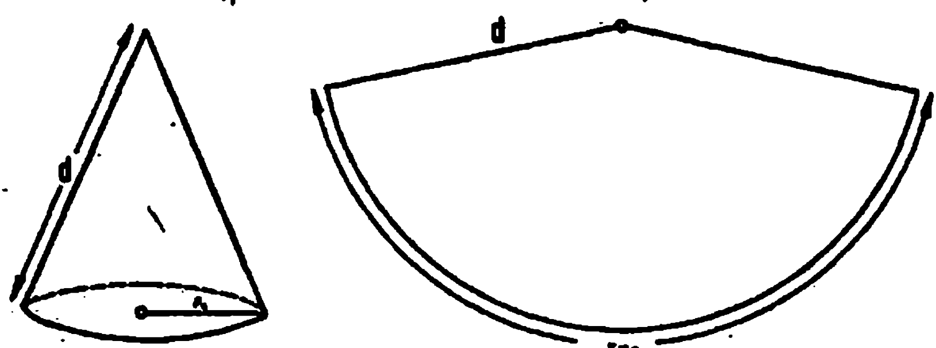
که ازاین‌جا، مساحت سطح جانبی مخروط به‌دست می‌آید:

$$t_1=\pi\rho_1 d$$

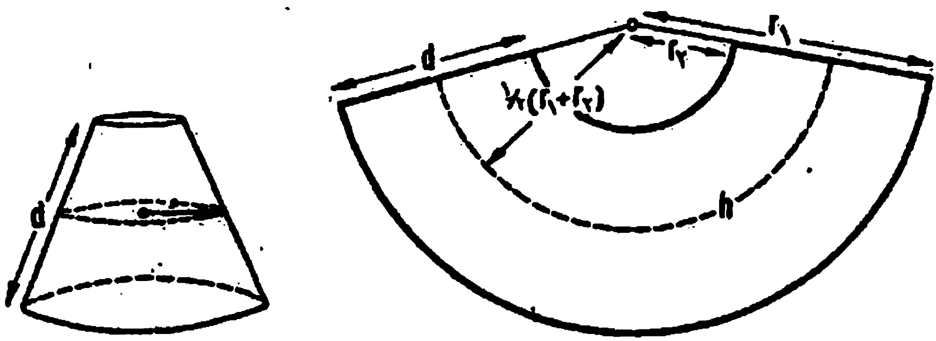
به‌محاسبهٔ سطح جانبی مخروط ناقص می‌پردازیم. درشکل ۳۱ (سمت راست)، بخشی ازیك حلقه را می‌بینیدکه بین دودایرهٔ هم‌مرکز، به‌شعاع‌های r_1 و r_2، قرارگرفته است. مساحت این حلقه، (اگرحلقه کامل درنظر گرفته شود) برابر است با

$$\pi r_1^2-\pi r_2^2=\pi(r_1+r_2)(r_1-r_2)$$

که در آن، $d=r_1-r_2$، عرض حلقه است. r_1+r_2 را r می‌نامیم (r، شعاع دایرهٔ دیگری است که برابر با دوبرابرواسطهٔ حسابی دوشعاع r_1 و r_2 است). به‌این ترتیب، مساحت حلقه برابر $2\pi rd$ می‌شود، یعنی حاصل‌ضرب محیط دایرهٔ به‌شعاع r (که‌آن را دایرهٔ مرکزی می‌نامیم) در عرض حلقه از



شکل ۳۰



شکل ۳۱

طرف دیگر، اگر مساحت این بخش حلقه را $t_۲$ بگیریم، نسبت $t_۲$ به‌مساحت حلقه‌کامل، برابر است بـا نسبت h، طول کمان دایرهٔ مرکزی به‌محیط دایرهٔ مرکزی:

$$\frac{t_۲}{۲\pi rd}=\frac{h}{۲\pi r} \Rightarrow t_۲=hd$$

مخروط‌ناقص، مولدی برابر d دارد ودایرهٔ‌به‌محیط k (مقطع‌متوسط)، به‌فاصلهٔ $\frac{d}{۲}$ ازقاعدهٔ مخروط ناقص است (شکل ۳۱). اگـر شعاع دایرهٔ مقطع متوسط را ρ وسطح جانبی مخروط ناقص را t بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$t=۲\pi\rho d \tag{۱}$$

که اگر $\rho=\frac{\rho_۱}{۲}$ فرض کنیم، به‌همان مساحت سطح جانبی مخروط می‌رسیم که در a) به‌دست آوردیم.

c) به‌کره برمی‌گردیم. طول هریك از ضلع‌های خط‌شکستهٔ محاط در نیم‌دایره را d فرض می‌کنیم (شکل ۳۲). فاصلهٔ وسط این ضلع ازقطرکـره را با ρ، فاصلهٔ وسط ضلع ازمرکزکره را با l وطول تصویراین ضلع(ضلع به‌طول d) را برقطرکره با p نشان می‌دهیم. دراین صورت مساحت سطحی که از دوران این ضلع دورقطرکره به‌دست می‌آید، همان است‌که در (۱) داده‌ایم.

ضلع‌هـای نظیر، در دومثلث قائم‌الزاویهٔ OMA و $O'MA'$ برهـم

عمود و، بنابراین، این دومثلث متشابه‌اند، یعنی

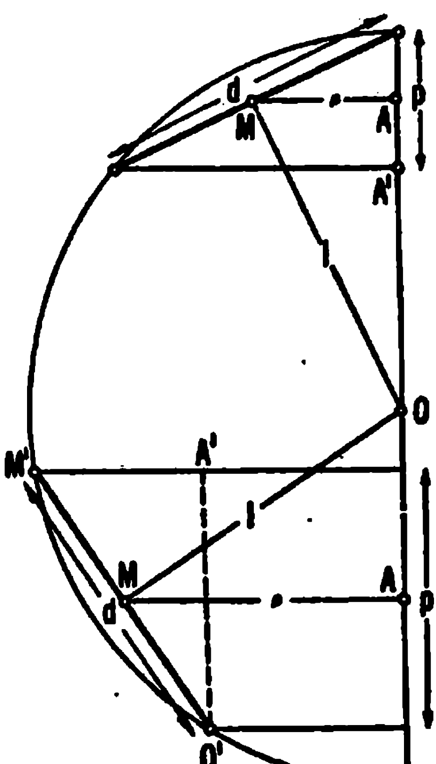
$$\frac{\rho}{l}=\frac{p}{d}\Rightarrow \rho d=pl$$

وبنابراین $s=2\pi pl$.

به‌زبان دیگر: مساحت شکلی که از دوران یک وتر، دورقطردایره به‌دست می‌آید، برابر است با 2π برابرحاصلضرب فاصلهٔ مرکز دایره از وتر در طول تصویر وتر به‌قطردایره.

اگر ضلع خط شکسته را، به‌تقریب، کمانی از دایره فرض کنیم، همهٔ ضلع‌های خط شکسته، به‌یک‌فاصله‌ازمرکزمی‌شوندو، مجموع تصویرهای این وترها روی قطر، برابر با m، ارتفاع سطح دوار خواهد شد (در حالت دوران تمامی نیم دایره، m برابرطول قطرمی‌شود). بنابراین، مساحت‌سطحی که از دوران این خط شکسته به‌دست می‌آید، برابراست با

$$2\pi lm$$



شکل ۳۲

که در آن، مقدار l، درحالت حدی، همان شعاع کره، یعنی R است.

به‌این ترتیب، مساحت‌سطح عرقچین کروی وقطعهٔ کروی، برابر

$$2\pi Rm$$

است که، در آن، R شعاع کره و m ارتفاع سطح موردنظر است. وقتی‌که با کرهٔ‌کامل سروکار داشته باشیم، $m=2R$ و، بنابراین، برای مساحت‌کره به‌دست می‌آید:

$$4\pi R^2$$

یادداشت ۲. هندسهٔ بایای. قضیه‌ای که‌دراین‌جا ثابت‌کردیم، درهندسهٔ یانوش‌بایای، نقشی جدی دارد؛ این هندسه، به‌اصل موضوع توازی بستگی ندارد. اندکی دربارهٔ این هندسه صحبت می کنیم.

a) اصل‌موضوع توازی: تاریخ بحث دربارهٔ خط‌های‌راست موازی، به‌کتاب «مقدمات» اقلیدس برمی گردد. اقلیدس، ازتعریف‌ها آغازمی کند، سپس، اصل موضوع‌های هندسهٔ اقلیدسی را (که به‌آکسیوم‌ها وپوستولات‌ها تقسیم کرده است) شرح می‌دهد. پوستولات پنجم اقلیدس، چنین است: اگردریك صفحه، خط‌راست l، دوخط راست را طوری قطع‌کندکه، با آن‌ها، دو زاویه به‌مجموعی‌کمتر از دوقائمه بسازد، این دوخط راست، درهمان طرف این دو زاویه ، یکدیگر را قطع می‌کنند. این اصل، به اصل موضوع توازی مشهور شده است و زیربنای گزاره‌های مربوط به‌خط‌های راست موازی را تشکیل می‌دهد.

اقلیدس، دوخط راست موازی را، به‌عنوان خط‌های راستی که دریك صفحه واقع باشند ویکدیگر را قطع نکنند، تعریف می‌کند، ولی توجهی به‌چگونگی امتدادهای این دو خط راست نـدارد. اقلیدس، بدون استفاده از پوستولات پنجم‌خود، ثابت‌کردکه: اگردوخط‌راست، دریك صفحه، به‌وسیلهٔ خط راست l، طوری قطع شوندکه مجموع دو زاویهٔ متقابل داخلی حاصل، برابردوقائمه باشد، حتماً آن دوخط راست با هم موازی‌اند. ازاین‌جا می‌توان نتیجه‌گرفت‌که، برای هرخط راست l وهرنقطهٔ A واقع در بیرون‌آن،

دست کم یك خط راست وجود دارد که از نقطهٔ A می گذرد و با l موازی است. اقلیدس، همچنین ثابت کرد که، ایـن خط راست L، که از A موازی l رسم شده است، منحصر به‌فرد است، ولی این اثبات را با یاری گرفتن از پوستولات پنجم خود انجام داد. در واقع، باید گفت که، اصل موضوع توازی، بر اساس همین تصور پایه‌ریزی شده است کـه: از هر نقطهٔ واقع در بیرون یك خط راست، می‌توان یك، و تنها یك خط راست، موازی با آن رسم کرد.

اصل موضوع تـوازی، در «مقدمات» اقلیدس، از نظر بدیهی بودن و سادگی، با اصل موضوع‌های دیگر متفاوت است و، به همین مناسبت، خیلی از ریاضی‌دانان، کوشیدند تا شاید بتوانند آن را به کمك اصل موضوع‌های دیگر، ثابت کنند، ولی کسی در این راه موفق نشد. هندسه‌ای که بر پایهٔ اصل موضوع توازی ساخته شده باشد، هندسهٔ اقلیدسی نام دارد.

b) یانوش بایای، فرزند فارکاش بایای بود. فارکاش، در سال ۱۷۷۵ در مجارستان به‌دنیا آمد و، درهمان جا، در سال ۱۸۵۶ مرد. او، برای تکمیل تحصیل خود، به آلمان رفت و در آن‌جا با گوس، ریاضی‌دان نامی، آشنا شد. دوستی و مکاتبهٔ آن‌ها تا پایان زندگی گوس ادامه داشت (به‌جز سال‌های ۱۸۱۶ تا ۱۸۳۱) فارکاش روی اصل موضوع توازی کار می کرد که، البته، نتوانست به جایی برسد تنها کار پسرش یانوش بایای بود که دلیل ناتوانی او را روشن کرد.

یانوش بایای، می‌خواست درستی اصل موضوع توازی را، با برهان خلف ثابت کند، به‌این ترتیب که تلاش کرد هندسه‌ای بسازد که، در آن اصل موازی توازی نادرست باشد و امید داشت، از این راه، به‌تناقض برسد. ولی تناقضی پیدا نشد و ساختمان هندسهٔ او، به طور منطقی پیش رفت.

بایای، کشف خـود را در سال ۱۸۲۳ انجام داد، ولی تنها در سال ۱۸۳۲، آن‌ها را عرضه کرد. پدرش، این نوشته‌ها را که در ۲۸ صفحه تنظیم شده بود، برای گوس فرستاد. گوس، در پاسخ خود، به‌برخی اشتباه‌ها اشاره کرد و، درضمن یـادآور شد که برخی از این نتیجه‌ها را، خود او هم به‌دست آورده است. بایای دلسرد نشد و راه خود را ادامه داد ولـی گوس در این

نظر خود حق داشت که کارهای بایای و لباچوسکی*، در زمان خودشان، برای دیگران قابل فهم نیست. در رابطه با لباچوسکی می‌توان گفت که، کشف او، یکی از بزرگترین کشف‌ها، در تاریخ اندیشهٔ انسانی است. هندسهٔ لباچوسکی و هم هندسه‌های دیگری که بعد از او ساخته شد، و در آن‌ها، اصل موضوعی متناقض با اصل موضوع توازی مبنا قرار گرفته بود، بی‌تناقض و منطقی از آب در آمد. این که، کدامیك از این هندسه‌ها، با دنیای واقع تطبیق می‌کنند، موضوعی است که به ریاضیات مربوط نیست. تحقیق در بارهٔ واقعیت فضا و این که، چه هندسه‌ای با آن سازگار است، به دانش‌های طبیعی مربوط می‌شود. ولی، کشف هندسهٔ نااقلیدسی، به معنای توانائی ذهن انسان است که می‌تواند فضاهایی غیر از فضای اقلیدسی را مطرح کند و به کشف ویژگی‌های آن‌ها بپردازد.

۲۷. راه حل اول. با توجه به قانون کسینوس‌ها در مثلث، داریم:

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}-۲ab\cos\gamma=(a-b)^{۲}+۲ab(۱-\cos\gamma) \qquad (۱)$$

همچنین، می‌دانیم:

$$T=\frac{۱}{۲}ab\sin\gamma\Rightarrow ۲ab=\frac{۴T}{\sin\gamma} \qquad (۲)$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$c^{۲}=(a-b)^{۲}+۴T\frac{۱-\cos\gamma}{\sin\gamma}=(a-b)^{۲}+Ttg\frac{\gamma}{۲}$$

در سمت راست این برابری، جملهٔ دوم، مقداری مفروض و ثابت و جملهٔ اول، یعنی $(a-b)^{۲}$ غیرمنفی است. بنابراین $c^{۲}$، و در نتیجه c، وقتی به کمترین مقدار خود می‌رسد که داشته باشیم: $a=b$. و در این صورت، با توجه به برابری (۲):

---

*) نیکلای لباچوسکی (۱۸۵۶–۱۷۹۳)، استاد ریاضی در دانشگاه قازان، نوشته‌های خود را در بارهٔ هندسه، به صورت‌های مختلف چاپ کرد. کوتاه‌ترین آن‌ها، رساله‌ای است که در سال ۱۸۴۰ در برلن چاپ شد. بایای، ظاهراً، از این کتاب اطلاعی نداشت و به وسیلهٔ گوس از وجود آن آگاه شده بود.

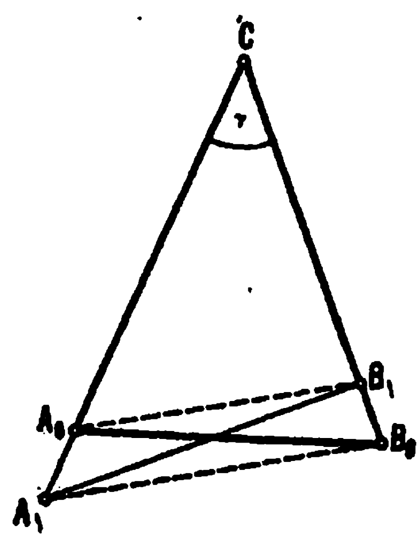
$$۲ab=۲a^۲=\frac{۴T}{\sin\gamma}\Rightarrow a=b=\sqrt{\frac{۲T}{\sin\gamma}}$$

راه حل دوم. اکنون باروش خالص هندسی ثابت می‌کنیم که، درحالت ثابت بودن T (مساحت) و γ (زاویهٔ روبه‌رو به‌ضلع c)، مقدار c، وقتی به‌کمترین مقدارخود می‌رسد که مثلث، متساوی‌الساقین باشد؛ یعنی $a=b$.

$A_۰B_۰C$ را، مثلثی متساوی‌الساقین با مساحت T و زاویهٔ $\hat{C}=\gamma$ فرض می‌کنیم (شکل۳۳). مثلث $A_۱B_۱C$ را، با همان زاویهٔ رأس $\hat{C}=\gamma$ می‌سازیم به‌نحوی که $CA_۱>CB_۱$. اگر مساحت‌های مثلث $A_۰B_۰C$ با مساحت مثلث $A_۱B_۱C$ برابر باشد، مساحت‌های دومثلث کوچك $A_۰A_۱B_۱$ و $A_۰B_۰B_۱$ باهم برابرمی‌شوندوچون. این دومثلث، درقاعدهٔ $A_۰B_۱$ مشترك‌اند، باید دوارتفاع آن هم، با هم برابر باشند و، درنتیجه، چهارضلعی $A_۰A_۱B_۰B_۱$ یك ذوزنقه است. ازطرف دیگر، داریم:

$$\widehat{A_۰A_۱B_۰}<\widehat{CA_۰B_۰}=\widehat{B_۱B_۰A_۰}<\widehat{A_۱B_۰B_۱}$$

یعنی $\widehat{A_۰A_۱B_۰}<\widehat{A_۱B_۰B_۱}$. برای این که ثابت کنیم $A_۰B_۰<A_۱B_۱$، کافی



شکل ۳۳

است ثابت کنیم:

پیش‌قضیه. اگر g یکی از دو ضلع موازی در ذوزنقهٔ غیرمتساوی‌الساقینی باشد، آن‌وقت، قطر بزرگتر ذوزنقه، با g در رأسی یکدیگر را قطع می‌کنند که، در آن‌جا، g با ساق ذوزنقه، زاویهٔ کمتری می‌سازد.

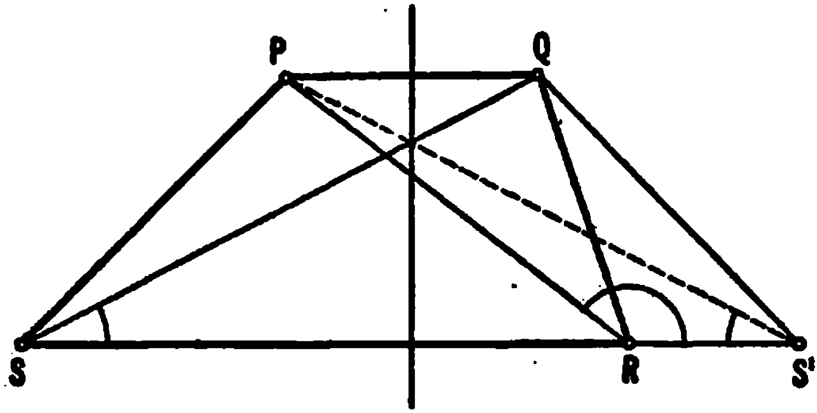
اثبات. در ذوزنقهٔ $PQRS$ (شکل ۳۴)، فرض می‌کنیم: $PQ \| RS$ و $\widehat{SPQ} > \widehat{PQR}$، درضمن، $PQS'S$ را شکلی می گیریم که نسبت به‌عمود‌منصف پاره‌خط PQ متقارن باشد که، دراین صورت $\widehat{RS'P} = \widehat{QSR}$. چون زاویهٔ PRS'، زاویهٔ خارجی مثلث SPR است، بنابراین

$$\widehat{PRS'} > \widehat{PSR} \text{ و } \widehat{PSR} = \widehat{PSQ} + \widehat{QRS}$$

وبنابراین
$$\widehat{PRS'} > \widehat{QSR} = \widehat{RS'P}$$

چون درهرمثلث، ضلع بزرگتر، روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتراست، در مثلث PRS' خواهیم داشت: $PS' > PR$؛ که باتوجه به برابری $PS' = QS$ سرانجام، نتیجه می‌شود: $QS > PR$.

اکنون، اگر از این پیش‌قضیه، درمورد ذوزنقهٔ $A_0A_1B_0B_1$ استفاده کنیم، معلوم می‌شود که $A_0B_0 = c$، که متعلق به‌مثلث متساوی‌الساقین است، کمترین طول را دارد.



شکل ۳۴

راه حل سوم. همهٔ مثلث‌ها به‌مساحت T را درنظرمی گیریم که در زاویه γ و رأس C، مشترك باشند. فـرض می کنیم، در یکی از این مثلث‌ها، قاعدهٔ c ازدیگران کوچکتر باشد. اگر بقیهٔمثلث‌ها را به‌مثلث‌های متشابه‌خود، طوری تبدیل کنیم که قاعده‌ای برابر c داشته باشند، آن وقت، مساحت‌هایی کمتر از T پیدا می کنند(زیرا، اندازهٔ همهٔ ضلع‌های‌این مثلث‌ها، کوچکتر شده‌است).

به‌این ترتیب، می‌توان مسأله را به‌صورت دیگری طرح کرد: از بین مثلث‌های با قاعدهٔ معلوم c و زاویهٔ رأس روبه‌روی‌آن، γ، مثلثی را مشخص کنیدکه دارای مساحت حداکثرباشد.

رأس C ازهمهٔ مثلث‌هایی‌که قاعده‌ای برابر c و زاویهٔ $\hat{C}=\gamma$ داشته باشند، روی‌کمان درخور زاویهٔ γ قراردارندکه برپاره‌خط c ساخته شده‌اند (این‌کمان روی دایره‌ای قـرارداردکه از دوانتهای پاره خط c می گذرد و شعاعی برابر $\frac{C}{2}\sin\gamma$ دارد، یادداشت پایان راه حل اول مسألهٔ ۵ را ببینید).

ازبین مثلث‌هایی‌که به‌دست می‌آیند، آن کـه ارتفاع بیشتری دارد، دارای مساحت بیشتری است و، روشن است‌که، ارتفاع وارد برc، وقتی بزرگترین طول را داردکه بر وسط ضلـع c فرودآمده باشد. بنابراین، مثلث جواب، باید متساوی‌الساقین باشد.

۱۹۵۳

۲۸. $q=2^{p}-1$ می گیریم،دراین‌صورت q. $n=2^{p-1}$. شمارنده‌ها یا مقسوم‌علیه‌های عـدد n، عبارتند از [یـادداشت ۱ درپایان حل مسألهٔ ۲۴ را ببینید]:

$$1،\ 2،\ 2^{2}،\ \ldots،\ 2^{p-2}،\ 2^{p-1}،$$

$$q،\ 2q،\ 2^{2}q،\ldots،\ 2^{p-2}.q$$

عددهای سطراول، یك تصاعد هندسی با قدر نسبت ۲ تشکیل می‌دهند و، مجموع آن‌ها، برابراست با

$$1+2+2^2+\dots+2^{p-1}=\frac{2^p-1}{2-1}=2^p-1=q$$

و به همین ترتیب، مجموع عددهای سطر دوم:

$$q+2q+2^2q+\dots+2^{p-2}q=q(2^{p-1}-1)=n-q$$

که درنتیجه، مجموع همهٔ آن‌ها، برابر n می‌شود.

یادداشت. عددهای کامل. عددمثبت n را کامل گویند، وقتی که مجموع شمارنده‌های مثبت آن (به‌جزخود n)، برابر با n باشد. اقلیدس، در کتاب «مقدمات» خود، برای نخستین بار، دربارهٔ عددهای کامل بحث کرده است. کوچکترین عددکامل، برابراست با ۶:

$$6=2(2^2-1)=1+2+3$$

قضیه‌ای که در مسألهٔ ۲۸ ثابت کردیم، تنها عددهای کامل زوج را به‌دست می‌دهد. تاکنون به دوپرسش زیر، پاسخ داده نشده است:

آیا دنبالهٔ عددهای کامل زوج، یك دنبالهٔ نامتناهی است*؟

آیا عددکامل فرد وجود دارد؟

۲۹. a) با فرض $x=\sin\alpha$ و $y=\sin\beta$، داریم:

$$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-x^2},\quad \cos\beta=\pm\sqrt{1-y^2};$$

که با توجه به $z=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
z_1&=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2},\\
-z_1&=-x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},\\
z_2&=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2},\\
-z_2&=-x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}\qquad(1)$$

*) تا سال ۱۹۶۲، تنها ۲۰ عددکامل پیدا شده بود، ولی امروز ۳۱ عدد زوج کامل شناخته شده است.

معادله‌ای که، ریشه‌های آن، این چهار مقدار باشند، چنین است:

$$(z-z_1)(z+z_1)(z-z_2)(z+z_2)=0$$

که بعد از عمل‌های لازم، به‌این صورت درمی‌آید:

$$z^4-(z_1^2+z_2^2)z^2+z_1^2z_2^2=0 \qquad (2)$$

مقدارهای $z_1^2+z_2^2$ و $z_1^2z_2^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$z_1^2+z_2^2=2[x^2(1-y^2)+y^2(1-x^2)]=2(x^2-2x^2y^2+y^2),$$

$$z_1^2 \cdot z_2^2=x^2(1-y^2)-y^2(1-x^2)=x^2-y^2$$

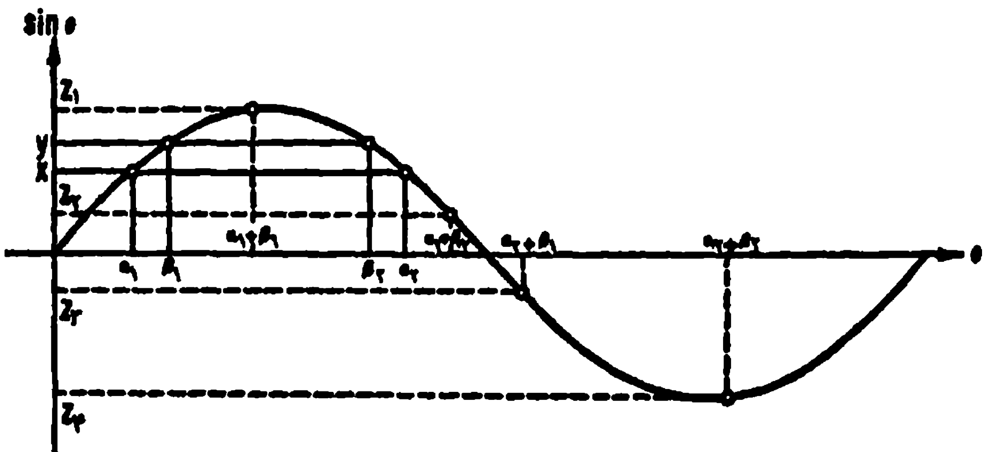
درنتیجه، معادلهٔ (۲)، چنین می‌شود:

$$z^4-2(x^2-2x^2y^2+y^2)z^2+(x^2-y^2)=0 \qquad (3)$$

که رابطه‌ای است گویا بین x و y و z، مستقل از تابع‌های مثلثاتی.

b) در حالت کلی، معادلهٔ (۳)، چهار ریشهٔ متمایز دارد که در (۱) مشخص شده‌اند.

نمودار تابع سینوس، در شکل ۳۵، نشان می‌دهد که، هر مقدار بین ۱ــ و ۱، برای سینوس، متناظر با دو زاویهٔ α و $\pi-\alpha$ است. خود رابطه‌های (۱) نشان می‌دهند که، در چه حالت‌هایی، تعداد جواب‌های متمایز، کمتر از



شکل ۳۵

چهار است:

۱) $z_1 = z_2$ یا $z_1 = -z_2$. در این حالت‌ها، باید داشته باشیم:

$$x\sqrt{1-y^2} = 0 \text{ یا } y\sqrt{1-x^2} = 0$$

یعنی، وقتی که یکی از دو مقدار x یا y، برابر با یکی از مقدارهای ۰، ۱ یا ۱− باشند.

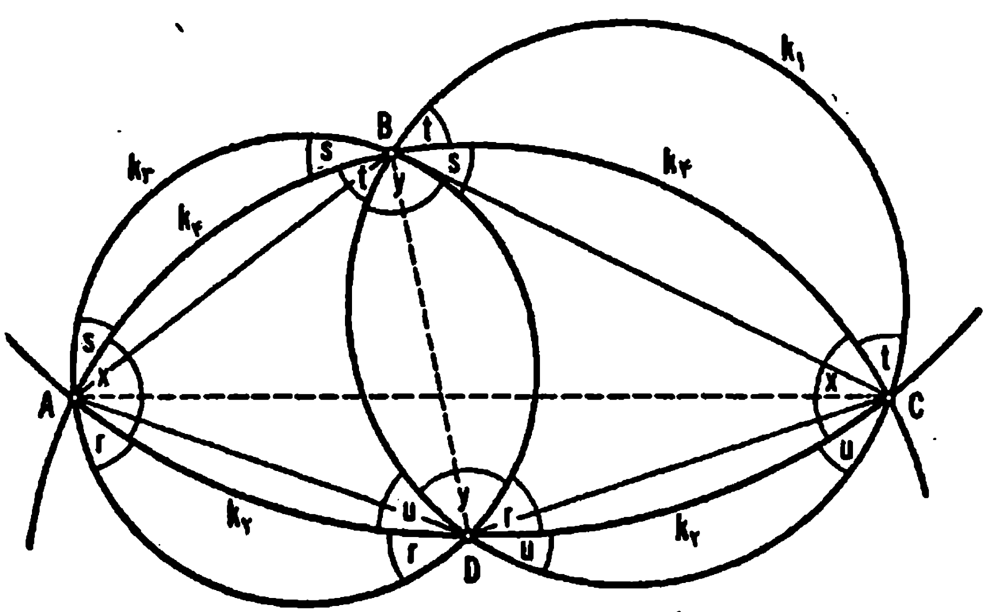
۲) $z_1 = -z_1$ یا $z_2 = -z_2$، یعنی

$$x\sqrt{1-y^2} = -y\sqrt{1-x^2} \text{ یا } x\sqrt{1-y^2} = y\sqrt{1-x^2}$$

که منجر به $x^2(1-y^2) = y^2(1-x^2)$ یا $x^2 = y^2$ می‌شوند و از آن‌جا: $x = \pm y$.

۳۵. حکم این قضیه، نه‌تنها برای لوزی، بلکه برای هر چهارضلعی $ABCD$ درست است (در شکل ۳۶، $ABCD$ یك چهارضلعی محدب و در شکل ۳۵، یك چهارضلعی مقعر است: اثباتی که در این‌جا آورده‌ایم، برای هر دو شکل درست است).

می‌دانیم: زاویهٔ بین دو منحنی متقاطع، بنابر تعریف، عبارت است از زاویهٔ بین مماس‌های بر دو منحنی در نقطهٔ برخورد آن‌ها. بنابراین، قضیهٔ ما

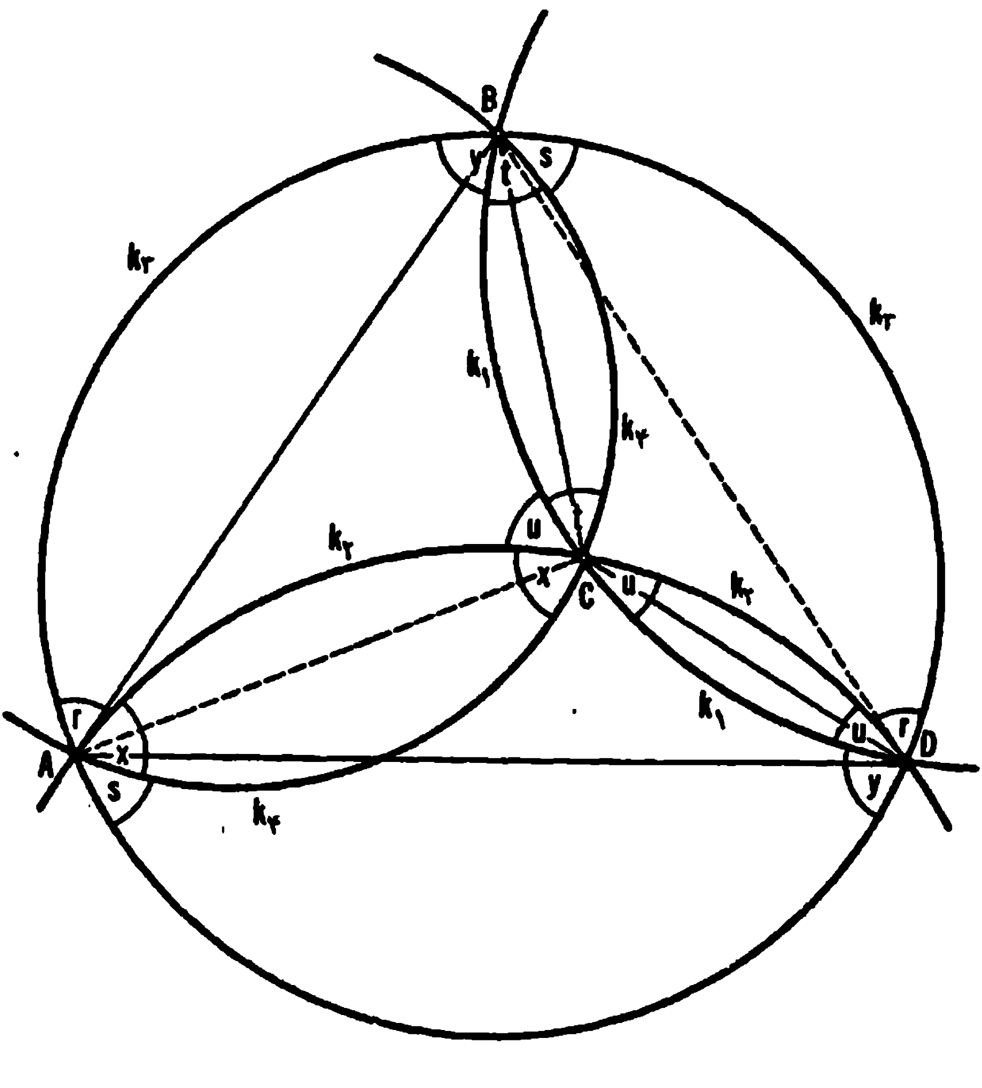


شکل ۳۶

این است:

ثابت کنید، زاویهٔ بین دو دایرهٔ k_2 و k_3 در نقطهٔ B، برابر است با زاویهٔ بین دو دایرهٔ k_2 و k_4 در نقطهٔ A.

ابتدا، به‌این نکته توجه می‌کنیم که، زاویه، بین دو دایره، در یکی از نقطه‌های برخورد آن‌ها، برابر است با زاویهٔ بین دو دایره، در نقطه برخورد دوم، زیرا اگر خط راستی را در نظر بگیریم که از مرکز دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرد، تمامی شکل نسبت به این خط راست، متقارن است و می‌دانیم، دو زاویهٔ متقارن نسبت به‌یك خط راست، با هم برابرند. بنابراین، زاویه‌هایی که



شکل ۳۷

در شکل ۳۶ ویا درشکل ۳۷، با یک حرف نشانه‌گذاری شده‌اند، با هم برابرند. داریم:

در رأس A: $r+x+s=180°$؛

در رأس B: $s+y+t=180°$؛

در رأس C: $t+x+u=180°$؛

در رأس D: $u+y+r=180°$؛

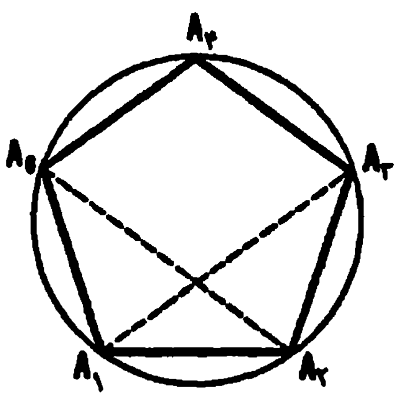
وبنا براین

$$(r+x+s)-(s+y+t)+(t+x+u)-(u+y+r)=0$$

که از آن‌جا، به‌دست می‌آید: $x=y$.

۱۹۵۴

۳۱. در پنج ضلعی $A_0A_1A_2A_3A_4$ (شکل ۳۸)، دومثلث به رأس‌های A_0، A_1، A_2 و A_3، A_2، A_1 هم نهشت‌اند (یعنی قابل انطباق بریکدیگرند)، زیرا درضلع A_1A_2 مشترک‌اند، به‌فرض داریم: $\widehat{A_0A_1}A_2=\widehat{A_2A_3}A_1$ و، در ضمن، $A_1\widehat{A_0A_2}=A_2\widehat{A_3A_1}$ (دوزاویهٔ محاطی روبه‌رو به‌یک کمان دردایره). بنابراین، نتیجه می‌گیریم: $A_0A_1=A_2A_3$. به‌همین ترتیب، با درنظر گرفتن زوج مثلث‌های هم نهشت دیگر، به‌دست می‌آید:



شکل ۳۸

$$A_0A_1=A_1A_2=A_2A_3=A_3A_4=A_4A_0$$

این قضیه، برای هرچند ضلعی که، تعداد ضلع‌های آن فرد باشد، درست است ($2n+1$ ضلعی) وشبیه همین استدلال را برای آن، می‌توان به‌کاربرد. ولی، اگر تعداد ضلع‌های چند ضلعی، زوج باشد ($2n$ ضلعی)، این قضیه درست نیست؛ مثلاً، مستطیل که زاویه‌هایی برابر دارد و در دایره هم قابل محاط است، چهارضلعی منتظم نیست.

۳۲. اگر $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ را، مجموعهٔ جواب، برای معادلهٔ (۱) فرض کنیم، دراین صورت، وتنها دراین صورت، برای معادلهٔ

$$(y_1+1)+2(y_2+1)+\dots+n(y_n+1)=a \qquad (3)$$

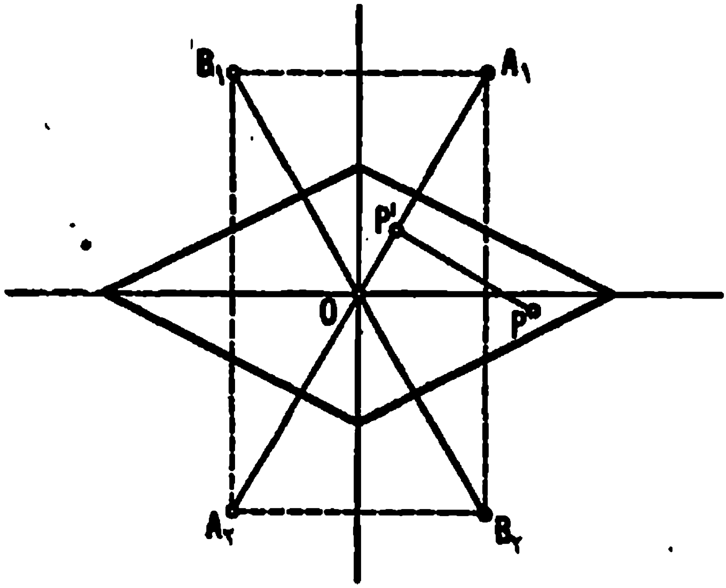
مجموعهٔ‌جواب $\{y_1=x_1-1, y_2=x_2-1, \dots, y_n=x_n-1\}$ راخواهیم داشت. معادلهٔ (۳) را، می‌توان این‌طورنوشت:

$$y_1+2y_2+\dots+ny_n=a-(1+2+\dots+n)=a-\frac{n(n+1)}{2}$$

علاوه براین، x_iها وقتی، وتنها وقتی، درست‌ومثبت‌اندکه y_iها غیرمنفی‌باشند. به‌این‌ترتیب، برای‌هرمجموعهٔ جواب $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$، دقیقاً یک‌مجموعهٔ جواب $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ وجود دارد، یعنی، تعدادجواب‌های‌مثبت ودرست معادلهٔ (۱)، برابراست با تعداد جواب‌های غیرمنفی و درست معادلهٔ (۲).

۳۳. P را نقطهٔ دلخواهی ازصفحه و P' را تصویرآن، برخط‌راست A_1A_2 می‌گیریم (شکل ۳۹). روشن است که A_1P وقتی بزرگتر، برابریا کوچکتر از OP است که A_1P'، بزرگتر، برابریا کوچکتر از OP' باشد. بنابراین، برای این‌که نقطهٔ P با نابرابری $A_1P>OP$ سازگارباشد ، باید درنیم صفحه‌ای قرار گیردکه، مرزآن،عمود منصف پاره‌خط A_1O است و در طرف نقطهٔ O قرار دارد. به همین ترتیب، نقطهٔ P، وقتی با نابرابری $A_2P>OP$ سازگار است که در نیم‌صفحهٔ شامل O و با مرز عمود منصف A_2O واقع باشد وغیره.

بنابراین، مکان هندسی نقطهٔ P، برای این که به طور هم زمان، درهر



شکل ۳۹

چهارنابرابری صدق کند، عبارت است از بخش مشترك این چهار نیم صفحه، یعنی بخش درونی متوازی‌الاضلاعی که با رسم عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های A_1O، A_2O، B_1O، B_2O ساخته می‌شود. این‌متوازی‌اضلاع همیشه یك‌لوزی است، زیرا قطرهای آن نیمسازهای زاویه‌هایی هستند که A_1A_2 و B_1B_2 با هم می‌سازند؛ یعنی، این قطرها، برهم عمودند.

۱۹۰۵

۳۴. از معادلهٔ دوم دستگاه، معلوم می‌شود که، این معادله، نمی‌تواند برای عددهای درست ومثبت x و y و z برقرار باشد، مگر این‌که داشته باشیم: $p>1$ یا $p-1>0$.

y را ازمعادلهٔ دوم برحسب x و z به‌دست می‌آوریم و، به‌جای y، درمعادلهٔ اول قرارمی‌دهیم:

$$x+py=x+p(p^z-x)=x(1-p)+p^{z+1}=n$$

و ازآن‌جا، چون $p-1\neq 0$:

$$x=\frac{p^{z+1}-n}{p-1}=\frac{p^{z+1}-1}{p-1}-\frac{n-1}{p-1} \qquad (1)$$

و درنتیجه، برای y، ازمعادلهٔ دوم دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$y=p^z-x=p^z-\frac{p^{z+1}-n}{p-1}=\frac{p^{z+1}-p^z-p^{z+1}+n}{p-1}=$$

$$=\frac{n-p^z}{p-1}=\frac{n-1}{p-1}-\frac{p^z-1}{p-1} \qquad (2)$$

وچون، برای هرعدد درست ومثبت z، داریم:

$$\frac{p^{z+1}-1}{p-1}=p^z+p^{z-1}+\dots+1,$$

$$\frac{p^z-1}{p-1}=p^{z-1}+p^{z-2}+\dots+1$$

بنابراین، باتوجه به (۱) و (۲)، x و yوقتی، وتنها وقتی، عددهایی‌درست‌اند که $(n-1)$ مضربی از $(p-1)$ باشد. به‌جزاین، برای مثبت بودن x باید داشته باشیم: $p^{z+1}>n$ و برای مثبت بودن y: $p^z<n$ ؛ که از آن جا، به این شرط می‌رسیم:

$$p^z<n<p^{z+1} \qquad (3)$$

یعنی n، بین دوتوان متوالی از p قرار دارد.

به‌این ترتیب، شرط لازم وکافی، برای این‌که دستگاه دارای جواب درست ومثبت برای (x,y,z) باشد، باید

a) $p>1$؛

b) $n-1$ بر $p-1$ بخش‌پذیر باشد (یعنی $n\geqslant p$)؛

c) n توان درستی از p نباشد.

با این شرطها، ازنابرابری‌های (۳)، جواب منحصربه فردی برای z و، سپس، از معادله‌های (۱) و (۲)، جواب‌های منحصری برای x و y به‌دست می‌آید.

اگرشرطهای a)، b)، c)برقرار باشند،دستگاه یك جواب منحصر برای

عددهای درست ومثبت (x، y، z) دارد.

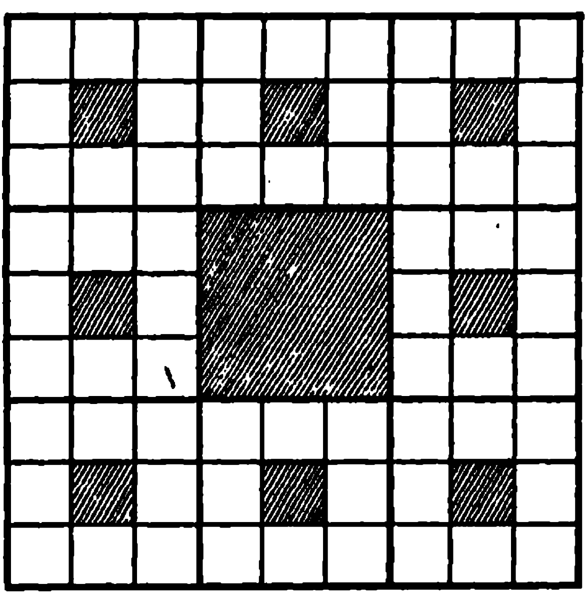
مثلاً، در دستگاه

$$\begin{cases} x+8y=15 \\ x+y=8 \end{cases}$$

که با شرط‌های a)، b) و c) سازگار است، جواب منحصر زیر به‌دست می‌آید:

$$x=7،\quad y=1،\quad z=1$$

۳۵. a) درمرحلهٔ اول، ۸ مربع، با ضلع به‌طول $\frac{1}{3}$، باقی‌می‌ماند. ودر مرحلهٔ دوم، ازهریك از ۸ مربع قبلی، ۸ مربع کوچکتر، و روی هم 8^2مربع، به‌ضلع $\frac{1}{3^2}$ باقی می‌ماند. به همین ترتیب، بعد از مرحلهٔ سوم، 8^3 مربع، به‌ضلع $\frac{1}{3^3}$ و، بالاخره، بعد ازمرحلهٔ nام، 8^n مربع باقی می‌ماندکه ضلع هر کدام ازآن‌ها، برابر $\frac{1}{3^n}$ است.



شکل ۴۵

b) مجموع مساحت‌های 8^n مربعی که باقی می‌ماند، برابراست با

$$8^n\left(\frac{1}{3^n}\right)^2=\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

بنابراین، مجموع مساحت‌های مربع‌های حذف شده، برابراست با

$$1-\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

با بزرگ شدن n، مقدار $\left(\frac{8}{9}\right)^n$ کوچک می‌شود و، درحالت حدی، داریم:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$$

یعنی، مجموع مساحت‌های مربع‌های حذف شده، برابراست با واحد:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right]=1$$

۳۶. با توجه به موازی بودن خط‌های راست AA_1، BB_1 و CC_1، مثلث‌های CAC_1 و B_1AB و، همچنین، مثلث‌های CBC_1 و A_1BA متشابه‌اند، بنابراین

$$\frac{CC_1}{B_1B}=\frac{AC_1}{AB} \text{ و } \frac{CC_1}{A_1A}=\frac{C_1B}{AB}$$

ازمجموع این دو برابری، به‌دست می‌آید:

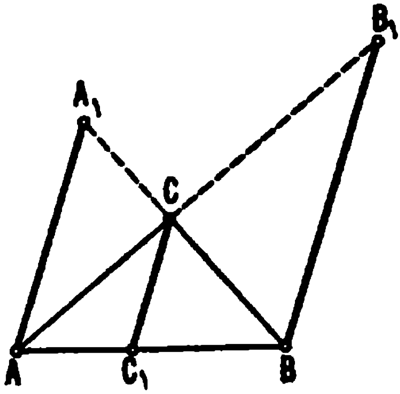
$$\frac{CC_1}{BB_1}+\frac{CC_1}{AA_1}=\frac{AC_1+C_1B}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$$

که با تقسیم دوطرف برابری اخیر، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{BB_1}+\frac{1}{AA_1}=\frac{1}{CC_1}$$

یادداشت. اگر a و b دو عدد مثبت باشند و داشته باشیم:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$$



شکل ۴۱

(یعنی، عکس‌عدد c، واسطهٔ حسابی عکس‌های دوعدد a و b باشد)، c را واسطهٔ توافقی دوعدد a و b گویند.

قضیه‌ای که دراین جا، درمسألهٔ ۳۶، ثابت کردیم، به این معناست که: پاره‌خطی که از نقطهٔ برخورد قطرهای یك ذوزنقه موازی دوقاعدهٔ موازی آن رسم شود و به دو ساق محدود باشد. واسطهٔ توافقی بین دو قاعدهٔ ذوزنقه است.

۱۹۰۶

۳۷. راه حل اول. دواتحاد زیر روشن‌اند:

$$\sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

اگر $tg\frac{\alpha}{2}$ برابر عددگویای $\frac{m}{n}$ باشد (m و n، عددهایی درست و $n\neq 0$)، آن وقت، $tg\frac{\alpha}{2}$ وقتی معین است که داشته‌باشیم $\alpha\neq(2k+1)\pi$، یعنی $\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$. بنابراین، می‌توانیم صورت ومخرج هریك ازکسرهای بالا

را، بر $cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}$ تقسیم کنیم؛ در این صورت، به‌دست می‌آید:

$$sin\alpha=\frac{۲\,tg\frac{\alpha}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}},\quad cos\alpha=\frac{۱-tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}}{۱+tg^{۲}\frac{\alpha}{۲}} \qquad (۱)$$

که اگر در آن‌ها، $tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{m}{n}$ را قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$sin\alpha=\frac{۲mn}{m^{۲}+n^{۲}},\quad cos\alpha=\frac{n^{۲}-m^{۲}}{m^{۲}+n^{۲}}$$

صورت و مخرج، در هر دو کسر ، عددهایی درست‌اند؛ بنابراین $sin\alpha$ و $cos\alpha$ عددهایی گویا هستند.

در حالت $\alpha=(۲k+۱)\pi$ ، $tg\frac{\alpha}{۲}$ معین نیست، ولی به دست می‌آید:

$cos\frac{\alpha}{۲}=۰$ و $sin\frac{\alpha}{۲}=\pm۱$ و، بنابراین، با توجه به رابطه‌های

$$sin\alpha=۲sin\frac{\alpha}{۲}cos\frac{\alpha}{۲},\quad cos\alpha=cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}-sin^{۲}\frac{\alpha}{۲}$$

خواهیم داشت. $sin\alpha=۰$ و $cos\alpha=-۱$.

برای اثبات عکس، می‌توان از رابطهٔ

$$tg\frac{\alpha}{۲}=\frac{sin\alpha}{۱+cos\alpha} \qquad (۲)$$

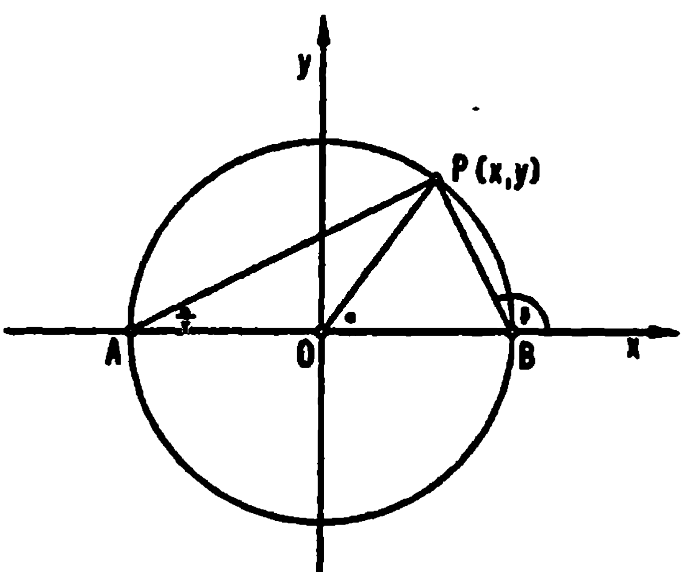
استفاده کرد که، با توجه به شرط $cos\alpha\neq-۱$ $(\alpha\neq(۲k+۱)\pi)$، همیشه برقرار است. رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که اگر $sin\alpha$ و $cos\alpha$ عددهایی گویا باشند، $tg\frac{\alpha}{۲}$ هم عددی گویاست.

راه‌حل دوم. نقطهٔ P را بر محیط دایرهٔ واحد (دایرهٔ به‌شعاع ۱) درنظر می‌گیریم؛ اگر (x, y) مختصات این نقطه باشد، داریم: $x = \cos\alpha$ و $y = \sin\alpha$. $A(-1, 0)$ را به P وصل می‌کنیم [روشن است که، با توجه به‌شرط $\alpha \neq (2k+1)\pi$، این دو نقطه بر هم منطبق نیستند]. چون $\widehat{POB} = \alpha$، پس $\widehat{PAO} = \frac{\alpha}{2}$. علاوه بر این، زاویهٔ APB قائمه است (زاویهٔ محاطی روبه‌رو به‌قطر). بنابراین، اگر زاویهٔ بین BP وجهت مثبت محور x را β بنامیم، داریم:

$$m_{AP} \cdot m_{BP} = -1 \Rightarrow tg\beta \cdot tg\frac{\alpha}{2} = -1 \Rightarrow tg\beta = -\frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}$$

(منظور m_{AP} و m_{BP}، ضریب زاویه‌های دوخط راست AP و BP است.)

رابطهٔ اخیر نشان می‌دهد که، اگر $tg\frac{\alpha}{2}$ گویا باشد، ضریب زاویه‌های خط‌های راست AP و BP، عددهایی گویا هستند. بنابراین، چون مختصات دونقطهٔ A و B، عددهایی گویا هستند، نقطهٔ P، یعنی نقطهٔ برخورد دوخط راست



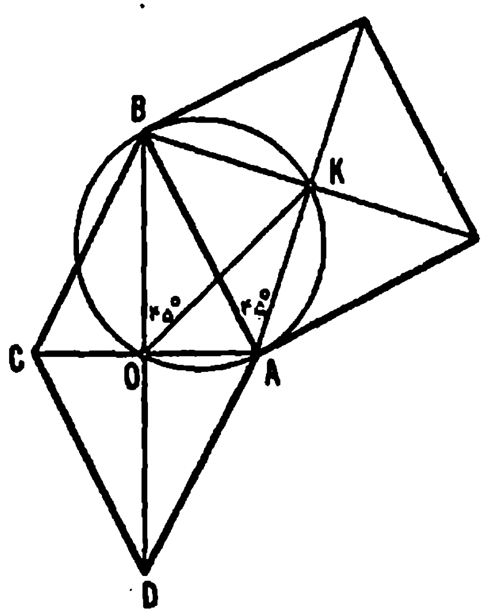
شکل ۴۲

AP و BP هم، مختصاتی گویا دارد.

در حالت $\alpha=(۲k+۱)\pi$، نقطهٔ P بر A منطبق می‌شود و بنابراین بازهم $x=cos\alpha=-۱$ و $y=sin\alpha=۰$ عددهایی گویا هستند.

برعکس، اگر $cos\alpha$ و $sin\alpha$، عددهایی گویا باشند، به‌معنای آن است که P، مختصاتی گویا دارد (با شرط $\alpha\neq(۲k+۱)\pi$)، دراین صورت، با توجه به گویا بودن مختصات A، ضریب زاویهٔ خط راست AP، یعنی $tg\frac{\alpha}{۲}$، عددی گویا می‌شود.

۳۸. راه حل اول. چهارمربعی که روی ضلع‌های لوزی و در بیرون آن رسم شوند، نسبت به‌قطرهای لوزی قرینهٔ یکدیگرند. چون قطرهای لوزی برهم‌عمودند و چون نقطه‌های K، L، M و N روی قطرها نیستند، بنابراین، چهارضلعی $KLMN$ مستطیلی است که، مرکز آن، در نقطهٔ O محل برخورد قطرهای لوزی است (شکل ۴۳). برای این که، این مستطیل، مربع باشد، باید ثابت کنیم که قطرهای آن برهم عمودند ویا، هم‌ارز آن، باید ثابت کنیم، پاره‌خط راست KO با هر یك از دو قطر لوزی، زاویه‌ای برابر ۴۵ درجه

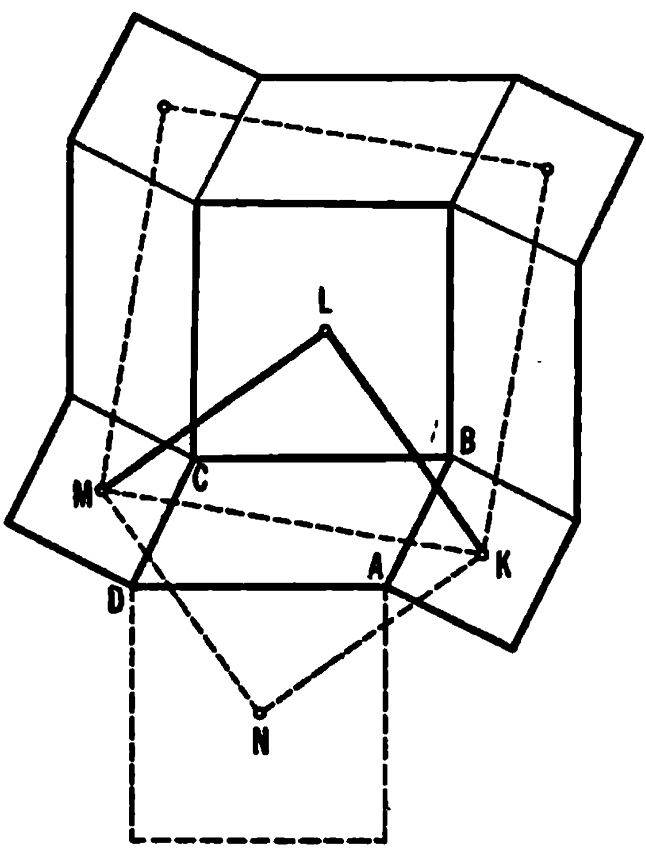


شکل ۴۳

می‌سازد. چون دو زاویهٔ AOB و AKB قائمه‌اند، چهارضلعی $AKBO$ قابل محاط در دایره‌ای به قطر AB است. K مرکز مستطیل است و $KB=KA$، بنابراین $\widehat{BAK}=۴۵^\circ$. زاویهٔ BOK هم که روبه‌رو کمان BK است، برابر ۴۵ درجه می‌شود.

راه حل دوم. مسأله، نه‌تنها برای لوزی، بلکه برای هرمتوازی‌الاضلاع $ABCD$ درست است (شکل ۴۴).

مربعی را در نظرمی گیریم که روی ضلع BC از متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ساخته شده است؛ روی هرضلع این مربع، متوازی الاضلاعی برابر با متوازی‌الاضلاع $ABCD$ رسم می کنیم. هردو پاره‌خطی که از یك رأس مربع خارج شده‌اند، باهم برابر و برهم عمودند، بنابراین، آن‌ها را می‌توان



شکل ۴۴

دوضلع مجاور یك مربع به حساب آورد؛ این چهار مربع را (متصل به‌چهار رأس مربع‌ضلع BC) کامل می‌کنیم. اگر شکل حاصل را، دورنقطهٔ L به‌اندازهٔ ۹۰ درجه و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، نقطهٔ K (مرکز مربع روی ضلع AB) برنقطهٔ M (مرکزمربع‌روی ضلع CD) منطبق‌می‌شود یعنی‌مثلث KLM، قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است. اکنون، اگر این‌مثلث را به اندازهٔ ۱۸۰ درجه، دور مرکز متوازی‌الاضلاع دوران دهیم، بر مثلث MNK منطبق می‌شود. بنابراین، $KLMN$، یك مربع است.

۳۹. راه حل اول. ثابت می‌کنیم، دراین‌حاصل‌ضرب، دست‌کم یکی‌از پرانتزها زوج است. n، عددی فرد است و می‌توانیم آن را، به صورت $n=2k+1$ بنویسیم (k عددی است درست). حاصل ضرب مورد نظر، $2k+1$ عامل دارد و، بنابراین، ازبین عددهای ۱، ۲، ...، $2k+1$، درست $(k+1)$ عدد، فرد است. چون a_i ها نیز همان عددهای از ۱ تا $2k+1$ هستند دربین‌آن‌هم، $(k+1)$ عدد فرد وجود دارد. به این ترتیب، روی هم، بین $2n$ عدد

$$1، 2، \dots، n \text{ و } a_1، a_2، \dots، a_n$$

$2(k+1)$، یعنی $n+1$ عدد فرد پیدا می‌شود. ولی در ضرب‌ما، تنها nعامل وجود دارد، بنابراین دست‌کم، یکی از پرانتزها، شامل دوعدد فرد است که درنتیجه، تفاضل آن‌ها، عددی زوج می‌شود.

یادداشت. اصل دیریکله‌یااصل لانهٔ‌کبوتری. راه‌حلی که‌دراین‌جا آوردیم، از اصل بسیار مفید زیر، استفاده کرده است:

اگر بیش از ۳ شیء داشته باشیم وبخواهیم آن‌ها را در ۳ جعبه تقسیم کنیم، دست‌کم در یکی ازجعبه‌ها، بیش از یك شیء خواهیم داشت. و به‌طورکلی: اگر m شیء داشته باشیم و بخواهیم آن‌ها را در n محل توزیع کنیم و بدانیم $m>n$، دست‌کم در یکی از محل‌ها، بیش از یك شیء خواهیم داشت.

راه حل دوم. تعداد پرانتزها فرد ومجموع آن‌ها برابر صفر است. صفر

عددی است زوج؛ و اگر همهٔ پرانتزها، عددهایی فرد باشند، مجموع آن‌ها نمی‌تواند عددی زوج بشود. به این ترتیب، دست کم یکی از پرانتزها باید زوج باشد که، در نتیجه، حاصل‌ضرب آن‌ها، عددی زوج می‌شود.

۱۹۵۷

۴۰. a) x نمی‌تواند عدد فرد درستی باشد، زیرا با فرد بودن x، عدد x^2 عددی فرد می‌شود و چون $2px+2q$ عددی است زوج، مجموع $x^2+2px+2q$، برابر عددی فرد می‌شود و نمی‌تواند برابر عدد زوج صفر باشد.

b) با فرض فرد بودن دو عدد p و q، مقدار x نمی‌تواند عددی زوج باشد. زیرا با فرض زوج بودن x، عدد x^2+2px، مضربی از ۴ می‌شود، در حالی که $2q$ مضربی از ۴ نیست، در نتیجه، حاصل $(x^2+2px)+2q$ نمی‌تواند برابر صفر باشد.

c) معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$(x+p)^2=p^2-2q \qquad (1)$$

در (a) و (b) دیدیم که، با شرط فرد بودن p و q، مقدار x نمی‌تواند عدد درستی باشد. اکنون می گوییم، x عدد گویا (و نادرست) هم نیست. با فرض گویا بودن x سمت چپ برابری (۱)، عددی گویا ولی نادرست است (زیرا x، عدد درستی نیست)، در حالی که سمت راست آن، عددی است درست.

یادداشت. معادله‌های با ضریب‌های درست. در پایان راه حل مسأله، از این مطلب استفاده کردیم که، اگر با کسری گویا و نادرست سروکار داشته باشیم، مجذور آن نمی‌تواند عددی درست باشد. این حکم، حالت خاصی است از قضیهٔ بسیار زیبای جبر:

قضیه. اگر معادله‌ای، با ضریب‌های درست و ضریب بزرگترین درجهٔ واحد باشد، نمی‌تواند ریشه‌ای به صورت $\frac{p}{q}$ داشته باشد [p و q نسبت به هم اول‌اند:

.[$(p, q)=1$]

اثبات. این معادله را، با ضریب‌های درست، درنظر می‌گیریم:

$$x^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$$

اگر معادلهٔ (۱)، ریشه‌ای برابر $\frac{p}{q}$ داشته باشد (p و q، نسبت به‌هم اول‌اند)، باید داشته باشیم:

$$p^n=-q(bp^{n-1}+cqp^{n-2}+\dots+kq^{n-1}p+lp^{n-1})$$

طرف دوم برابری، بر q بخش‌پذیر است و، بنابراین، p^n و در نتیجه p هم باید بر q بخش‌پذیر باشد، ولی $(p, q)=1$ و p بر q بخش‌پذیر نیست،یعنی $\frac{p}{q}$ برای $q\neq 1$، نمی‌تواند ریشه‌ای از معادلهٔ (۱) باشد.

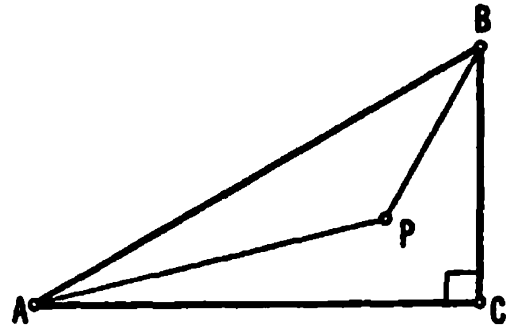
به این ترتیب، اگرمعادلهٔ (۱) دارای ریشهٔگویا باشد، این ریشه حتماً عددی‌درست است. درضمن، این ریشهٔ درست مقسوم علیهی (مثبت یا منفی) از مقدار ثابت l است. در واقع، اگرعدد درست α را ریشه‌ای ازمعادلهٔ(۱) بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$\alpha(\alpha^{n-1}+b\alpha^{n-2}+c\alpha^{n-3}+\dots+k)=-l$$

و روشن است که باید l بر α بخش‌پذیر باشد.

۴۱. راه‌حل اول. متوازی‌الاضلاع، نسبت به‌مرکز خود (محل برخورد قطرها) متقارن است. بنابراین، می‌توانیم نقطهٔ P را در داخل یا روی محیط مثلث ABC در نظر بگیریم. در واقع، اگر P در داخل مثلث ADC باشد، به‌علت برابر بودن دو مثلث ADC و ABC، می‌توانستیم دایره‌ای با همان شعاع R را محیط برمثلث ADC رسم کنیم. با تعویض نقطه‌های B و D، در مسأله تغییری حاصل نمی‌شود.

به‌این ترتیب، مسألهٔ ۴۱، به این صورت در می‌آید: فاصلهٔ هر نقطهٔ P واقع در داخل یا روی‌محیط‌یک‌مثلث، از نزدیک‌ترین رأس، نمی‌تواند بزرگتر از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث باشد.



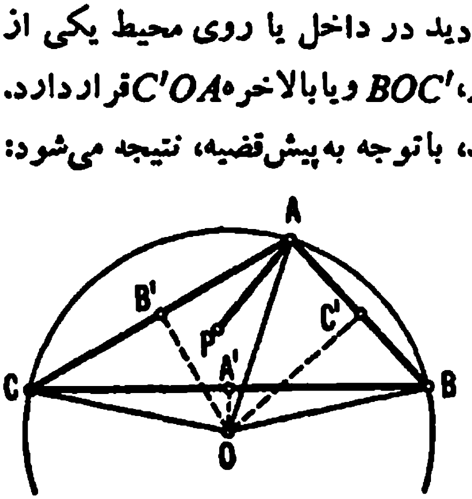
شکل ۴۵

اثبات، بر اساس پیش قضیه زیر قرار دارد: اگر P، نقطه‌ای واقع در داخل یا روی محیط یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، آن وقت، فاصلهٔ نقطهٔ P از هر انتهای وتر، از طول وتر تجاوز نمی‌کند.

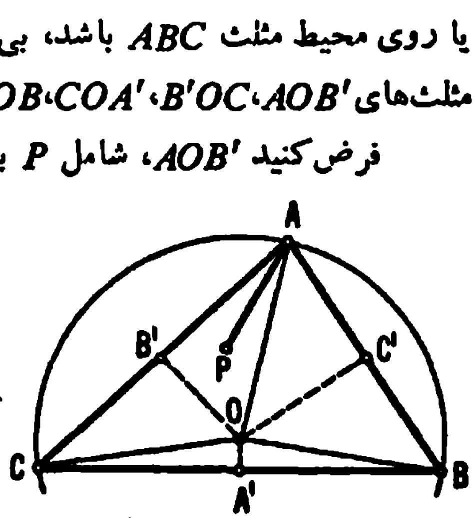
در حالتی که P روی وتر باشد، درستی حکم واضح است. P را، داخل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC (شکل ۴۵) یا روی یکی از ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ مثلث می‌گیریم. در این صورت $\widehat{APB}$، بزرگترین زاویه در مثلث ABP خواهد بود و، بنابراین، ضلع AB (که رو به‌رو به‌زاویه بزرگتر است) از هرکدام از دوضلع AP و BP بزرگتر می‌شود.

اکنون، به اثبات قضیهٔ خودمان می‌پردازیم. O را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گیریم (شکل‌های ۴۶ و ۴۷) و تصویرهای نقطهٔ O را بر ضلع‌های BC، AC و AB، به ترتیب، A'، B' و C' می‌نامیم. وقتی نقطهٔ P در داخل یا روی محیط مثلث ABC باشد، بی تردید در داخل یا روی محیط یکی از مثلث‌های AOB'، $B'OC$، COA'، $A'OB$، BOC' و یا بالاخره $C'OA$ قرار دارد.

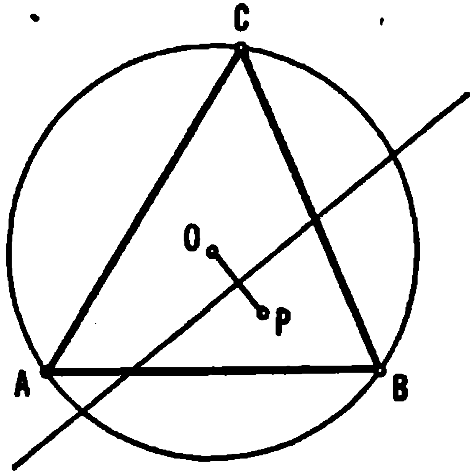
فرض کنید AOB'، شامل P باشد، با توجه به پیش‌قضیه، نتیجه می‌شود:



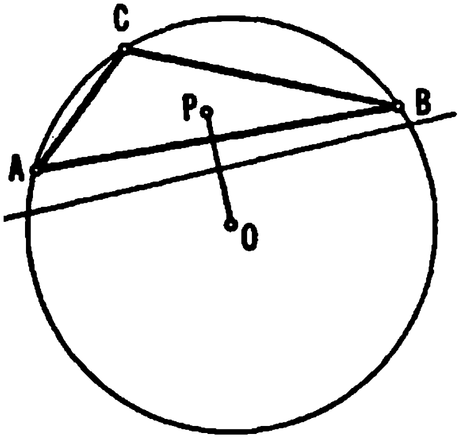
شکل ۴۷



شکل ۴۶



شکل ۴۸



شکل ۴۹

$AP \leqslant AO = R$.

راه‌حل دوم. P را در داخل یا روی محیط مثلث ABC می‌گیریم. هر خط راستی از صفحهٔ مثلث، که از نقطهٔ P نگذرد، صفحه را به دو نیم‌صفحه تقسیم می‌کند: یکی از این دو نیم‌صفحه شامل P است و دیگری شامل P نیست. نیم‌صفحهٔ شامل P، دست‌کم یکی از رأس‌های مثلث ABC را در برمی‌گیرد.

مسأله، برای حالتی که P بر O منطبق باشد، روشن است. فرض می‌کنیم $P \neq O$. عمود منصف پاره خط PO را رسم می‌کنیم (شکل‌های ۴۸ و ۴۹). هر نقطه‌ای که در نیم‌صفحهٔ شامل P باشد، به P نزدیک‌تر است تا به O و، روشن است، که این حکم، در مورد رأسی از مثلث هم، که در این نیم‌صفحه واقع است، صادق است.

۴۲. روشن است که عدد

$$۰/k_۱k_۲\dots k_m = \frac{k_۱}{۱۰} + \frac{k^۲}{۱۰^۲} + \dots + \frac{k_m}{۱۰^m}$$

از $\frac{r}{s}$ بزرگتر نیست؛ ولی اگر $\frac{۱}{۱۰^m}$ را به آن اضافه کنیم، از $\frac{r}{s}$ بزرگتر می‌شود:

$$۰ \leqslant \frac{r}{s} - \left(\frac{k_۱}{۱۰} + \frac{k_۲}{۱۰^۲} + \dots + \frac{k_m}{۱۰^m}\right) < \frac{۱}{۱۰^m} \qquad (۱)$$

مثلاً اگر فرض کنیم: $\frac{r}{s}=$ ۰/۲۳۵۷۹۶...، داریم:

$$۰ \leqslant ۰/۲۳۵ \leqslant ۰/۲۳۵۷۹۶... < ۰/۲۳۶$$

و بنابراین ۰/۰۰۱ > ...۰/۰۰۰۷۹۶ $\leqslant$ ۰.

اگر همهٔ جمله‌های (۱) را در ۱۰^m ضرب کنیم، به دست می‌آید:

$$۰ \leqslant \frac{۱۰^m r - s(۱۰^{m-۱}k_۱ + ۱۰^{m-۲}k_۲ + \dots + k_m)}{s} = \sigma_m < ۱$$

بنابراین، صورت کسر σ_m، عددی است درست و کوچکتر از s؛ یعنی، یکی از این عددهاست:

$$۰، ۱، ۲، \dots، s-۱$$

به این ترتیب، اگر تعداد σ_iها را بیشتر از s بگیریم، مثلاً در بین

$$\sigma_۱، \sigma_۲، \dots، \sigma_s، \sigma_{s+۱}$$

بنابر اصل دیریکله (یادداشت پایان راه حل اول مسألهٔ ۳۹ را ببینید)، دست‌کم، دوتا از آن‌ها، باهم برابر می‌شوند.

۱۹۵۸

۴۳. a) اگر $A=a^۲+ab+b^۲$ و $B=a-b$ بگیریم، آن‌وقت $a^۳-b^۳=A.B$. روشن است که اگر B بر ۲^n بخش‌پذیر باشد، $A.B$ هم بر آن بخش‌پذیر خواهد بود.

b) $A=a^۲+ab+b^۲$، به‌عنوان مجموع سه‌عددفرد، خودعددی‌فرد است. بنابراین، A نمی‌تواند بر ۲^n بخش‌پذیر باشد: $(A، ۲^n)=۱$. یعنی ۲^n تنها وقتی می‌تواند $A.B$ را بشمارد که B بر ۲^n بخش‌پذیر باشد (یادداشت ۳ در پایان حل مسألهٔ ۲۲ را ببینید).

۴۴. طول وتر، درمثلث قائم‌الزاویه، ازطول هر ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه بزرگتراست: $c>a$ و $c>b$، ازاین دونابربری، برای هرعدد درست و مثبت k به‌دست می‌آید:

$$c^k > a^k ، c^k > b^k$$

با توجه به قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$c^n = c^2 \cdot c^{n-2} = (a^2 + b^2) \cdot c^{n-2} a^2 c^{n-2} + b^2 c^{n-2}$$

که اگر به‌جای c^{n-2}، مقدارهای کوچکتر a^{n-2} و b^{n-2} را قراردهیم، به‌دست می‌آید:

$$c^n = a^2 c^{n-2} + b^2 c^{n-2} > a^2 \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot b^{n-2} = a^n + b^n$$

یعنی:

$$c^n > a^n + b^n$$

۴۵. به شکل ۵۵ توجه کنید. قطر IOD با ضلع AB از ده‌ضلعی ساده و با ضلع HE از ده‌ضلعی ستاره‌ای، موازی است. به‌همین ترتیب، قطر BOC با ضلع‌های DE و AH موازی است. بنابراین، چهار ضلعی‌های $ABOK$ و $DEHK$ متوازی‌الاضلاع‌اند و داریم:

$$AB = KO \text{ و } HE = KD$$

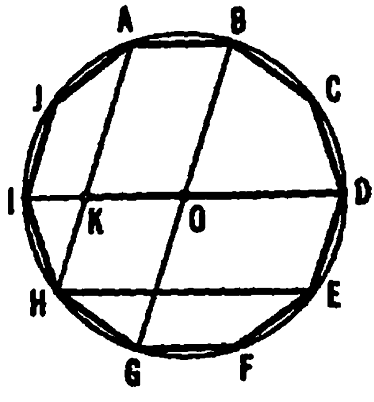
یعنی

$$HE - AB = KD - KO = OD$$

که همان شعاع دایرهٔ محیطی ده‌ضلعی است.

۱۹۵۹

۴۶. سه عدد درست متوالی را $n-1$ ، n و $n+1$ می‌گیریم.



شکل ۵۵

اگر معادلهٔ

$$(n+1)^3=n^3+(n-1)^3$$

برقرار باشد، باید داشته باشیم:

$$n^2(n-6)=2$$

این برابری، تنها برای $n>6$ می‌تواند بر قرار باشد، ولی به ازای $n>6$ به‌دست می‌آید: $n^2(n-6)>36$، یعنی نمی‌تواند برابر ۲ باشد.

یادداشت. حدس فرما. این مسأله، حالت خاص و ساده‌ای از قضیهٔ کلی زیر است که به‌وسیلهٔ فرما داده شده‌است: $n>2$ را عددی درست فرض می‌کنیم؛ دراین صورت، معادلهٔ $x^n+y^n=z^n$، برای عددهای درست و مثبت (x, y, z) جواب ندارد.

تاسال ۱۹۶۱، ثابت شده‌است که، این‌قضیه، برای همهٔ مقدارهای اول $n>4002$ درست است. ولی، باهمهٔ تلاش ریاضی‌دانان، هنوز به‌قضیهٔ فرما در حالت کلی، جواب داده نشده است. تنها حالت‌های خاصی از این قضیه، مثل مسألهٔ ۴۶، و یا قضیهٔ زیر ثابت شده‌اند:

اگر $n>1$ عددی فرد و x و y و z جمله‌هـای متوالی از یك تصاعد حسابی باشند، معادلـهٔ $x^n+y^n=z^n$، برای عددهای درست x و y و z، جواب ندارد.

اگر قدرنسبت تصاعد را d بگیریم، داریم:

$$x=y-d, \quad z=y+d$$

(y و d، عددهایی مثبت‌اند و $y>d$). بنابراین، معادلهٔ مفروض، به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$(y-d)^n+y^n=(y+d)^n \qquad (1)$$

اگر دوطرف این معادله را بر d^n تقسیم کنیم و $t=\frac{y}{d}$ قرار دهیم، بـه دست می‌آید:

$$(t-1)^n+t^n=(t+1)^n.$$

پرانتزها را باز می‌کنیم:

$$t^n-C_n^1t^{n-1}+C_n^2t^{n-2}-\ldots-1+t^n=$$
$$=t^n+C_n^1t^{n-1}+C_n^2t^{n-2}+\ldots+1$$

از این‌جا، معادلهٔ زیر، برای مجهول گویای $t=\frac{y}{d}$ به‌دست می‌آید:

$$t^n-2C_n^1t^{n-1}-2C_n^3t^{n-3}-\ldots-2=0 \qquad (2)$$

ضریب بزرگترین درجهٔ مجهول، در این معادلـه، برابر واحد و بقیهٔ ضریب‌ها برابرعددهای درستی هستند؛ بنابراین، هر ریشهٔ گویای این معادله، عددی درست است (یادداشت پایان حـل را در مسألهٔ ۴۰ ببینید). ولی این معادله، نمی‌تواند ریشه‌ای درست داشته باشد، زیرا همهٔ جمله‌های آن، به‌جز جملهٔ اول، مضربی از ۲ هستند؛ بنابراین t باید مضربی از ۲ باشد. ولی اگر t عددی‌زوج باشد، همهٔ جمله‌های معادله، به‌جز مقدار ثابت آن، بر۴ بخش‌پذیرند؛ به‌این ترتیب، معادلهٔ (۲)، ریشهٔ گویا ندارد، یعنی معادلهٔ (۱) بـه‌ازای هیچ عدد درستی برای y، برقرار نیست.

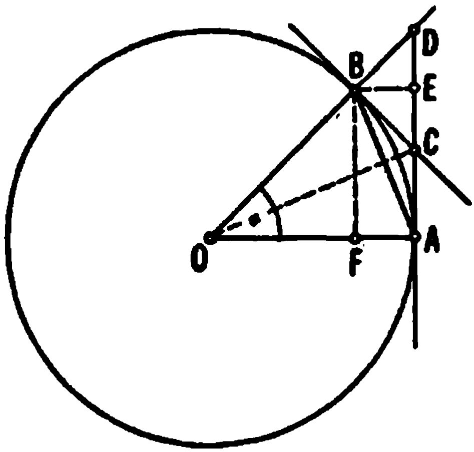
۴۷. راه حل اول. باید ثابت کنیم:

$$\varphi<\frac{1}{2}(\sin\varphi+tg\varphi)$$

AOB را زاویه‌ای حاده در دایره‌ای به‌شعاع واحد می‌گیریم:

$$\widehat{AB}<\frac{\pi}{2}.$$

C را نقطهٔ برخورد مماس‌های بـر دایره، در نقطه‌های A و B، و D را نقطهٔ برخورد امتدادهای خط‌های راست AC و OB فرض می‌کنیم (شکل ۵۱). اگر کمان AB را برحسب رادیان برابر φ فرض کنیم، مساحت قطاع AOB



شکل ۵۱

برابر $\frac{1}{2}\varphi$ و مساحت مثلث‌های AOB و AOD، به ترتیب، برابر $\frac{1}{2}sin\varphi$ و $\frac{1}{2}tg\varphi$ می‌شوند. اگر بتوانیم ثابت کنیم:

$$S_{AOB\text{قطاع}}<\frac{1}{2}(S_{\Delta AOB}+S_{\Delta AOD}) \qquad (1)$$

در این صورت، مسأله حل شده است.

به‌جای نابرابری (۱)، نابرابری زیر را، که قوی‌تر از آن است، ثابت می‌کنیم:

$$S_{OACB}<\frac{1}{2}(S_{AOB}+S_{AOD}) \qquad (2)$$

(مساحت چهار ضلعی $OACB$ از مساحت قطاع AOB بیشتر است).

نابرابری (۲)، به سادگی، به این نابرابری تبدیل می‌شود:

$$S_{OACB}-S_{AOB}<S_{AOD}-S_{OACB}$$

که با توجه به شکل ۵۱، با نابرابری زیر هم‌ارز است:

$$S_{ACB}<S_{CDB} \qquad (3)$$

اگر E را پای عمود وارد از نقطهٔ B بر خط راست AD بگیریم،

پاره‌خط راست BE، ارتفاع مشترك دو مثلث می‌شود. بنابراین، نابرابری (۳)، هم‌ارز است با نابرابری $AC<CD$.

این نابرابری همیشه برقرار است، زیرا CD وتر، و BC ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمه درمثلث قائم‌الزاویهٔ CDB هستند و، درضمن $BC=AC$.

راه‌حل دوم. دراین راه‌حل، نابرابری، قوی‌تر ازنابرابری صورت مسأله ثابت می‌کنیم: اندازهٔ هرزاویهٔ حاده به‌رادیان، از واسطهٔ توافقی سینوس و تانژانت آن کوچکتر است.

واسطهٔ توافقی دوعدد مثبت، همیشه، از واسطهٔ حسابی آن‌ها کوچکتر است (یادداشت پایان حل را ببینید) و، به همین مناسبت، اگر بتوانیم ثابت کنیم:

$$\varphi<\frac{۱}{\frac{۱}{\sin\varphi}+\frac{۱}{tg\varphi}}$$

به خودی خود، نابرابری موردنظر مسأله، ثابت می‌شود. داریم:

$$\frac{۲}{\frac{۱}{\sin\varphi}+\frac{۱}{tg\varphi}}=\frac{۲\sin\varphi}{۱+\cos\varphi}=\frac{۴\sin\frac{\varphi}{۲}\cos\frac{\varphi}{۲}}{۲\cos^{۲}\frac{\varphi}{۲}}=۲tg\frac{\varphi}{۲}$$

بنابراین، باید ثابت کنیم: $\varphi<۲tg\frac{\varphi}{۲}$.

در راه‌حل اول مسأله دیدیم که مساحت قطاع AOB از مساحت چهارضلعی $OACB$ کوچکتر است و اگر توجه کنیم که مساحت چهارضلعی $OACB$ دوبرابر مساحت مثلث AOC است، به‌سادگی به‌دست می‌آید:

$$\frac{\varphi}{۲}<۲\times\frac{۱}{۲}tg\frac{\varphi}{۲}=tg\frac{\varphi}{۲}$$

و یا $\varphi<2tg\frac{\varphi}{2}$.*

یادداشت. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که واسطهٔ حسابی دو عدد مثبت a و b، همیشه از واسطهٔ توافقی آن‌ها بزرگتر است. درواقع، داریم:

$$\frac{a+b}{2}-\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{a+b}{2}-\frac{2ab}{a+b}=$$

$$\frac{(a+b)^2-4ab}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

نتیجه، برای a و b مثبت، مقداری است مثبت برای $a=b$ برابر صفراست، بنابراین

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

۴۸. درحالتی که مثلث قائم‌الزاویه باشد، مثلث ارتفاعیه به‌وجود نمی‌آید (تبدیل به‌یك پاره‌خط می‌شود).

در دوحالتی‌هم که مثلث با زاویه‌های حاده یا یك زاویهٔ منفرجه باشد مسأله بــه طور کامل، ضمن حــل مسألهٔ ۹ (مسألــهٔ سوم سال ۱۸۹۶) حل شده است.

۱۹۱۰

۴۹. با توجه به‌شرط $a^2+b^2+c^2=1$، نابرابری‌های مجهول را،

---

*) درواقع، ازاین‌حقیقت که مثلث AOB در داخل قطاع OAB، وقطاع OAB در داخــل مثلث AOD قــرار دارد، می‌تــوان نتیجه‌گــرفت‌کــه، بــرای هر $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ داریم،

$$\sin\varphi<\varphi<tg\varphi$$

می‌توان این‌طور نوشت:

$$-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\leqslant ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$$

و یا $-(a^2+b^2+c^2)\leqslant 2(ab+bc+ca)\leqslant 2(a^2+b^2+c^2)$

و این نابرابری‌ها برقرارند، زیرا درمورد نابرابری‌های سمت چپ وسمت، راست به‌ترتیب داریم:

$$2(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2\geqslant 0;$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geqslant 0$$

۵۰. راه‌حل اول. از اتحاد

$$(bc-ad)^2=(bc+ad)^2-4abcd$$

نتیجه می‌شود:

$$\left(\frac{bc-ad}{u}\right)^2=\left(\frac{bc+ad}{u}\right)^2-4\times\frac{ac}{u}\cdot\frac{bd}{u} \qquad (1)$$

سمت راست برابری (۱) عددی است درست، زیـرا $bc+ad$، ac و bd بر u بخش‌پذیرند. بنابراین، سمت چپ برابری هم عددی درست می‌شود، یعنی $bc-ad$ هم بر u بخش‌پـذیر است. از طرف دیگر، باتوجه به‌همین برابری (۱)، تفاضل مجذورهای دوعدد $s=\frac{bc+ad}{u}$ و $t=\frac{bc-ad}{u}$ عددی است زوج، پس s و t هـر دو زوج یا هـر دو فردنـد و، بنابراین، $\frac{bc}{u}=\frac{s+t}{2}$ و $\frac{ad}{u}=\frac{s-t}{2}$، عددهـایی درست‌اند، یعنی bc و ad بـر u بخش‌پذیرند.

راه‌حل‌دوم. می‌دانیم، هرعدد درست مثبت را، به‌یك‌طریق و تنها به‌یك

طریق می‌توان به‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کرد. بنابراین، اگر فرض کنیم:

$$u = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

آن‌وقت، u بر $p_i^{\alpha_i}$ بخش‌پذیر است، درحالی‌که بر $p_i^{\alpha_i+1}$ بخش‌پذیر نیست. وقتی هرکدام از عددهای

$$ac، \quad bc+ad، \quad bd \qquad (1)$$

بر u بخش‌پذیر باشند، آن‌وقت، حاصل‌ضرب دوعدد bc و ad، باید شامل توانی از p_i باشدکه کمتر از α_i نیست درواقع، اگر فرض‌کنیم p^r یکی‌از عامل‌های u باشد، چون ac، $bc+ad$ و bd مضرب‌هایی از u هستند، باید داشته باشیم:

$$ac = p^r \cdot A، \quad bc+ad = p^r \cdot B، \quad bd = p^r \cdot c \qquad (2)$$

(A،B وC، عددهایی درست‌اند). بنابراین

$$(bc)(ad) = (ac)(bd) = p^{2r} \cdot A \cdot C$$

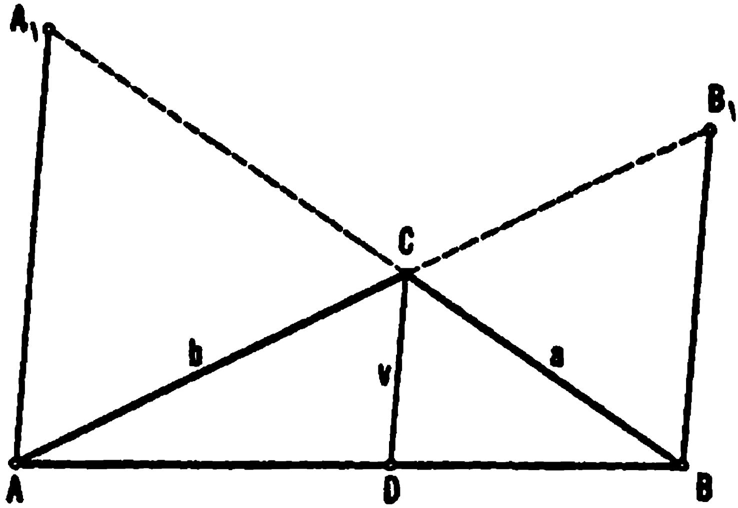
که با توجه به (۲) ، به سادگی روشن می‌شود که هرکدام از عددهای ac و bd باید شامل، دست‌کم، p^r باشند. یعنی، این دو عدد هم بر u بخش‌پذیرند (زیرا، همین استدلال را، در مورد هر عامل اول دیگر u هم، می‌توان تکرار کرد).

۵۱. راه حل اول. v را طول نیمساز CD از زاویهٔ $\widehat{ACB} = \gamma$ در مثلث ABC می‌گیریم (شکل ۵۲). مساحت مثلث ABC برابر است بامجموع مساحت‌های دو مثلث ACD و CDB. یعنی

$$ab\sin\gamma = av\sin\frac{\gamma}{2} + bv\sin\frac{\gamma}{2} = v(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}$$

اگر در این رابطه قرار دهیم: $\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ و،سپس، دوطرف

را بر $2abv\sin\frac{\gamma}{2}$ تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:



شکل ۵۲

$$\frac{1}{v}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{a+b}{2ab}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

که اگر $\gamma=120^\circ$ بگیریم، نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{v}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow v=\frac{ab}{a+b}$$

به‌زبان دیگر، v برابر است با نصف واسطهٔ توافقی دوعدد a و b.

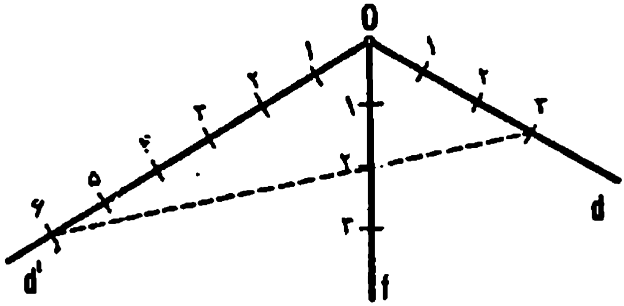
راه‌حل دوم. D را نقطهٔ دلخواهی برضلع AB ازمثلث ABC می‌گیریم. ازنقطه‌های A و B، خط‌های راستی موازی CD رسم می‌کنیم تا امتدادهای BC و AC را، به‌ترتیب، در A_1 و B_1 قطع کنند (شکل ۵۲). باتوجه به‌حل مسالهٔ ۳۶، داریم:

$$\frac{1}{CD}=\frac{1}{AA_1}+\frac{1}{BB_1} \qquad (1)$$

اکنون، اگر $\widehat{ACB}=120^\circ$ و اگر CD نیمساز ACB باشد،

$$\widehat{B_1BC}=\widehat{BCD}=60^\circ,\quad \widehat{BB_1C}=\widehat{DCA}=60^\circ$$

یعنی مثلث BCB_1 و، شبیه آن، ACA_1، متساوی‌الساقین‌اند



شکل ۵۳

$$BB_۱ = BC، \quad AA_۱ = AC$$

درنتیجه، برابری (۱) به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱}{CD} = \frac{۱}{AC} + \frac{۱}{BC} \qquad (۲)$$

که اگر فرض کنیم $CD = v$، رابطهٔ (۲) چنین می‌شود:

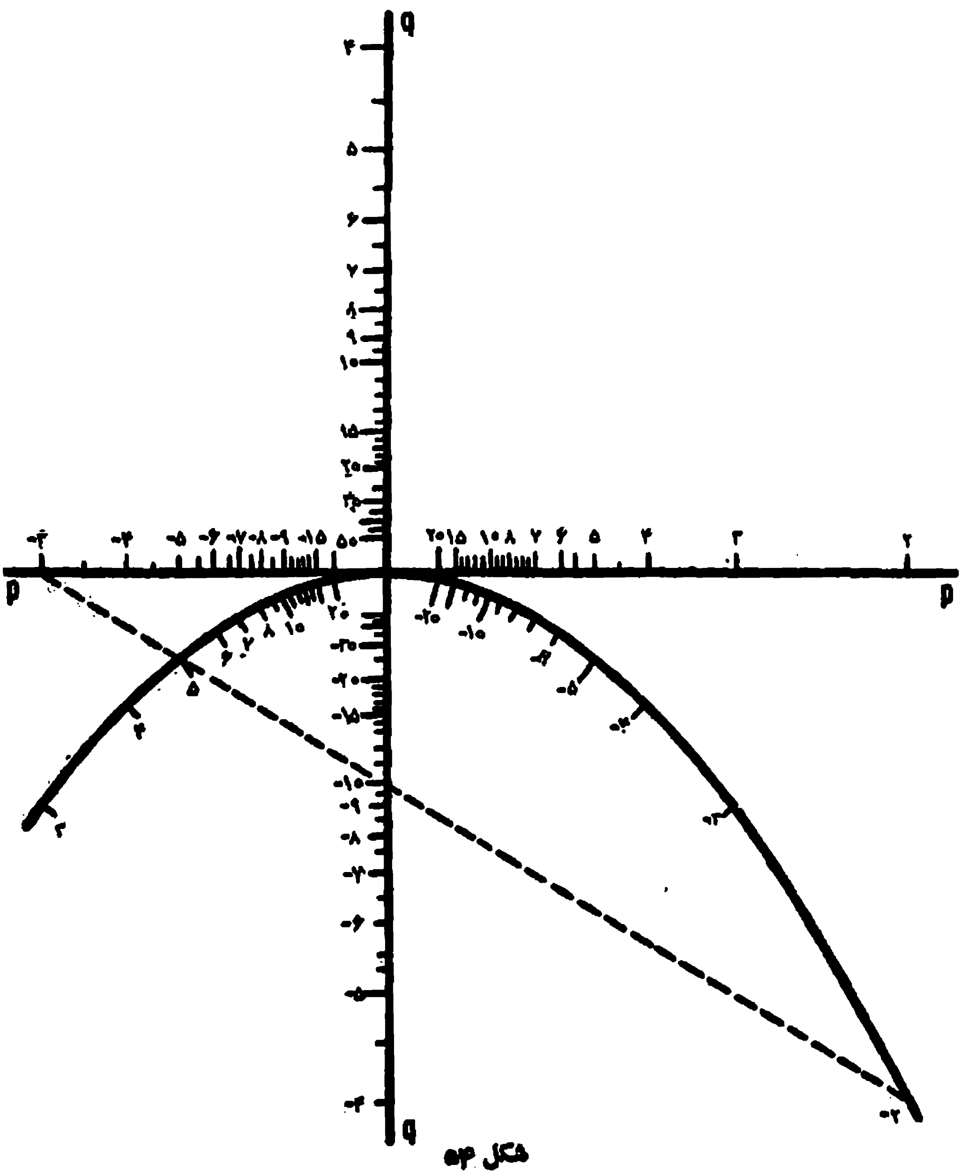
$$\frac{۱}{v} = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} \qquad (۳)$$

یادداشت. دربارهٔ نوموگرافی (nomography). a) معادلهٔ (۳)، کاملاً شبیه معادلهٔ $\frac{۱}{d} + \frac{۱}{d'} = \frac{۱}{f}$ در مبحث نور از فیزیك است‌که، درآن، d فاصلهٔ شیء تا عدسی، d' فاصلهٔ تصویر آن تا عدسی و f فاصلهٔ کانونی عدسی است. بنابراین، مسألهٔ بالا را می‌توان به‌یك مسألهٔ سادهٔ ترسیمی‌تبدیل کرد؛ به‌این‌معنی‌که با در دست داشتن دومقدار ازسه‌مقدار d، d' و f، بتوان مقدار سوم را با روش ترسیمی پیدا کرد.

زاویه‌ای برابر ۱۲۰ درجه به‌رأس نقطهٔ O می‌سازیم. روی ضلع‌های این زاویه، به‌اندازه d و d' را جدا می‌کنیم. اگر انتهای دو پاره‌خطی‌که به‌این‌ترتیب به‌دست‌می‌آید به‌هم وصل کنیم، روی نیمساز زاویهٔ ۱۲۰ درجه، اندازهٔ f را جدا خواهدکرد. درواقع، هریك ازمقدارهای d، d' و f را می‌توان به‌همین‌ترتیب، به‌کمك دو تای دیگر به‌دست آورد. دراین‌گونه موردها، بهتر است شکل را روی‌کاغذ شفاف رسم کنیم.

نوموگرام (nomogram) از ریشهٔ یونانی nomos به‌معنی قانون و grama به‌معنی رسم)، در واقـع، نموداری است کـه، روی‌آن، می‌توان اندازهٔ یك کمیت را خواند، به‌شرطی که‌اندازهٔ کمیت‌های دیگری معلوم‌باشد. نوموگرافی دانشی است که در بارهٔ آماده کردن نوموگرام‌ها صحبت می‌کند.

b) نوموگرام معادلهٔ درجهٔ دوم. درشکل ۵۴، نومـو گرام معادلهٔ درجهٔ دوم $z^۲+pz+q=۰$ رسم‌شده‌است که، به کمك آن‌می‌توان بادردست‌داشتن



شکل ۵۴

p و q، ریشه‌های حقیقی این معادله را نشان کرد. ساختمان این نوموگرام، براساس قانون‌های هندسهٔ تحلیلی انجام گرفته است. می‌دانیم، خط راست

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (1)$$

محورهای مختصات را، به‌ترتیب، در a و b قطع می‌کند. به‌زبان دیگر، معادلهٔ (۱) نشان می‌دهد که نقطه‌های $(a,0)$ ، $(0,b)$ و (x,y) روی یک‌خط راست قرار دارند.

اکنون، معادلهٔ $z^2+pz+q=0$ را، با تقسیم دوطرف آن بر z^2، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$1=-p\frac{1}{z}-q\frac{1}{z^2}=-\frac{p}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{z}-\frac{q}{\beta}\cdot\frac{\beta}{z^2}$$

که در آن، α و β ثابت‌های دلخواهند. این معادله، با معادلهٔ (۱) هم‌ارز است و در آن، a و b و x و y، به‌ترتیب عبارتند از $\frac{\alpha}{p}$ و $\frac{\beta}{q}$ و $-\frac{\alpha}{z}$ و $-\frac{\beta}{z^2}$

به زبان دیگر، این معادله نشان می‌دهد که نقطه‌های $\left(\frac{\alpha}{p},0\right)$، $\left(0,\frac{\beta}{q}\right)$ و $\left(-\frac{\alpha}{z},-\frac{\beta}{z^2}\right)$ روی یک‌خط راست واقع‌اند. اکنون، محور x را برای مقدارهای p و محور y را برای مقدارهای q درنظر می‌گیریم، به‌نحوی که نقطهٔ $\left(\frac{\alpha}{p},0\right)$ معرف p و نقطهٔ $\left(0,\frac{\beta}{q}\right)$ معرف q باشد. دراین‌صورت، نقطهٔ $\left(-\frac{\alpha}{z},-\frac{\beta}{z^2}\right)$ معرف z درصفحه است. مکان هندسی این نقطه‌ها، باحذف z از دو رابطهٔ

$$x=-\frac{\alpha}{z},\quad y=-\frac{\beta}{z}$$

به‌دست می‌آید که سهمی $y=-\frac{\beta}{\alpha^2}x^2$ است. شکل ۵۴، به‌این ترتیب به‌دست

آمده که $\alpha = ۱۲$، $\beta = ۲۴$ و واحد طول ۱ سانتی‌متر گرفته شده است.
مثلاً اگر بخواهیم معادلهٔ $z^۲ - ۳z - ۱۰ = ۰$ را حل کنیم، خط راستی که از $p = -۳$ و $q = -۱۰$ می‌گذرد، معیار z را در $z_۱ = ۵$ و $z_۲ = -۱$ قطع می‌کند.

اگر درمعادلهٔ درجه‌دوم مفروض به‌تقریب داشته باشیم: $p = -۶/۴$ و $q = -۴/۵$، باهمین‌روش به‌تقریب به‌دست می‌آید: $z_۱ = ۵/۵$؛ وچون $z_۱ + z_۲ = ۶/۴$، بنابراین $z_۲ = ۰/۹$ (به‌تقریب).

ازهمین نوموگرام می‌توان برای ضرب عددها هم استفاده کرد. مثلاً، اگر خط راستی رسم کنیم که ازنقطه‌های $z_۱ = -۲$ و $z_۲ = ۵$ بگذرد، روی معیار q، عدد $q = -۱۰$ به‌دست می‌آید.

۱۹۱۱

۵۲. ثابت می‌کنیم، رابطه‌های

$$aC + cA = ۲bB \qquad (۱)$$

$$ac > b^۲ \qquad (۲)$$

$$AC > B^۲ \qquad (۳)$$

باهم ناسازگارند.

از رابطه‌های (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$acAC > b^۲B^۲ \qquad (۴)$$

دوطرف رابطهٔ (۱) را مجذور می‌کنیم:

$$۴b^۲B^۲ = (aC + cA)^۲$$

که، باتوجه به‌نابرابری (۴)، خواهیم داشت:

$$۴acAC > ۴b^۲B^۲ = a^۲C^۲ + ۲acAC + c^۲A^۲$$

ویا

$$۰ > (aC - cA)^۲$$

و این، ممکن نیست، زیرا توان دوم یک عدد، نمی‌تواند منفی باشد.

۵۴- راه اول. Q را نقطه‌ای از کمان P_2P_3 می‌گیریم و پای عمودهای وارد از نقطهٔ Q برخط‌های راست P_1P_5، P_2P_6، P_3P_7 و P_4P_8 را، به‌ترتیب، A، B، C و D می‌نامیم (شکل ۵۵). O، مرکز دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی است.

زاویه‌های QAO، QBO، QCO و QDO قائمه‌اند، بنابراین چهارضلعی $ABCD$ قابل‌محاط در دایرهٔ k به‌قطر OQ است؛ وچون هریک از زاویه‌های AOB، BOC، COD برابر ۴۵ درجه‌اند، چهارضلعی $ABCD$، مربع است.

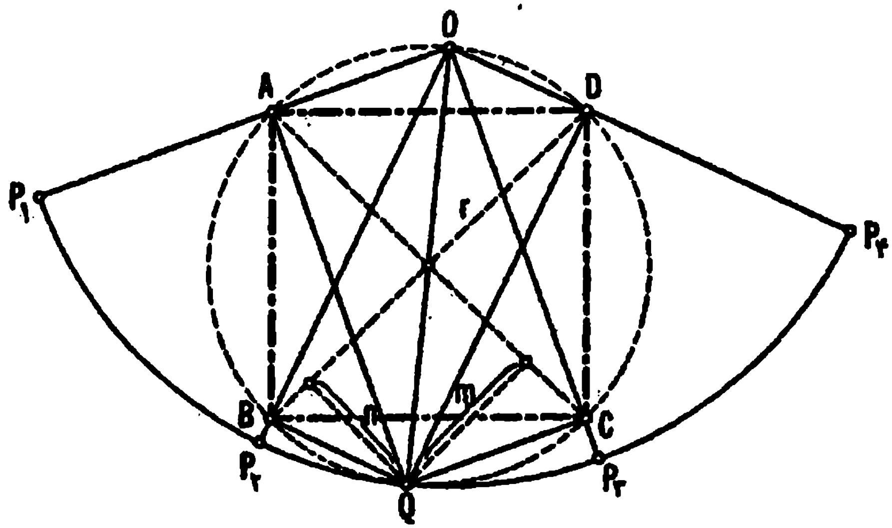
قطر دایرهٔ k برابر است با شعاع دایرهٔ مفروض (دایرهٔ محیطی هشت‌ضلعی)، بنابراین اندازهٔ ضلع مربع $ABCD$، بستگی به‌جای نقطهٔ Q ندارد.

اکنون کافی است ثابت کنیم: اگر Q نقطه‌ای از محیط دایرهٔ محیطی مربع باشد، مجموع توان‌های چهارم نقطهٔ Q از رأس‌های مربع، به‌جای نقطهٔ Q بستگی ندارد. اگر این مجموع را S بگیریم. داریم:

$$S=QA^4+QB^4+QC^4+QD^4=$$

$$=(QA^2+QC^2)^2(QB^2+QD^2)^2-2[(QA\cdot QC)^2+(QB\cdot QD)^2]$$

اگر قطر مربع را برابر r فرض کنیم:



شکل ۵۵

$$S=r^{۴}+r^{۴}-۲[(QA\cdot QC)^{۲}+(QB\cdot QD)^{۲}]$$

$QA\cdot QC$ برابر با دو برابر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ AQC، و $QB\cdot QD$ برابر با دوبرابر مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ BQD است. اگر ارتفاع‌های وارد از رأس Q در این دو مثلث را m و n بگیریم، می‌بینیم که، این دو ارتفاع، دوضلع یک مستطیل را تشکیل می‌دهند (دو ضلع دیگر مستطیل، بر امتدادهای AC و BD واقع‌اند). هر قطر این مستطیل، برابر است با $\frac{r}{۲}$ (r، قطر دایرهٔ k است)، یعنی

$$m^{۲}+n^{۲}=\left(\frac{r}{۲}\right)^{۲}$$

اکنون می‌توانیم بنویسیم:

$$(OA\cdot QC)^{۲}+(QB\cdot QD)^{۲}=(m\cdot AC)^{۲}+(n.BD)^{۲}=$$

$$=r^{۲}(m^{۲}+n^{۲})=r^{۲}\left(\frac{r}{۲}\right)^{۲}$$

بنابراین

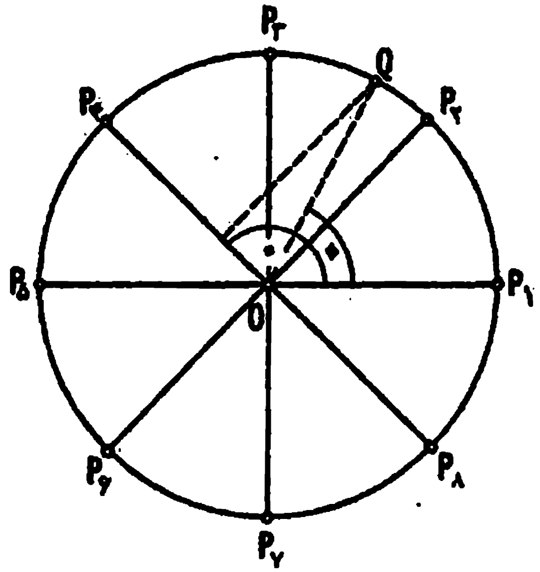
$$S=۲r^{۴}-۲\times\frac{r^{۴}}{۴}=\frac{۳}{۲}r^{۴}$$

که‌تنها به r (شعاع دایرهٔ مفروض) بستگی دارد.

راه‌حل دوم. بدون آن که به‌کلی بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم شعاع دایرهٔ مفروض را واحد بگیریم. اگر زاویه‌های بین OQ، $OP_۱$، $OP_۲$، $OP_۳$ و $OP_۴$ را با شعاع $OP_۱$، به‌ترتیب، φ، $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، $\alpha_۳$ و $\alpha_۴$ فرض کنیم، داریم (شکل ۵۶):

$$\alpha_۱=۰،\quad \alpha_۲=۴۵^\circ،\quad \alpha_۳=۹۰^\circ،\quad \alpha_۴=۱۳۵^\circ$$

اگر فاصلهٔ نقطهٔ Q را تا هر خط راست OP (که با $OP_۱$ زاویه‌ای برابر α



شکل ۵۶

می‌سازد)، برابر d بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$d=|\sin(\varphi-\alpha)|$$

به‌این‌ترتیب، مجموع موردنظر مسأله، چنین می‌شود:

$$f(\varphi)=\sin^4(\varphi-\alpha_1)+\sin^4(\varphi-\alpha_2)+\sin^4(\varphi-\alpha_3)+\sin^4(\varphi-\alpha_4)$$

اکنون، توجه می‌کنیم که:

$$\sin^4 x=(\sin^2 x)^2=\left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{4}(1-2\cos 2x+\cos^2 2x)=\frac{1}{4}\left[(1-\cos 2x)+\frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]$$

یعنی

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x \qquad (1)$$

اکنون اگر، با توجه به‌دستور (۱)، $f(\varphi)$ را، برای مقدارهای متناظر α، محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$f(\varphi)=\frac{۳}{۲}$$

یادداشت. قضیه‌ای دربارهٔ چندجمله‌های مثلثاتی. تابع

$$p(\varphi)=a_۰+a_۱\cos\varphi+b_۱\sin\varphi+\dots+a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi$$

را، نسبت به φ، چند جمله‌ای درجهٔ kام مثلثاتی گویند (تابع $f(\varphi)$ در حل مسأله، حالت خاصی از این تابع است). قضیهٔ کلی زیر را، بدون اثبات می‌آوریم. ولی از خواننده می‌خواهیم، خود راه اثبات آن را پیدا کند.

قضیه. اگر $p(\varphi)$ یك چندجمله‌ای مثلثاتی از درجهٔ k، بامقدار ثابت $a_۰$ باشد، و اگر $\theta=\frac{۲\pi}{n}$ برای $n>k$، آن‌وقت

$$p(\varphi+\theta)+p(\varphi+۲\theta)+\dots+p(\varphi+n\theta)=na_۰$$

$f(\varphi)$ که در حل مسأله از آن استفاده کردیم، حالت خاصی از این قضیه، به‌ازای $k=۴$ و $n=۸$ است.

۵۴. ابتدا یادآوری می‌کنیم که مجذور هرعدد فردی، در تقسیم بر ۸ به باقی‌ماندهٔ واحدمی‌رسد. در واقع، اگر فرض کنیم $a=۲k+۱$، داریم:

$$a^۲=(۲k+۱)^۲=۴m(m+۱)+۱$$

از دوعدد متوالی k و $k+۱$، یکی زوج است، بنابراین، $۴m(m+۱)$ بر ۸ بخش‌پذیر است.

اکنون، به‌حل مسأله می‌پردازیم. اگر n عددی زوج باشد $(n=۲m)$ داریم:

$$۳^n=۳^{۲m}=(۳^m)^۲=۸b+۱;$$

$$۳^n+۱=۸b+۲=۲(۴b+۱)$$

یعنی، وقتی n، عددی زوج باشد، $۲^۱$ بزرگترین توان از عدد ۲ است که $۳^n+۱$ را می‌شمارد.

اگر n، عددی فرد باشد ($n=2m+1$)، داریم:

$$3^n+1=3^{2m+1}+1=3\times 3^{2m}+1=3(8b+1)+1=2^2(6b+1)$$

یعنی، در حالت فرد بودن n، 2^2 بزرگترین توان ۲ است که 3^n+1 را می‌شمارد.

۱۹۱۲

۵۵. پاسخ بخش اول مسأله، به‌سادگی به‌دست می‌آید: باید تبدیل‌های باتکرار ۳شیء را nبهn به‌دست آوریم و، می‌دانیم، این تعداد برابر است با 3^n.

اکنون، تعداد تبدیل‌هایی را پیدا می‌کنیم که شامل هر سه رقم ۱، ۲ و ۳ نباشند و، سپس، آن را از 3^n کم می‌کنیم.

a) تعداد عددهای درست و مثبت n رقمی که تنها شامل ۲ رقم از سه رقم ۱، ۲، ۳ باشند، برابر است با $3(2^n-2)$؛

b) تعداد عددهای n رقمی که، هر کدام از آن‌ها، تنها شامل یکی از رقم‌های ۱، ۲ یا ۳ باشند، برابراست با ۳.

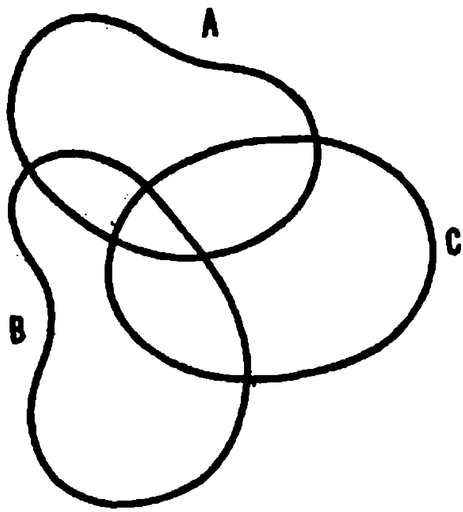
بنابراین، تعداد عددهای n رقمی، که در هر کدام از آن‌ها، از هریك از سه‌رقم ۱، ۲ و ۳، دست‌کم یکبار آمده باشد، برابر است با

$$3^n-3(2^n-2)-3=3^n-3\times 2^n+3$$

یادداشت. I. طبقه‌بندی مجموعه‌ای ازعنصرها، به‌کمك چندویژگی. برای روشن شدن مطلب، یك مسألهٔ انتزاعی را طرح می‌کنیم.

a، b و c را، ویژگی‌هایی ازعضوهای یك‌مجموعهٔ N عضوی می‌گیریم. فرض‌کنید، N_a، تعداد عضوهایی از مجموعه باشند که، دست‌کم، دارای ویژگی a هستند. به‌همین‌ترتیب، N_{ab} را تعدادعضوهایی که، دست‌کم، دارای دو ویژگی a و b؛ N_{abc} را تعداد عضوهایی که دارای هرسه ویژگی a، b و c هستند. با همین روش، نمادهای N_b، N_c ،N_{bc} و N_{ac} را تعریف‌می‌کنیم.

مسأله. اگر مقدارهای N_a، N_b، N_c، N_{ab}، N_{ac}، N_{bc} و N_{abc} داده شده باشند، چگونه می‌توان تعداد عضوهایی از مجموعه را پیدا کرد که هیچ کدام از ویژگی‌های a، b و c را نداشته باشند؟



شکل ۵۷

مسأله را می‌توان، به‌این‌ترتیب، تنظیم کرد (شکل ۵۷):

هریك از N عضو مجموعه را، یك نقطه ازصفحه می گیریم. ویژگی a را به‌این معنا می گیریم که، نقطه، «داخل یا روی منحنی A» باشد؛ برای ویژگی‌های b و c هم، شبیه آن، منحنی‌های C B را درنظر می گیریم. دراین‌صورت، مسأله چنین می‌شود: می‌خواهیم تعداد نقطه‌های بیرون این سه منحنی را پیدا کنیم، به‌شرطی‌که تعداد نقطه‌های

داخل یا روی منحنی A،   داخل یا روی منحنی‌های AوB،

داخل یا روی منحنی B،   داخل یا روی منحنی‌های AوC،

داخل یا روی منحنیC،   داخل یا روی منحنی‌های BوC،

داخل یا روی منحنی‌های AوBوC،

مفروض باشد.

مسأله را مرحله به‌مرحله حل می کنیم:

α) چند عنصر، ویژگی a را ندارند؟ به‌زبان هندسی، چند نقطه در بیرون منحنی A واقع‌اند؟ روشن‌است‌که، این‌تعداد، برابر است با

$$N-N_a \qquad (1)$$

β) ازبین N_a عنصر (باویژگی b)، چند عنصر دارای این‌ویژگی نیستند؟ روشن است‌که، دراین‌جا هم، این تعداد برابر است با

$$N_b-N_{ab} \qquad (۲)$$

(بیان هندسی (۲) را توضیح دهید!)

γ) چند عنصر، هیچ‌کدام از دو ویژگی a یا b را ندارند؟ دراین‌جا، باید ازتعدادحاصل در α)، $N-N_a$، تعداد حاصل درβ)، یعنی N_b-N_{ab} را کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(N-N_a)-(N_b-N_{ab})=N-N_a-N_b+N_{ab} \qquad (۳)$$

(بیان هندسی (۳) ر توضیح دهید!)

λ) ازبین N_c عنصر (با ویژگی c)، چند عنصر دارای ویژگی‌های b و c نیستند؟ به‌این پرسش می‌توان‌کاملاً شبیه حالت γ) پاسخ داد، به‌شرطی که به‌جای N عنصر، N_c عنصر قرار دهیم:

$$N_c-N_{ac}-N_{bc}-N_{abc} \qquad (۴)$$

(تعبیر هندسی (۴) را پیدا کنید!)

δ) تعدادعنصرهایی که‌هیچ‌کدام از ویژگی‌هایa یا b یا c را ندارند، برابر است با

$$(N-N_a-N_b+N_{ab})-(N_c-N_{bc}-N_{ac}+N_{abc})=$$
$$=N-N_a-N_b-N_c+N_{ab}+N_{ac}+N_{bc}-N_{abc} \qquad (۵)$$

II. به مسألهٔ ۵۵ برمی‌گردیم تا، در ضمن، کاربرد این بحث روشن شود.

دراین‌جا، عنصرهای مفروض، عددهای n رقمی درست ومثبت‌اندکه تنها شامل رقم‌های ۱ و ۲ و ۳ باشند. و اما ویژگی‌ها:

a، یعنی «نبودن رقم ۱»،

b، یعنی «نبودن رقم ۲»،

c، یعنی «نبودن رقم ۳».

بنابراین

$$N=۳^n,\ N_a=N_b=N_c=۲^n,$$

$$N_{ab}=N_{ac}=N_{bc}=1,\ N_{abc}=0$$

که با توجه به (۵)، جواب مسأله، به‌دست می‌آید:

$$3^n-3\times 2^n+3$$

III. تعمیم. دستور (۵) را می‌توان برای هر تعداد ویژگی، تعمیم‌داد، دراین صورت، درست به‌تعداد

$$k^n-C_k^1(k-1)^n+C_k^2(k-2)^n-\dots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}$$

عدد n رقمی وجود داردکه، درهر کدام از آن‌ها، ازهمهٔ رقم‌های ۱، ۲، ۳، ...، k، و ازهرکدام دست‌کم یکباراستفاده‌شده است.

درحالت $k>9$، این آرایش را نمی‌توان در عددنویسی با مبنای ۱۰ تفسیرکرد، دراین‌جا، باید مبنای عددنویسی، عدد بزرگتری باشد.

درحالت $n=k$، می‌توان اتحاد جالبی به‌دست‌آورد. دراین حالت، عددهایnرقمی، به‌خودی‌خود، از رقم‌های ۱، ۲، ...$k(=n)$ تشکیل‌شده‌اند؛ وچون این تعداد، برابراست با تعداد ترتیب‌های n عنصر، بنابراین

$$n^n-C_n^1(n-1)^n+C_n^2(n-2)^n-\dots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n=n!$$

۵۶. راه حل اول. درحالت $n=1$ داریم:

$$A_1=5^1+2\times 3^0+1=8$$

اکنون ثابت می‌کنیم، اگر A_k مضربی از ۸ باشد، A_{k+1} هم مضربی از ۸ است. داریم:

$$A_k=5^k+2\times 3^{k-1}+1;$$

$$A_{k+1}=5^{k+1}+2\times 3^k+1=5\times 5^k+6\times 3^{k-1}+1$$

بنابراین

$$A_{k+1}-A_k=(5-1)5^k+(6-2)3^{k-1}=4(5^k+3^{k-1})$$

5^k و 3^{k-1}، عددهایی فردند، بنابراین، مجموع آن‌ها عددی است زوج؛

یعنی $A_{k+1}-A_k$ بر ۸ بخش پذیر است. چون، بنابرفرض، A_k مضربی از ۸ بود، A_{k+1} هم مضربی از ۸ می‌شود.

با روش استقرای ریاضی ثابت شد که A_n، برای هرعدد طبیعی n، بر ۸ بخش‌پذیر است.

راه حل دوم. A_n را می‌توان این‌طور نوشت:

$$A_n=(5^n+3^n)-(3^{n-1}-1)=5(5^{n-1}+3^{n-1})-(3^n-1)$$

دوحالت درنظر می‌گیریم: اگر n عددی فرد باشد: 5^n+3^n بر $5+3$ یعنی ۸ بخش‌پذیر است و، درضمن

$$3^{n-1}-1=3^{2k}-1=9^k-1=(9-1)\cdot C=8C$$

(C، عددی است درست) و بنابراین

$$A_n=(5^n+3^n)-(3^{n-1}-1)$$

مضربی از ۸ می‌شود.

اگر n عددی زوج باشد، با استدلالی مشابه

$$A_n=(5^{n-1}+3^{n-1})-(3^n-1)$$

به‌صورت مضربی از ۸ درمی‌آید. درهرحال، A_n بر ۸ بخش‌پذیر است.

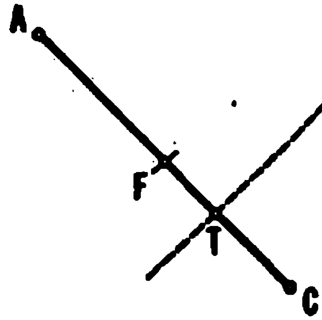
۵۷. راه حل اول. باید ثابت کنیم، درچهارضلعی $ABCD$، وقتی و تنها وقتی، قطرهای BD و AC برهم عمودند که داشته باشیم:

$$AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$$

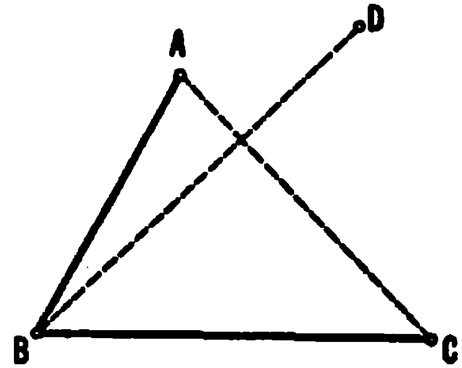
و یا هم‌ارز آن:

$$AB^2-CB^2=AD^2-CD^2 \qquad (1)$$

A و B و C را ثابت می‌گیریم (شکل ۵۸)، دراین صورت، مقدار سمت چپ در رابطهٔ (۱)، ثابت می‌ماند. اکنون، مکان هندسی نقطهٔ D را طوری پیدا می‌کنیم که با رابطهٔ (۱) سازگار باشد.



شکل ۵۹



شکل ۵۸

B، یکی ازایـن نقطه‌هاست، زیـرا اگر D بر B منطبق باشد، برابری (۱) به‌یك اتحاد تبدیـل می‌شود. به این ترتیب، مسأله، منجر به قضیهٔ زیر می‌شود:

قضیه، A و C دونقطهٔ مفروض‌اند. ثابت‌کنید مکان هندسی نقطهٔ P (در صفحهٔ P و A و C)، به‌شرط $PA^۲=PC^۲=q$، خط راستی انست عمودبر AC (q، مقدار ثابتی است).

اثبات‌این‌قضیه ساده است: a) اگر P را یکی ازنقطه‌های مکان بگیریم و از آن‌جاعمود PT را بر AC رسم کنیم، به‌سادگی وباکمك قضیهٔ فیثاغورث، روشن می‌شود که برای هرنقطهٔ واقع براین عمود، تفاضل مجذور فاصله‌های آن از A و C، برابر است با $TA^۲-TC^۲$ کـه مقدار ثابتی است (همان مقدار q).

b) اگر $TA^۲-TC^۲=q$، آن‌وقت، بـرای هیچ نقطهٔ دیگـری از پاره‌خط AC (به‌جز T)، این رابطه برقرار نیست، زیرا اگر F را وسط AC بگیریم (شکل ۵۹):

$$q=TA^۲-TC^۲=(AF+FT)^۲-(FC-FT)^۲=$$

$$=(AF+FT)^۲-(AF-FT)^۲=۴AF\cdot FT$$

چون AF طول ثـابتی دارد، مقدار q بستگی به‌فاصلهٔ FT خواهد داشت و این‌فاصله، برای موقعیت‌های مختلف T روی FC، فرق می‌کند. درضمن، T

فقط در یک طرف F می‌تواند باشد، زیرا اگر در طرف دیگر F قرار گیرد، مقدار TA^2-TC^2 برابر $(-q)$ می‌شود.

با توجه به این قضیه می‌توان گفت که برابری (۱)، وقتی و تنها وقتی می‌تواند برقرار باشد که نقطه‌های B و D، برخط راستی عمود بر AC قرار گیرند، یعنی وقتی که در چهارضلعی $ABCD$، قطرها برهم عمود باشند.

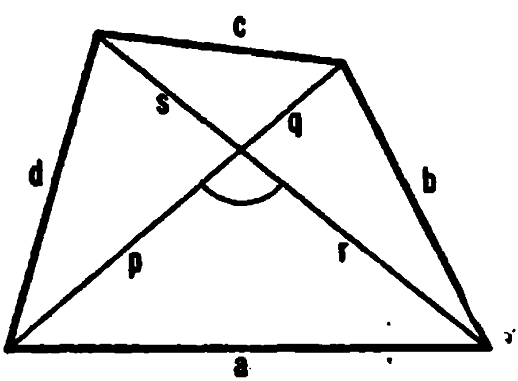
راه حل دوم. a) ابتدا، چهارضلعی را محدب می‌گیریم. در اثبات، از این مطلب استفاده می‌کنیم که: در مثلث، مجذور هرضلع روبه‌رو به زاویهٔ حاده (رو به‌رو به زاویهٔ منفرجه)، کوچکتر است (بزرگتر است) ازمجموع مجذورهای دوضلع دیگر. این نابرابری‌ها را می‌توان از رابطهٔ کسینوس‌ها درمثلث به‌دست آورد (یادداشت پایان راه حل را ببینید). البته، بدون استفاده از مثلثات هم، می‌توان به این نابرابری‌ها رسید.

a، b، c و d، را طول‌های چهارضلعی، و p، q، r و s را، طول‌های چهار پاره‌خطی می‌گیریم که از برخورد دوقطر به‌دست می‌آیند (شکل ۶۵). فرض می‌کنیم قطرها برهم عمود نباشند و p و r با هم، زاویه‌ای منفرجه بسازند. دراین صورت، داریم:

$$a^2>p^2+r^2, \qquad b^2<r^2+q^2,$$
$$c^2>q^2+s^2, \qquad d^2<s^2+p^2$$

ازآن‌جا

$$a^2+c^2>p^2+q^2+r^2+s^2>b^2+d^2$$



شکل ۶۵

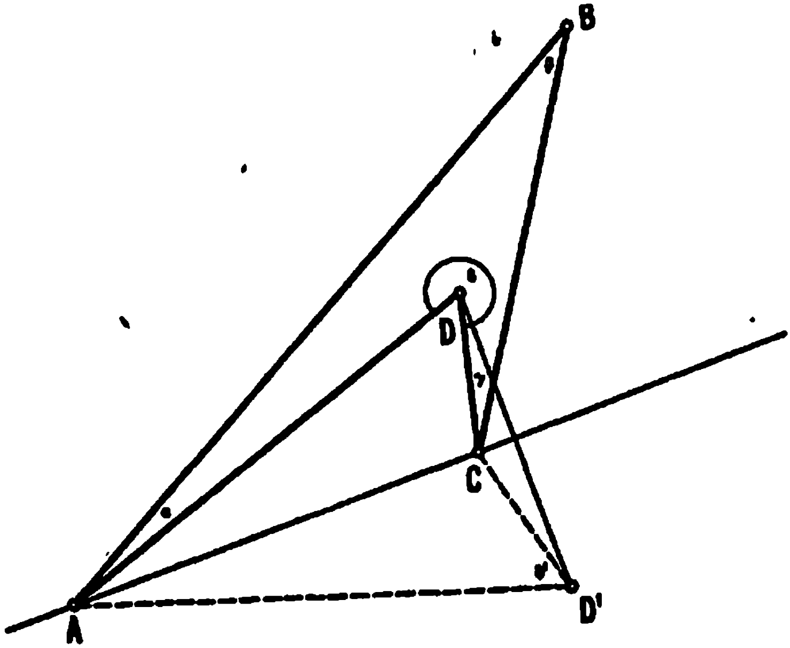
وقتی قطرها بر هم عمود باشند، بنابر قضیهٔ فیثاغورث، نشانه‌های نابرابری به برابری تبدیل می‌شود و به‌دست می‌آید:

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

به این ترتیب، اگر قطرها برهم عمود نباشند: $a^2+c^2>b^2+d^2$ و اگر قطرها برهم عمود باشند: $a^2+c^2=b^2+d^2$. یعنی، در یك چهارضلعی محدب، دو قطر وقتی، و تنها وقتی، بر هم عمودند که داشته باشیم: $a^2+c^2=b^2+d^2$.

b) اکنون، چهارضلعی $ABCD$ را مقعر فرض می‌کنیم، اگر زاویه‌های داخلی چهارضلعی را α، β، γ، δ بگیریم، یکی از آن‌ها، مثلاً δ، مقداری بیش از ۱۸۰ درجه خواهد داشت. (شکل ۶۱).

D' را قرینهٔ رأس D نسبت به قطر AC می‌گیریم. در دو چهارضلعی $ABCD$ و $ABCD'$، طول ضلع‌های نظیر، با هم برابرند. قطر BD'، تنها وقتی بر AC عمود است که B بر خط راست DD' واقع باشد، زیرا DD' بر AC عمود است. به‌این ترتیب، $BD'\perp AC$، اگر و تنها اگر $BD\perp AC$.



شکل ۶۱

از این جا نتیجه می‌شود که، اگر به‌جای D، قرینهٔ آن را نسبت به AC درنظر بگیریم، تاثیری برطول ضلع‌ها و تأثیری برعمود بودن قطرهای چهارضلعی ندارد. از آن‌جا کـه مسأله را، برای چهارضلعی محدب حـل کرده‌ایم، کافی است ثابت کنیم که می‌توانیم، با تبدیل متوالی رأس‌ها به قرینهٔ آن‌ها نسبت به قطرها (به تعداد محدود)، خود را به‌یك چهارضلعی محدب برسانیم.

هرچهارضلعی، حداکثردریـك رأس، زاویهٔ داخلی بـزرگتر از ۱۸۰ درجه دارد(چون، درهرحال، مجموع چهار زاویهٔ داخلی، برابر ۳۶۰ درجه است). سه زاویهٔ α، β و γ ازچهارضلعی را درنظرمی گیریم که، هرکدام از آن‌ها، از ۱۸۰ درجه کـوچکترند، وآن‌ها را با سه زاویهٔ داخلی چهارضلعی $ABCD'$، که از ۱۸۰ درجه‌کوچکترند، مقایسه می‌کنیم. برای یکی از این زاویه‌ها داریم:

$$\widehat{AD'C}=\widehat{ADC}=۳۶۰^\circ-\delta$$

برای زاویهٔ دیگرچهارضلعی $ABCD'$ داریم: $\widehat{ABC}=\beta$. از زاویهٔ BAC و ACB، درمثلث ABC، یکـی حاده است، مثلا BAC را زاویه‌ای حـاده می گیریم. داریم:

$$\widehat{BAD}<۲\widehat{BAC}<۱۸۰^\circ$$

اکنون داریم:

$$\widehat{BAD'}>\alpha،\qquad \widehat{ABC}=\beta، \qquad (۲)$$

$$CD'A=۳۶۰^\circ-\delta=\alpha+\beta+\gamma>\gamma$$

ازمجموع این نابرابری‌ها، به‌دست می‌آید:

$$\widehat{BAD}+\widehat{ABC}+\widehat{CD'A}>\alpha+\beta+(\alpha+\beta+\gamma) \qquad (۳)$$

رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که، درهرمرحله از انجام تقارن، مجموع سه زاویه‌ای که کمتراز ۱۸۰ درجه است، به سرعت بزرگ می‌شود؛ در ضمن،

رابطه‌های (۲) نشان می‌دهند که، هیچ یک از این سه زاویه، از خودش کوچکتر نمی‌شود. بنابراین، بعد از چند تقارن، مجموع این سه زاویه از ۱۸۰ درجه می‌گذرد، و درنتیجه، زاویهٔ چهارم کمتر از ۱۸۰ درجه می‌شود و به یک چهارضلعی محدب می‌رسیم.

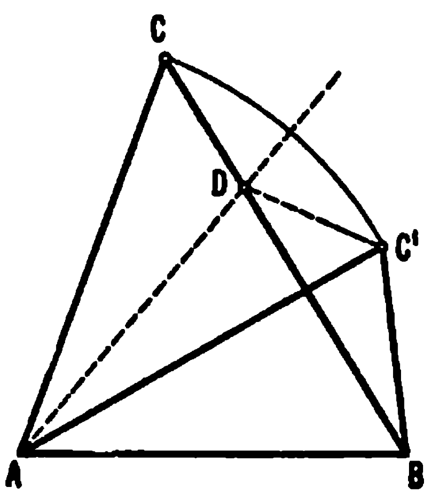
یادداشت. نابرابری‌ها در مثلث. قضیه‌ای را که در راه حل دوم مورد استفاده قراردادیم، براساس قضیهٔ اساسی وسادهٔ زیر ثابت می‌شود:

اگر در دومثلث ABC و $A'B'C'$، داشته باشیم: $AB=A'B'$ و $AC=A'C'$؛ آن‌وقت، ضلع سوم مثلثی بزرگتر است که روبه‌رو به زاویهٔ بزرگتر باشد.

دومثلث را طوری درنظرمی گیریم که ضلع AB بر $A'B'$ منطبق و A، رأس مشترک AC و $A'C'$ بشود (شکل ۶۲). فرض می‌کنیم، زاویهٔ BAC از زاویهٔ BAC' بزرگترباشد. نیمساز زاویهٔ CAC'، ضلع BC را در D قطع می‌کند. دومثلث ADC و ADC' قابل انطباق‌اند، بنابراین $CD=C'D$ از آن جا

$$BC=BD+DC=BD+DC'>BC'$$

برای این که قضیهٔ مورد استفاده در راه حل دوم را نتیجه بگیرید،



شکل ۶۲

مثلثی با ضلع‌های a، b و c ومثلث قائم‌الزاویه‌ای با وتر h وضلع‌های b و c درنظر بگیرید، سپس، با توجه به‌نابرابری بالا، روشن می‌شود که a بزرگتر یا کوچکتر از h است، بسته به‌این‌که روبه‌رو به‌زاویهٔ منفرجه باشد یا زاویهٔ حاده. استفاده ازقضیهٔ فیثاغورث، اثبات را کامل می‌کند.

۱۹۱۳

۵۸. عبارت سمت چپ نابرابری را می‌توان به‌این صورت نوشت:

$$۱\times n+۲(n-۱)+۳(n-۲)+\dots+(n-۱)۲+n\times ۱$$

هریك ازحاصل‌ضرب‌های

$$۱\times n،\ ۲(n-۱)،\ \dots،\ (n-۱)۲،\ n\times ۱$$

به صورت $(n-k)(۱+k)$ هستند که، درآن، k مقدارهای ۰، ۱، ۲، ...، $n-۱$ را قبول می‌کند. دوحاصل‌ضرب اول وآخر، یعنی $n\times ۱$ و $۱\times n$ از بقیه کوچکترند، زیرا، برای $k>۰$ و $n-k>۱$ داریم:

$$(k+۱)(n-k)=k(n-k)+(n-k)>k\times ۱+(n-k)=n$$

به‌این ترتیب، می‌توان نوشت:

$$(۱\times ۲\times ۳\times \dots\times n)^{۲}>n\times n\times \dots\times n=n^{n}$$

این نابرابری وقتی برقرار است که $n>۲$ باشد (برای $n=۱$ و $n=۲$، نابرابری به برابری تبدیل می‌شود).

۵۹. A، B و C را انتهای سه‌یالی که درنقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند و A'، B' و C' را انتهای سه‌یالی که در O' به‌هم رسیده‌اند، می‌گیریم (شکل۶۲). درضمن، وسطهای

$$B'C،\ CA'،\ A'B،\ BC'،\ C'A،\ AB'$$

را به ترتیب

$$L،\ M'،\ N،\ L'،\ M،\ N'$$

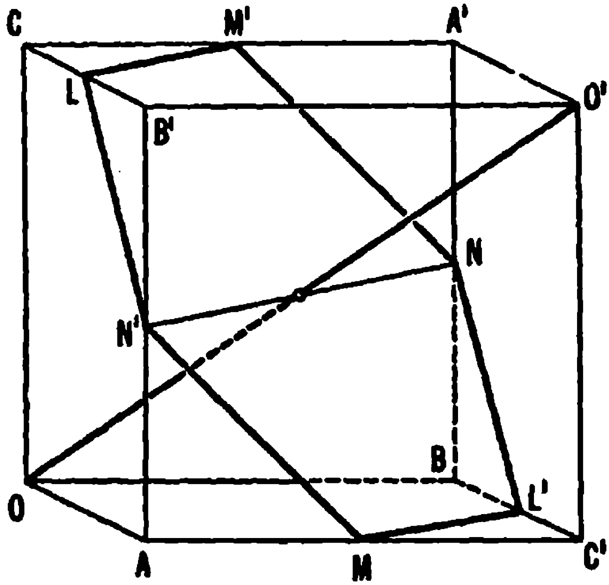
فرض می‌کنیم. دراین صورت، همهٔ پاره‌خطهای راست

$$O'M، O'N'، O'L، O'M'، O'N، O'L'،$$

$$OM، ON'، OL، OM'، ON، OL'$$

طول‌های برابردارند ، زیرا وترهای مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ قابل انطباق‌اند (همهٔ وجه‌های مکعب، مربع‌هایی قابل انطباق‌اند) از این جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های M، N'، L، M'، N و L' روی سطح کره‌ای به‌مرکز O و هم روی کره‌ای با همان شعاع ومرکز O' قراردارند، یعنی این نقطه‌ها،روی محیط دایرهٔ محل برخورد این دوکره واقع شده‌اند. برای اثبات منتظم‌بودن شش ضلعی‌محاطی $MN'LM'NL'$، توجه می‌کنیم که،مثلا، پاره‌خط MN' وسط دوضلع مثلث $AB'C'$ را به‌هم وصل کرده و، بنابراین، برابر با نصف قطر $B'C'$ ازمربع $AB'O'C'$، یعنی یکی از وجه‌های مکعب است. همین وضع، برای پاره‌خط‌های $N'L$، LM': $M'N$، NL و $L'M$ هم وجود دارد. درنتیجه، همهٔ این پاره خطها با هم برابرند.

۶۰. داه حل اول. a_1، b_1، a'_1 و b'_1 را به‌این ترتیب تعریف می‌کنیم که داشته باشیم:



شکل ۶۳

$$a = a_1 d, \quad b = b_1 d, \quad a' = a'_1 d', \quad b' = b'_1 d' \qquad (1)$$

درضمن $(a_1, b_1) = 1$ و $(a'_1, b'_1) = 1$. [یادداشت ۳ ازمسالهٔ ۲۴ II را ببینید.]
از رابطه‌های (۱) به‌دست می‌آید:

$$aa' = dd'a_1 a'_1, \quad ab' = dd'a_1 b'_1,$$
$$ba' = dd'b_1 a'_1, \quad bb' = dd'b_1 b'_1$$

یعنی dd'، مقسوم‌علیه مشترکی از چهار عدد aa'، ab'، ba' و bb' است، بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك این‌چهارعدد، تنها وقتی می‌تواند از dd' بزرگتر باشدکه عددهای

$$a_1 a'_1, \quad a_1 b'_1, \quad b_1 a'_1, \quad b_1 b'_1 \qquad (2)$$

عامل اول مشترکی داشته باشند. فرض کنیم، p، مقسوم‌علیه مشترك اولی ازاین‌چهارعدد باشد. چون $(a_1, b_1) = 1$، بنابراین، حداکثریکی از دوعدد a_1 و b_1 می‌تواند مضربی‌از p باشد. فرض‌می‌کنیم، این عدد، b_1 باشد. ولی از آن‌جا که $a_1 a'_1$ مضربی از p است و، در ضمن، a_1 مضرب p نیست، پس a'_1 مضربی از p می‌شود [راه حل دوم مسألهٔ ۱، a را ببینید]. به‌همین‌ترتیب، چون $a_1 b'_1$ مضرب p است و $(a_1, p) = 1$، بنابراین، b'_1 باید مضرب p باشد. ولی می‌دانیم a'_1 و b'_1 نسبت به‌هم‌اول‌اند، یعنی $1 = p = (a'_1, b'_1)$.
به این ترتیب، عددهای (۲)، مقسوم‌علیه مشترکی جز واحد ندارند و حکم مسأله درست است.

راه حل دوم. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك عددهای l، m، ... را به‌صورت $(l, m, \ldots)$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین

$$(aa', ab', ba', bb') = ((aa', ab'), (ba', bb'))$$

[یادداشت پایان حل را ببینید]. ولی داریم:

$$(aa', ab') = a \cdot (a', b') = a \cdot d'$$
$$(aa', bb') = b \cdot (a', b') = b \cdot d'$$

[به‌همان یادداشت مراجعه کنید]. بنابراین

$$((aa', ab'), (ba', bb')) = (ad', bd') = (a, b)\cdot d' = dd'$$

یادداشت. دوقضیه دربارهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك. راه حل دوم مسأله، براساس دو اتحاد زیر، انجام گرفت:

$$(l, m, \ldots, l', m', \ldots) = ((l, m, \ldots), (l', m', \ldots)) \qquad (۱)$$

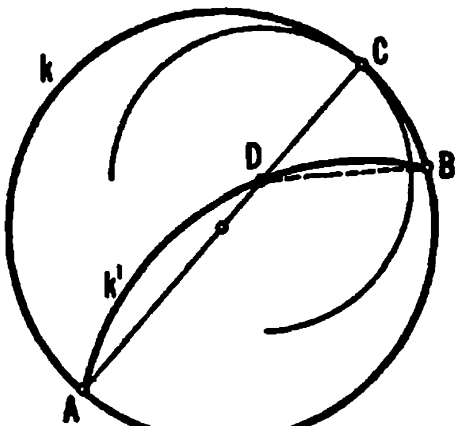
$$(kl, km, \ldots) = k\cdot(l, m, \ldots) \qquad (۲)$$

هردوقضیه، ازشرط‌هایی نتیجه می‌شوند که دریادداشت ۲ درپایان‌حل مسألهٔ ۲۴ شرح داده‌ایم. اگرعددهای l، m، ... را به‌صورت ضرب‌توان‌هایی ازعددهای اول بنویسیم و، سپس، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك آن‌ها، یعنی d را، به صورت ضرب عامل‌های اول نشان دهیم، آن وقت، توان هر عدد اول p، در d، کوچکترین توان موجود درتجزیهٔ عددهای l، m، ... خواهد بود و برای این منظور، می‌توانیم مجموعهٔ عددهای l، m، ... را به‌چند زیر مجموعه تقسیم کنیم، درهریك ازاین زیرمجموعه‌ها، کوچکترین توان p را به‌دست آوریم و، سپس، بین این توان‌های p، کوچکترین را انتخاب کنیم. واین، همان کاری‌است که درسمت راست (۱) انجام داده‌ایم: اول کوچکترین توان p را در l، m، ... و، سپس، کوچکترین توان p را در l'، m'، ... و سرانجام، کوچکترین توان p را دربین دوعدد حاصل، مشخص می‌کنیم.

اتحاد (۲) بیان می‌کندکه، کوچکترین عدد ازبین چند عدد $\alpha+\mu$ و $\alpha+\lambda$، ...، عبارت است ازمجموع α با کوچکترین عدد ازبین چندعدد μ، λ، ...

۱۹۱۴

۶۱. چون کمان k' از دایرهٔ l، مساحت دایرهٔ k را نصف می‌کند، بنابراین، کمان k'، نمی‌تواند به طورکامل دریك طرف قطردایرهٔ k قرار گیرد. یعنی، هرقطردلخواه از دایرهٔ k، کمان k' را قطع می‌کند (شکل۶۴) و نقطهٔ O،مرکزدایرهٔ k، در داخل دایرهٔ l قرارمی گیرد. به‌این ترتیب،شعاع



شکل ۶۴

OA از دایرهٔ k در داخل دایرهٔ l قرار دارد ونقطهٔ برخورد قطرAC باکمان k'، یعنی نقطهٔ D، روی شعاع OC واقع است. چون طول کمان k'، ازطول $AD+BD$ بزرگتراست، کافی است ثابت کنیم: $BD>DC$. ولی این نابرابری درست است، زیرا دایرهٔ به‌مرکز D وشعاع برابر DC، در داخل دایرهٔ k قراردارد.

۶۴. نمودار تابع $f'(x)=2ax+b$، یعنی مشتق تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ یک خط راست است، بنابراین، وقتی x در بازهٔ $[-1،1]$ تغییرمی کند، کمترین و بیشترین مقدار $f'(x)$ درنقطه‌های ابتدائی وانتهائی این بازه، به‌دست می آید. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، مقدارهای $f'(x)$ در $x=-1$ و $x=1$، یعنی عددهای

$$f'(-1)=-2a+b \text{،} f'(1)=2a+b$$

نمی‌توانندکمتر از -4 یا بیشتر از ۴ بشوند. مقدارهای -1، ۰ و ۱ رادر تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ قرارمی‌دهیم وازنابرابری‌های فرض استفاده می کنیم، به‌دست می آید:

$$-1\leqslant f(-1)=-a+b+c\leqslant 1 \qquad (1)$$

$$-1\leqslant -f(0)=-c\leqslant 1 \qquad (2)$$

$$-1\leqslant f(1)=a+b+c\leqslant 1 \qquad (3)$$

ازمجموع نابرابری‌های (۱) و (۲) داریم:

$$-۲ \leqslant a-b \leqslant ۲ \qquad (۴)$$

و ازمجموع نابرابری‌های (۲) و (۳) به‌دست می‌آید:

$$-۲ \leqslant a+b \leqslant ۲ \qquad (۵)$$

اکنون، ازمجموع (۴) و (۵) نتیجه می‌شود:

$$-۲ \leqslant a \leqslant ۲ \qquad (۶)$$

سرانجام ازمجموع (۴) و (۶) به‌دست می‌آید:

$$-۴ \leqslant ۲a-b \leqslant ۴ \Rightarrow -۴ \leqslant -۲a+b \leqslant ۴$$

و ازمجموع (۵) و (۶):

$$-۴ \leqslant ۲a+b \leqslant ۴$$

یادداشت. قضیهٔ مارکوف (Markov) دربارهٔ چندجمله‌ای‌های چه‌بی‌شف (Chebyshev). چندجمله‌ای چه‌بی‌شف را به‌صورت $T_۲(x)=۲x^۲-۱$ درنظرمی گیریم که، در آن، $a=۲$، $b=۰$ و $c=-۱$.

نمودارتابع $T_۲(x)=۲x^۲-۱$ و $T'_۲(x)=۴x$ درشکل ۶۵ رسم شده‌اند. $T_۲(x)$ و $-T_۲(x)$ دارای این ویژگی هستندکه: از بین همهٔ چندجمله‌ای‌های درجه دوم $f(x)$ با شرط

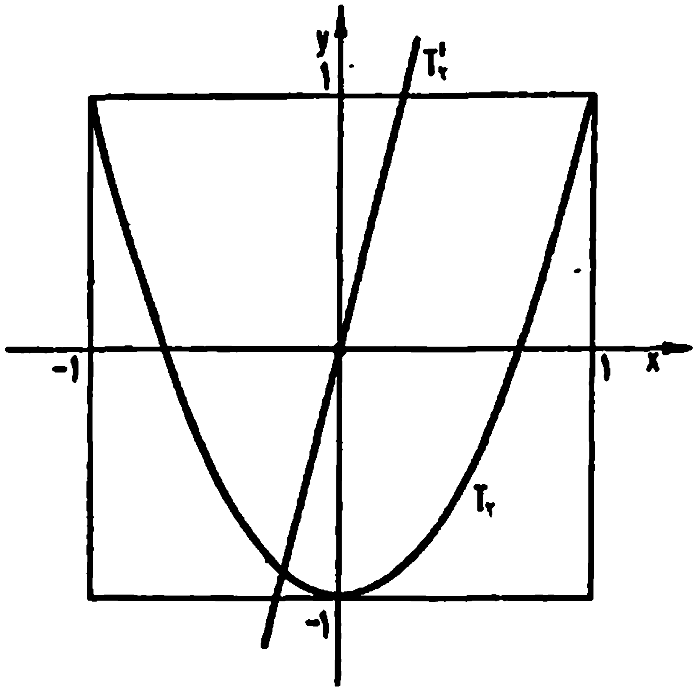
$$-۱ \leqslant f(x) \leqslant ۱ \qquad (\text{برای } -۱ \leqslant x \leqslant ۱)$$

تنها تابع‌هایی هستندکه، برای آن‌ها، $T'_۲(x)$ و $-T'_۲(x)$، اکستره‌مم‌های ۴ و ۴- را قبول می‌کنند:

$$T'_۲(-۱)=-۴،\ T'_۲(۱)=۴،\ -T'_۲(-۱)=۴،\ -T'_۲(۱)=-۴$$

تابع‌های درجه دوم به‌صورت $ax^۲+bx+c$، با ویژگی‌هایی که در مسألهٔ ۶۲ آمده است، تابع‌هایی هستند که، مشتق آن‌ها، درنابرابری

$$-۴ < ۲ax+b < ۴$$



شکل ۶۵

صدق می‌کند. در این صورت، با توجه به رابطه‌های (۴)، (۵) و (۶)

$$f'(۱)=۲a+b=۴$$

تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$a+b=a-b=a=۲$$

ازآن‌جا $b=۰$ و، سپس، از (۱) واز (۱) و (۲) به‌دست می‌آید: $c=-۱$.
این مقدارهای a و b و c، ما را به تابع

$$f(x)=۲x^۲-۱=T_۲(x)$$

می‌رساند. به‌همین ترتیب، از $f'(۱)=۴$، $f'(-۱)=-۴$ به تابع $-T_۲(x)$ می‌رسیم.

مسألهٔ ۶۲ حالت خاصی است از قضیهٔ زیر که به وسیلهٔ مارکوف ارائه شده است:

قضیه. اگر چند جمله‌ای درجهٔ n

$$f(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

با ضریب‌های حقیقی a_0، a_1، ...، a_n، در بازهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$ با شرط $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$ سازگار باشد، آن‌وقت، برای تابع مشتق، یعنی

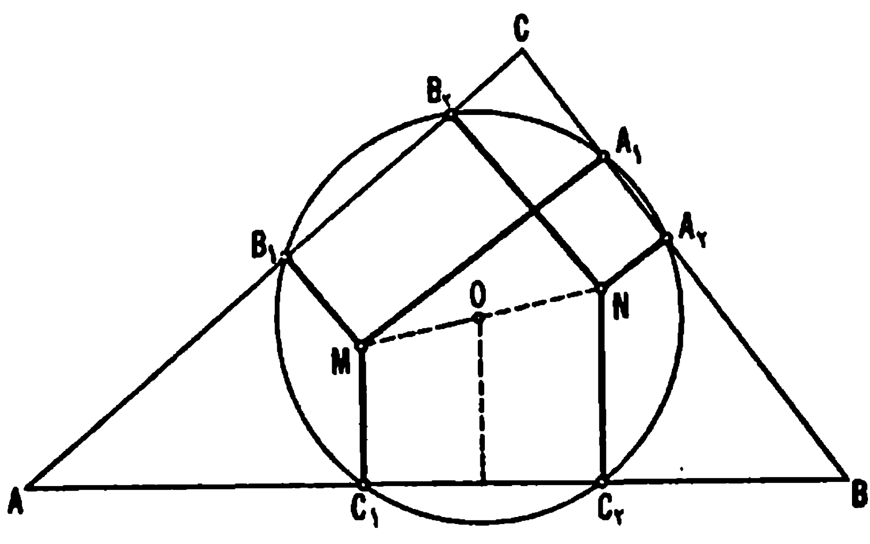
$$f'(x)=a_1+2a_2x+\dots+na_nx^{n-1}$$

درهمان بازهٔ $-1\leqslant x\leqslant 1$، نابرابری

$$-n^2\leqslant f'(x)\leqslant n^2$$

برقراراست. علاوه بر آن، برابری $|f'(x)|=n^2$، تنها وقتی برای $x=1$ و $x=-1$ برقراراست که $f(x)$، چند جمله‌ای چه‌بی‌شف $T_n(x)$ یا $-T_n(x)$ باشد. [از خوانندهٔ علاقه‌مند می‌خواهیم، اثبات این قضیه را پیدا کنند].

۶۳. نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ k، روی عمود منصف پاره‌خط C_1C_2 قرار دارد (شکل ۶۶). بنابراین، عمود وارد از نقطهٔ C_2 بر پاره خط AB، خط راستی را که از دو نقطهٔ M و O می‌گذرد در نقطهٔ N قطع می‌کند که، برای آن داریم: $ON=OM$ (خط‌های راست موازی، خط‌های راست C_1C_2 و MN را به‌پاره‌خط‌های متناسب، قطع می‌کنند). به‌همین ترتیب، عمود وارد



شکل ۶۶

از $A_۲$ بر BC، خط راستی را که از O و M می‌گذرد، در N قطع می‌کند و، همین‌طور، عمود وارد از $B_۲$ بر AC هم از N می‌گذرد.

۱۹۱۵

۶۴. برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\cdots\times ۲\times ۱ \geqslant n(n-۱)(n-۲)$$

در واقع، برای $n\geqslant ۴$، مقدار $n!$ برابر است با حاصل‌ضرب‌عددهای $n(n-۱)(n-۲)$ و $(n-۳)!$ و، در ضمن، برای $n\geqslant ۴$، نابرابری $(n-۳)!\geqslant ۱$ برقرار است. نابرابری

$$n!\geqslant n(n-۱)(n-۲) \qquad (۱)$$

برای حالت‌های $n=۱،۲،۳$ هم برقرار است، زیرا

$$n=۱;\ n!=۱ \text{ و } n(n-۱)(n-۲)=۰،$$

$$n=۲;\ n!=۲ \text{ و } n(n-۱)(n-۲)=۰،$$

$$n=۳;\ n!=۶ \text{ و } n(n-۱)(n-۲)=۶$$

به‌این ترتیب، نابرابری (۱)، برای هر عدد طبیعی n درست است.

اکنون، اگر بتوانیم عدد درست r را طوری پیدا کنیم که، با شرط $n>r$، داشته باشیم:

$$An^۲+Bn+C<n(n-۱)(n-۲) \qquad (۲)$$

آن‌وقت، توانسته‌ایم مسأله را حل کنیم. تفاضل دو عبارت سمت چپ وسمت راست نابرابری (۲) را D می‌گیریم، در این‌صورت، می‌توان نوشت:

$$D=n(n-۱)(n-۲)-(An^۲+Bn+C)>۰$$

که به‌این صورت درمی‌آید:

$$D=n^۳-(Rn^۲+Sn+T)>۰ \qquad (۳)$$

که در آن: $R=A+۳$، $S=B-۲$ و $T=C$، به n بستگی ندارند.

اگر r را از هر سه عدد R، S و T بزرگتر بگیریم، خواهیم داشت:

$$Rn^{۲}+Sn+T<r(n^{۲}+n+۱)$$

اکنون، با توجه به‌نابرابری روشن

$$n^{۳}-۱=(n-۱)(n^{۲}+n+۱)<n^{۳}$$

می‌توان نوشت:

$$D>(n-۱)(n^{۲}+n+۱)-r(n^{۲}+n+۱)=$$
$$=(n-۱-r)(n^{۲}+n+۱) \qquad (۴)$$

رابطهٔ (۴) نشان می‌دهد که، اگر $n>r$، آن‌وقت $D>۰$.

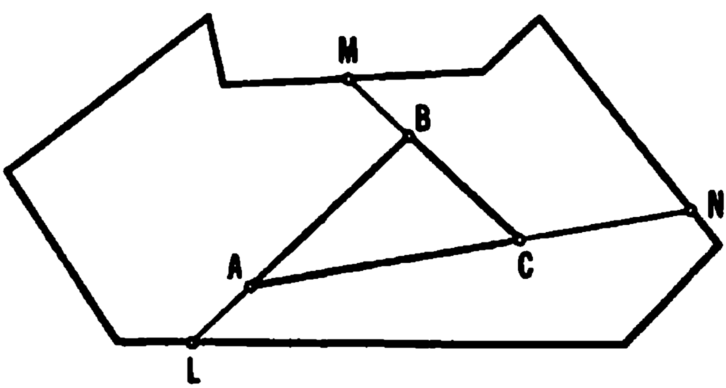
۶۵. ضلع‌های AB، BC و CA از مثلث را، به ترتیب، از طرف A، B و C امتداد می‌دهیم تا چندضلعی را در نقطه‌های L، M و N قطع کنند (شکل ۶۷). نقطه‌های L، M و N، محیط چندضلعی را بـه سه‌بخش تقسیم می‌کنند که، آن‌ها را، با (LM)، (MN) و (NL) نشان می‌دهیم.

طول هر خط شکسته، از طول پاره‌خطی کـه دو سر آن را به‌هم وصل کند، بزرگتر است، بنابراین

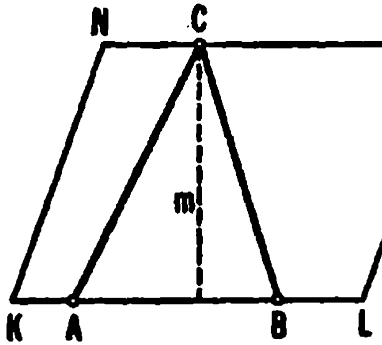
$$(LM)+MB\geqslant LA+AB،$$

$$(MN)+NC\geqslant MB+BC،$$

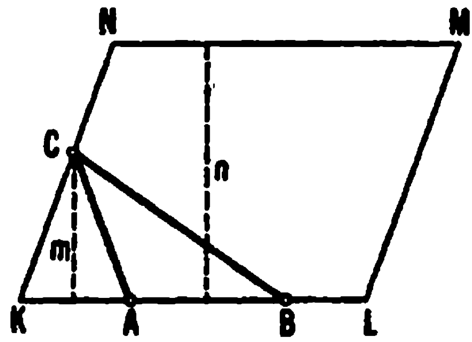
$$(NL)+LA\geqslant NC+CA$$



شکل ۶۷



شکل ۶۹



شکل ۶۸

از مجموع این نابرابری‌ها، بعد از ساده کردن، به‌دست می‌آید:

$$LM+(MN)+(NL)\geqslant AB+BC+CA$$

۶۶. دو حالت ممکن را بررسی می‌کنیم.

حالت اول، وقتی که دو رأس مثلث، بر یکی از ضلع‌های متوازی‌الاضلاع قرار دارند. مثلاً، A و B را واقع بر ضلع KL می‌گیریم (شکل‌های ۶۸ و ۶۹).

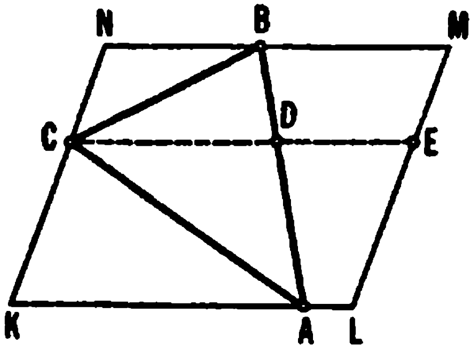
مساحت مثلث ABC را t، ارتفاع وارد از رأس C در مثلث را m، مساحت متوازی‌الاضلاع $KLMN$ را T و ارتفاع وارد بر ضلع KL را n فرض می‌کنیم. بنابراین

$$t=\frac{۱}{۲}m\cdot AB,\qquad T=n\cdot KL$$

چون $m\leqslant n$ و $AB\leqslant KL$، در نتیجه $t\leqslant\frac{۱}{۲}T$.

حالت دوم، وقتی که هیچ دو رأسی از مثلث، بر یک ضلع متوازی‌الاضلاع منطبق نباشد (شکل ۷۰). در این حالت، دو رأس مثلث، به‌ناچار بر دو ضلع روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع واقع می‌شود. فرض کنید A بر KL، B بر MN و C بر KN واقع باشند؛ از نقطهٔ C، خط راستی موازی KL رسم می‌کنیم تا AB و LM را، به‌ترتیب، در نقطه‌های D و E قطع کند.

با توجه به‌نتیجه‌ای که برای حالت اول به‌دست آوردیم، مساحت مثلث ACD از نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $KLEC$؛ و مساحت مثلث BCD،



شکل ۷۰

از نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $MNCE$ بزرگتر نیست. یعنی، مساحت مثلث ABC نمی‌تواند از نصف مساحت متوازی‌الاضلاع $KLMN$ بیشتر باشد.

۱۹۱۶

۶۷. ابتدا ثابت می‌کنیم که، این معادله، دوریشهٔ حقیقی دارد. با فرض $x\neq 0$، $x\neq a$ و $x\neq -b$، دو طـرف معادله را در $x(x-a)(x+b)$ ضرب می‌کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$f(x)=3x^2-2(a-b)x-ab=0$$

مقدارهـای $f(x)$ را، به ازای $x=a$، $x=0$ و $x=-b$ محاسبه می‌کنیم:

$$f(a)=3a^2-2(a-b)a-ab=a(a+b),$$

$$f(0)=-ab,$$

$$f(-b)=3b^2-2(a-b)(-b)-ab=b(a+b)$$

چون a و b عددهایی مثبت‌اند، بنابراین

$$f(a)>0,\ f(0)<0,\ f(-b)>0$$

یعنی، معادلهٔ $f(x)=0$، دارای یك ریشهٔ منفی بزرگتر از $-b$ و یك ریشهٔ مثبت کوچکتر از a است. ومعادله، به‌جز این‌دو ریشه، ریشهٔ‌حقیقی دیگری‌ندارد.

اگر x_1، ریشهٔ مثبت معادله باشد، باید داشته باشیم:

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1+b}=\frac{1}{a-x_1} \qquad (1)$$

x_1 و b هر دو مثبت‌اند، بنابراین از (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{a-x_1} \Rightarrow x_1>a-x_1 \Rightarrow x_1>\frac{a}{2}$$

وازآن‌جا، به یقین $x_1>\frac{a}{3}$. ازطرف دیگر، با توجه به‌مثبت‌بودن b، داریم:

$$\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_1+b}$$

و بنابراین، با توجه به (۱):

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_1}>\frac{1}{a-x_1} \Rightarrow x_1<\frac{2a}{3}$$

برای‌تعیین‌محدودهٔ ریشهٔ منفی‌هم، به‌همین‌ترتیب می‌توان استدلال‌کرد.

یادداشت. قضیهٔ لاگر (Laguerre). معادله‌ای کـه در مسألهٔ ۶۷ داده شده است، حالت خاصی از معادلهٔ زیر است:

$$\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\dots+\frac{1}{x-a_n}=0 \qquad (1)$$

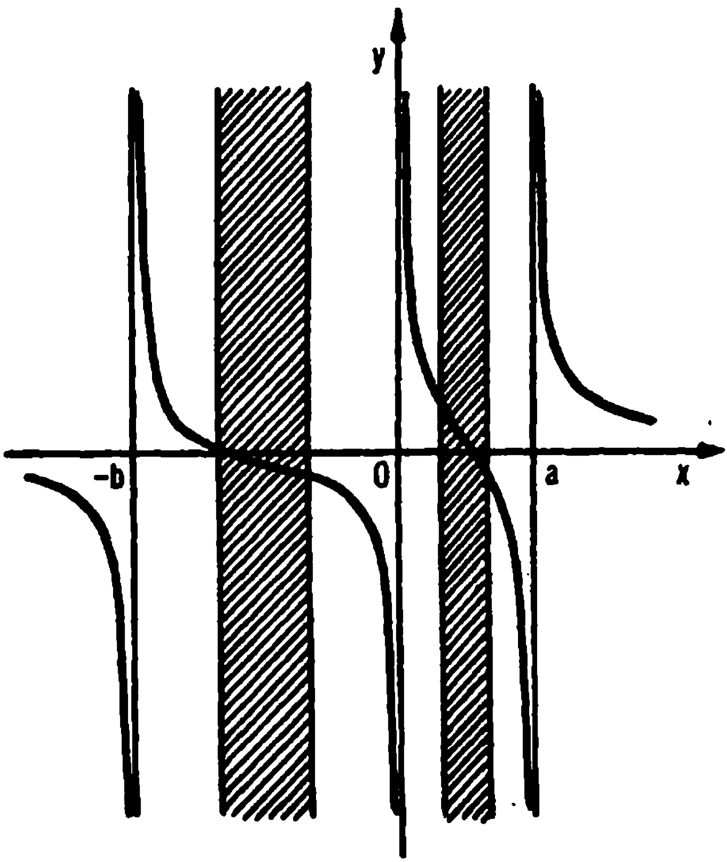
که درآن، a_1، a_2، ... ، a_n، عددهایی حقیقی و متمایزند. در جبر ثابت‌شده است کـه، معادلهٔ (۱)، دارای $n-1$ ریشهٔ حقیقی است و، در ضمن، اگـر فرض‌کنیم:

$$a_1<a_2<\dots<a_n$$

آن‌وقت، هرکدام از بازه‌های

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$$

درست شامل یکی از ریشه‌هاست.



شکل ۷۱

لاگر دو پرسش عمیق‌تر را مطرح کرد: ریشهٔ x_i در کجای بازهٔ (a_i, a_{i+1}) قرار دارد؟ آیا ریشهٔ x_i، می‌تواند به‌یکی از دو انتهای بازه نزدیک شود؟

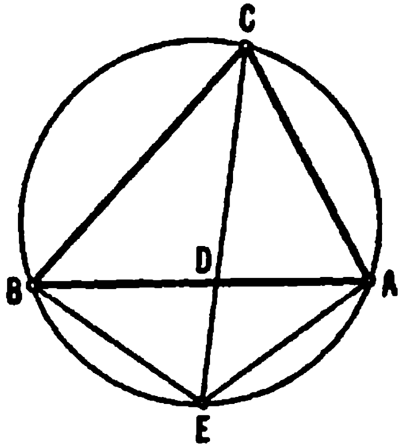
به‌این دو پرسش، می‌توان با قضیهٔ زیر پاسخ گفت:

اگر بازهٔ (a_i, a_{i+1}) را به n پاره‌خط برابر تقسیم کنیم، آن‌وقت، x_i نمی‌تواند روی پاره‌خط اول یا روی پاره‌خط آخر باشد.

درحالت $n=3$، $a_1=-b$، $a_2=0$ و $a_3=a$، این قضیه، به‌همان صورت مسألهٔ ۶۷ درمی‌آید. شکل ۷۱، نمودار تابع

$$f(x)=\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}$$

را نشان می‌دهد؛ ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$، روی شکل مشخص شده‌اند. با همین روش، می‌توان اثبات کامل قضیهٔ لاگر را، در حالت کلی هم به‌دست



شکل ۷۲

آورد که ما، آن‌را، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۶۸. راه حل اول. E رانقطهٔ برخورد خطراست CD با دایرهٔمحیطی مثلث ABC می‌گیریم (شکل۷۲). چون دوزاویهٔ BCD وACD و،همچنین، دو زاویهٔ CBD و CEA بـا هم برابرند، دو مثلث CBD و CEA متشابـه می‌شوند و بنابراین

$$CA \cdot CB = CD \cdot CE$$

و چون CE بزرگتر از CD است، پس

$$CA \cdot CB > CD^{2} \Rightarrow CD < \sqrt{CA \cdot CB}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

راه حل دوم. a) طول ضلع‌هـای BC و AC را a و b و زاویهٔ بین BC و AC را γ می‌گیریم. اگر طول نیمساز زاویهٔ γ، یعنی طول پاره‌خط CD برابر v باشد، با توجه به‌راه حل اول مسألهٔ ۵۱، داریم:

$$\frac{1}{v}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \qquad (1)$$

چون $\frac{\gamma}{2}$ زاویه‌ای حاده است، بنابراین $1>\cos\frac{\gamma}{2}>0$؛ در نتیجه، از رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{v}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \qquad (2)$$

b) از آن‌جا که واسطهٔ حسابی دوعدد مثبت، کوچکتر از واسطهٔ هندسی آن‌ها نیست، یعنی

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$$

بنابراین، از نابرابری (۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{v}>\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}} \Rightarrow v<\sqrt{a.b} \qquad (3)$$

نابرابری (۲)، شرط لازم و کافی، برای وجود مثلثی با ضلع‌های a و b و نیمساز داخلی v (نیمساز بین آن دو ضلع) است؛ در حالی‌که نابرابری (۳) تنها شرط لازم است، ولی کافی نیست. مثلاً، مثلثی با داده‌های $a=3$، $b=13$ و $v=6$ وجود ندارد، در حالی‌که، این عددها، در نابرابری (۳) صدق می‌کنند: $6<\sqrt{3\times 13}=\sqrt{39}$. ولی این عددها، با نابرابری (۲) سازگار نیستند، زیرا در آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{6}>\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{13}\right)=\frac{8}{39}$$

که البته، درست نیست.

یادداشت ۱. مقایسهٔ واسطهٔ حسابی با واسطهٔ هندسی. اگر x_1، x_2، ...، x_n عددهایی مثبت باشند، واسطهٔ حسابی آن‌ها برابر است با

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

و واسطهٔ هندسی آن‌ها

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

بین این‌دو واسطه، نابرابری

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\qquad(1)$$

برقرار است که، اغلب، آن‌را به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$x_1x_2\cdots x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n\qquad(2)$$

علامت برابری وقتی، و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=\cdots=x_n$$

برای اثبات، ابتدا نابرابری را، برای $n=2^k$، با استقرا روی k، ثابت می‌کنیم. برای $k=1$، باید ثابت کنیم:

$$x_1x_2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\qquad(3)$$

این نابرابری درست است: زیرا بـه‌سادگی منجر به نابرابری واضح زیـر می‌شود:

$$\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2\geqslant 0$$

علامت برابری هم، برای $x_1=x_2$ برقرار است.

$k=2$، یعنی $n=2^2=4$ می‌گیریم. اگـر نابرابری (۳) را، ابتدا برای x_1 و x_2 و، سپس، برای x_3 و x_4 بنویسیم و نتیجه‌ها را در هم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x_1x_2)(x_3x_4)\leqslant\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2\qquad(4)$$

اکنون، اگر نابرابری (۳) را برای عددهای $\frac{x_1+x_2}{2}$ و $\frac{x_3+x_4}{2}$ بنویسیم:

$$\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\frac{x_3+x_4}{2}\leqslant\left[\frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}\right)\right]^2=$$

$$=\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^2$$

که با مجذور کردن دو طرف آن، به‌دست می‌آید:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)^2\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4$$

و سرانجام، با توجه به‌نابرابری (۴):

$$x_1x_2x_3x_4\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4$$

در همهٔ نابرابری‌هـایی که، در این‌جا، مورد استفاده قرار گرفته‌اند، علامت برابری وقتی، و تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_1=x_2=x_3=x_4$$

در حالت $k=3$، یعنی $n=2^3=8$، از نابرابری‌هـای زیر استفاده می‌کنیم:

$$(x_1x_2x_3x_4)(x_5x_6x_7x_8)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^4\left(\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\right)^4$$

و

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\cdot\frac{x_5+x_6+x_7+x_8}{4}\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_8}{8}\right)^2$$

که شبیه حالت قبلی، به‌دست می‌آید:

$$x_1x_2\cdots x_8\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_8}{8}\right)^8$$

با ادامهٔ این روش، درستی قضیه، برای ۴، ۸، ۱۶، ...، 2^k عدد مثبت، ثابت می‌شود.

اکنون، برای عدد دلخواه n، به‌این طریق عمل می‌کنیم. مثلاً $n=5$ می‌گیریم. واسطهٔ حسابی این ۵ عدد را m می‌نامیم و ۸ عدد (یعنی 2^3 عدد) x_1، x_2، x_3، x_4، x_5، m، m، m را در نظر می‌گیریم. برای این ۸ عدد داریم:

$$x_1x_2x_3x_4x_5m^3 \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+3m}{8}\right)^8 = m^8$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x_1x_2x_3x_4x_5 \leqslant m^5$$

این روش زیبای حل، متعلق به کوشی است.

اگر x_1، x_2، ...، x_n کمیت‌های متغیر مثبتی باشند، ولی مجموع یا حاصل‌ضرب آن‌ها، مقداری ثابت باشد، با توجه به‌نابرابری واسطه‌ها روشن می‌شود که:

۱) اگر مجموع چند متغیر مثبت، مقدار ثابتی باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی به‌حداکثر مقدار خود می‌رسد که این متغیرها با هم برابر باشند.

۲) اگر حاصل‌ضرب چند متغیر مثبت مقدار ثابتی باشد، مجموع آن‌ها وقتی به‌کمترین مقدار خود می‌رسد که، این متغیرها با هم برابر باشند.

یادداشت ۲. قضیهٔ ین‌سن (Jensen). ین‌سن با پیگیری گام به گام قضیهٔ کوشی (نابرابری واسطه‌ها)، این قضیه را آورد:

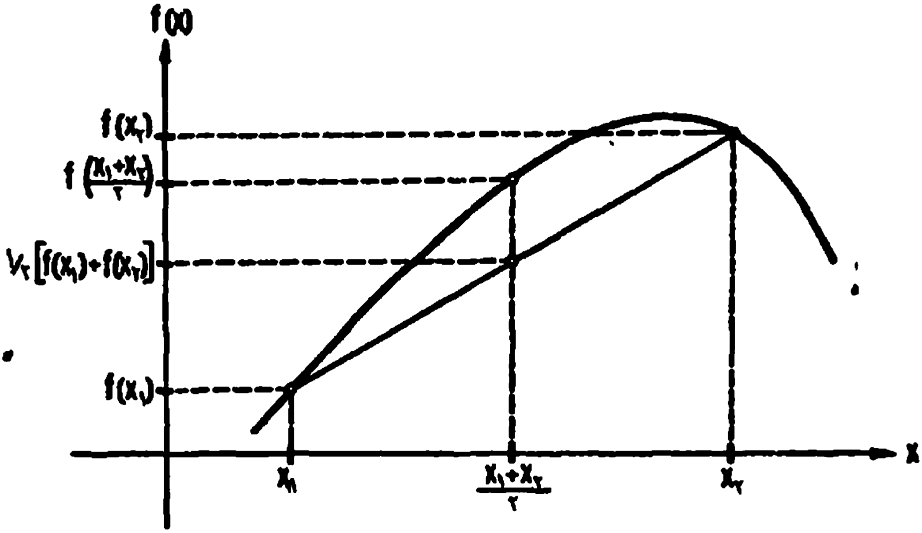
اگر تابع $f(x)$ دارای این ویژگی باشد که، برای هر دو مقدار حقیقی x_1 و x_2 از یک بازه که می‌تواند نامتناهی هم باشد، داشته باشیم:

$$f(x_1)+f(x_2) \leqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \qquad (1)$$

و اگر x_1، x_2، ...، x_n متعلق به‌همان بازه باشند، آن‌وقت داریم:

$$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n) \leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \qquad (2)$$

[اگر نابرابری (۱) را تنها به ازای $x_1=x_2$ به برابری تبدیل شود، آن وقت

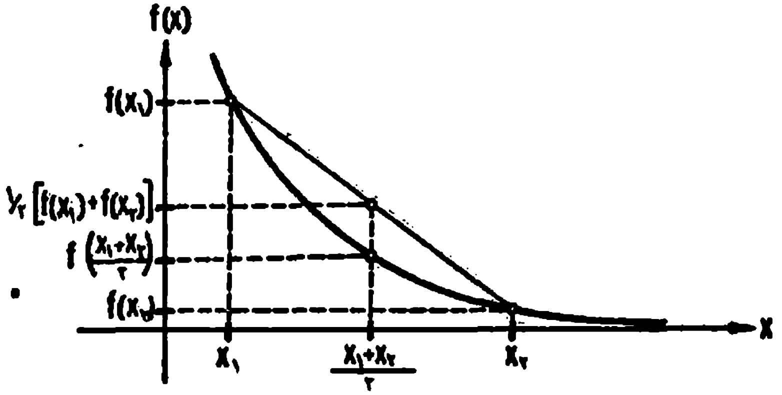


شکل ۷۳

نابرابری (۲)، تنها به‌ازای $x_n = \dots = x_۲ = x_۱$ به‌برابری تبدیل می‌شود.]

قبل از اثبات قضیه، به‌این نکته توجه می‌کنیم که، نابرابری (۱)، در فرض قضیهٔ ین‌سن، مفهومی هندسی دارد (شکل ۷۳). اگر دو نقطهٔ $(x_۱, f(x_۱))$ و $(x_۲, f(x_۲))$ را به‌هم وصل کنیم، وتری از نمودار $f(x)$ به‌دست می‌آید نقطهٔ وسط این وتر نباید بالاتر از نقطهٔ متناظر آن در روی نمودار، یعنی نقطهٔ به‌طول $\frac{x_۱ + x_۲}{۲}$ و به‌عرض $f\left(\frac{x_۱ + x_۲}{۲}\right)$ قرار گیرد. و البته، این وضع تنها وقتی پیش می‌آید که، در هیچ نقطه‌ای از بازهٔ مورد نظر، نمودار تابع $f(x)$، زیر وتر دلخواهی از نمودار (در این بازه) واقع نشود. تابعی که این ویژگی را داشته باشد، محدب (یا کوژ) نام دارد (دقیق‌تر: دراین‌حالت، تحدب نمودار تابع، به‌طرف جهت مثبت محور عرض است) در حالت عکس، تابع را مقعر (یا کاو) گویند (جهت تحدب نمودار به‌سمت جهت منفی محور عرض است؛ شکل ۷۴).

اکنون، به اثبات قضیهٔ ین‌سن می‌پردازیم. ابتدا، آن را برای $n = ۲^۲ = ۴$ ثابت می‌کنیم. نابرابری (۱) را برای $x_۱$ و $x_۲$ و، سپس، برای $x_۳$ و $x_۴$ می‌نویسیم؛ دو نابرابری حاصل را باهم جمع می‌کنیم و، دوباره، از نابرابری (۱) استفاده می‌کنیم:



شکل ۷۴

$$f(x_۱)+f(x_۲)+f(x_۳)+f(x_۴)\leqslant ۲\Big[f\Big(\frac{x_۱+x_۲}{۲}\Big)+$$
$$+f\Big(\frac{x_۳+x_۴}{۲}\Big)\Big]\leqslant ۲\Big[۲f\Big(\frac{x_۱+x_۲+x_۳+x_۴}{۴}\Big)\Big]$$

با همین روش (و البته، با عمل‌هایی بـه نسبت طولانی) ، می‌تـوان درستی نابرابری (۲) را، برای $n=۲^k$، ثابت کرد.

برای اثبات درستی نابرابری (۲)، درحالت کلی، باهمان روش‌کوشی $x'=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$ می‌گیریم و، با در نظر گرفتن (۲^k-n) جملهٔ اضافی، می‌نویسیم:

$$f(x_۱)+f(x_۲)+\cdots+f(x_n)+(۲^k-n)+f(x')\leqslant$$
$$\leqslant ۲^k f\Big(\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n+(۲^k-n)x'}{۲^k}\Big) \qquad (۳)$$

و چون داریم:

$$\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n+(۲^k-n)x'}{۲^k}=$$
$$=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n+۲^k\cdot x'-(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)}{۲^k}=x'$$

بنابراین، نابرابری (۳) به‌این صورت درمی‌آید:

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)+2^k f(x')-nf(x')\leqslant 2^k f(x')$$

و از آن‌جا، به رابطهٔ مطلوب می‌رسیم:

$$f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\leqslant nf\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

نابرابری واسطه‌ها دریادداشت ۱، حالت خاصی از نابرابری ین‌سن است. چند نمونه ازکاربرد این نابرابری‌ها را می‌آوریم:

a) با توجه به نابرابری واسطه‌ها داریم:

$$\log x_1x_2=\log x_1+\log x_2\leqslant 2\log\frac{x_1+x_2}{2}$$

و سپس، با توجه به قضیهٔ ین‌سن نتیجه می‌شود:

$$\log x_1+\log x_2+\cdots+\log x_n\leqslant n\log\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

که البته، به‌طور مستقیم، و از رابطهٔ (۲) یادداشت۱ هم به‌دست می‌آید.

b) توضیحی دربارهٔ مسألهٔ ۱۱، می‌دانیم:

$$\sin x_1\sin x_2=\frac{1}{2}[\cos(x_1-x_2)-\cos(x_1+x_2)],$$

$$\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}[1-\cos(x_1+x_2)]$$

(که دریادداشت پایان حل‌مسألهٔ ۱۰ هم‌آورده بودیم). x_1 و x_2 را زاویه‌های حاده، و مثبت می‌گیریم. باتوجه به دو رابطهٔ بالا داریم:

$$\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}-\sin x_1\sin x_2=\frac{1}{2}[1-\cos(x_1-x_2)]=\sin^2\frac{x_1-x_2}{2}$$

ازآن‌جا

$$\sin x\ \sin x_2=\sin^2\frac{x_1+x_2}{2}-\sin^2\frac{x_1-x_2}{2}$$

$$\sin x_1 \sin x_2 \leqslant \sin^2 \frac{x_1+x_2}{2}$$

و بالاخره

$$\log \sin x_1 + \log \sin x_2 \leqslant 2 \log \sin \frac{x_1+x_2}{2}$$

و باتوجه به قضیهٔ ین‌سن:

$$\log x_1 + \log x_2 + \dots + \log x_n \leqslant n \log \sin \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

که همیشه، برای زاویه‌های حاده و مثبت x_1، x_2،...، x_n، برقرار است. از این نابرابری می‌توان نتیجه گرفت:

$$\sin x_1 \sin x_2 \cdots \sin x_n \leqslant \sin^n \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \qquad (4)$$

و برابری تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$x_1 = x_1 = \dots = x_n$$

اگر $n=3$ و $x_1+x_2+x_3=90^\circ$، می‌توان x_1، x_2 و x_3 را نصف زاویه‌های یك مثلث دانست و، بنابر نابرابری (۴)، به‌دست می‌آید:

$$\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3 \leqslant \sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}$$

که همان نابرابری مسألهٔ ۱۱ (در راه حل b) و از دستور اولر) است.

c) کاربرد برای مسألهٔ ۱۴. اگر x_1 و x_2 را زاویه‌هایی بین ۰ و ۱۸۰ درجه بگیریم، داریم:

$$\sin x_1 + \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1+x_2}{2} \cos \frac{x_1-x_2}{2} \leqslant 2 \sin \frac{x_1+x_2}{2}$$

و، بنابراین، باتوجه به قضیهٔ ین‌سن خواهیم داشت:

$$\sin x_1+\sin x_2+\dots+\sin x_n\leqslant n\sin\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$$

و برابری تنها برای $x_1=x_2=\dots=x_n$ برقرار است.

وقتی x_1، x_2 و x_3، زاویه‌های یک مثلث قائم‌الزاویه باشند، از نابرابری اخیر، به‌همان نابرابری مسألهٔ ۱۴ می‌رسیم.

درهمهٔ این مثال‌ها، کار اصلی بر اثبات فرض قضیهٔ ین‌سن دربارهٔ تابع موردنظر بود ولی می‌توانیم، به‌جای آن، با تحقیق دربارهٔ جهت تحدب نمودار تابع، کار را انجام دهیم که، البته، مستلزم اندکی اطلاع از حُساب دیفرانسیلی است. در واقع، اگر تحدب نمودار $f(x)$ به‌سمت yهای مثبت باشد (فرضی که می‌تواند جانشین فرض قضیهٔ ین‌سن بشود)، باید مشتق دوم $f(x)$، یعنی $f''(x)$ نامثبت باشد. این مطلب را می‌توان به‌سادگی، در مورد مثال‌های بالا تحقیق کرد.

در a) داریم $f(x)=\log x$، پس $f'(x)=\frac{1}{x}$ و $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$.

در b): $f(x)=\log\sin x$، $f'(x)=\cot g x$ و در نتیجه

$$f''(x)=-\frac{1}{\sin^2 x}<0\quad(0<x<180^\circ)$$

و در c): $f(x)=\sin x$، $f'(x)=\cos x$ و

$$f''(x)=-\sin x<0\quad 0<x<180^\circ$$

۶۹. تلاش می‌کنیم، عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به‌دومجموعه طوری تقسیم کنیم که، هیچ‌کدام از آن‌ها، شامل تفاضل دوعضو خودش نباشد.

عدد ۲ نمی‌تواند درهمان مجموعه‌ای باشد، که عددهای ۱ و ۴ در آن وجود دارند، زیرا ۱ = ۱ − ۲ و ۲ = ۲ − ۴. بنابراین، ناچاریم، عدد ۲ را دریك مجموعه، و عددهای ۱ و ۴ را در مجموعه دیگر قرار دهیم. عدد ۳ نمی‌تواند درمجموعه دوم قرار گیرد، زیرا ۱ = ۳ − ۴؛ بنابراین، عدد ۳ باید متعلق به مجموعهٔ اول باشد. عدد ۵ باقی‌مانده است؛ این عدد نمی‌تواند متعلق

به‌مجموعهٔ اول باشد، زیرا $۲ = ۳ - ۵$ و $۳ = ۲ - ۵$؛ درمجموعهٔ دوم هم نمی‌تواند باشد، زیرا $۴ = ۱ - ۵$ و $۱ = ۴ - ۵$. بنابراین، چنین تقسیمی امکان ندارد.

۱۹۱۷

۷۰. از معادلهٔ (۱) به‌دست می‌آید $x=\frac{y-a}{۲}$، که اگر در معادلهٔ (۲) قرار دهیم، بعد از ساده‌کردن، خواهیم داشت:

$$۳y=۴b-a^{۲} \Rightarrow (۳y)^{۲}=۳(۴b-a^{۲}) \qquad (۳)$$

هر x و y گویایی که در معادله‌های (۱) و (۲) صدق کند، به‌ناچار در معادلهٔ (۳) هم صدق می‌کند. عدد درست $۳(۴b-a^{۲})$، تنها وقتی می‌تواند مجذور $۳y$ باشد که $۳y$ عددی درست باشد (a و b، عددهایی درست‌اند). بدجز این، سمت راست برابری (۳)، مضربی است از ۳، یعنی $۳y$ هم باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و، در نتیجه، y عددی است درست.

از معادلهٔ $۳y^{۲}=۴b-a^{۲}$ روشن است که y و a، یا هر دو زوج‌اند و یا هر دو فرد (اگر y عددی زوج باشد، $۳y^{۲}$ هم زوج می‌شود و، برای این که $۴b-a^{۲}$ زوج شود، باید a هم عددی زوج باشد. همین‌طور، برای وقتی که، y عددی فرد است). به این ترتیب، درهرحال، $y-a$ عددی است زوج و $x=\frac{y-a}{۲}$، عددی درست.

۷۱. ثابت می‌کنیم، در حالتی که رقم دهگان عدد $a^{۲}$ فرد باشد، رقم یکان آن برابر است با ۶. رقم یکان عدد a را c می‌گیریم، در این‌صورت، روشن است $a+c$ زوج و $a-c$ بر ۱۰ بخش‌پذیر است. بنابراین

$$a^{۲}-c^{۲}=(a+c)(a-c)$$

همیشه بر ۲۰ بخش‌پذیر است. از این‌جا نتیجه می‌گیریم که رقم‌های یکان $a^{۲}$ و $c^{۲}$ باهم برابراند و رقم‌های دهگان آن‌ها، هر دو زوج‌اند یا هر دو فرد. بنابراین، درحالتی که رقم دهگان $a^{۲}$، فرد است، c باید برابر ۴ یا ۶ باشد، زیرا مجذور بقیهٔ عددهای یك رقمی، رقم دهگان زوج دارند. چون مجذور

هردو عدد ۴ و۶، رقم یکانی برابر ۶دارند، بنابراین، رقم یکان a^2 (درحالت فرد بودن رقم دهگان آن)، برابر است با ۶.

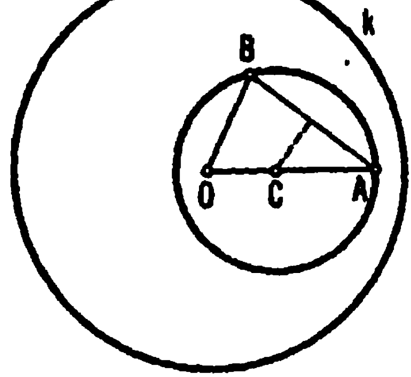
۷۲. نقطه‌های A و B را به‌مرکز O از دایرهٔ k وصل می‌کنیم. اگر P نقطه‌ای دلخواه از پاره‌خط OA یا پاره‌خط OB باشد، هر دایرهٔ به‌مرکز P و به شعاع PA (یا PB) در داخل دایرهٔ k قرار می‌گیرد. عمود منصف پاره‌خط AB (شکل ۷۵)، OA یا OB را قطع می‌کند؛ اگر این نقطهٔ برخورد را C بگیریم، دایرهٔ به‌مرکز C و به شعاع $CA=CB$ در داخل دایرهٔ kقرار دارد. همهٔ نقطه‌های مجاور C در روی این عمودمنصف، می‌توانند مرکز دایره‌هایی باشندکه از A و B می‌گذرند و در داخل دایرهٔ k قرار دارند.

۱۹۱۸

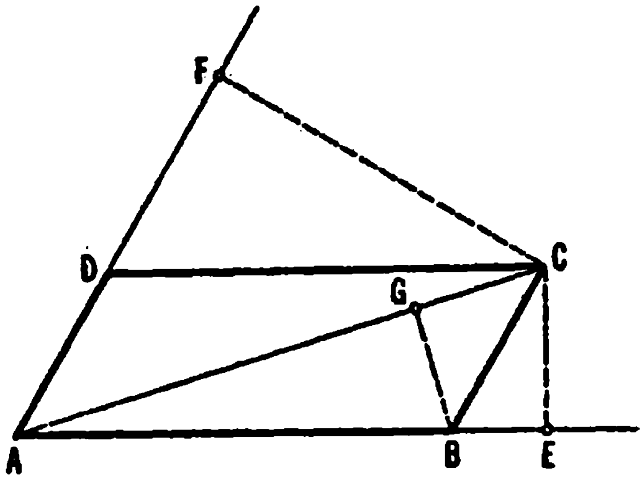
۷۳. G را پای عمود وارد از نقطهٔ B بر AC می‌گیریم (شکل ۷۶). چون AC، متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را به دو مثلث با زاویهٔ منفرجه تقسیم می‌کند، G نمی‌تواند روی A یا روی C قرار گیرد و روی پاره‌خط راست AC واقع است.

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BGA و AEC متشابه‌اند (در یك زاویهٔ حاده مشترك‌اند)؛ همچنین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AFC و CGB هم متشابه‌اند (دو زاویهٔ حادهٔ CAD و ACB برابرند)، بنابراین

$$\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AG} \text{ و } \frac{AC}{AF}=\frac{BC}{GC}$$



شکل ۷۵



شکل ۷۶

یعنی

$$AB \cdot AE = AC \cdot AG \text{ و } BC \cdot AF = AC \cdot GC$$

که از مجموع آن‌ها به‌دست می‌آید:

$$AB \cdot AE + BC \cdot AF = AC(AC + GC)$$

و چون $BC = AD$ و $AG + GC = AC$، بنابراین

$$ABAE + AD \cdot AF = AC^۲$$

این برابری، در حالت خاص، منجر به رابطهٔ فیثاغورث می‌شود: اگر $ABCD$ یك مستطیل باشد، این رابطه، به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$AB^۲ + BC^۲ = AC^۲$$

۷۴. باید عددهای درست و مثبت x و y و z را طوری جست‌وجو کنیم که داشته باشیم:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} = a \qquad (a\text{، عددی درست})$$

فرض می‌کنیم $x < y < z$. چون x و y و z، نمی‌توانند به ترتیب از ۱ و ۲ و ۳ کوچکتر باشند، داریم:

$$a = \frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} + \frac{۱}{z} \leqslant \frac{۱}{۱} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} < ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲$$

از $a<2$ نتیجه می‌شود: $a=1$ باتوجه به‌فرض $x<y<z$ به‌دست‌می‌آید: $\frac{1}{x}>\frac{1}{y}>\frac{1}{z}$ و درنتیجه

$$\frac{1}{x}<a=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}$$

و از نابرابری $\frac{1}{x}<a=1<\frac{3}{x}$ به‌دست می‌آید $1<x<3$، یعنی $x=2$ و $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$، وچون $\frac{1}{z}<\frac{1}{y}$، به‌نابرابری $\frac{1}{y}<\frac{1}{2}<\frac{2}{y}$ می‌رسیم که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $2<y<4$ یا $y=3$. اکنون، از رابطهٔ $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ به‌دست می‌آید: $z=6$.

به این ترتیب جوابهای معادله، عبارت است از

$$x=2،\ y=2،\ z=6$$

که مجموع عکس‌های آن‌ها، برابر با ۱ می‌شود.

۷۵. a) پیش‌قضیه. اگر برای هرعدد حقیقی x داشته باشیم:

$$f(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0 \qquad (1)$$

آن وقت، a، c و $ac-b^2$، عددهایی غیرمنفی هستند.

اثبات پیش‌قضیه براساس اتحاد زیرانجام می‌گیرد:

$$af(x)=(ax+b)^2+ac-b^2=(ax+b)^2-(b^2-ac) \qquad (2)$$

I. ابتدا ثابت می‌کنیم $a\geqslant 0$. اگر a منفی باشد، بنابر (۱)، برای هر x حقیقی داریم: $af(x)\leqslant 0$، یعنی، با توجه به (۲)

$$af(x)=(ax+b)^2-(b^2-ac)\leqslant 0$$

و یا، برای هرمقدار حقیقی x:

$$(ax+b)^2\leqslant b^2-ac \qquad (3)$$

ولی نابرابری (۳) نمی‌تواند، برای همهٔ مقدارهای x، برقرار باشد. می‌توان عددی مانند $M>1$ پیدا کرد که از b^2-ac بزرگتر باشد. اکنون اگر x را جواب معادلهٔ $ax+b=M$ بگیریم، به‌ازای آن، داریم:

$$(ax+b)^2=M^2>M>b^2-ac$$

که با نابرابری (۳) متناقض است. بنابراین، a نمی‌تواند منفی باشد.

II. اکنون ثابت می‌کنیم $c\geqslant 0$. چون $f(x)$، برای هرعددحقیقی x، منفی نیست، برای $x=0$، به‌دست می‌آید:

$$f(0)=c\geqslant 0$$

III. برای این‌که ثابت‌کنیم $ac-b^2\geqslant 0$، درنظر می‌گیریم:

اگر $a>0$ و x ریشهٔ‌معادلهٔ $ax+b=0$ باشد $\left(x=-\dfrac{b}{a}\right)$، چون $af(x)$ نامنفی است، از (۲) به‌دست می‌آید:

$$af\left(-\frac{b}{a}\right)=ac-b^2\geqslant 0$$

اگر $a=0$، آن‌وقت رابطهٔ (۱) به‌صورت $f(x)=2bx+c$ درمی‌آید. چون $f(x)$، برای همهٔ مقدارهای x، نامنفی است، b باید برابر صفر باشد (درغیراین‌صورت، $f(x)$، برای همهٔ‌مقدارهای $x<-\dfrac{c}{2b}$ منفی می‌شود). بنابراین، چون a و c نامنفی هستند، به‌دست می‌آید:

$$ac-b^2=ac\geqslant 0$$

b) عکس قضیه. اگر داشته باشیم:

$$a\geqslant 0,\quad c\geqslant 0;\quad ac-b^2\geqslant 0$$

آن وقت، برای همهٔ مقدارهای حقیقی x خواهیم داشت:

$$f(x)=ax^2+2bx+c\geqslant 0$$

از اتحاد $af(x)=(ax+b)^2+ac-b^2$ نتیجه می‌شود:

$$af(x) \leqslant b^۲ - ac$$

و این نابرابری به‌معنای آن است که $af(x) \geqslant ۰$.

برای $a > ۰$، از نابرابری $af(x) \geqslant ۰$ به‌دست‌می‌آید: $f(x) \geqslant ۰$.

برای $a = ۰$ از شرط $ac - b^۲ \geqslant ۰$ نتیجه می‌شود $-b^۲ \geqslant ۰$ که تنها برای $b = ۰$ برقرار است. دراین حالت، برای هر عدد حقیقی x، داریم: $f(x) = c$.

به‌این‌ترتیب، درستی نابرابری $f(x) \geqslant ۰$، درهرحالتی، ثابت شد.

c) حل مسألهٔ اصلی. چون برای هر عدد حقیقی x داریم:

$$ax^۲ + ۲bx + c \geqslant ۰ \quad \text{و} \quad px^۲ + ۲qx + r \geqslant ۰$$

بنابراین، بنابر پیش قضیه:

$$a \geqslant ۰، \quad c \geqslant ۰، \quad p \geqslant ۰، \quad r \geqslant ۰$$

و
$$ac - b^۲ \geqslant ۰، \quad pr - q^۲ \geqslant ۰$$

یا
$$ac \geqslant b^۲، \quad pr \geqslant q^۲$$

ازاین نابرابری‌ها، به‌سادگی نتیجه می‌شود:

$$ap \geqslant ۰، \quad cr \geqslant ۰، \quad acpr - b^۲q^۲ \geqslant ۰$$

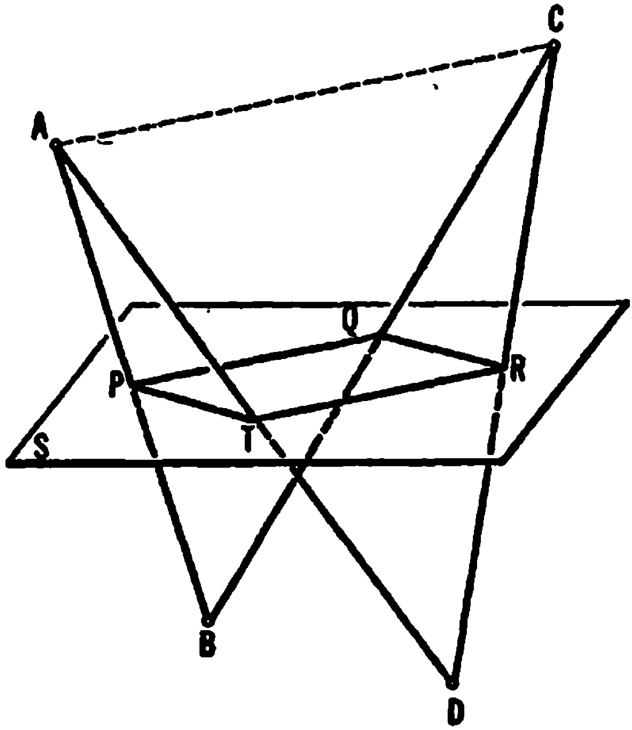
و بنابرعکس قضیه، باید برای هر مقدار حقیقی x، داشته باشیم:

$$apx^۲ + ۲bqx + cr \geqslant ۰$$

۱۹۲۲

۷۶. صفحهٔ S (شکل ۷۷)، از دونقطهٔ A و B به‌یک‌فاصله است، نقطهٔ A در یک طرف ونقطهٔ B در طـرف دیگر آن قرار گرفته است. صفحهٔ S، همین وضع را نسبت به هردونقطهٔ B و C یا C و D و یا DوA هم دارد.

دونقطه‌ای که در دوطرف یك صفحه‌اند، وقتی ازصفحه به‌یك فاصله‌اند که، این‌صفحه، از وسط پاره‌خطی بگذرد که دونقطه را به‌هم وصل کرده‌است. بنابراین، باید ثابت کنیم، نقطه‌های P، Q، R و T، به‌ترتیب وسط‌پاره‌خطهای



شکل ۷۷

AB، BC، CD و DA بریك صفحه قرار دارند.

S را صفحه‌ای می‌گیریم که از سه نقطهٔ P، Q و R گذشته باشد. در مثلث ABC، پاره‌خط PQ، وسط دو ضلع مثلث را به‌هم وصل کرده است، بنابراین با ضلع سوم مثلث موازی است، یعنی $AC \| PQ$. به همین ترتیب، در مثلث ADC داریم: $TR \| AC$. از این‌جا نتیجه می‌شود: $TR \| PQ$. پس T درهمان صفحه‌ای قرار داردکه سه نقطهٔ P، Q و R تشکیل داده‌اند.

درحالتی که وسط پاره‌خطهای AB، BC و CD روی یك‌خط‌راست باشند، هرصفحهٔ دلخواهی که از این سه نقطه بگذرد، جوابی ازمسأله است.

۷۷. داریم:

$$(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)=x^4+(a+c)x^3+$$
$$+(b+ac+d)x^2+(bc+ad)x+bd$$

و این عبارت، وقتی با x^4+2x^2+2x+2 متحد است که داشته باشیم:

$$a+c=0 \qquad (1)$$

$$b+ac+d=۲ \qquad (۲)$$

$$bc+ad=۲ \qquad (۳)$$

$$bd=۲ \qquad (۴)$$

چون a، b، c و d عددهایی درست‌اند، در معادلهٔ (۴) باید یکی از عامل‌ها فرد (۱+ یا ۱−) و دیگری زوج باشد (۲+ یا ۲−). فرض کنید b فرد و d زوج باشد. از معادلهٔ (۳) نتیجه می‌شود که bc باید زوج باشد که از آن‌جا، c عددی زوج می‌شود. اکنون، به معادلهٔ (۲) توجه می‌کنیم: درسمت‌چپ، b فرد و d و c زوج‌اند، بنابراین سمت چپ عددی فرداست؛ و این، ممکن نیست، زیرا سمت راست آن، عددی زوج است.

به‌همین‌ترتیب، اگر b را زوج و d را فرد بگیریم، بازهم به‌تناقض می‌رسیم. بنابراین، عبارت درجهٔ چهارم مفروض، قابل تجزیه به‌دو عبارت درجهٔ دوم، با ضریب‌های درست، نیست.

یادداشت. قضیهٔ ایزن‌شتاین (Eisenstein) مسالهٔ ۷۷، حالت‌خاصی از قضیهٔ زیر است:

اگر درچند جمله‌ای باضریب‌های درست

$$f(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\dots+a_{n-۱}x+a_n$$

$a_۱$، $a_۲$، ...، a_n مضربی از عدد اول p، $a_۰\neq ۰$ نسبت به p اول و a_n بر $p^۲$ بخش‌ناپذیر باشد،آن‌وقت $f(x)$ را نمی‌توان به‌صورت چندجمله‌ای‌های با درجهٔ پایین‌تراز n وضریب‌های درست تجزیه‌کرد.

این قضیه، که به‌چند جمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر مربوط‌می‌شود، درسال ۱۸۴۶ به وسیلهٔ شونه‌مان (Schoenemann) و در سال ۱۸۵۰ به وسیلهٔ ایزن‌شاین ثابت شد، ولی اغلب به‌نام دومی مشهور شده است.

۷۸. با توجه به‌شرط مسأله، هرجمله از مجموع

$$S=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\dots+\frac{۱}{n}$$

به‌صورت $\frac{1}{2^r 3^s}$ است که، در آن، r و s عددهایی درست و نامنفی‌اند.

t را بزرگترین توانی می‌گیریم که بین rها و sها ظاهر شده است. دراین‌صورت، هرجملهٔ ازمجموع S، حاصل‌ضربی است ازجمله‌های تصاعد هندسی

$$U=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots+\frac{1}{2^t}$$

درجمله‌ای از تصاعد هندسی

$$V=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^t}$$

به‌زبان دیگر، هرجمله ازمجموع S، یکی از جمله‌های عبارت UV است. چون a، b، ...، n، عددهایی مختلف‌اند، بنابراین جمله مختلف S، متناظرند با جمله‌های مختلف $U.V$. بنابراین $S\leqslant U.V$.

ثابت می‌کنیم $u<2$ و $V<\frac{3}{2}$؛ که از آن‌جا نتیجه می‌شود $S<3$.

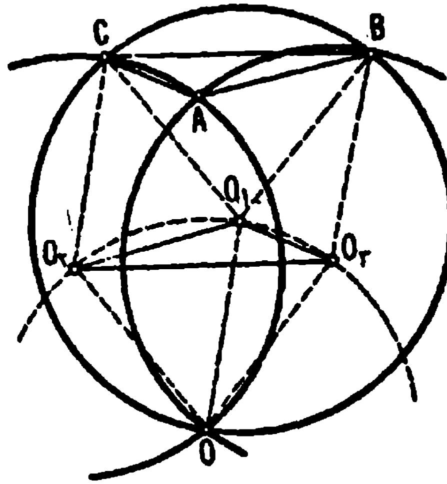
داریم:

$$U=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{t+1}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

$$V=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{t+1}}{1-\frac{1}{3}}<\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

۱۹۲۳

۷۹. سه دایرهٔ مفروض، به‌ترتیب، ازنقطه‌های (O,B,C) و (O,C,A)



شکل ۷۸

و $(O،A،B)$ می گـذرند. مرکزهـای این سه‌دایره، یعنی O_1 و O_2 و O_3، از نقطهٔ O به‌یك فاصله‌اند: به‌فاصلهٔ r (شکل ۷۸).

بنابراین، دایـرهٔ محیطی مثلث $O_1O_2O_3$، شعاعی برابر r دارد. اگر بتوانیم برابری دو مثلث ABC و $O_1O_2O_3$ را ثابت کنیم، آن‌وقت می‌توانیم نتیجه بگیریم: دایره‌ای‌که برسه نقطهٔ A و B و C می گذرد، شعاعی برابر r دارد.

چهارضلعی‌هـای BO_3OO_1 و CO_2OO_1 لـوزی هستند، زیـرا همهٔ ضلع‌های آن‌ها، اندازه‌ای برابر r دارنـد. بنابراین O_3B و O_2C با OO_1 موازی و مساوی‌اند. ازاین‌جا، چهارضلعی BCO_2O_3 متوازی‌الاضلاع است و $BC = O_2O_3$. به‌همین‌ترتیب بااستفاده‌ازلوزی‌های AO_3OO_2 و BO_1OO_3، ثابت‌می‌شود $AB = O_1O_2$ و، سرانجام، $AC = O_1O_3$. به‌این‌ترتیب، برابر-بودن دو مثلث ABC و $O_1O_2O_3$ ثابت شد.

۸۰. راه‌حل اول. کافی است ثابت کنیم، ضریب‌های $q^k(k، 1، 2، \ldots، n)$، در دوطرف برابری، باهم‌برابرند. برابری مطلوب‌را (۱) می‌نامیم. درسمت چپ برابری (۱)، q^k تنها درجمله‌هایی ظاهر می‌شودکه، درآن‌ها، اندیس i از $C_n^{i+1}s_i$ بزرگتر یـا برابر k بـاشد، بنابراین، ضریب q^k درسمت چپ برابری (۱) چنین است:

$$\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k+2}+\dots+\binom{n+1}{n+1} \qquad (2)$$

برای محاسبهٔ ضریب q^k درسمت راست برابری (۱)، جمله $\left(\frac{1+q}{2}\right)^j$ را درنظرمی‌گیریم ($j \geqslant k$)، این جمله، باتوجه به قضیهٔ دوجمله‌ای، به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\left(\frac{1+q}{2}\right)^j=\frac{1}{2^j}(q+1)^j=$$

$$\frac{1}{2^j}=\left[\binom{j}{j}q^j+\binom{j}{j-1}q^{j-1}+\dots+\binom{j}{1}q+1\right]$$

دراین رابطه، $j=k$، $j=k+1$،...، jn می‌گیریم، با محاسبهٔ ضریب q^k درهریک‌ازعبارت‌های‌حاصل، مجموع این‌ضریب‌ها، چنین‌می‌شود:

$$\frac{1}{2^k}\binom{k}{k}+\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k+1}{k}+\dots+\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$$

چون سمت راست برابری (۱)، شامل عامل 2^n است، ضریب q^k در سمت راست برابری (۱) چنین می‌شود:

$$2^{n-k}\binom{k}{k}+2^{n-k-1}\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n}{k} \qquad (3)$$

اکنون، باید برابری دوعبارت (۲) و (۳) را ثابت‌کنیم. اثبات را به‌کمك استقرا روی $n-k$ انجام می‌دهیم. ابتدا ثابت می‌کنیم، دو عبارت (۲) و (۳) برای $n-k=0$، یعنی $n=k$، درست است. دراین‌حالت، عبارت (۲) به‌صورت $\binom{k+1}{k+1}=1$ وعبارت(۳) به‌صورت $2^0\binom{k}{k}=1$ درمی‌آیند. بنابراین عبارت‌های (۲) و (۳)، برای $n=k$، برابرند.

اکنون‌فرض‌می‌کنیم، عبارت‌های(۲)و(۳)، برای‌هرکدام ازمقدارهای

$$n-k=0, 1, 2, \dots, m-1$$

برابر باشند، یعنی برای $n-k<m$ داشته باشیم:

$$\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k+2}+\dots+\binom{n+1}{n+1}=$$

$$=2^{n-k}\binom{k}{k}+2^{n-k-1}\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n}{k} \qquad (4)$$

ثابت‌می‌کنیم که، دراین‌صورت، برابری (۴) برای $n-k=m$ هم برقرار است.
سمت چپ (۴) را با، استفاده از اتحاد

$$\binom{n+1}{k+1}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$$

به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}\right]+\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}\right]+$$

$$+\dots+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]+\binom{n}{n}$$

که بعداز ساده‌کردن، چنین می‌شود:

$$\binom{n}{k}+2\left[\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\dots+\binom{n}{n}\right] \qquad (2')$$

از آن‌جا که $n-(k+1)=(n-1)-k<m$، بنابراین می‌توان از فرض استقرا، یعنی درستی برابری (۴) برای $n-k<m$، در مورد مقدار داخل کروشه استفاده کنیم. اگر در برابری (۴)، n را به $n-1$ تبدیل کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k+2}+\dots+\binom{n}{n}=$$

$$=2^{n-1-k}\binom{k}{k}+2^{n-2-k}\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n-1}{k}$$

اگر دوطـرف این برابری را در ۲ ضرب و، سپس، به هردوطرف $\binom{n}{k}$ را اضافه کنیم، نتیجه می‌شود:

$$\binom{n}{k}+۲\left[\binom{n}{k+۱}+\binom{n}{k+۲}+\cdots+\binom{n}{n}\right]=$$
$$=۲^{n-k}\binom{k}{k}+۲^{n-۱-k}\binom{k+۱}{k}+\cdots+\binom{n-۱}{k}+\binom{n}{k}$$

عبارت سمت چپ در برابری بالا، همان $(۲')$ است که با (۲) فرقی ندارد؛ درطرف راست‌هم، عبارت (۳) وجـود دارد. بنابراین، (۲) و (۳)، به‌ازای $n-k=m$ هم برابرنـد؛ یعنی ضریب‌های q^k در دوطـرف رابطهٔ (۱)، برابرند و برابری (۱)، یك اتحاد است.

راه‌حل دوم، اتحاد (۱) را، ابتدا برای $q\neq۱$ و، سپس، برای $q=۱$ ثابت می‌کنیم. درحالت $q\neq۱$، s_n مجموع n جمله از یـك تصاعد هندسی است و بنابراین

$$s_n=\frac{۱-q^{n-۱}}{۱-q} \qquad (۲)$$

به‌همین‌ترتیب، برای S_n:

$$S_n=\frac{۱-\left(\frac{۱+q}{۲}\right)^{n+۱}}{۱-\frac{۱+q}{۲}}=۲\times\frac{۱-\left(\frac{۱+q}{۲}\right)^{n+۱}}{۱-q} \qquad (۳)$$

باتوجه‌به‌رابطهٔ (۲) داریم: $(۱-q)s_k=۱-q^{k+۱}$. اگر سمت‌چپ برابری (۱) را در $۱-q$ ضرب کنیم، چنین می‌شود:

$$\binom{n+۱}{۱}(۱-q)+\binom{n+۱}{۲}(۱-q^۲)+\binom{n+۱}{۳}(۱-q^۳)+$$
$$+\cdots+\binom{n+۱}{n+۱}(۱-q^{n+۱}) \qquad (۲)$$

چون $1-q^{\circ}=0$، بنابراین، اگر مقدار $(1-q^{\circ})\binom{n+1}{0}$ را به‌عبارت (۴) اضافه کنیم، درمقدار آن تغییری حاصل نمی‌شود. دراین‌صورت، عبارت (۴) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\left[\binom{n+1}{0}\cdot 1+\binom{n+1}{1}\cdot 1+\dots+\binom{n+1}{n+1}\cdot 1\right]-$$

$$-\left[\binom{n+1}{0}q^{\circ}+\binom{n+1}{1}\cdot q+\dots+\binom{n+1}{n+1}q^{n+1}\right]$$

عبارت داخل کروشه اول، بسط $(1+1)^{n+1}$ وعبارت داخل کروشهٔ دوم، بسط $(1+q)^{n+1}$ است. به‌این‌ترتیب، اگر عبارت سمت چپ برابری (۱) را در $(1-q)$ ضرب کرده باشیم، حاصل آن برابر است با

$$(1+1)^{n+1}-(1+q)^{n+1}=2^{n+1}-(1+q)^{n+1}=$$

$$=2^{n+1}\left[1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\right]$$

اکنون، عبارت‌سمت‌راست برابری (۱) را در $1-q$ ضرب‌می‌کنیم، باتوجه به (۳) برای S_n، به‌دست می‌آید:

$$2^n(1-q)S_n=2^n\cdot 2\left[1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\right]=$$

$$=2^{n+1}\left[1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n+1}\right]$$

به‌این‌ترتیب، باشرط $1-q\neq 0$ (یعنی $q\neq 1$)، دوطرف برابری (۱) باهم برابرند.

درحالت $q=1$، داریم: $s_n=S_n=n+1$. سمت‌چپ‌برابری (۱)، برابر است با

$$\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}\cdot 2+\binom{n+1}{3}\cdot 3+\dots+\binom{n+1}{n+1}\cdot(n+1) \quad (5)$$

با توجه به‌رابطهٔ ترکیب $\binom{l}{k}=\frac{l!}{k!(l-k)!}$، عبارت (۵)، به‌این صورت درمی‌آید:

$$\frac{(n+۱)!}{n!}+\frac{۲(n+۱)!}{۲(n-۱)!}+\frac{۳(n+۱)!}{۳!(n-۲)!}+\dots+\frac{(n+۱)(n+۱)!}{(n+۱)!}=$$

$$=(n+۱)\left[۱+\frac{n!}{(n-۱)!}+\frac{n!}{۲!(n-۲)!}+\dots+\frac{n!}{n!}\right]=$$

$$=(n+۱)\left[\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\dots+\binom{n}{n}\right]=$$

$$=(n+۱)(۱+۱)^n=(n+۱)۲^n$$

و این مقدار، همان S_n. ۲^n، در حالت $q=۱$ است. برای $q=۱$ هم، درستی اتحاد (۱) ثابت شد.

۸۱. قدرنسبت تصاعد را d می‌گیریم:

$$a_{r+۱}=a_r+d \text{ و } a_{r+s}=a_r+sd$$

چون d عددی است طبیعی و $a\geqslant ۱$، همهٔ جمله‌های دیگر تصاعد از واحد بزرگترند. جمله‌ای مانند a_r را درنظر می‌گیریم $(a_r>۱)$ وفرض می‌کنیم $s=a_r$. دراین‌صورت داریم:

$$a_{r+s}=a_r+a_rd=a_r(۱+d)$$

یعنی a_{r+s}، عددی مرکب است.

۱۹۲۴

۸۲. فرض می‌کنیم: $a\geqslant b\geqslant c$. عددهای a^n، b^n و c^n، وقتی می‌توانند به‌عنوان طول ضلع‌های یك مثلث به‌حساب آیندكه برای هر n داشته باشیم:

$$a^n<b^n+c^n \Rightarrow a^n-b^n<c^n$$

از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$(a-b)(a^{n-1}+ba^{n-2}+\dots+b^{n-2}a+b^{n-1})<c_n \quad (1)$$

چون $c\leqslant a$ و $c\leqslant b$، بنابراین، عامل دوم درسمت راست‌نابرابری (۱)، از nc^{n-1} کوچکتر نیست، یعنی داریم:

$$a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+ab^{n-2}+b^{n-1}\geqslant nc^{n-1}$$

به‌این‌ترتیب، با توجه به (۱)، باید برای ضلع‌های c^n، b^n و a^n از مثلث داشته باشیم:

$$c^n>(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n+1})\geqslant(a-b)nc^{n-1}$$

یعنی برای هر n داشته باشیم:

$$a-b<\frac{c}{n} \quad (2)$$

و این، تنها وقتی ممکن است که $a=b$ باشد.

۸۴۰ فاصلهٔ P ازنقطهٔ O را r وفاصلهٔ P ازخط‌راست l را ρ می‌نامیم. می‌خواهیم، مکان P را طوری پیدا کنیم که، برای آن، داشته باشیم:

$$r+\rho=\alpha$$

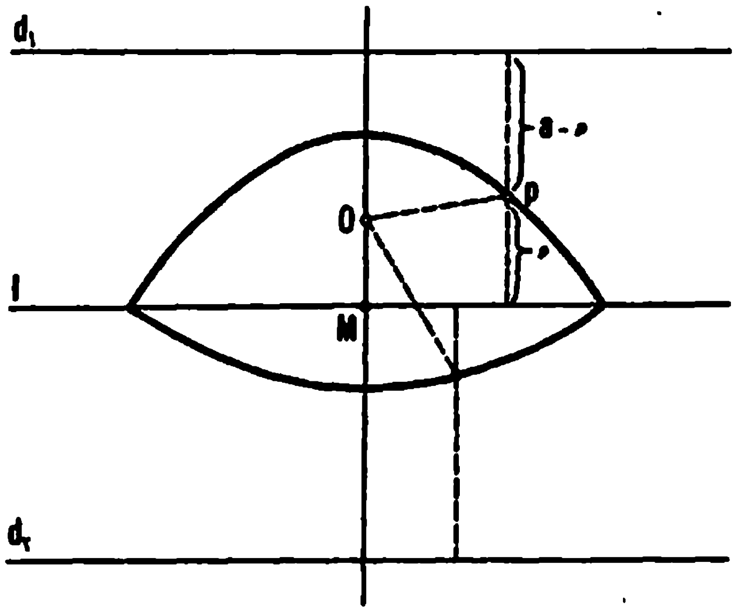
درحالتی که فاصلهٔ O ازخط راست l بزرگتراز α باشد، مسأله جواب ندارد. درحالتی که فاصلهٔ O از l برابر α باشد، مکان P عبارت‌است از پاره‌خط OM، که از O بر l عمود شده است (شکل ۷۹).

به‌حالتی می‌پردازیم که فاصلهٔ O از خط‌راست l کمتراز α باشد.

دو خط‌راست d_1 و d_2 را موازی l_2 و به‌فاصلهٔ α از آن، رسم می‌کنیم. نقطهٔ P را در داخل نوار بین l و d_1 درنظر می گیریم. اگر این نقطهٔ متعلق به‌مکان باشد، باید برای آن داشته باشیم:

$$r=\alpha-\rho$$

ازطرف دیگر، فاصلهٔ بین دوخط راست موازی l و d_1 برابر است با α؛



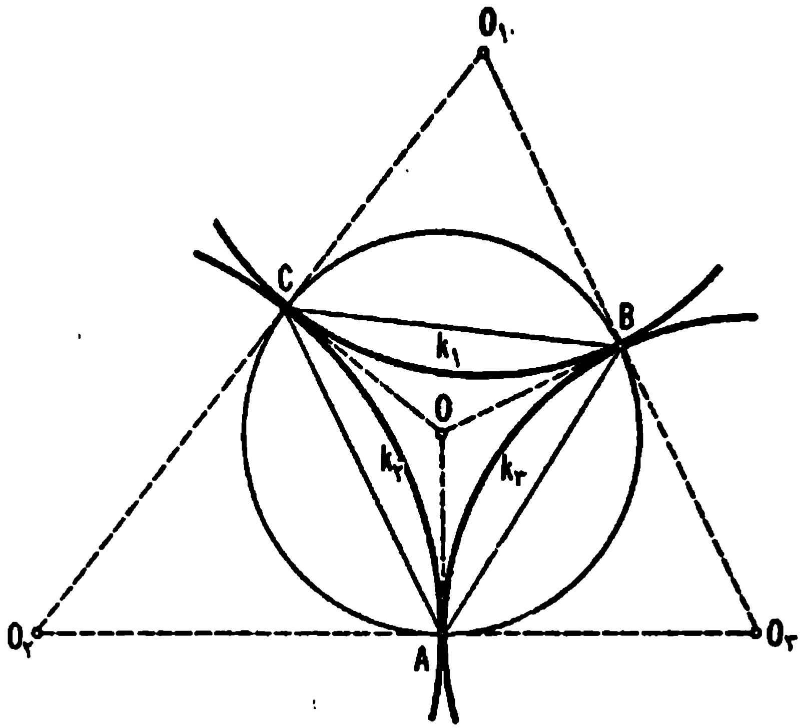
شکل ۷۹

بنا براین، فاصلهٔ نقطهٔ P از d_1 برابرمی‌شود با $\alpha-\rho$، یعنی r. به‌این‌ترتیب، نقطهٔ P باید از نقطهٔ O و خط راست d_1 به‌یك‌فاصله‌باشد، مکان هندسی چنین نقطه‌ای عبارت است‌از یك سهمی به‌کانون O و باخط هادی d_1. البته، کمانی ازاین‌سهمی‌جزو مکان‌است‌که درنواربین l و d_1 محصور باشد. به‌همین‌ترتیب در نوار بین l و d_2 هم، کمانی ازیك سهمی دیگر به‌کانون O وباخط هادی d_2 به‌دست می‌آید.

مکان مطلوب، عبارت است‌از دوکمان مزبور ازسهمی‌ها.

۸۴. O_1، O_2 و O_3 را مرکزهای دایره‌های مجهول می‌گیریم (شکل ۸۰). اگر مثلاً دو دایره به‌مرکزهای O_2 و O_3 را درنظر بگیریم، مماس مشترك آن‌ها درنقطهٔ A، همان محور اصلی دو دایره، یعنی مکان هندسی نقطه‌هایی است‌که از دو دایرهٔ k_2 و k_3 به‌یك قوت‌اند (یادداشت‌های ۱ و ۲ را درپایان حل ببینید). بنا براین، سه‌محور اصلی زوج دایره‌های (k_2, k_3)، (k_1, k_3) و (k_1, k_2) درنقطه‌ای مانند O به‌هم‌می‌رسند (مرکزاصلی‌سه‌دایره). درضمن

$$OA=OB=OC$$



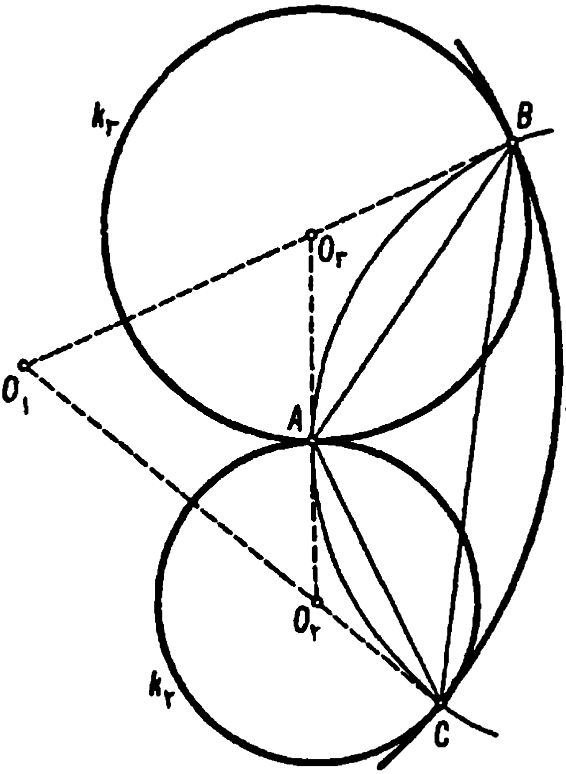
شکل ۸۵

(مرکز اصلی، از سه‌دایره به‌یك قـوت است). درواقع، O، مرکز دایره‌ای است که از سه نقطهٔ A و B و C می‌گذرد؛ و روشن است که ضلع‌های مثلث $O_1O_2O_3$ (ویا اگـر لازم بـاشد، امتداد ضلع‌ها) ازنقطه‌هـای AوB و C می‌گذرند (خط بین دومرکز ازنقطهٔ تماس دو دایره عبور می‌کند)ودرضمن، بر OA، OB و OC عمودند.

به‌این ترتیب، دایرهای مجهول k_1، k_2 و k_3 را می‌توان با روش‌زیر رسم کرد: دایـرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم ؛ مماس‌هـای بر این دایره‌را، درنقطه‌های A، B و C می‌کشیم؛ از برخورد این‌مماس‌ها،مرکزهای سه دایرهٔ k_1، k_2 و k_3به‌دست می‌آید.

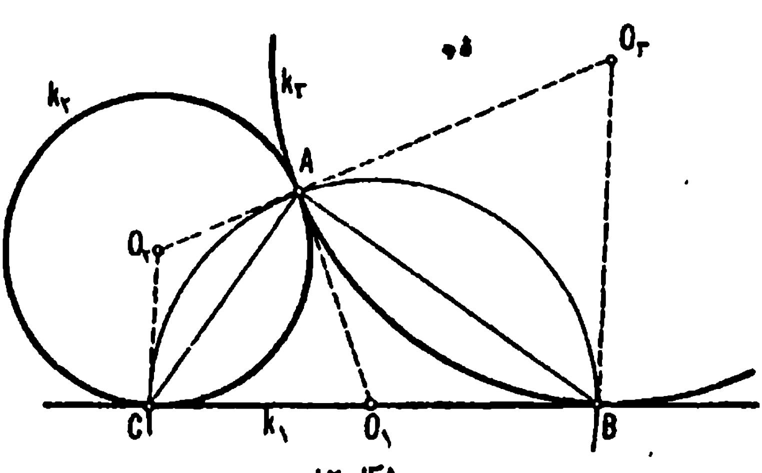
درحالتی که سه‌زاویهٔ مثلث ABC حاده باشند، دایره‌های k_1، k_2 وk_3 دو به‌دو مماس خارج‌اند (شکل ۸۰).

درحالتی که‌یکی‌از زاویه‌های‌مثلثABC منفرجه باشد، دو دایرهٔمماس خارج‌اند و بر دایرهٔ سوم، از داخل مماس‌اند (شکل ۸۱).



شکل ۸۱

اگر یکی از زاویه‌های مثلث ABC قائمه باشد، از سه مماسی که در نقطه‌های A، B و C بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم می‌کنیم، دو مماس با هم موازی می‌شوند و، بنابراین، در این حالت، مسأله جواب ندارد (شکل ۸۲) ولی در این حالت، می‌توان گفت که، یکی از دایره‌ها به‌خط راست تبدیل شده است و دو دایرهٔ دیگر، که مماس خارج‌اند، در یک‌طرف این خط راست واقع



شکل ۸۲

و بر آن مماس‌اند.

یادداشت۱ . قوت نقطه نسبت به‌دایره. اگر از نقطهٔ مفروض P، دوخط راست طوری رسم کنیم که اولی، در نقطه‌های M و N و دومی در نقطه‌های M' و N' دایره را قطع کنند (M' و N' می‌توانند بر هم منطبق باشند) ، داریم:

$$PM \cdot PN = PM' \cdot PN'$$

برای اثبات، از تشابه دومثلث PMN' و PNM' استفاده می کنیم:

$$\frac{PN}{PM'} = \frac{PN'}{PM} \Rightarrow PM \cdot PN = PM' \cdot PN'$$

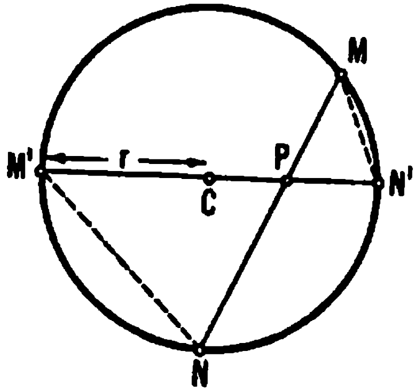
اگر M' و N' در نقطهٔ T برهم منطبق باشند (یعنی MT بردایره مماس باشد)، از تشابه دومثلث PMT و PNT به‌دست می‌آید:

$$\frac{PM}{PT} = \frac{PT}{PN} \Rightarrow PT^{2} = PM \cdot PN$$

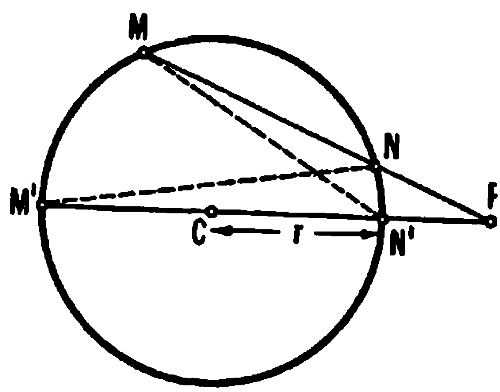
اگر شعاع دایـره را r وفاصلهٔ نقطهٔ P تا مرکـز دایره را d بنامیم، می‌توان (باتوجه به‌شکل) نوشت:

$$PM \cdot PN = PM' \cdot PN' = (d+r)(d-r) = d^{2} - r^{2}$$

و درحالتی که، نقطهٔ P، در داخل دایره باشد:



شکل ۸۴



شکل ۸۳

$$PM \cdot PN = PM' \cdot PN' = (r+d)(r-d) = r^2 - d^2$$

تعریف. اگرنقطهٔ P را بـه‌فاصلهٔ d ازمرکز دایره‌ای به‌شعاع r بگیریم، مقدار $d^2 - r^2$ را، قوت نقطهٔ P نسبت به‌دایره گویند.

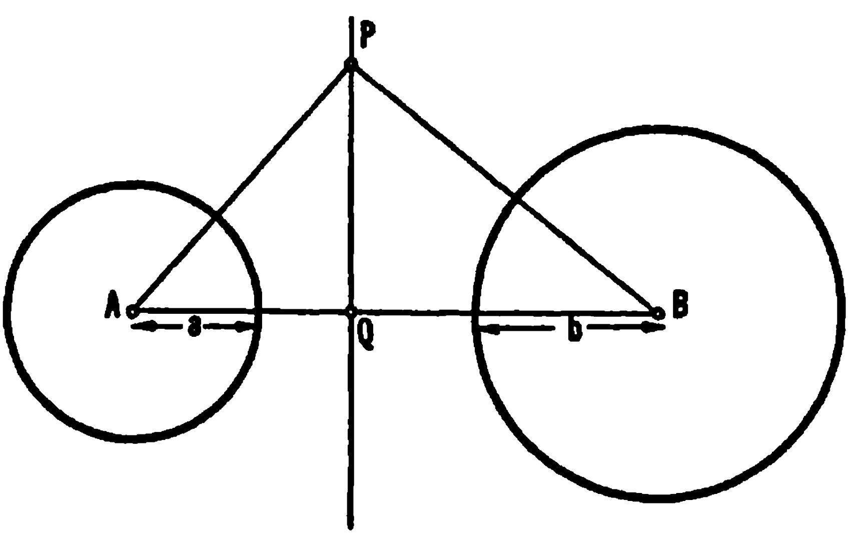
وقتی P درخارج دایره باشد، قوت آن نسبت به‌دایره مثبت، و اگر P روی دایره باشد، قوت آن نسبت بـه‌دایره صفر، واگر P داخل دایره باشد، قوت آن نسبت به‌دایره منفی است.

یادداشت ۲. مکان هندسی نقطه‌هایی که، نسبت به دو دایره، به‌یك قوت باشند، خطراستی است (به‌نام محوراصلی)، که برخط‌المرکزین عموداست.

اثبات. A را مرکزدایرهٔ k_1، B را مرکزدایرهٔ k_2، P را نقطه‌ای از صفحهٔ دو دایرهٔ k_1 و k_2 وبه‌یك قـوت نسبت به دو دایره، وبالاخره، Q را پای عمود وارد از P بر AB فرض می‌کنیم (شکل ۸۵). اگرشعاع دایره‌های k_1 و k_2 را، به‌ترتیب، a و b بگیریم، چون قوت نقطهٔ P را نسبت به‌دودایرهٔ k_1 و k_2، برابرفرض کرده‌ایم، به‌دست می‌آید:

$$PA^2 - a^2 = PB^2 - b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 = PB^2 - PA^2$$

ازطرف دیگر، با توجه به‌قضیهٔ فیثاغورث، داریم:



شکل ۸۵

$$PB^2=PQ^2+QB^2,\ PA^2=PQ^2+QA^2$$

بنا بر این

$$b^2-a^2=(PQ^2+QB^2)-(PQ^2+QA^2)=QB^2-QA^2$$

اکنون، با توجه به راه حل اول مسألهٔ ۵۷، مکان هندسی مطلوب، خط راستی است که از P بر AB عمود شود (و از نقطهٔ Q بگذرد).

درحالتی‌که k_1 و k_2 درنقطه‌های C و D متقاطع باشند، مکان مطلوب خط‌راستی است‌که از دونقطهٔ C و D می‌گذرد (زیرا، قوت C و D، نسبت به هر دو دایره، برابرصفراست و، بنابراین، روی خط‌راستی قرار دارند‌که نقطه‌های واقع برآن، ازدو دایره به‌یك قوت‌اند).

درحالتی‌که دودایرهٔ k_1 و k_2 برهم‌مماس باشند، مکان هندسی‌مطلوب، مماس مشترك داخلی دودایره است.

درحالتی‌که k_1 در داخل دایرهٔ k_2 بـاشد، درخارج دایرهٔ k_2 واقع است؛ ولی اگردو دایره هم مرکزباشند، چنین مکانی وجود ندارد.

مکان هندسی‌نقطه‌هایی‌راکه از دو دایره به‌یك قوت باشند، محوراصلی دو دایره‌گویند.

برای سه دایـرهٔ k_1، k_2، k_3 (با مرکزهای مختلف)، سه محوراصلی، که ازدو به‌دوی دایره‌ها به‌دست می‌آیند، در یك نقطه به‌هم می‌رسند. این‌نقطه را، که از سه دایره به‌یك قوت است، مرکز اصلی سه‌دایره‌گویند.

مرکزاصلی، وقتی وتنها وقتی، برای سه دایره وجود داردکه مرکزها مختلف و غیرواقع بریك خط راست باشند.

۱۹۲۵

حاصل‌ضرب این شش تفاضل را P مـی‌نامیم. چون ۱۲ برابر حاصل‌ضرب ۴ × ۳ است و۳ و ۴ نسبت به هم اول‌اند، باید ثابت‌کنیم، P، هم بر ۳.وهم بر۴ بخش‌پذیراست.

a) درتقسیم هرعدد درست بر۴، یکی ازباقی مانده‌های ۰،۱،۲ یا ۳ به‌دست می‌آید.

اگر از بین عددهای درست a، b، c و d، دوعدد وجود داشته باشد که در تقسیم بر ۴، به‌یک باقی مانده برسند، روشن است که تفاضل آن‌ها، بر ۴ بخش‌پذیر است چون P. از ضرب همهٔ تفاضل‌های ممکن تشکیل شده است (بدون توجه به‌علامت)، بنابراین، یکی از عامل‌ها و درنتیجه خود P، بر ۴ بخش‌پذیر می‌شود.

در حالتی که هیچ دوعددی ازعددهای a، b، c و d، درتقسیم بر۴، به باقی مانده‌های برابر نرسند، باید هرچهارنوع باقی ماندهٔ ۰، ۱، ۲ و ۳ را برای چهارعدد مفروض داشته باشیم. به‌این ترتیب، دوباقی‌مانده، عددهایی زوج (۰ ،۲) و دو باقی مانده عددهایی فردند (۱ ،۳). تفاضل دو عدد زوج وهمچنین، تفاضل دو عدد فرد، عددی زوج می‌شود و، بنابراین، P، مضربی از ۴ خواهد بود.

b) برای بخش‌پذیربودن P بر۳هم، درست شبیه a) می‌توان استدلال کرد، با این تفاوت، که دراین‌جا، تنها سه باقی ماندهٔ ۰، ۱ یا۲ ممکن است و، درنتیجه، به‌ناچار، درتقسیم چهارعدد a، b، c و d بر۳، به‌ناچار دوتا از باقی‌مانده‌ها با هم برابر می‌شوند.

۸۶. برای این‌که ببینیم، عدد!۱۰۰۰، به‌چند صفر ختم می‌شود، باید تعداد عامل‌های ۱۰ = ۲ × ۵ را در تجزیه !۱۰۰۰ پیدا کنیم. اگر $(۲ \times ۵)^{\alpha} = ۱۰^{\alpha}$، بزرگترین توان ۱۰ درعدد !۱۰۰۰ باشد، آن‌وقت، عدد !۱۰۰۰ به α صفرختم شده است (یعنی، تعداد صفرهای سمت راست‌در عدد !۱۰۰۰ برابراست با α). دربین عددهای

$$۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ...، ۱۰۰۰$$

هرپنجمین عدد، مضربی است از۵. چون ۱۰۰۰ = ۵ × ۲۰۰، بنابراین، در !۱۰۰۰، درست ۲۰۰ عامل مضرب ۵ وجود دارد. از این ۲۰۰ عامل، یعنی از بین عددهای

$$۵، ۱۰، ۱۵، ۲۰، ۲۵، ...، ۱۰۰۰$$

هرپنجمین عدد، بر $۵^۲$ بخش‌پذیر است. چون ۲۰۰ = ۵ × ۴۰، بنابراین در

!۱۰۰۰، درست ۴۰ عامل مضرب 5^2 پیدا می‌شود. به‌همین ترتیب، چون

$$۴۰=۵\times۸ \text{ و } ۸=۵\times۱+۳$$

بنابراین، در !۱۰۰۰، به‌تعداد ۸ عدد مضرب 5^3 و یك عامل مضرب 5^4 وجود دارد. درضمن، هیچ عاملی بر 5^5 یا توان‌های بالاتر ۵ بخش‌پذیر نیست. بنابراین، در !۱۰۰۰، توان عدد ۵ برابر می‌شود با

$$۲۰۰+۴۰+۸+۱=۲۴۹$$

روشن است که در تجزیه !۱۰۰۰ به‌عامل‌های اول، عدد ۲ با توان بیشتری، نسبت به‌عدد ۵، ظاهر می‌شود، زیرا ۵۰۰ عامل زوج در تجزیهٔ !۱۰۰۰ وجود دارد.

به‌این ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که عدد !۱۰۰۰، به ۲۴۹ صفر ختم شده است.

یادداشت. تجزیهٔ $m!$ به‌ضرب عامل‌های اول. مسألهٔ ۸۶ را درحالت کلی‌تری بررسی می‌کنیم. m را عددی طبیعی و p^α را بزرگترین توان عدد اول p می‌گیریم، به‌نحوی که $m!$ بر p^α بخش‌پذیر باشد. برای پیداکردن α، همان راهی را دنبال می‌کنیم که در مسألهٔ ۸۶، برای $m=۱۰۰۰$ و $p=۵$ مورد استفاده قراردادیم. عدد مفروض m را بر p تقسیم می‌کنیم:

$$m=p\cdot q_1+r_1 \qquad (0\leqslant r_1<q)$$

سپس، رابطهٔ تقسیم را، برای تقسیم q_1 بر p می‌نویسیم:

$$q_1=p\cdot q_2+r_2$$

این روند را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا به‌خارج قسمت صفر برسیم، یعنی:

$$q_{k-1}<p \text{ و } q_k=0$$

شبیه استدلالی که درمورد مسألهٔ ۸۶ به‌کاربردیم (و برای حالت $m=۱۰۰۰$ و $p=۵$ به‌دست آوردیم: $\alpha=۲۴۹$)، دراین‌جا هم، α برابر است با مجموع خارج قسمت‌های حاصل:

$$\alpha=q_1+q_2+\cdots+q_{k-1}$$

ثابت می‌کنیم که باقی‌مانده‌های حاصل، یعنی

$$r_1 r_2, r_3, \ldots, r_k$$

معرف رقم‌های عدد m، درعددنویسی به‌مبنای p هستند. در واقع داریم:

$$m=pq_1+r_1=p(pq_2+r_2)+r_1=\cdots=$$
$$=p^{k-1}r_k+p^{k-2}r_{k-1}+\cdots+pr_2+r_1$$

که همان بازشدهٔ عدد m درعدد نویسی به‌مبنای p است. [درحل مسألهٔ ۸۶، باقی‌مانده، به‌ترتیب ۰، ۰، ۳۰۰ و ۱ بودند و، بنابراین، عدد ۱۰۰۰ درعدد- نویسی به‌مبنای ۵، به‌صورت ۱۳۰۰۰ درمی‌آید.]

اکنون، توان α را برحسب مانده‌ها، به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$m=p\cdot q_1+r_1,$$
$$q_1=p\cdot q_2+r_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$q_{k-1}=p\cdot 0+r_k$$

ازمجموع این برابری‌ها به‌دست می‌آید:

$$m+q_1+q_2+\cdots+q_{k-1}=p(q_1+\cdots+q_{k-1})+$$
$$+r_1+r_2+\cdots+r_k$$

که اگر مجموع باقی‌مانده‌ها را s بنامیم، به‌دست می‌آید:

$$m+\alpha=p\alpha+s \Rightarrow \alpha=\frac{m-s}{p-1}$$

واین، اثبات قضیه‌ای است که به‌نام قضیهٔ لژاندر معروف است:

قضیهٔ لژاندر. اگر m عددی طبیعی و p عددی اول باشد، آن‌وقت

توان p در تجزیهٔ $m!$ به ضرب عامل‌های اول، برابر است با $\frac{m-s}{p-1}$ که، در آن، s عبارت است از مجموع رقم‌های عدد m، در عددنویسی به‌مبنای p.

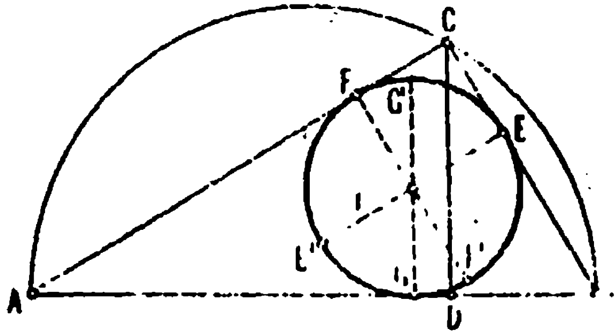
۸۷. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{C}=90^\circ$)، فرض می‌کنیم: $BC=a$، $AC=b$ و $AB=c$. D را پای ارتفاع وارد از رأس C برو تر و E و F و G را نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی باضلع‌های a و b و c می‌گیریم. انتهای دیگر قطرهایی را که از E و F و G می‌گذرند، E' و F' و G' می‌نامیم (شکل ۸۶).

از بین همهٔ نقطه‌های واقع در داخل یا روی محیط مثلث، دورترین نقطه به‌یك ضلع، رأس روبه‌رو به‌آن ضلع است. مثلاً، از بین همهٔ نقطه‌های واقع در داخل یا روی محیط مثلث ABC، نقطهٔ A، بیشترین فاصله را نسبت به BC دارد. بنابراین

$$E'E<AC،\ F'F<BC،\ G'G<CD \qquad (1)$$

CD، نصف وتری از دایرهٔ به قطر AB است، پس $CD\leqslant\frac{1}{2}AB$ (حالت برابری، وقتی پیش می‌آید که CD شعاعی از دایرهٔ به‌قطر AB باشد)، بنابراین

$$G'G<\frac{1}{2}AB \qquad (2)$$



شکل ۸۶

از نابرابری‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$2r<b،\ 2r<a،\ 2r<\frac{1}{2}c \qquad (3)$$

یعنی r از $\frac{1}{2}a$، $\frac{1}{2}b$ و $\frac{1}{4}c$ کوچکتراست.

۱۹۲۶

۸۸. فرض می‌کنیم، این دستگاه، دردوحالت خاص $a=1$، $b=0$ و $a=0$ ، $b=1$ دارای جواب باشد. اگر $(x_1 ، y_1 ، z_1 ، t_1)$ و $(x_2 ، y_2 ، z_2 ، t_2)$ را به‌ترتیب، جواب دستگاه‌های

$$\begin{cases}x+y+2z+2t=1\\2x-2y+z-t=0\end{cases} \quad (1) \qquad و \qquad \begin{cases}x+y+2z+2t=0\\2x-2y+z-t=1\end{cases} \quad (2)$$

فرض کنیم، دراین صورت، جواب دستگاه

$$\begin{cases}x+y+2z-2t=a\\2x-2y+z-t=b\end{cases} \qquad (3)$$

به‌صورت زیرخواهد بود:

$$x=ax_1+bx_2،\ y=ay_1++by_2،\ z=az_1+bz_2$$

$$t=at_1+bt_2 \qquad (4)$$

که با آزمایش مستقیم، درستی این جواب، مورد تحقیق قرارمی‌گیرد:

$$x+y+2z+2t=a(x_1+y_1+2z_1+2t_1)+$$

$$+b(x_2+y_2+2z_2+2t_2)=a\times 1+b\times 0=a;$$

$$2x-2y+z-t=a(2x_1-2y_1+z_1-t_1)+$$

$$+b(2x_1-2y_1+z_1-t_1)=a\times 0+b\times 1=b$$

درضمن، روشن است که x، y، z و t، ازعبارت‌های (۴)، عددهایی درست‌اند.

برای تعیین جواب (x_1, y_1, z_1, t_1) از دستگاه (۱)، روشن است که باید x_1+y_1، عددی فرد باشد. اگر $x_1=1$ و $y_1=0$ بگیریم، به‌دست می‌آید $z_1=-1$ و $t_1=1$.

در دستگاه (۲)، باید z_2-t_2، عددی فرد باشد. $z_2=1$ و $t_2=0$ می‌گیریم که به‌دست می‌آید: $x_2=1$ و $y_2=-1$. بنابراین، برای دستگاه (۳)، با توجه به (۴)، این جواب وجود دارد:

$$x=a-b,\ y=-b,\ z=a+b,\ t=a$$

یادداشت. دربارهٔ حرکت اسب روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی. مسألهٔ ۸۴، به‌تعبیری، با مسألهٔ حرکت اسب در یك صفحهٔ شطرنجی‌نامتناهی ارتباط پیدا می‌کند. مسألهٔ مربوط به‌حرکت اسب، چنین است:

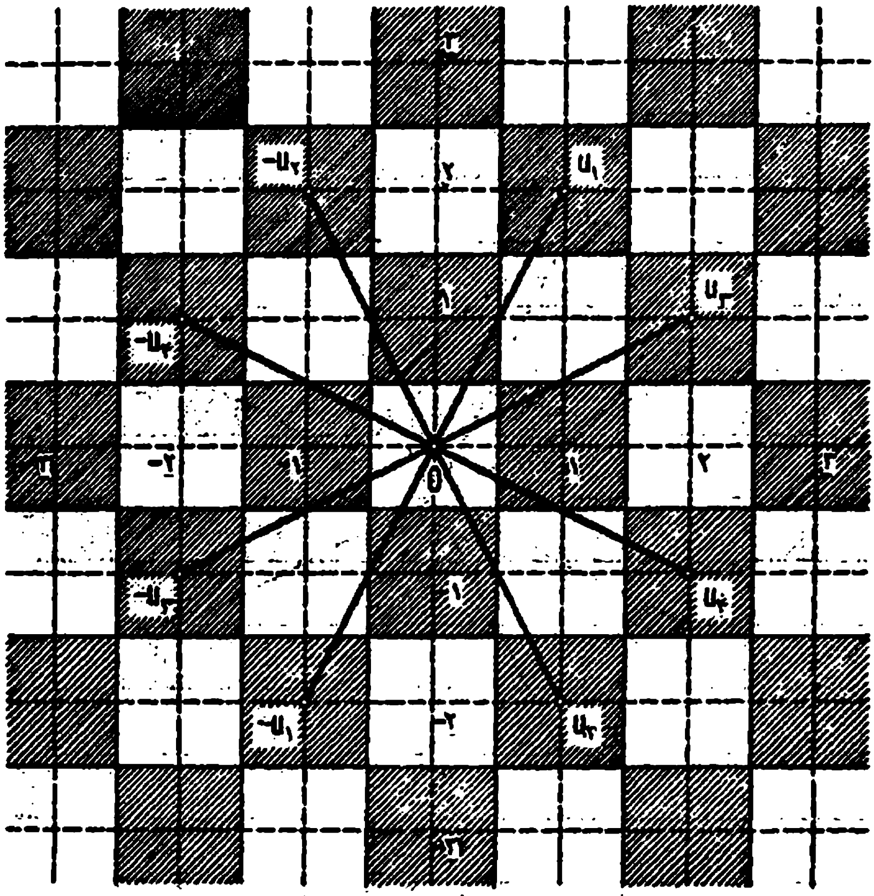
ثابت‌کنید، دریك صفحهٔ شطرنجی‌نامتناهی، می‌توان هرخانه دلخواه را با حرکت‌های متوالی اسب پیمود.

صفحهٔ شطرنجی نامتناهی، با صفحهٔ شطرنجی معمولی (8×8)، این تفاوت را دارد که درتمامی صفحه و ازهرطرف، تا بی‌نهایت، امتداد دارد.

مرکزیکی از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی نامتناهی را، مبداء مختصات می‌گیریم ومحورهای مختصات را موازی ضلع‌های خانه‌ها انتخاب می‌کنیم (شکل ۸۷). اگرواحد طول‌را، ضلع یکی ازخانه‌های مربعی درنظربگیریم، آن‌وقت، مرکز همهٔ خانه‌ها، دارای مختصات درستی خواهند بود. یعنی، مرکزهای خانه‌های صفحهٔ شطرنجی (مرکز مربع‌ها)، در دستگاه محورهای مختصات، شبکه‌ای ازنقطه‌های با مختصات درست را تشکیل می‌دهند.

با آغاز ازمبداء مختصات، اسب می‌تواند ۸ نوع حرکت مختلف را انجام دهد؛ این ۸ حرکت را، به‌وسیلهٔ زوج عددهای زیر، مشخص کرده‌ایم (شکل ۸۷ را ببینید):

$$u_1=(1,2),\ u_2=(1,-2),\ u_3=(2,1),\ u_4=(2,-1),$$
$$-u_1=(-1,-2),\ -u_2=(-1,2),\ -u_3=(-2,-1),$$



شکل ۸۷

$$-u_۴=(-۲، ۱)$$

حرکت‌های u_i و $-u_i$ به‌این مفهوم‌درمقابل یکدیگرند که همدیگر را می‌پوشانند؛ مثلاً، اگرحرکت u_i را هفت‌بار و به‌دنبال آن، حرکت $-u_i$ را پنج بار انجام دهیم، مثل این است که حرکت u_i را دو بار انجام داده‌ایم. اگرحرکت u_i را هشت‌بار و به دنبال آن، حرکت $-u_i$ را دوازده‌بار انجام دهیم، مثل این است که حرکت u_i را (۴ −) بار انجام داده‌ایم.

با این توافق، اگرحرکت $u_۱$ را x بار تکرار کنیم، به‌نقطه $(x، ۲x)$ می‌رسیم؛ به‌همین ترتیب، با y بارحرکت $u_۲$ به‌نقطهٔ $(y، -۲y)$، با z بار حرکت $u_۳$ به‌نقطهٔ $(۲z، z)$ و، بالاخره، با t بارحرکت $u_۴$ به‌نقطهٔ $(۲t، -t)$ می‌رسیم. نتیجهٔ همهٔ این حرکت‌ها را، می‌توان به‌صورت

$$(x+y+2z+2t,\ 2x-2y+z-t) \qquad (5)$$

نشان داد.

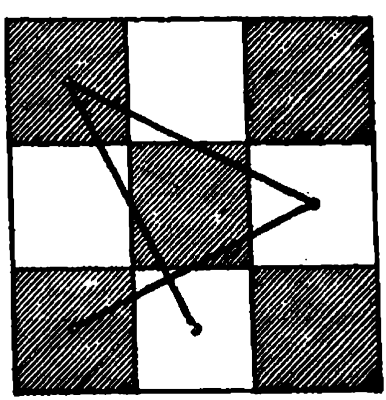
ازمبداء وقتی می‌توان به‌خانهٔ (a, b) رسید که، با انتخاب x، y، z و t مناسب، از (۵)، (a و b) به‌دست آید، یعنی وقتی که x، y، z دردستگاه معادله‌های (۳) صدق کنند.

با توجه به هم‌ارز بودن مسألهٔ ۸۸ با مسألهٔ حرکت اسب درصفحهٔ شطرنجی، می‌توانیم استدلال کوتاه‌تری برای حل مسألهٔ ۸۸ بیاوریم: شکل ۸۸ نشان می‌دهد که چگونه می‌توان باسه‌حرکت، ازخانه‌ای به‌خانهٔ مجاور آن رسید؟ به‌همین‌ترتیب، اسب می‌تواند ازخانهٔ $(0, 0)$ به‌خانهٔ $(1, 0)$ یا به‌خانهٔ $(0, -1)$ ویا به‌خانهٔ $(-1, 0)$ برسد. ازآن جا که مسیرحرکت ازخانهٔ $(0, 0)$ را به‌هرخانهٔ دلخواه (a, b)، باگام‌های افقی و قائم برداشت (در هر گام، یك خانه)، بنابراین، اسب‌می‌تواند به هرمربع دلخواه برسد. درواقع اسب می‌تواند، چنین مسیری را، حداکثر در $3(a+b)$ حرکت طی کند.

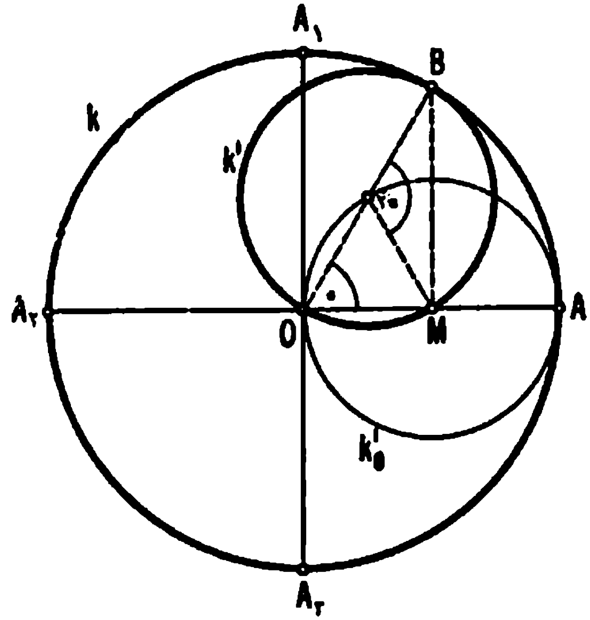
۸۹. چهارعدد متوالی n، $n+1$، $n+2$ و $n+3$ را می‌گیریم. حاصل‌ضرب این چهارعدد، چنین است:

$$[n(n+3)][(n+1)(n+2)] = (n^2+3n)(n^2+3n+2) =$$
$$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n) = (n^2+3n+1)^2 - 1$$

بنابراین، اگر این حاصل‌ضرب را P بنامیم، داریم:



شکل ۸۸



شکل ۸۹

$$(n^۲+۳n)^۲<P<(n^۲+۳n+۱)^۲$$

یعنی P، بین مربع‌های دوعدد متوالی قرار دارد ونمی‌تواند مربع کامل باشد.

۹۵. فرض می‌کنیم، در آغاز حرکت، نقطهٔ M از دایرهٔ کوچکتر، بر نقطهٔ A از دایرهٔ بزرگتر منطبق باشد (شکل ۸۹). می‌خواهیم مسیر نقطهٔ M را، وقتی که دایرهٔ k' مماس بر دایرهٔ k حرکت می‌کند، پیدا کنیم. می‌بینیم که در تمام چرخش، شعاع OB از دایرهٔ k (وارد به‌نقطهٔ تماس B)، برابر است با قطر دایرهٔ k'؛ همچنین شعاع دایرهٔ k'، نصف شعاع دایرهٔ k است. علاوه بر آن، کمان BM از دایرهٔ k'، طولی برابر کمان AB از دایرهٔ k است. بنابراین، زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به‌کمان BM از دایرهٔ k'، دو برابر زاویهٔ مرکزی BOA از دایرهٔ k است. در نتیجه، زاویهٔ محاطی BOM از دایرهٔ k'، با زاویهٔ مرکزی BOA از دایرهٔ k برابر است؛ یعنی M برشعاع OA از دایرهٔ k واقع است.

زاویهٔ OMB، روبه‌رو به قطر OB و، بنابراین، قائمه است. M پای عمود وارد از B بر OA است. وقتی که دایرهٔ k'، از نقطهٔ A تا نقطهٔ $A_۱$ می‌چرخد، M از نقطهٔ A تا O در طول AO از دایرهٔ k حرکت می‌کند،

و وقتی k' شروع به‌حرکت از A_1 به‌سمت A_2 می‌کند، نقطهٔ M از O به‌سمت A_2 در روی OA_2 حرکت می‌کند. وقتی k' شروع به‌حرکت از A_2 به‌سمت A_3 می‌کند و دوباره به A برمی‌گردد، M از A_2 به‌سوی A، در امتداد قطر A_2A، حرکت می‌کند.

۱۹۲۷

۰۹۱ راه حل اول. ابتدا توجه می‌کنیم که a و b نسبت به‌هم اول‌اند، زیرا اگر مقسوم‌علیه مشترکی به‌جز واحد داشته باشند، این مقسوم‌علیه‌مشترک باید $m=ad-bc$ را هم بشمارد و، در این‌صورت، m نمی‌تواند نسبت به a و b اول باشد. $(x، y)$ را دوتایی مرتبی از عددهای درست می‌گیریم که، به‌ازای آن‌ها، داشته باشیم:

$$ax+by=mk$$

(k، عددی است درست). یعنی

$$ax+by=k(ad-bc)$$

و از آن‌جا

$$a(x-kd)=-b(y+kc) \qquad (1)$$

بنابراین، حاصل‌ضرب $b(y+kc)$ مضربی است از a ولی چون a و b نسبت به‌هم اول‌اند، باید $y+kc$ بر a بخش‌پذیر باشد، یعنی

$$y+kc=la \qquad (\text{l، عددی است درست})$$

که اگر در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، و دو طرف رابطه را بر a تقسیم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x-kd=-lb$$

بنابراین

$$x=kd-lb، \quad y=kc+la$$

از آن‌جا از برابری

$$cx+dy=l(ad-bc)=lm$$

روشن می‌شود که $cx+dy$ نیز مضرب m است.

راه حل دوم. $u=ax+by$ و $v=cx+dy$ می گیریم؛ دراین‌صورت

$$du-bv=(ad-bc)x=mx \Rightarrow bv=du-mx$$

اگر u مضرب m باشد، سمت راست برابری اخیر مضربی از m می‌شود، بنابراین bv هم بر m بخش‌پذیر است. ولی b و m نسبت به‌هم اول‌اند، یعنی باید v بر m بخش‌پذیر باشد. همین برابری نشان‌می‌دهد که اگر v مضربی از m باشد، u هم مضربی از m است.

۹۲. اگر رقم یکان عدد را مثلاً ۵ بگیریم، سه رقم دیگر را باید از بین چهار رقم باقی‌ماندهٔ ۱، ۲، ۳ و ۴ انتخاب کرد که به ۲۴ = ۲ × ۳ × ۴ طریق ممکن‌است ($A_4^3=$ ۲۴). بنابراین، ۲۴ عدد چهار رقمی به‌دست‌می‌آید که رقم یکان آن ۵ است. به‌همین ترتیب، ۲۴ عدد با رقم یکان ۴، ۲۴ عدد با رقم یکان ۳، ۲۴ عدد با رقم یکان ۲ و ۲۴ عدد با رقم یکان ۱ به‌دست می‌آید. در نتیجه، مجموع رقم‌های یکان همهٔ این عددهای چهار رقمی برابر است با

$$۲۴(۵+۴+۳+۲+۱)=۲۴\times ۱۵=۳۶۰$$

با همین استدلال، مجموع رقم‌های مرتبهٔ دهگان و یا مرتبه‌های بالاتر هم، در همهٔ این عددهای چهار رقمی برابر ۳۶۰ می‌شود. بنابراین، مجموع همهٔ عددهای چهار رقمی چنین می‌شود:

$$۳۶۰(۱+۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳)=۳۶۰\times ۱۱۱۱=۳۹۹۹۶۰$$

۹۳. راه حل اول. $AB=c$ فرض می‌کنیم؛ شعاع دایرهٔ محاطی داخلی k را ρ و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی k_c را r_c می‌گیریم. باید ثابت کنیم:

$$\sqrt{r\cdot r_c}\leqslant\frac{c}{2}$$

و این، همان شرط لازم و کافی، برای وجود جواب، در مسألهٔ ۲۰ است (حل مسألهٔ ۲۰ را ببینید).

راه حل دوم. مساحت مثلث ABC را S و اندازهٔ نصف محیط آن‌را p می‌نامیم. با توجه به‌یادداشت ۲ در پایان حل مسألهٔ ۹، داریم:

$$S=rp=r_c(p-c)$$

و از آن‌جا: $r=\frac{S}{p}$ و $r_c=\frac{S}{p-c}$ و

$$r\cdot r_c=\frac{S^2}{p(p-c)}=\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p(p-c)}=(p-a)(p-b);$$

$$\sqrt{r\cdot r_c}=\sqrt{(p-a)(p-b)}\ .$$

می‌دانیم، واسطهٔ هندسی دو مقدار مثبت از واسطهٔ حسابی آن‌ها تجاوز نمی‌کند، بنابراین

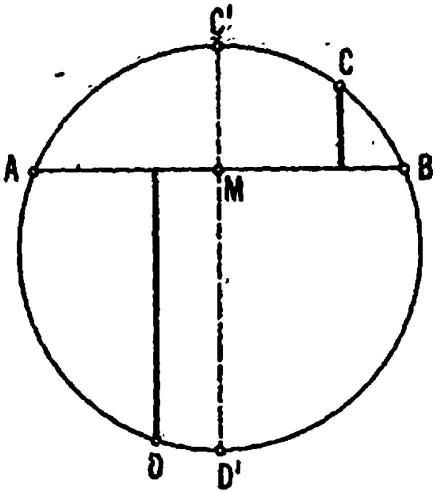
$$\sqrt{r\cdot r_c}\leqslant\frac{(p-a)+(p-b)}{2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(a+b+c)-a+\frac{1}{2}(a+b+c)-b}{2}=\frac{c}{2}$$

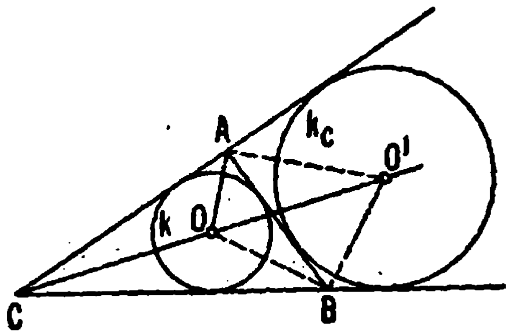
به‌این‌ترتیب $\sqrt{r\cdot r_c}\leqslant\frac{c}{2}$

راه حل سوم. اگر مرکزهای دو دایرهٔ k و k_c را O و O' بگیریم، ثابت می‌کنیم، چهار نقطهٔ A، B، O و O' روی یك دایره واقع‌اند و دو نقطهٔ O O' در دو طرف خط راست AB قرار دارند (شکل ۹۰-a).

دو زاویهٔ OAO' و OBO' قائمه‌اند، زیرا نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب



شکل ۹۰b



شکل ۹۰a

بر هم عمودند. بنابراین، دایرهٔ به‌قطر OO' از A و B می‌گذرد در ضمن، چون AB، دو دایرهٔ k و k_c را از هم جدا می‌کند، به ناچار، مرکزهای O و O' را از هم جدا خواهد کرد. با این توضیح، مسأله را می‌توان حالت خاصی از قضیهٔ زیر دانست (شکل ۹۰-b).

اگر دو نقطهٔ C و D روی محیط دایره‌ای در دو طرف وتر AB از دایره واقع باشند، واسطهٔ هندسی فاصله‌های C و D از AB، حداکثر برابر است با $\frac{1}{2}AB$.
در ضمن، در حالتی که C و D دو انتهای قطری از دایره باشند، این واسطهٔ هندسی، برابر $\frac{1}{2}AB$ می‌شود.

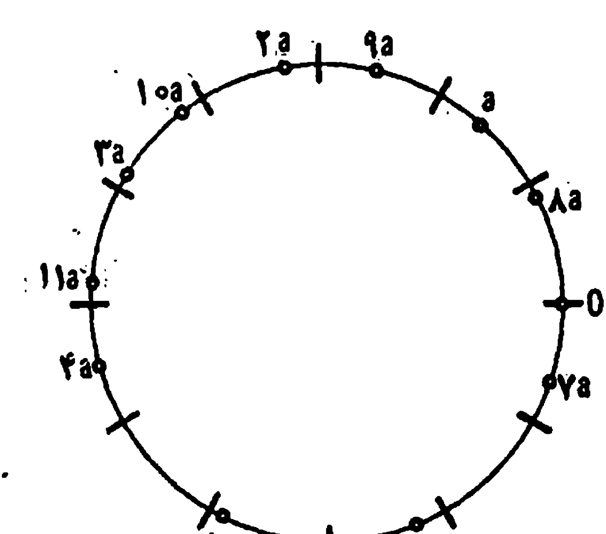
۱۹۲۸

۹۴. این مسأله، حالت خاصی از قضیهٔ کرونکر-دیریکله است و می‌توان آن‌را با استفاده از اصل لانه کبوتری حل کرد (یادداشت پایان حل مسألهٔ ۳۹ را ببینید). به تقریب می‌توان گفت: درمیان این عددها، برای n به‌اندازهٔ کافی بزرگ، دست کم یك عدد پیدا می‌شود که به‌تقریب عددی درست‌است. قضیه از ما می‌خواهد تا مفهوم واژهٔ «به‌تقریب» را روشن کنیم.
دایره‌ای در نظر می‌گیریم و محیط آن را واحد فرض می‌کنیم سپس، $n-1$ طول

$$a، ۲a، ۳a، \ldots، (n-۱)a$$

را، با شروع از O، روی محیط دایره نشانه‌گذاری می‌کنیم (در شکل ۹۱، $n=۱۲$ گرفته‌ایم)، انتخاب دایره‌ای با محیط واحد، تنها برای سادگی کار است، چون در حل مسأله، تنها از بخش دهدهی عددها استفاده خواهیم کرد (درمسأله‌ما، مثلاً، دوعدد $e = ۲/۷۱۷...$ و $۰/۷۱۷...$ بی‌تفاوت‌اند). اکنون دایره را به n کمان برابر، وهر کمان‌را به‌طول $\frac{۱}{n}$، تقسیم می‌کنیم. به‌این‌ترتیب هر نقطهٔ علامت‌گذاری شده، متعلق به یکی از کمان‌های به‌طول $\frac{۱}{n}$ است.

ثابت می‌کنیم یکی ازکمان‌های به‌طول $\frac{۱}{n}$ و مجاور O، به‌ناچارشامل یکی از $(n-۱)$ نقطهٔ علامت‌گذاری شده است. اگراین‌طورنباشد، به‌معنای آن است‌که هر $n-۱$ نقطهٔ علامت‌گذاری شده به $n-۲$ کمان باقی‌مانده تعلق دارند و، بنابر اصل دیریکله (یادداشت پایان حل مسألهٔ ۳۹)، بایدیکی از این $n-۲$ کمان، شامل دوتا از نقطه‌های علامت گذاری شده باشد. در شکل ۹۱، نقطه‌های $۳a$ و $۱۰a$ روی یک‌کمان‌اند و، بنابراین، تفاضل آن‌ها



شکل ۹۱

کمتر از $\frac{1}{n}$ است. در این صورت، فاصلهٔ بین نقطهٔ O و نقطهٔ علامت‌گذاری‌شده، یعنی

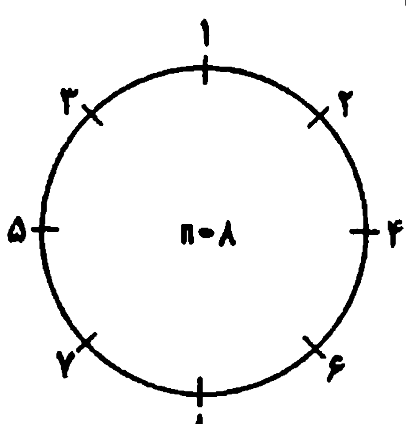
$$10a-3a=7a$$

از $\frac{1}{12}=\frac{1}{n}$ کوچکتر می‌شود که خلاف فرض است. بنابراین، یکی از کمان‌های مجاور O باید شامل یکی از $n-1$ نقطهٔ تقسیم باشد. در این حالت، $7a$ با یك عدد درست، حداکثر به‌اندازهٔ $\frac{1}{12}$ اختلاف دارد. ما شکل را برای حالت $n=12$ درنظر گرفتیم و روی عددهای $11a$، $3a$، $10a$ و $7a$ صحبت کردیم. درحالت کلی می‌توان، به‌جای این عددها، عددهـای $(n-1)a$، ma، ka و $(k-m)a$ را درنظر گرفت.

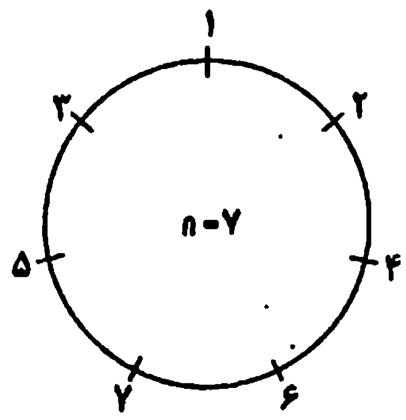
۹۵. عددهای مجاور ۱ را، تنها می‌توان ۲ و ۳ انتخاب کرد (زیرا، در غیر این صورت، تفاضل دو عدد مجاور از ۲ بیشتر می‌شود) (شکل‌های ۹۲ و ۹۳).

مجاور دیگر عدد ۲ باید ۴ و مجاور دیگر ۳، عدد ۵ باشد. به همین ترتیب، مجاور بعدی ۴، عدد ۶ و غیره. به این ترتیب، دنبالهٔ عددهای زوج

۲، ۴، ۶، ...



شکل ۹۳



شکل ۹۲

دریك طرف عدد ۱ و دنبالهٔ عددهای فرد

۳، ۵، ۷، ...

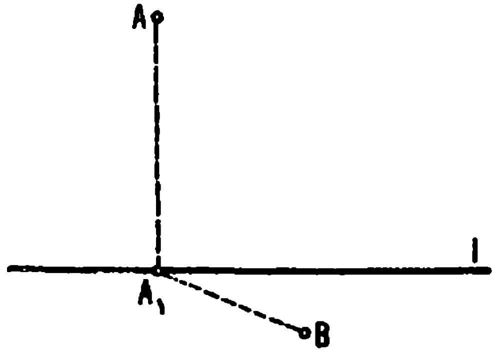
درطرف دیگر عدد ۱ به‌دست می‌آید. با این روش، عددهای مجاور n، دو عدد $n-2$ و $n-1$ خواهند بود، و روشن است که مسأله، جواب منحصر به‌فرد دارد.

۹۶. فرض کنید فاصلهٔ A تا l، کمتر از فاصلهٔ B تا l نباشد. تصویر A بر l را A_1 می‌نامیم (شکل ۹۴).

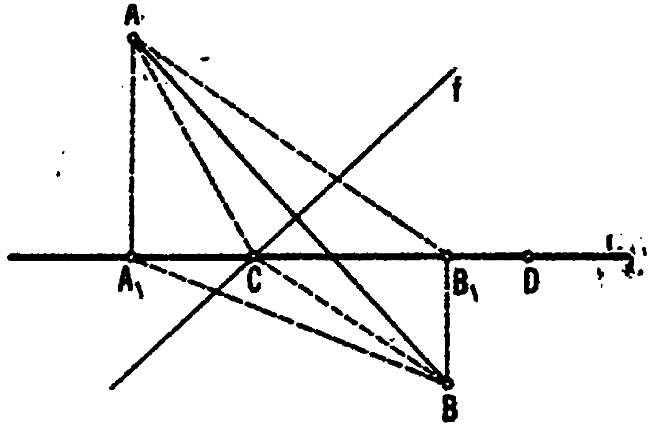
اگر داشته باشیم: $AA_1 > A_1B$، آن‌وقت A_1 همان نقطهٔ مطلوب است. AA_1 پاره‌خط بزرگتر است و، در ضمن، برای هر نقطهٔ Q واقع بر l، داریم: $AQ > AA_1$.

اکنون فرض می‌کنیم $AA_1 < A_1B$. f، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و پای عمود وارد از B بر l را B_1 می‌نامیم (شکل ۹۵).

همهٔ نقطه‌هایی از صفحه که فاصلهٔ آن‌ها تا A کمتر از فاصلهٔ آن‌ها تا B باشد، در همان طرف B نسبت به f قرار دارند. پس A_1 و A در یك طرف f اند، زیرا $A_1A < A_1B$. علاوه بر آن، B_1 و B هم دریك‌طرف f واقع‌اند زیرا $B_1B < A_1A$ (طبق فرض، دراین حالت، که نزدیکتر از B به l است) و $A_1A < B_1A$ (A_1، پای‌عمود وارد از A بر l است). بنابراین $B_1B < BA$. به‌این ترتیب، خط راست f، پاره‌خط A_1B_1 را در نقطه‌ای مثل C قطع می‌کند. C، همان نقطهٔ مطلوب است؛ زیرا داریم $AC = BC$، در حالی‌که



شکل ۹۴



شکل ۹۵

برای هر نقطهٔ دیگری از l مثل Q، یا AQ و یا BQ از AC بزرگتر است. مثلاً نقطهٔ D را برخط راست l در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم D و B_1 دریک طرف f باشند. دراین صورت $DC > AC$، زیرا AD، ضلع روبه‌رو به‌زاویهٔ منفرجه در مثلث ACD است. بنابراین، بزرگترین پاره‌خط از دو پاره‌خط AD و BD، به‌طور مستقیم، از AC بزرگتر می‌شود. شبیه همین استدلال را می‌توان برای نقطهٔ D' از خط راست l و در طرف دیگر f، انجام داد.

□ دانش، قانونهای حاکم بر طبیعت و جامعه را به شما می‌شناساند، درست را از نادرست جدا می‌کند، و آدمی را از جهل و جزم می‌رهاند.

«مشعل دانشجو» در کنار نشر کتابهای گوناگون خود، «مجموعهٔ دانش» را هم پی می‌گیرد، تا از دایرهٔ این مقوله از کتاب برکنار نماند؛ و طبیعی است که در این راه بیش از همه به جوانان کنجکاو و دانش‌دوست توجه دارد؛ و به همین دلیل می‌خواهد کمکی و انگیزه‌ای برای درک بهتر کتابهای درسی آنها باشد.

این کتاب نخستین جلد از «مجموعهٔ دانش» است و امید داریم بتوانیم تا هر جا که مورد نیاز جامعه باشد، این راه را ادامه دهیم.

مؤسسه انتشارات مشعل دانشجو

تهران/خیابان انقلاب/روبروی ۱۶ آذر/نبش/جنب آموزشگاه علمی دانشجو
۲۴/۹۹۹/تلفن ۸۲۸۹۹۶/۸۲۹۱۹۰/۸۳۲۴۳۶