هوسکینگ، جویس، ترنر

نخستین گامها در آنالیز عددی

ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا

نخستین گامها در آنالیز عددی

هوسکینگ، جویس، ترنر

ترجمهٔ اسماعیل بابلیان، میرکمال میرنیا

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست مطالب

عنوان			صفحه

پیشگفتار مؤلفان

هدف این کتاب، چنانکه از نامش برمی‌آید، عرضهٔ درآمدی برمفاهیم مقدماتی و روشهای آنالیز عددی به دانشجویانی است که برای اولین بار با این موضوع برخورد می‌کنند. به‌خصوص، خواسته‌ایم ایده‌های ارائه شده درسطح هفتمین فرم ریاضیات کاربردی در زلاند جدید یا درسطح پیشرفتهٔ .G.C.E در انگلستان، قابل فهم باشند. ما امیدواریم که این کتاب برای بسیاری از درسها درپلی‌تکنیکها و دانشگاهها نیز مفید واقع شود.

برای سهولت آموختن و تدریس، مطالب کتاب به «گامهای» کوتاهی تقسیم شده‌اند که بیشتر آنها درهر درس مقدماتی می‌آیند. بحثی از محتوا و طرح این کتاب در بخش ۳ی مقدمه آمده است (صفحات ۳ — ۴ را ببینید).

آر. جی. هوسکینگ
دی. سی. جویس
جی. سی. ترنر

مقدمه

۱ـ تاریخچه

هرچند ممکن‌است بعضی‌ها آنالیزعددی را مبحث تازه‌ای بپندارند، ولی در واقـع چنین نیست. بدواً، این‌مبحث به‌تهیهٔ نتایج به‌صورت اعداد مربوط می‌شود که بدون تردید توسط بشر اولیه هم به‌کارمی‌رفته است. بعدازآن‌تمدنهای بابلی‌ها ومصریان‌قدیم به‌خاطرمهارتهای عددی، به‌ویژه دررابطهٔ با نجوم و مهندسی راه وساختمان جالب توجه بود. لوحی بابلی به‌دست‌آمده‌است‌که تـاریخش به‌تقریباً سال ۲۰۰۰ ق. م. برمی‌گردد ومجذورات اعـداد صحیح از ۱ تا ۶۰ را به‌دست می‌دهـد؛ لوح دیگری هم وجود داردکه درآن خسوف و کسوفهای ازحدود سال ۷۵۰ ق. م. ثبت شده است. مصریان‌کسررا مورد توجه قرارداده، وحتی روش نابجائی را برای حل معادلات جبری ابداع‌کرده‌اند (ر. ك. گام ۸).

شایدلازم نباشد اشاره‌کنیم‌که از یونان قدیم عده‌ای ریاضیدان برجسته برخاستند و بسیاری ازآنان نتایج عددی مهمی‌را به‌دست دادند. ارشمیدس[1] درحدود سال ۲۲۰ ق.م. نتیجهٔ زیررا ارائه داد:

$$۳\frac{۱۰}{۷۱}<\pi<۳\frac{۱}{۷}.$$

روند تکراری برای $\sqrt{a}$ شامل $\frac{۱}{۲}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ که معمولاً به نیوتن[2] نسبت داده می‌شود (ر. ك. گام ۱۰) درواقع درحدود سال ۱۰۰ ق. م. توسط هرون[3] ارشد مورداستفاده قرار گرفته بود. فیثاغورثیان[4]مجموع گیری عددی سریهارا موردتوجه قراردادند. دیوفانتوس[5] درحدود سال ۲۵۰ ب. م. برای‌حل معادلات درجهٔ دوم روشی را به‌دست داد.

متعاقباً، پیشرفت‌کارعددی درخاورمیانه به‌وقوع پیوست. صرفنظراز گسترش نمادگذاری عددی جدید که معمولاً عربی نامیده می‌شود، جداول توابع مثلثاتی سینوس وتانژانت هم قبل‌از قرن دهم تنظیم شدند. به طرف خاور، در هندوچین، تحول ریاضی به موازات هم،

---

1. Archimedes　2. Newton　3. Heron
4. Pythagoreans　5. Diophantus

(گرچه نه تماماً مجزا از یکدیگر) صورت گرفت.

درغرب، رنسانس وانقلاب علمی با توسعهٔ سریعی از دانش ریاضی، ازجمله مبحث آنالیزعددی، همراه بود. نام ریاضیدانان بزرگی چون نیوتن، اویلر[1]، لاگرانژ[2]، گاوس[3] و بسل[4] بهروشهای جدیدآنالیزعددی منتسب می گردد واین خود مبین علاقهٔ همه جانبه به این موضوع است.

درقرن هفدهم، نپر[5]، یك جدول لگاریتم به وجودآورد، اوترد[6] خط کش محاسبه را اختراع کرد، و پاسکال[7] ولایبنیتز[8] دراختراع ماشینهای محاسب (هرچندکه این ماشینها تا قرن نوزدهم درسطح وسیعی تولید نشدند) پیشقدم شدند. تدارك چنین ماشینهایی درکار عددی انقلابی به وجودآورد، واین انقلاب از اواخر دههٔ ۱۹۴۰ با پیدایش کامپیوتر الکترونیك تشدید شد.

اهمیت این انقلاب وقتی روشن میشودکه پیشرفتهای مربوط بهسرعت محاسبه را مورد توجه قرار بدهیم؛ درحالی که ماشینهای محاسب مکانیکی درحدود ده بار سریعتر از مداد وکاغذ هستند،کامپیوترهای الکترونیك درحدود ده میلیون بار ازآن هم سریعترند! روندهای جدیدی پدیدآمده ومیآیند؛ محاسبات وتحلیل دادههایی که تا چند دههٔ پیش حتی تصور انجامشان درطول عمریك انسان هم نمیرفت،اینك ظرف چندساعت انجام میشوند. ماشینآلات در اختیار ما سیمای جدید غالب درزمینهٔ آنالیزعددی است.

۲ـ آنالیز عددی درحال حاضر

علم نظری مشتمل است برساختن قالبهایی برای تفسیر نتایج تجربی و پیشبینی نتایج برای کنترل تجربههای آتی. چون این نتایج غالباً عددی هستند، متخصص ریاضیات کاربردی تلاش میکند تا برای وضع پیچیدهای که در مباحثی مانند فیزیك یااقتصاد پیش میآید، با بیان جنبههای مهم بهزبان ریاضی، یك قالب ریاضی بسازد. هنر ریاضیات کاربردی خوب آن است که جهت استنتاجهای مفید فقط جنبههای مهم را درنظربگیرد،زیرا در غیراین صورت، معمولاً کار اضافی غیرضرور پیش میآید.

ماهیت مجرد چنین قالب ریاضی میتواند یك مزیت واقعی باشد، زیرا ممکن است این قالب شبیه قالبهای دیگری باشدکه قبلاً درزمینههای کاملاً متفاوت مورد مطالعه قرار گرفته، ولذا جوابهایشان معلومند. گاهی اوقات ممکن است یك راه حل تحلیلی صوری در دسترس باشد، ولی دراین حالت هم ممکناست بهعباراتیآن چنان پیچیده بربخوریم که هرگونه تفسیرمورد نیاز بعدی ازنتایج ریاضی را مشکل سازند. در بسیاری ازحالات،یك روند عددی که بهنتایج عددی بامعنایی هم منجرمیشود وجود دارد و مرجح است. آنالیز عددی هنوز هم شاخهایاز ریاضیات است که در آن این قبیل روندهای عددی، و دراین زمان با تأکید برفنونقابل استفاده درکامپیوترهای رقمیخودکار، مورد مطالعهقرارمی گیرند.

1. Euler
2. Lagrange
3. Gauss
4. Bessel
5. Napier
6. Oughtred
7. Pascal
8. Leibniz

در آنالیزعددی موضوعات اصلی گوناگونی وجود دارند، از آن جمله است: یافتن ریشه‌های معادلات غیرخطی، حل دستگاههای معادلات جبری خطی، استفادهٔ صحیح از جداول، محاسبهٔ انتگرالها، حل معادلات دیفرانسیل و بهگزینی. مثلاً، معادلات مشتمل بر توابع متعالی (نظیرلگاریتم یا سینوس)، اغلب درعلوم یا مهندسی پیش می‌آیند ومعمولاً به طور عددی حل می‌شوند. معادلات جبری (نظیر دوران یك دستگاه محورهای مختصات یا انتقال‌کالا دراقتصاد) هم درعلوم متداول هستند و هم درعلوم اجتماعی. جواب معادلات دیفرانسیل نیازمبرم رشته‌های گوناگونی نظیرفیزیك ریاضی یا مطالعات محیط زیستی‌است. چون بسیاری از این معادلات دیفرانسیل غیرخطی هستند و لذا، احتمالاً جواب تحلیلی ندارند، جواب عددیشان حایزاهمیت است.

البته، در یك‌کتاب درسی مقدماتی، به‌جز اشاره به چند مطلب اساسی، نمی‌توان به بحث عمیق پرداخت. بااین وجود، امیدواریم بااین تذکرات مختصردانشجویان را تشویق کرده باشیم که نه‌تنها پیشرفت خود به‌کمك این‌کتاب را با ارزش تلقی کنند، بلکه با شوق وموفقیت به‌فراگیری مطالبی بیش‌ازاین نیزهمت گمارند.

۳ـ در باب این‌کتاب

هرمبحث اصلی این‌کتاب به‌تعدادی‌گام تقسیم شده است. پنج‌گام اول به مسئلهٔ خطاهای ناشی ازکارعددی اختصاص داده شده‌اند. ما معتقدیم که برای آشنایی صحیح باهنراستفاده از روشهای عددی، درك کامل خطاها لازم است. مفاهیم و روشهایی که در مباحث معادلات غیرخطی، دستگاه معادلات خطی، درونیابی، مشتق‌گیری وانتگرال‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرند مربوط به‌گامهای بعدی هستند.

اکثر گامهای‌بدون ستارهٔ این‌کتاب درهردرس مقدماتی‌گنجانیده‌خواهد شد. گامهای ستاره‌دار («گامهای جنبی») مطالبی را دربرمی‌گیرند که به نظر مؤلفین، با اینکه سطحشان بالا نیست، برای یك درس مقدماتی اضافی هستند. کوشش شده است‌مطالب هر گام به‌طور مناسبی روبه افزایش باشد، و شاید هم وابستهٔ به درك‌گامهای قبلی‌بدون ستاره (و نه‌گامهای بعدی). به‌طور مطلوب، بررسی هر گام باید دست‌کم‌همراه باتمریناتی باشدکه، درصورت لزوم، تحت راهنمایی معلم حل شوند. تأکید می‌کنیم‌که آنالیز عددی به‌تجربهٔ عملی نسبتاً زیاد نیاز دارد و تمرین بیشتر نیز می‌تواند مؤثر واقع‌شود.

در داخل هر گام، ابتدا مفاهیم و روشهایی راکه باید فراگرفته شوند ارائه می‌کنیم و متعاقبش چند مثال روشن‌کننده. سپس از دانشجویان می‌خواهیم، با جواب دادن به دو یا سه سؤال خودآزمایی میزان درك‌آنی خود از مطالب را امتحان کنند. این سؤالات به‌نکات برجستهٔ هر گام مربوط می‌شوند، و دانشجویان رابه اندیشیدن دربارهٔ آنها و خواندن مجدد مطالب‌مربوط وامی‌دارند، و ممکن است برای حك واصلاح هم مفید واقع شوند. جواب مختصر تمرینات موجود درهر گام را در انتهای‌کتاب آورده‌ایم.

پس از بررسی بسیار، مؤلفین تصمیم گرفتندکه برای الگوریتمهای مختلف مذکور

در گامها، برنامهٔ کامپیوتری ضمیمه نکنند. با این وجود چند فلوچارت اساسی‌را به‌صورت یك ضمیمه عرضه کرده‌اند. در صورتی که دانشجویـان فلوچارت یك روش را همزمان با یادگیری گام مربوط مورد مطالعه قرار دهند فـایدهٔ بسیاری خواهند برد. اگر دانشجویان با یك زبان برنامه‌نویسی آشنا باشند، تشویق خواهند شد که دست‌کم بعضی از فلوچارتها را به‌صورت یك برنامهٔ کامپیوتری درآورند و از آنهـا برای تمرینـات مربوط استفاده کنند.

گام یك

خطاها - ۱

منابع خطا

منابع اصلی خطا درموقع به‌دست‌آوردن جوابهای عددی مسائل ریاضی عبارتند از:

(الف) قالب ـ ساختمان قالب معمولاً متضمن ساده‌کردن وحذف‌کردن است؛

(ب) داده‌ها ـ ممکن است خطاهایی در اندازه‌گیری یا برآورد مقادیر باشد؛

(پ) روش عددی ـ عموماً مبتنی برنوعی تقریب‌کردن است؛

(ت) نمایش‌اعداد ـ مثلاً π را نمی‌توان به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی‌رقم نمایش داد؛

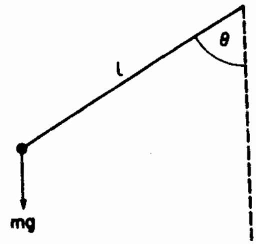
(ث) حساب ـ غالباً درانجام عملیاتی نظیر جمع $(+)$ و ضرب $(\times)$ خطاهایی ایجاد می‌شوند.

مسئولیت (الف) را می‌توان برعهدهٔ متخصص ریاضیات کاربردی گذاشت، ولی از بقیه به آسانی نمی‌توان گذشت. لذا، اگرمعلوم شودکه خطاهای‌موجود در داده‌ها درمحدودهٔ معینی هستند باید قادر باشیم خطاهای منتج در پاسخها را برآوردکنیم. به طریق مشابه با معلوم بودن مشخصات کامپیوتر، باید بتوان تأثیرات (ت) و (ث) را نیز در نظر گرفت. در مورد (پ)، وقتی یك روش عددی ابداع می‌شود رسم براین است‌که خواص خطایش را نیز بررسی کنند.

مثال

برای تشریح طرقی‌که خطاهای‌فوق به‌وجود می‌آیند،مثال‌آونگ ساده را درنظرمی گیریم (ر. ك. ش. ۱). اگر از مقاومت هوا و اصطکاك در لولا صرفنظر شود، معادلهٔ دیفرانسیل سادهٔ (غیرخطی) زیر به دست می‌آید

$$ml\frac{d^۲\theta}{dt^۲}=-mg\sin\theta.$$



شکل ۱. آونگ ساده

مرحلهٔ بعدی متداول در درس مکانیك مقدماتی[1] به‌کار بردن تقریب $\sin\theta \approx \theta$ جهت به دست‌آوردن معادلهٔ دیفرانسیل بازهم ساده‌تر (خطی) ذیل است:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta\,,\ \ \omega^2 = g/l.$$

این معادله دارای جواب تحلیلی

$$\theta(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t,$$

است، که در آن A و B اعداد ثابت مناسبی هستند.

لذا می‌توان نتیجه گرفت که دورهٔ تناوب این آونگ ساده (یعنی کوچکترین مقدار مثبت T که $(\theta(t+T)=\theta(t)$ عبارت است از

$$2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{l/g}\ .$$

تا اینجا تنها باخطاهای از نوع (الف) مواجه شده‌ایم؛ وقتی بخواهیم دریك‌حالت خاص مقداری عددی برای T به دست‌آوریم سایرخطاها هم وارد می‌شوند. ازاین‌رو هم l وهم g دستخوش خطاهای اندازه‌گیری خواهند بود؛ π باید به‌صورت یك عدد اعشاری متناهی نمایش داده شود؛ پس از تقسیم l بر g (که ممکن است شامل خطای گرد کردن باشد) جذر باید (بااستفاده از جدول یا یك روند تکراری) محاسبه، وسرانجام این جذر باید در 2π ضرب شود.

خودرا بیازمایید

۱ــ چه منابعی ازخطا مورد توجه متخصص آنالیزعددی هستند؟

---

۱. درعمل، بااستفاده ازیك روش عددی (ر.ك. گام ۳۱) جهت حل معادلهٔ دیفرانسیل واقع‌بینانه‌تر (غیرخطی) زیر، می‌توان از خطای نوع (الف) کاست

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\sin\theta.$$

۲ـ کدام نوع ازخطاها به‌کامپیوترمورد استفاده بستگی دارد؟

تمرین

درحین انجام محاسبات زیر، تمام جاهایی راکه در آن نوعی خطا به‌وجودمی آید مشخص کنید.

۱ـ با فرض اینکه $g = ۹۸۱ \mathrm{cm/sec}^۲$، دورهٔ تناوب یك آونگ ساده به‌طول ۷۵ سانتیمتر را محاسبه کنید.

۲ـ اندازهٔ جریان یك مایع از یك سوراخ مدور به‌قطر d به‌وسیلهٔ دستور

$$R = C\frac{\pi d^۲}{۴}\sqrt{۲gH}\,,$$

که در آن C ضریب مربوط به‌تخلیه و H اختلاف ارتفاع است به‌دست می‌آید. با فرض اینکه $d = ۱۵\,\mathrm{cm}$ وضریب تخلیه‌برابر ۰٫۰۲۸ برآورد شده باشد، مطلوب است محاسبهٔ R برای اختلاف ارتفاع ۶۵۰ سانتیمتر.

گام دو

خطاها-۲

تقریب اعداد

گرچه ممکن‌است مبتدی با ما موافق نباشد ولی بررسی طرق مختلف نمایش اعداد حایز اهمیت است.

۱- نمایش اعداد

با وجودی‌که ماشینهای محاسب جدید از صوردوتایی (مبنای ۲) و نیز ۱۶ تایی (مبنای ۱۶) استفاده می‌کنند، مع‌هذا انسانها معمولاً یك عدد را به صورت اعشاری (مبنای ۱۰) نمایش می‌دهند. انجام عمل تقسیم اغلب به عددی منجرمی‌شودکه خاتمه نمی‌یابد؛ نمایش اعشاری (مبنای ۱۰) ۲/۳ یك نمونهٔ آن است. همچنین اعداد گنگی نظیر مقدار π هم وجود دارندکه خاتمه نمی‌یابند. برای انجام یك محاسبه عددی شامل چنین اعدادی، ناچاریم آنها را به وسیلهٔ نمایشی‌که شامل تعدادی متناهی رقم با معنی (S)[1] است تقریب کنیم. به‌دلایل عملی (مثلاً اندازهٔ پشت پاکت یا «حافظهٔ» موجود دریك ماشین)، معمولاً تعداد این ارقام بسیارکم‌است.

تا پنج رقم با معنی ($5S$)، ۲/۳ به صورت ۰٫۶۶۶۶۷، π به صورت ۳٫۱۴۱۶ و $\sqrt{2}$ به‌صورت ۱٫۴۱۴۲ نمایش داده می‌شود. هیچ‌یك از این‌ها یك نمایش دقیق نیستند، اما تمامشان درحد نصف واحد رقم پنجم بامعنی درستند. (دانشجویان توجه داشته باشندکه اعداد را همیشه باید بدین مفهوم، درست تا تعداد معلومی از ارقام، نمایش دهند.)

اگر اعدادی راکه باید نمایش دهیم خیلی بزرگ یا خیلی کوچك باشند، مناسب است که آنها را برحسب نمادگذاری ممیز سیار بنویسیم (مثلاً سرعت نور $2.99793 \times 10^{8} m/s$ یا بارالکترونی 1.6021×10^{-19} کولن). به‌طوری‌که اشاره شد، ارقام بامعنی (مانتیس) را از توان‌ده (نما) جدا می‌کنیم؛ شکلی‌راکه‌در آن نماچنان‌انتخاب

---

۱. S حرف اول Significant به‌معنی «بامعنی» است. م.

می‌شود که اندازهٔ مانتیس کمتر از ۱۰ و نا کمتر از ۱ باشد نمادگذاری علمی می‌نامند.

۲ـ خطای گرد شده

ساده‌ترین راه کاهش تعداد ارقام بامعنی درنمایش یك عدد، این است که از ارقام ناخواسته صرفنظر شود. این روند، معروف به قطع کردن، به‌وسیلهٔ بسیاری ازکامپیوترهای جدید مورد استفاده قرار می‌گیرد. یك روند بهتر گرد کردن است که شامل افزودن ۵ به اولین رقم ناخواسته است و سپس قطع کردن حاصل. برای مثال، اگر π تا چهار رقم اعشار ($۴D$)[1] قطع شود، ۳٫۱۴۱۵ به دست می‌آید، ولی درصورتی که گرد شود حاصل ۳٫۱۴۱۶ می‌شود؛ نمایش ۳٫۱۴۱۶ تا پنج رقم با معنی ($۵S$) درست است. خطای موجود درکاهش تعدادارقام به خطای گرد شده موسوم است. چون π برابر ۳٫۱۴۱۵۹۰۰۰ است، می‌توان ملاحظه کرد که قطع کردن، خطای گرد شدهٔ بسیار بیشتری از گرد کردن ایجاد کرده‌است.

۳ـ خطای برشی

نتایج عددی اغلب با بریدن یك سری نامتناهی یا با روند تکراری (ر.ك. گام ۵) به‌دست می‌آیند. درحالی که با در نظر گرفتن ارقام با معنی بیشتر می‌توان خطای گرد شده راکاهش داد، خطای برشی را می‌توان با در نظر گرفتن جملات بیشتر در سری یا گامهای بیشتر در تکرارکاهش داد؛ البته این عمل متضمن کار (وشاید هم مخارج) اضافی است.

۴ـ اشتباهات

در زبان آنالیزعددی، یك اشتباه (یا خبط) یك خطا نیست! یك اشتباه ناشی از جایزالخطا بودن (معمولاً انسان و نه ماشین) است. اشتباهات ممکن است بدیهی باشند، با تأثیری اندك بردقت محاسبه یا بدون هیچ‌تأثیر، یا ممکن است چنان خطیر باشند که نتایج محاسبه شدهٔکاملاً غلطی را به‌دست دهند. سه چیزاست که می‌تواند درجلوگیری ازاشتباه کمك کند.

(i) دقت؛
(ii) بازبینی، اجتناب ازتکرار؛
(iii) آگاهی از منابع متداول اشتباه.

اشتباهات متداول مشتمل است بر: جابه‌جا کردن ارقام (مثلاً خواندن ۶۲۳۸ به‌صورت ۶۳۲۸)؛ غلط خواندن ارقام مکرر (مثلاً خواندن ۶۲۲۳۸ به‌صورت ۶۲۳۳۸)؛ غلط

---

۱. D حرف اول Decimal به معنی «اعشاری» است. منظور از (۴D) همان ۴ رقم اعشار است. م.

خواندن جدولها (مثلاً مراجعه به‌یك سطر یا یك ستون عوضی) ؛ نادرست قرار دادن ممیز اعشاری؛ عدم توجه به علامتها (به خصوص وقتی که تغییر علامت نزدیك به‌هم باشند.)

۵- مثال

نمونه‌های زیر گرد کردن تا چهار رقم اعشار را نشان می‌دهند:

$$\frac{۴}{۳} \rightarrow ۱٫۳۳۳۳;\ \frac{\pi}{۲} \rightarrow ۱٫۵۷۰۸;\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow ۰٫۷۰۷۱.$$

نمونه‌های زیر گرد کردن تا چهاررقم با معنی را نشان می‌دهند:

$$\frac{۴}{۳} \rightarrow ۱٫۳۳۳;\quad \frac{\pi}{۲} \rightarrow ۱٫۵۷۱;\ \frac{۱}{\sqrt{۲}} \rightarrow \ ۰٫۷۰۷۱.$$

خود را بیازمایید

۱- چه چیزی می‌تواند دقت یك عدد مورد محاسبه را محدود کند؟
۲- قرارداد پذیرفته شده در گرد کردن چیست؟
۳- از کدام یك انتظار گرفتن نتیجهٔ بهتری دارید، گرد کردن یا قطع کردن؟
۴- چگونه می‌توان از اشتباه اجتناب کرد؟

تمرین

۱- نمایش ممیز سیار اعداد زیر را بنویسید:

$$۱۲٫۳۴۵;\ ۰٫۸۰۰۵۹;\ ۲۹۶٫۸۴۴;\ ۰٫۰۰۵۱۹.$$

۲- هریك از اعداد زیر را:

$$۳۴٫۷۸۲۱۹;\ ۳٫۴۷۸۲۱۹;\ ۰٫۳۴۷۸۲۱۹;\ ۰٫۰۳۴۷۸۲۱۹$$

(الف) تا سه رقم با معنی ($۳S$) قطع کنید؛
(ب) تا سه رقم اعشار ($۳D$) قطع کنید؛
(پ) تا سه رقم با معنی ($۳S$) گرد کنید؛
(ت) تا سه رقم اعشار ($۳D$) گرد کنید.

گام سه

خطاها ـ ۳

تولید و انتشار خطا

قبلا اشاره کرده‌ایم که یك عدد، با تعدادی متناهی رقم، و درنتیجه اغلب با یك تقریب، نمایش داده می‌شود. لذا باید انتظار داشت که نتیجهٔ هر روند محاسباتی (هر الگوریتم) شامل دسته‌ای از اعداد، خطایی ضمنی داشته باشد که به خطای اعداد اصلی مربوط می‌شود. گوییم که خطاهای اولیه درطی محاسبه منتشر می‌شوند. به علاوه، درهر گام الگوریتم ممکن است خطاهایی هم تولید شوند، و می‌توانیم از کل خطای جمع شده در هر گام به عنوان خطای مجتمع نام ببریم.

چون می‌خواهیم نتایج را درمحدودهٔ منتخبی ازخطا به‌دست آوریم، بررسی انتشار خطا مفید است. بنابه تجربه اجمالاً می‌توان گفت که خطای منتشرشده به الگوریتم ریاضی انتخاب شده بستگی دارد، درحالی که خطای تولید شده به‌ترتیب عملی مراحل محاسباتی بیشترحساسیت نشان می‌دهد. ممکن‌است دراین مورد به‌صورت دقیقتر زیرهم صحبت کرد.

۱ـ خطای مطلق

خطای مطلق عبارت است از قدرمطلق تفاضل بین خود عدد x ومقدار تقریبی‌آن، x^*؛ یعنی

$$^{1}e_{abs}=|x-x^*|.$$

برای یك عدد درست تا n رقم اعشارداریم

---

۱. abs سه حرف اول absolute به‌معنی «مطلق» و e حرف اول error به‌معنی «خطا»ست. م.

$$e_{abs} \leqslant ۰٫۵ \times ۱۰^{-n};$$

انتظار داریم که خطای مطلق هرعدد تقریبی بیشتر از ۵ واحد در اولین رقم صرفنظر شده نباشد.

۲- خطای نسبی

خطای نسبی عبارت است ازنسبت خطای مطلق به‌قدرمطلق خود عدد، یعنی،

$$^{۱}e_{rel} = \frac{e_{abs}}{|x|} \leqslant \frac{e_{abs}}{|x^*| - e_{abs}}.$$

(دقت کنید که کران بالا از نامساوی مثلثی نتیجه می‌شود؛ یعنی

$$|x^*| = |x + x^* - x| \leqslant |x| + |x^* - x|,$$

و لذا $(.|x| \geqslant |x^*| - e_{abs}$

اگر $e_{abs}{}^{۲} \langle\langle |x^*|$ آنگاه $.\mathrm{Max}\{e_{rel}\} \approx \frac{e_{abs}}{|x^*|}$

برای یك عدد اعشاری، درست تا n رقم بامعنی داریم

$$e_{rel} \leqslant ۵ \times ۱۰^{-n}.$$

۳- انتشارخطا

دو عدد $x = x^* + e_۱$ و $y = y^* + e_۲$ را درنظر بگیرید.

(i) تحت اعمال جمع یا تفریق داریم:

$$x \mp y = x^* \mp y^* + e_۱ \mp e_۲$$

که درنتیجه

$$e \equiv (x \mp y) - (x^* \mp y^*) = e_۱ \mp e_۲,$$

لذا

$$|e| \leqslant |e_۱| + |e_۲|,$$

یعنی

---

۱. rel سه حرف اول relative به‌معنی «نسبی» است. م.

۲. نماد ⟩⟩ به معنی «خیلی کوچکتر است از» می‌باشد. x ⟩⟩ y یعنی «x خیلی کوچکتر از y است». م.

$$\operatorname{Max}\{|e|\}=|e_۱|+|e_۲|.$$

بنابراین، اندازهٔ خطای منتشرشده بیشتر ازمجموع خطاهای مطلق اولیه نیست؛ البته ممکن است صفرهم باشد.

(ii) تحت عمل ضرب داریم:

$$xy-x^*y^*=x^*e_۲+y^*e_۱+e_۱e_۲,$$

که درنتیجه

$$\left|\frac{xy-x^*y^*}{x^*y^*}\right| \leqslant \left|\frac{e_۱}{x^*}\right|+\left|\frac{e_۲}{y^*}\right|+\left|\frac{e_۱}{x^*}\ \frac{e_۲}{y^*}\right|,$$

و لذا، اگرفرض کنیم $\left|\frac{e_۱}{x^*}\ \frac{e_۲}{y^*}\right|$ قابل چشم‌پوشی باشد،

$$\operatorname{Max}\{e_{rel}\}\approx\left|\frac{e_۱}{x^*}\right|+\left|\frac{e_۲}{y^*}\right|.$$

بیشترین خطای نسبی منتشرشده تقریباً برابر با مجموع خطاهای نسبی اولیه است. از عمل تقسیم نیز نتیجهٔ مشابهی به‌دست می‌آید.

۴ـ تولید خطا

اغلب(مثلاً دریك ماشین)عملی چون $\otimes$ نیز به‌وسیلهٔ عمل‌دیگر، فرضاً $\otimes^*$، تقریب می‌شود. درنتیجه $x\otimes y$ به وسیلهٔ $x^*\otimes^* y^*$ نمایش داده می‌شود. درواقع داریم:

$$\begin{aligned}|x\otimes y-x^*\otimes^* y^*|&=|(x\otimes y-x^*\otimes y^*)+(x^*\otimes y^*-x^*\otimes^* y^*)|\\&\leqslant|x\otimes y-x^*\otimes y^*|+|x^*\otimes y^*-x^*\otimes^* y^*|,\end{aligned}$$

که درنتیجه خطای مجتمع ازمجموع خطاهای منتشرشده و تولید شده بیشتر نمی‌شود. مثالهای مربوط به‌این قسمت را می‌توان درگام ۴ یافت.

۵ـ مثال

مطلوب است محاسبهٔ (تاحد امکان دقیق):

(i) $۳٫۴۵+۴٫۸۷-۵٫۱۶$؛

(ii) $۳٫۵۵\times ۲٫۷۳$.

دو روش وجود دارد که می‌تواند مورد توجه دانشجو قرار بگیرد، اولی عبارت است از به‌کارگیری مفاهیم خطای مطلق و خطای نسبی تعریف شدهٔ دراین گام. لذا، نتیجهٔ مربوط به (i) برابر است با ۳ر۱۶ ± ۰ر۰۱۵، زیرا بیشترین خطای مطلق

$$۰ر۰۰۵+۰ر۰۰۵+۰ر۰۰۵=۰ر۰۱۵$$

است. لذا نتیجه می‌شود که جواب ۳ (تا ۱S) است، زیرا یقیناً این عدد بین ۳ر۱۴۵ و ۳ر۱۷۵ قرار می‌گیرد. در (ii)، حاصل‌ضرب ۹ر۶۹۱۵ مقید به بیشترین خطای نسبی

$$\frac{۰ر۰۰۵}{۳ر۵۵}+\frac{۰ر۰۰۵}{۲ر۷۳}+\frac{۰ر۰۰۵}{۳ر۵۵}\times\frac{۰ر۰۰۵}{۲ر۷۳}\approx\left(\frac{۱}{۳ر۵۵}\times\frac{۱}{۲ر۷۳}\right)\times ۰ر۰۰۵$$

است، لذا:

$$۰ر۰۳ \approx ۰ر۰۰۵\times(۳ر۵۵+۲ر۷۳) \approx \text{بیشترین خطای (مطلق)}$$

که درنتیجه جواب برابر ۹ر۷ خواهد بود.

دومین روش، استفاده‌از «حساب بازه‌ها» است. بنابراین عدد تقریبی ۳ر۴۵ نمایش عددی است در بازهٔ (۳ر۴۴۵, ۳ر۴۵۵)، و الی‌آخر. پس جواب (i) در بازه‌ای واقع می‌شود که از پایین به

$$۳ر۴۴۵+۴ر۸۶۵-۵ر۱۶۵=۳ر۱۴۵$$

و از بالا به

$$۳ر۴۵۵+۴ر۸۷۵-۵ر۱۵۵=۳ر۱۷۵$$

محدود است. به‌همین طریق، جواب (ii) در بازه‌ای واقع می‌شود که از پایین به

$$۳ر۵۴۵\times۲ر۷۲۵\approx۹ر۶۶$$

و از بالا به

$$۳ر۵۵۵\times۲ر۷۳۵\approx۹ر۷۲$$

محدود است. لذا مجدداً نتیجه می‌شود که اعداد تقریبی ۳ و ۹ر۷ به‌ترتیب جوابهای (i) و (ii) را دقیقاً نمایش می‌دهند.

خود را بیازمایید

۱ــ وجه تمایز خطای منتشرشده و تولید شده چیست؟

۲ــ چگونه می‌توان خطای منتشرشده را برای اعمال جمع (تفریق) و ضرب (تقسیم) تعیین کرد؟

تمرین

با فرض اینکه تمامی مقادیر زیرتا تعداد ارقام داده شده درست هستند، عبارات زیر را با

دقت ممکن حساب کنید:

(الف) ۵٫۳۳ + ۸٫۲۴؛

(ب) ۱۲۴٫۵۲ − ۱۲۴٫۵۳؛

(پ) ۳٫۱۳ × ۴٫۲۷:

(ت) ۶٫۷۲ − ۰٫۵۱۳ × ۹٫۴۸؛

(ث) $\frac{۲٫۸۴}{۰٫۶۴}$ × ۰٫۲۵؛

(ج) ۳٫۰۲ + ۰٫۹۷ − ۲٫۲۳ − ۱٫۰۰ + ۰٫۰۸ + ۲٫۱۶ − ۱٫۷۳.

گام چهار

خطاها ـ ۴

حساب ممیز سیار

درگام ۲، نمایش ممیزسیار به‌عنوان طریقی‌مناسب جهت‌کار کردن با اعداد بزرگ یا کوچك معرفی شد. چون اکثر محاسبات علمی شامل چنین اعدادی هستند، بسیاری از دانشجویان ضمن آشنایی با حساب ممیز سیار، به‌این روش که سبب سهولت محاسبات مشتمل برضرب یا تقسیم می‌شود ارج خواهند نهاد.

برای بررسی پیامدهای نمایش متناهی اعداد باید طریقی را که درآن عملیات با ممیزسیار انجام می‌پذیرد موردبررسی قراردهیم. مشخصات زیر درمورد اکثرکامپیوترهایی که گرد می‌کنند صادق است و برای‌کامپیوترهایی که قطع می‌کنند هم به‌آسانی قابل‌تطبیق. برای سادگی مثالها از مانتیس‌های اعشاری ۳ رقمی، نرمال شده جهت قرار گرفتن در حوزهٔ (۱۰ ,۱]، یعنی، ۱۰ > |مانتیس| ⩽ ۱، استفاده می‌کنند (اکثرکامپیوترهای رقمی نمایش اعداد درمبنای ۲ ومانتیس معمولاً نرمال شده جهت قرارگرفتن درحوزهٔ (۱ ,۱/۲] را به‌کار می‌برند.) توجه داشته باشید که برای نتایج میانی تا ۶ رقم به کارگرفته می‌شود ولی نتیجهٔ نهایی هرعمل، یك عدد ممیز سیار اعشاری ۳ رقمی نرمال شده‌است.

۱ـ جمع وتفریق

بعد از انتقال مانتیس وافزایش نمای عددکوچکتر، درصورت لزوم، جهت یکسان شدن نماها، مانتیس‌ها را جمع یا تفریق می‌کنیم و نتیجهٔ نهایی را (بعدازانتقال مانتیس وتنظیم نما، در صورت لزوم) با گردکردن به‌دست می‌آوریم. لذا

$$۳/۱۲ \times ۱۰^{۱} + ۴/۲۶ \times ۱۰^{۱} = ۷/۳۸ \times ۱۰^{۱}$$

$$۲٫۷۷ \times ۱۰^{۲} + ۷٫۵۵ \times ۱۰^{۲} = ۱۰٫۳۲ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۱٫۰۳ \times ۱۰^{۳}$$

$$۶٫۱۸ \times ۱۰^{۱} + ۱٫۸۴ \times ۱۰^{-۱} = ۶٫۱۸ \times ۱۰^{۱} + ۰٫۰۱۸۴ \times ۱۰^{۱}$$

$$= ۶٫۱۹۸۴ \times ۱۰^{۱} \rightarrow ۶٫۲۰ \times ۱۰^{۱}$$

$$۳٫۶۵ \times ۱۰^{-۱} - ۲٫۷۸ \times ۱۰^{-۱} = ۰٫۸۷ \times ۱۰^{-۱} \rightarrow ۸٫۷۰ \times ۱۰^{-۲}.$$

۲- ضرب

نماها جمع ومانتیس‌ها ضرب‌می‌شوند؛ نتیجهٔ‌نهایی (بعداز انتقال مانتیس به‌طرف راست و افزایش نما به اندازهٔ یك واحد، درصورت لزوم) باگردکردن به دست می‌آید. لذا:

$$(۴٫۲۷ \times ۱۰^{۱}) \times (۳٫۶۸ \times ۱۰^{۱}) = ۱۵٫۷۱۳۶ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۱٫۵۷ \times ۱۰^{۳}$$

$$(۲٫۷۳ \times ۱۰^{۲}) \times (-۳٫۶۴ \times ۱۰^{-۲}) =$$

$$-۹٫۹۳۷۲ \times ۱۰^{۰} \rightarrow -۹٫۹۴ \times ۱۰^{۰}.$$

۳- تقسیم

نماها از هم تفریق ومانتیس‌ها برهم تقسیم می‌شوند و نتیجهٔ نهایی (بعدازانتقال مانتیس‌ها به‌طرف چپ وکاهش‌نما به‌اندازهٔ یك واحد، درصورت لزوم) باگردکردن حاصل می‌شود. لذا:

$$\frac{۵٫۴۳ \times ۱۰^{۱}}{۴٫۵۵ \times ۱۰^{۲}} = ۱٫۱۹۳۴۰\ldots \times ۱۰^{-۱} \rightarrow ۱٫۱۹ \times ۱۰^{-۱}$$

$$\frac{-۲٫۷۵ \times ۱۰^{۲}}{۹٫۸۷ \times ۱۰^{-۲}} = -۰٫۲۷۸۶۲۲\ldots \times ۱۰^{۴} \rightarrow -۲٫۷۹ \times ۱۰^{۳}.$$

۴- عبارات

ترتیب محاسبه به‌طریقی استاندارد تعیین می‌شود و نتیجهٔ هر عمل یك عدد ممیزسیار نرمال شده است. لذا:

$$\frac{۶٫۱۸ \times ۱۰^{۱} + ۱٫۸۴ \times ۱۰^{-۱}}{(۴٫۲۷ \times ۱۰^{۱}) \times (۳٫۶۸ \times ۱۰^{۱})}$$

$$\rightarrow \frac{۶٫۲۰ \times ۱۰^{۱}}{۱٫۵۷ \times ۱۰^{۳}} = ۳٫۹۴۹۰۴\ldots \times ۱۰^{-۲} \rightarrow ۳٫۹۵ \times ۱۰^{-۲}$$

۵ـ خطای تولید شده

توجه داریم که تمامی مثالهای فوق (به‌استثنای تفریق و اولین جمع) مشتمل برخطاهای تولید شده‌ای هستند که به‌خاطر اندازهٔ کوچك مانتیس‌ها، نسبتاً بزرگند. لذا خطای تولید شدهٔ در

$$2.77 \times 10^{2} + 7.55 \times 10^{2} = 10.32 \times 10^{2} \rightarrow 1.03 \times 10^{3}$$

برابراست با 0.002×10^{3} چون خطای منتشرشدهٔ در این مثال می‌تواند به اندازهٔ 0.01×10^{2} (با فرض درست بودن مؤلفه‌ها تا $3S$) باشد، با استفاده از نتیجهٔ گام ۳ می‌توان دریافت که خطای مجتمع نمی‌تواند از

$$0.002 \times 10^{3} + 0.01 \times 10^{2} = 0.003 \times 10^{3}$$

تجاوز کند.

۶ـ نتایج

ویژگیهای حساب ممیز سیار به‌چند نتیجهٔ غیرمنتظره وناخوشایند منجرمی‌شود، از جمله:

(الف) جمع یاتفریق یك عدد کوچك (ولی‌غیرصفر) ممکن‌است هیچ تأثیری نداشته باشد، مثلا

$$5.18 \times 10^{2} + 4.37 \times 10^{-1} = 5.18 \times 10^{2} + 0.00437 \times 10^{2}$$
$$= 5.18437 \times 10^{2} \rightarrow 5.18 \times 10^{2}$$

(یعنی همانی جمعی منحصر به‌فرد نیست).

(ب) غالباً حاصل $a \times (1/a)$ برابر بایك‌نمی‌شود، مثلا اگر: $a = 3.00 \times 10^{0}$ آنگاه $1/a \rightarrow 3.33 \times 10^{-1}$ و $a \times (1/a) \rightarrow 9.99 \times 10^{-1}$،

(یعنی ممکن است معکوس ضربی وجود نداشته باشد).

(پ) حاصل $(a+b)+c$ همواره برابر حاصل $a+(b+c)$ نیست، مثلا، اگر

$a = 6.31 \times 10^{1}$، $b = 4.24 \times 10^{0}$، $c = 2.47 \times 10^{-1}$ آنگاه

$$(a+b)+c = (6.31 \times 10^{1} + 0.424 \times 10^{1}) + 2.47 \times 10^{-1}$$
$$\rightarrow 6.73 \times 10^{1} + 0.0247 \times 10^{1}$$
$$\rightarrow 6.75 \times 10^{1}.$$

درصورتی که

$$a+(b+c)=۶٫۳۱\times ۱۰^{۱}+(۴٫۲\times ۴۱۰^{۰}+۰٫۲۴۷\times ۱۰^{۰})$$
$$\rightarrow ۶٫۳۱\times ۱۰^{۱}+۴٫۴۹\times ۱۰^{۰}$$
$$\rightarrow ۶٫۳۱\times ۱۰^{۱}+۰٫۴۴۹\times ۱۰^{۱}$$
$$\rightarrow ۶٫۷۶\times ۱۰^{۱},$$

(یعنی قانون شرکت‌پذیری برای جمع همواره برقرار نیست).
مثالهای مربوط به‌افزودن تعداد زیادی عدد، با اندازه‌های مختلف، حاکی است که جمع کردن با ترتیب اندازهٔ صعودی بر جمع کردن با ترتیب معکوس آن برتری دارد.

خودرا بیازمایید

۱ـ چراگاهی لازم است که مانتیس را انتقال دهیم و نمای یك عدد ممیز سیار را تنظیم کنیم؟
۲ـ آیا حساب ممیز سیار از قوانین معمول حساب پیروی می‌کند؟

تمرین

۱ـ مطلوب است محاسبات زیر با استفاده از حساب ممیز سیار نرمال شدهٔ تا ۳ رقم اعشار توأم با گرد کردن:

(الف) $۶٫۱۹\times ۱۰^{۲}+۵٫۸۲\times ۱۰^{۲}$؛

(ب) $۶٫۱۹\times ۱۰^{۲}+۳٫۶۱\times ۱۰^{۱}$؛

(پ) $۶٫۱۹\times ۱۰^{۲}-۵٫۸۲\times ۱۰^{۲}$؛

(ت) $۶٫۱۹\times ۱۰^{۲}-۳٫۶۱\times ۱۰^{۱}$؛

(ث) $(۳٫۶۰\times ۱۰^{۳})\times(۱٫۰۱\times ۱۰^{-۱})$؛

(ج) $(-۷٫۵۰\times ۱۰^{-۱})\times(-۴٫۴۴\times ۱۰^{۱})$؛

(چ) $(۶٫۴۵\times ۱۰^{۲})/(۵٫۱۶\times ۱۰^{-۱})$؛

(ح) $(-۲٫۸۶\times ۱۰^{-۲})/(۳٫۲۹\times ۱۰^{۳})$.

۲ـ مطلوب است برآورد خطای مجتمع در نتایج تمرین ۱، مشروط براینکه تمامی مقادیر تا $۳S$ درست باشند.

۳ـ با استفاده از حساب ممیز سیار نرمال شده تا ۴ رقم اعشار توأم با گرد کردن، محاسبات زیر

را انجام دهید، سپس با در نظر گرفتن تمام ارقام اعشاری، این عبارات را مجدداً محاسبه و خطای منتشرشده را برآورد کنید.

(الف) اگر $a=۶٫۸۴۲\times ۱۰^{-۱}$، $b=۵٫۶۸۵\times ۱۰^{۱}$ و $c=۵٫۶۴۱\times ۱۰^{۱}$ آنگاه $a(b-c)$ و $ab-ac$ را بیابید.

(ب) اگر $a=۹٫۸۱۲\times ۱۰^{۱}$، $b=۴٫۶۳۱\times ۱۰^{-۱}$ و $c=۸٫۳۴۰\times ۱۰^{-۱}$ آنگاه $(a+b)+c$ و $a+(b+c)$ را پیدا کنید.

گام پنج

خطاها - ۵

تقریب توابع

یکی از روندهای مهم در آنالیز آن است که یك تابع داده شده را به‌صورت یك سری نامتناهی نمایش دهیم که جملاتش شامل توابع ساده‌تر و یا از جهتی مناسبتر باشند. لذا، اگر $f(x)$ تابع مفروض باشد، ممکن است آن را به‌صورت بسط به سری

$$f(x)=a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x)+\cdots$$

مشتمل بر مجموعهٔ توابع $\{\phi_j(x)\}$ نمایش داد. ریاضیدانان برای توصیف همگرایی سریها، یعنی برای تعیین شرایطی که تحت آنها مجموع جزئی

$$s_n(x)=a_0\phi_0(x)+a_1\phi_1(x)+\cdots+a_n\phi_n(x)$$

با ازدیاد n، هرچه دقیقتر مقدار تابع $f(x)$ را تقریب زند، کوشش فراوانی را مبذول داشته‌اند. در آنالیز عددی، اساساً با چنین سریهای همگرایی سروکار داریم؛ محاسبهٔ دنبالهٔ مجموعهای جزئی، یك روند تقریبی است، که در آن خطای برشی را می‌توان، با در نظر گرفتن تعدادی کافی از جملات، به‌دلخواه کوچك کرد.

۱- سری تیلر[1]

مهمترین بسط برای نمایش یك تابع سری تیلر است. اگر $f(x)$ در یك همسایگی نقطهٔ منتخبی مانند x_0 به‌طورمناسبی هموار باشد، داریم

1. Taylor

$$f(x)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2!}h^2f''(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}h^nf^{(n)}(x_0)+R_n$$

که در آن

$$f^{(k)}(x_0)\equiv\left.\frac{d^kf}{dx^k}\right|_{x=x_0};$$

و

$$h=x-x_0$$

نمایانگر تغییرمکان از x_0 تا نقطهٔ x دراین همسایگی‌است، وجملهٔ باقیمانده عبارت است از

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)$$

که در آن ξ نقطه‌ای بین x_0 و x است. (R_n صورت‌لاگرانژی باقیمانده‌نام دارد؛ برای مثال به‌بخش ۴.۱۸ ازکتاب ج. ب. توماس[1] مذکور درفهرست منابع رجوع شود.)

بسط تیلر برای xهای‌واقع درحوزه‌ای حاوی نقطهٔ x_0، حوزه‌ای‌که داخل همسایگی x_0 فوق‌الذکر قراردارد، همگرا می‌باشد. در داخـل این حوزهٔ همگرایی اندازهٔ خطای برشی حاصل‌ازحذف جملات پس‌از جملهٔ nم (برابر بامقدار R_n درنقطهٔ x) را می‌توان باانتخاب n به‌قدرکافی بزرگ، از هرعدد ثابت مثبت کوچکترنمود. به عبارت دیگر، با استفاده از R_n جهت تشخیص تعداد جملات مورد نیاز، می‌توان در هرنقطه از این حوزهٔ همگرایی تابع را بادقتی‌که خطای گرد شدهٔ مجتمع اجازه می‌دهد محاسبه‌کرد.

از نظریك متخصص‌آنالیز عددی، مهمترین مسئله این‌است‌که همگرایی به قدرکافی سریع باشد. برای مثال، اگر $f(x)=\sin x$، داریم:

$$f'(x)=\cos x$$

$$f''(x)=-\sin x$$

و غیره،

و بسط تیلرآن (حول نقطهٔ $x_0=0$) عبارت است از

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+R_n,$$

با

---

1. G. B. Thomas

$$R_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

چون $|\cos\xi| \leqslant 1$ پس $|R_n| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$؛ درصورتی که دقت $5D$ لازم باشد، نتیجه می گیریم که تنها دوجمله در $x = 0.1$ و چهارجمله در $x = 1$ مورد نیاز است (زیـرا $9! = 362,880$). ازطرف دیگر، بسط لگاریتم طبیعی (درمبنای e)

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n$$

کمترمناسب است. باوجودی‌که برای حصـول دقت $5D$ در $x = 0.1$ تنها چهار جمله مورد نیازاست، برای دقت $5D$ در $x = 0.5$ سیزده جمله لازم‌است و ۱۰ جمله در $x = 1$ صرفاً دقت $1D$ را به‌دست می‌دهد!

علاوه براین، متذکرمی‌شویم که سری تیلر نه‌تنها به‌طور وسیعی جهت نمایش توابع به‌صورت عددی به کار گرفته می‌شود، بلکه برای تحلیل خطاهای موجود در الگوریتمهای مختلف نیز مفیداست. (مثلا به‌گامهای ۸، ۹، ۱۰، ۲۷ و ۲۸ رجوع کنید.)

۲ـ تقریب چند جمله‌ای

ازسری تیلر یك روش سادهٔ تقریب چند جمله‌ای (ازدرجهٔ معین n)،

$$f(x) \approx a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

به‌دست می‌آیدکه اساس بحث روندهای عددی مقدماتی مختلف دراین کتاب درسی‌است. چون $f(x)$ اغلب پیچیده‌است، ممکن‌است ترجیح داده شودکه عملیاتی نظیر مشتق‌گیری وانتگرال‌گیری بریك‌تقریب چندجمله‌ای انجام پذیرد. برای ساختن تقریبات چند جمله‌ای، ازفرمولهای درونیابی (ر. ك. گامهای ۲۰ و ۲۲) نیز می‌توان استفاده‌کرد.

۳ـ سایر بسطهای به سری

چندین بسط دیگر به سری، نظیر سری فوریه[1] (برحسب سینوسها وکسینوسها)؛ یا بسطهای شامل توابع متعامد گونا گون (چند جمله‌ایهای لژاندر[2]، چند جمله‌ایهای چبیشف[3]، توابع بسل وغیره) هم وجود دارند. ازنقطه نظرعددی، سری فوریه وسری چند جمله‌ای چبیشف بریده شده ثابت کرده‌اندکه مفیدترین بسطها هستند. برای بحث درمورد توابع با تناوب

1. Fourier 2. Legendre 3. Chebyshev

طبیعی، سریهای فوریه مناسب هستند، وحال آنکه درمیان تمامی تقریبات شناخته شدهٔ مبتنی برچند جمله‌ایها، سری چبیشف سریعترین همگرایی را به‌دست می‌دهد.

گاهی، امکان دارد که تابع را به طور رضایت‌بخشی (از نقطه نظر عددی) با بریدن یك‌سری که به‌مفهوم ریاضی‌همگرا هم‌نیست نمایش‌داد. مثلا، گاهی‌جوابها به‌صورت‌سریهای مجانبی به‌دست می‌آیند که ازجملات مقدمشان نتایج‌عددی به‌قدرکافی دقیق حاصل می‌شوند.

با اینکه ما توجه خود را دراین‌کتاب به سریهای بریده شدهٔ تیلرمحدود می کنیم، با این وجود دانشجویان علاقه‌مند بایدآ گاه باشندکه چنین بسطهایی نیز وجود دارند (برای مثال ر. ك. کونت[1] و دوبور[2]).

۴ـ روندهای تراجعی

بااینکه یك سری مختوم با چند جمله می‌تواند روشی عملی برای محاسبهٔ مقادیر یك تابع باشد، ولی این روش مشتمل برچندین عمل محاسباتی است. به‌ویژه درمحاسبهٔ کامپیوتری، برخی ازروندهای تراجعی موجودکه حجم محاسبات‌را تقلیل می‌دهند ممکن است مطلوب باشند. مثلا به‌ازای $\bar{x}=x$، مقادیرچند جمله‌ای

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

ومشتق آن

$$P'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}$$

را می‌توان به‌طور تراجعی با برنامهٔ

$$\begin{aligned}
&p_0=a_n,\ q_0=0\\
&p_k=p_{k-1}\bar{x}+a_{n-k}\\
&\qquad\qquad\qquad k=1,2,\ldots,n\\
&q_k=q_{k-1}\bar{x}+p_{k-1}
\end{aligned}$$

تولیدکرد. لذا، برای مقادیرمتوالی k داریم

$$\begin{aligned}
&p_1=p_0\bar{x}+a_{n-1}=a_n\bar{x}+a_{n-1}, && q_1=q_0\bar{x}+p_0=a_0;\\
&p_2=p_1\bar{x}+a_{n-2}=a_n\bar{x}^2+a_{n-1}\bar{x}+a_{n-2}, && q_2=q_1\bar{x}+p_1\\
& && \quad=2a_n\bar{x}+a_{n-1};\\
&\ \vdots && \ \vdots\\
&p_n=P(\bar{x}), && q_n=P'(\bar{x}).
\end{aligned}$$

(شاید دانشجویان بتوانند برای مشتقات بالاتر $P(x)$ نیز یك روند تراجعی ارائه دهند.)

سرانجام، باید متذکر شویم که تولید اعضای یك مجموعه از توابع متعامد به‌صورت تراجعی نیز متداول است.

خود را بیازمایید

۱ـ چگونه متخصصین آنالیز عددی از جملهٔ باقیماندهٔ سری تیلر R_n استفاده می‌کنند؟

۲ـ چرا «سرعت همگرایی» از دیدگاه عددی خیلی با اهمیت است؟

۳ـ آیا از دیدگاه عددی ضرورت دارد که یك نمایش به سری به مفهوم ریاضی همگرا باشد؟

تمرین

۱ـ برای بسط $\cos x$ حول $x = 0$ از سری تیلر استفاده کنید.

۲ـ جهت به‌دست آوردن تقریبات چند جمله‌ای خطی، درجهٔ دوم و درجهٔ سوم برای $f(x) = e^x$ در یك همسایگی $x = 0$، سری تیلر را مختوم کنید. برای برآورد (درحد نزدیکترین به ۰٫۱) حوزه‌ای که درآن ازهریك از چند جمله ایهای تقریب، نتایجی درست تا $2D$ حاصل می‌شود، از جملهٔ باقیمانده استفاده کنید.

۳ـ مطلوب است تعداد جملات مورد لزوم سری تیلر برای $f(x) = e^x$ حول $x = 0$ تا برای تمامی xهای بین ۰ و ۱، دقت $5D$ حاصل شود.

۴ـ مطلوب است محاسبهٔ $P(3.1)$ و $P'(3.1)$ که‌درآن $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x + 3$.

گام شش

معادلات غیرخطی-۱

حل معادلات جبری ومتعالی

معمولا اولین معادلهٔ غیرخطی که دردرس جبر به‌آن برمی‌خوریم معادلهٔ درجهٔ دوم

$$ax^۲+bx+c=۰$$

است. کلیه دانشجویان برای محاسبهٔ ریشه‌های این معادله با فرمول زیر آشنا هستند :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}.$$

فرمول ریشه‌های یك معادلهٔ درجهٔ سوم کلی تا حدی پیچیده‌تر است و تشریح فرمول ریشه‌های یك‌معادلهٔ درجهٔ چهارم کلی‌معمولا چندین صفحه‌را اشغال می کند! قضیه‌ای که‌حکم می کندهیچ‌فرمولی برای چند جمله‌ایهای کلی ازدرجهٔ بالاتر ازچهار وجود ندارد، مارا از کوشش بیشتر باز می‌دارد. از این‌رو ترجیح می‌دهیم، بجزدرحالات ویژه (مثلا وقتی عمل تجزیه ساده است)، در عمل برای حل معادلات چند جمله‌ای ازدرجهٔ بالاتر ازدو از یك روش‌عددی استفاده کنیم.

دستهٔ دیگری از معادلات غیرخطی متشکل ازمعادلاتی است که توابع متعالی نظیر e^x، $\log x$، $\sin x$، و $\tan x$ را شامل می‌شود. جوابهای تحلیلی و مفید چنین معادلاتی نادرهستند، و بنابراین معمولا مجبورمی‌شویم بازهم ازروشهای عددی استفاده کنیم.

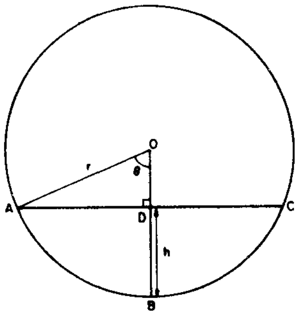
۱- یك معادلهٔ متعالی

برای اینکه نشان دهیم معادلات متعالی حتماً به طورکاملا طبیعی به‌وجود می‌آیند ازمسئلهٔ

ریاضی ساده‌ای استفاده می کنیم. فرض کنید یك مخزن استوانـه‌ای به شعاع r که ۱/۴ آن پراز مایع است طوری قرار دارد که محورش افقی باشد ومی‌خواهیم ارتفاع مایع در این مخزن را بیابیم (ر. ك. شکل ۲). فرض‌کنید ارتفاع مایع h باشد (DB در شـکل راهنما). شرطی که باید برقرار گردد آن است که مساحت قطعهٔ ABC برابر ۱/۴ مساحت دایره باشد. این شرط به‌صورت

$$۲[\frac{۱}{۲}r^۲\theta-\frac{۱}{۲}(r\sin\theta)(r\cos\theta)]=\frac{۱}{۴}\pi r^۲$$

در می آید.($(۱/۲r)^۲(\theta)$ مساحت‌قطاع OAB، $r\sin\theta$ قاعده و $r\cos\theta$ ارتفاع مثلث OAD است.)



شکل ۲. مخزن استوانه‌ای (مقطع عرضی)

بنا براین، $۲\theta-۲\sin\theta\cos\theta=\frac{\pi}{۲}$

یا $x+\cos x=۰$، که در آن $x=\frac{\pi}{۲}-۲\theta$

(زیرا، $۲\sin\theta\cos\theta=\sin ۲\theta=\sin(\frac{\pi}{۲}-x)=\cos x$).

پس‌ازحل معادلهٔ متعالی

$$f(x)\equiv x+\cos x=۰,$$

h از روابط زیر به‌دست می‌آید:

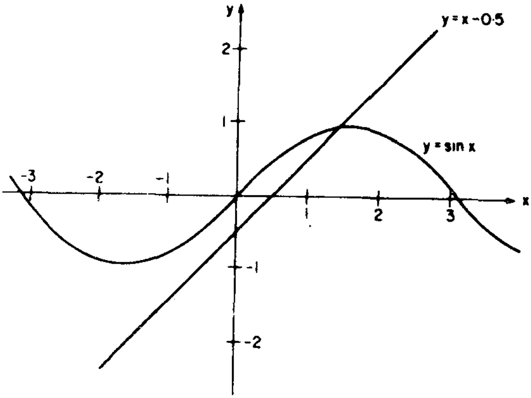
$$\begin{aligned}h&=OB-OD\\&=r-r\cos\theta\\&=r(۱-\cos(\frac{\pi}{۴}-\frac{x}{۲})).\end{aligned}$$

۲- تعیین محل ریشه‌ها

فرض کنید هدف یافتن برخی یا همهٔ ریشه‌های معادلهٔ غیرخطی $f(x)=0$ باشد. قبل از اینکه یك روش عددی را به‌کار گیریم (با گامهای ۷ـ۱۰ مقایسه کنید) باید درمورد تعداد، طبیعت ومحل تقریبی ریشه‌ها اطلاعی داشته باشیم. شیوهٔ متداول رسم نمودار یا جدول مقادیر تابع $f(x)$ است و به‌بهترین وجه با چند مثال روشن می‌شود.

الف) $\sin x - x + 0/5 = 0$.

همچنان که اغلب اتفاق می‌افتد ساده‌تر است که $f(x)$ را به دوقسمت جدا کنیم؛ در یك دستگاه مختصات دومنحنی رسم نماییم ومشاهده کنیم کجا همدیگر را قطع می‌کنند. دراین حالت $y=\sin x$ و $y=x-0/5$ را رسم می‌کنیم. چون $|\sin x|\leqslant 1$، تنها بازهٔ $-0/5\leqslant x\leqslant 1/5$ (که خارجش $|x-0/5|>1$ است) مورد نظرماست.



شکل ۳. نمودارهای $y=x-0/5$ و $y=\sin x$

از این نمودار نتیجه می‌گیریم که معادله تنها یك ریشهٔ حقیقی، نزدیك $x=1/5$ دارد. سپس $f(x)\equiv\sin x - x + 0/5$ را نزدیك $x=1/5$ به‌صورت زیر جدول‌بندی می‌کنیم:

x	۱٫۵	۱٫۴۵	۱٫۴۹
$\sin x$	۰٫۹۹۷۵	۰٫۹۹۲۷	۰٫۹۹۶۷
$f(x)$	−۰٫۰۰۲۵	۰٫۰۴۲۷	۰٫۰۰۶۷

حال می‌دانیم که ریشهٔ مذکور بین ۱ر۴۹ و ۱ر۵۰ قراردارد و برای به‌دست‌آوردن جوابی دقیقتر می‌توانیم از یك روش عددی استفاده کنیم.

ب) $e^{-۰/۲x} = x(x-۲)(x-۳)$

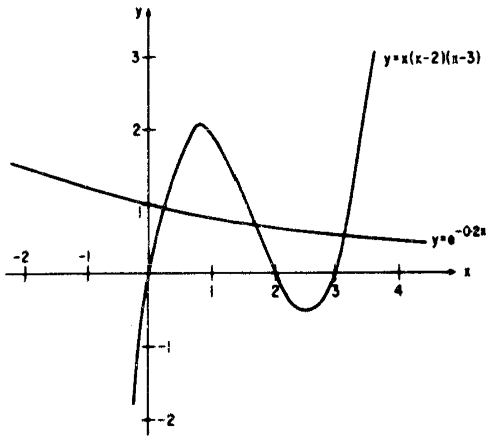
دوباره دومنحنی $y = e^{-۰/۲x}$

و

$$y = x(x-۲)(x-۳)$$

را رسم می کنیم.

دررسم منحنی دوم ازسه‌صفر در ۳ و ۲ و ۰ = x واز این‌ا گاهی که $x(x-۲)(x-۳)$ به‌ازای $۰ > x$ و $۳ > x > ۲$ منفی و به‌ازای $۳ < x$ به‌طورمرتب صعودی ومثبت‌است‌استفاده می‌کنیم. از نمودار نتیجه می گیریم که سه ریشه حقیقی درنزدیکی ۱ر۳ و ۱ر۸ و ۰ر۲ = x



شکل ۴. نمودارهای y

موجوداست. حال‌جدول‌بندی زیر را (با فرض: $f(x) = e^{-۰/۲x} - x(x-۲)(x-۳)$) انجام می‌دهیم:

x	۰ر۲	۰ر۱۵	۱ر۸	۱ر۶	۳ر۱	۳ر۲
$e^{-۰ر۲x}$	۰ر۹۶۰۸	۰ر۹۷۰۴	۰ر۶۹۷۷	۰ر۷۲۶۱	۰ر۵۳۷۹	۰ر۵۲۷۳
$x(x-۲)(x-۳)$	۱ر۰۰۸۰	۰ر۷۹۰۹	۰ر۴۳۲۰	۰ر۸۹۶۰	۰ر۳۴۱۰	۰ر۷۶۸۰
$f(x)$	−۰ر۰۴۷۲	۰ر۱۷۹۵	۰ر۲۶۵۷	−۰ر۱۶۹۹	۰ر۱۹۶۹	−۰ر۲۴۰۷

از جدول بالا نتیجه می‌گیریم که ریشه‌ها به‌ترتیب بین ۵ ۱ر۰ و ۲ر۰، ۶ر۱ و ۸ر۱، و ۱ر۳ و ۲ر۳ قرار دارند.

خود را بیازمایید

۱ــ چرا درحل معادلات غیرخطی روشهای عددی به‌کار می‌روند؟
۲ــ فرق یك معادلهٔ متعالی با یك معادلهٔ جبری چیست؟
۳ــ دررسم منحنی،جهت تعیین محل یك ریشه، ازچه نوع اطلاعاتی استفاده می‌شود؟

تمرین

محل ریشه‌های معادلهٔ زیررا تعیین کنید

$$x+\cos x=0.$$

گام هفت

معادلات غیرخطی-۲

روش تنصیف

مبنای روش تنصیف* جهت حل معادلهٔ $f(x)=0$ برای مقادیر x (ریشه‌ها)، قضیه زیراست.

قضیه: اگر $f(x)$ به‌ازای x بین a و b پیوسته باشد و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند آنگاه حداقل یك ریشهٔ حقیقی $f(x)=0$ بین a و b قراردارد.

۱- دستورالعمل

فرض کنید که تابع پیوستهٔ $f(x)$ در $x=a$ منفی و در $x=b$ مثبت باشد، ولذا حداقل یك ریشه حقیقی بین a و b قرار داشته باشد. (معمولاً a و b به وسیلهٔ رسم منحنی به دست می‌آیند.) اگر $f[(a+b)/2]$ راکه مقدار تابع درنقطهٔ وسط بازهٔ $a<x<b$ است، محاسبه کنیم سه حالت اتفاق می‌افتد:

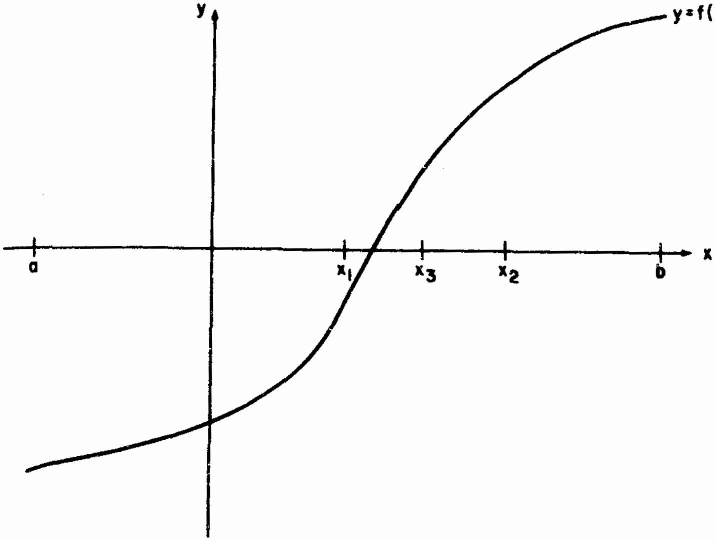
i) $f[(a+b)/2]=0$، که دراین حالت $(a+b)/2$ ریشه است؛
ii) $f[(a+b)/2]<0$، که دراین حالت ریشه بین $(a+b)/2$ و b قراردارد؛
iii) $f[(a+b)/2]>0$، که دراین حالت ریشه بین $(a+b)/2$ و a قرار دارد.

اگر فرض کنیم که تنها یك ریشه وجود دارد، در صورتی که حالت (i) اتفاق افتد عمل پایان می‌یابد. اگر یکی از حالات (ii) یا (iii) پیش آید عمل تنصیف بازهٔ شامل ریشه

---

* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه واستفاده در برنامه‌نویسی درصفحهٔ ۱۷۶ یك فلوچارت داده شده است.

را می‌توان آن قدر تکرار کرد تا ریشهٔ موردنظر بادقت مطلوب به‌دست آید. درشکل ۵ نقاط متوالی تنصیف با x_1، x_2 و x_3 نشان داده شده‌اند.



شکل ۵. تنصیف متوالی

۲- کارآیی

روش تنصیف برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است وتقریباً مسلم است که یك ریشه را به دست می‌دهد درصورتی که شرایط قضیه بالا برقرار باشند، این‌روش تنها هنگامی‌می‌تواند ناموفق باشد که خطای مجتمع درمحاسبهٔ $f(x)$ دریك *نقطهٔ تنصیف* سبب شود که یك مقدار کوچك منفی برای آن به‌دست آید حال‌آنکه مقدار آن حقیقتاً بایستی یك مقدار کوچك مثبت باشد (یا بعکس) و بنابراین بازه‌ای که از این پس انتخاب می‌شود غلط خواهد بود. این عیب را می‌توان بادقت‌بسیار زیاد مرتفع ساخت، واین همگرایی تقریباً تضمین شده، برای بسیاری ازروشهای دیگرجهت پیداکردن یك ریشه وجود ندارد.

یك نقص روش تنصیف آن است که تنها برای ریشه‌هایی از $f(x)$ به کارمی‌رود که علامت $f(x)$ دراطرافشان عوض می‌شود. مخصوصاً ممکن‌است ریشه‌های مضاعف نادیده گرفته شوند؛درحوزه‌هایی که $f(x)$ کوچك است باید $f(x)$ با دقت بیشتری موردبررسی قرار گیرد، تا ریشه‌های مکرری که $f(x)$ دراطرافشان تغییرعلامت نمی‌دهد هم محاسبه شوند (مثلا، ر. ك. گامهای ۹ و ۱۰). البته یك چنین‌آزمایش تنگاتنگی از نادیده گرفتن ریشهٔ دیگرهمجوار نیز، جلو گیری می کند.

بالاخره، متوجه باشید که روش تنصیف نسبتاً کند است؛ بعداز n مرحله طول بازهٔ

شامل ریشه، $|b-a|/2^n$ خواهد بود. مع‌هذا ، به شرط اینکه بتوان مقادیر $f(x)$ را به سرعت تولید کرد تعداد نسبتاً زیاد مراحل ناشی ازکاربرد تنصیف، برای یك کامپیوتر خودکار اهمیت نسبتاً کمی دارد.

۳ـ مثال

به وسیلهٔ روش تنصیف $3xe^x=1$ را تا سه رقم اعشار حل کنید.
می‌توانیم $f(x)=3x-e^{-x}$ را که در بازهٔ $0.25<x<0.27$ تغییر علامت می‌دهد درنظر بگیریم. همچنین می‌توانیم جدول بندی ذیل را (با کار کردن تا $4D$) به‌دست آوریم.

x	$3x$	e^{-x}	$f(x)$
۰٫۲۵	۰٫۷۵	۰٫۷۷۸۸	$-$۰٫۰۲۸۸
۰٫۲۷	۰٫۸۱	۰٫۷۶۳۴	$+$۰٫۰۴۶۶

(خواننده باید مطمئن شود که درست یك ریشه وجود دارد.)
از ادامهٔ تنصیف نتیجه می‌شود:

a	b	$x=\frac{a+b}{2}$	$3x$	e^{-x}	$f(x)$
۰٫۲۵	۰٫۲۷	۰٫۲۶	۰٫۷۸	۰٫۷۷۱۱	$+$۰٫۰۰۸۹
۰٫۲۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۵	۰٫۷۶۵	۰٫۷۷۴۹	$-$۰٫۰۰۹۹
۰٫۲۵۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۷۵	۰٫۷۷۲۵	۰٫۷۷۳۰	$-$۰٫۰۰۰۵
۰٫۲۵۷۵	۰٫۲۶	۰٫۲۵۸۸	۰٫۷۷۶۴	۰٫۷۷۲۰	$+$۰٫۰۰۴۴
۰٫۲۵۷۵	۰٫۲۵۸۸	۰٫۲۵۸۲	۰٫۷۷۴۶	۰٫۷۷۲۴	$+$۰٫۰۰۲۲

بنابراین، $0.2575<x<0.2582$، که در نتیجه ریشه برابر ۰٫۲۵۸ است.

خود را بیازمایید

۱ـ روش تنصیف را چه موقع برای پیدا کردن یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=0$ می‌توان به‌کار برد؟
۲ـ بعداز محاسبهٔ یك مقدار تنصیفی، سه انتخاب ممکن چه هستند؟
۳ـ بعداز n تنصیف ماگزیمم خطا چیست؟

تمرین

۱ـ روش تنصیف را برای پیدا کردن ریشهٔ معادلهٔ

$$x+\cos x=0,$$

درست تا دو رقم اعشار ($2D$) به‌کار ببرید.

۲ـ روش تنصیف را جهت پیدا کردن ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$x-0{,}2\sin x-0{,}5=0$$

تا $3D$ به‌کار ببرید.

گام هشت

معادلات غیرخطی-۳

روش نابجایی

همان طور که درمقدمه ذکر شد روش نابجایی * به‌زمان مصریان قدیم برمی‌گردد. بافرض اینکه $f(x)$ پیوسته و $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه باشند ، این روش جانشین کارآیی برای روش تنصیف درحل معادلهٔ $f(x)=0$ برای یك ریشه حقیقی بین a و b است.

۱- دستورالعمل

درحالت کلی منحنی $y=f(x)$ یك خط مستقیم نیست. مع‌هذا نقاط

$$(a,\ f(a)) \quad \text{و} \quad (b,\ f(b))$$

را می‌توان به‌وسیلهٔ خط مستقیم

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a}$$

به‌هم وصل کرد. این خط مستقیم محور xها را در $(\bar{x},\ 0)$ که درآن

$$\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{\bar{x}-a}{b-a}$$

---

* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه‌نویسی درصفحهٔ ۱۷۷ یك فلوچارت داده شده است.

ودر نتیجه

$$\bar{x} = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

$$= \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{۱}{f(b)-f(a)}\begin{vmatrix} a & f(a) \\ b & f(b) \end{vmatrix}$$

است قطع می کند.

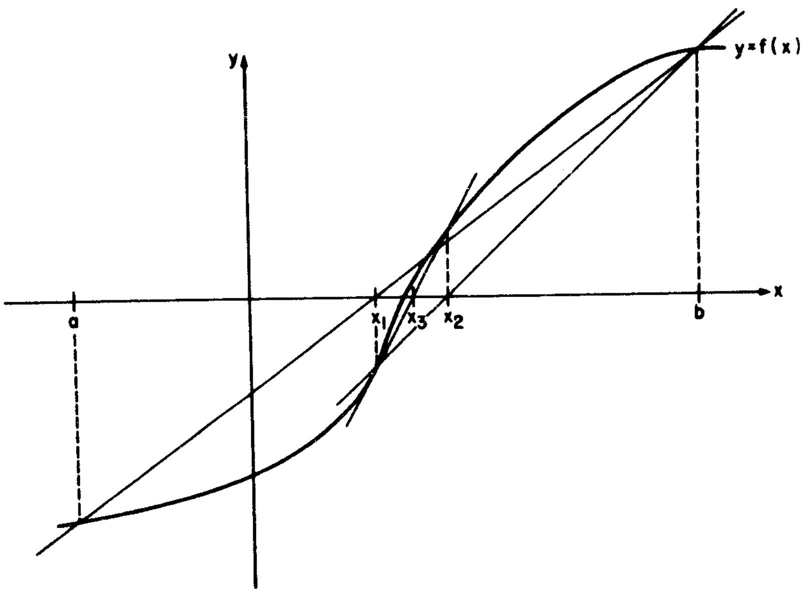
فرض می‌کنیم که $f(a)$ منفی و $f(b)$ مثبت باشد. همچون روش تنصیف سه‌حالت پیش می‌آید:

i) $f(\bar{x}) = ۰$، که دراین حالت ریشه $\bar{x}$ است؛

ii) $f(\bar{x}) < ۰$، که دراین حالت ریشه بین $\bar{x}$ و b قراردارد؛

iii) $f(\bar{x}) > ۰$، که دراین حالت ریشه بین $\bar{x}$ و a واقع است.

دوباره اگرحالت (i) اتفاق بیفتد عمل خاتمه می‌یابد؛ اگر یکی از حالات (ii) یا (iii) رخ دهــد این عمل را می‌توان آن قدر تکرارکـرد تااینکه ریشهٔ مورد نظر با دقت مطلوب به دست آید. در شکل ۶ نقاط متوالی، یعنی محل تقاطع خطوط مستقیم با محور xها، به‌وسیلهٔ $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ نشان داده شده‌اند.



شکل ۶. روش نابجایی

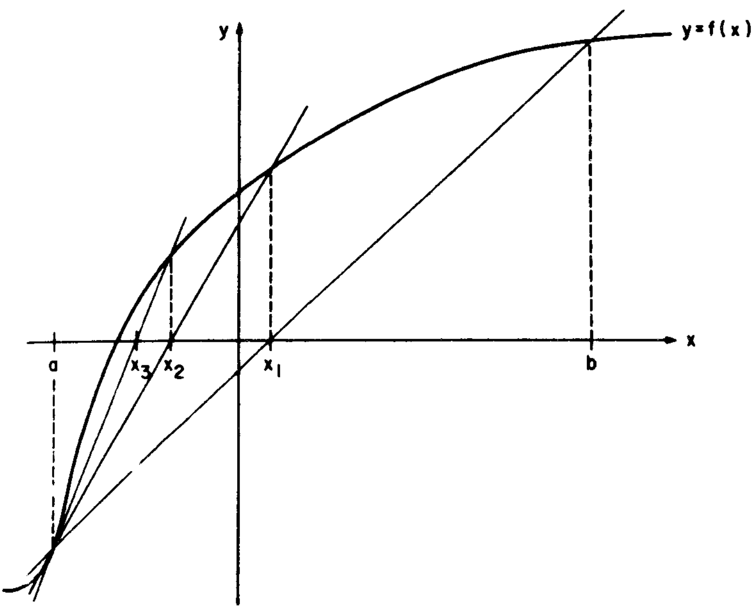
۲- کارآیی و روش وتری

روش نابجایی، همانند روش تنصیف،همگرایی تقریباً تضمین شده دارد وممکن‌است سریعتر به‌یك ریشه همگرا شود. مع‌هذا ممکن است اتفاق افتد که اکثر یا تمام مقادیرمحاسبه شدهٔ $\bar{x}$ در یك‌طرف ریشه باشند، که دراین‌حالت همگرایی می‌تواندکند باشد (ر. ك. شکل۷). جلواین پیشامد درروش وتری، که بایك استثنا به‌روش نابجایی شباهت دارد، گرفته می‌شود وآن استثنا این است که در اینجا هیچ کوششی جهت اطمینان از احاطهٔ ریشهٔ موردنظر به عمل نمی‌آید. دراین روش با دو تقریب از ریشه (x_1 و x_0) شروع می‌کنیم و تقریبهای بعدی x_2، x_3، ... را از:

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)\frac{x_n-x_{n-1}}{f(x_n)-f(x_{n-1})}$$

به‌دست می‌آوریم.

دراینجا، دیگرهمگرایی تضمین‌شده نداریم ولی این‌شیوه ساده‌تراست (علامت $f(x_{n+1})$ آزمایش نمی‌شود) و اغلب سریعترهمگرا می‌شود.



شکل ۷. روش نابجایی

درمورد سرعت همگرایی روش وتری، درمرحلهٔ $(n+1)$م خطای ذیل را داریم:

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x - x_{n+1} \\ &= \frac{(x-x_{n-1})f(x_n)-(x-x_n)f(x_{n-1})}{f(x_n)-f(x_{n-1})} \\ &= \frac{e_{n-1}f(x-e_n)-e_nf(x-e_{n-1})}{f(x-e_n)-f(x-e_{n-1})}. \end{aligned}$$

پس، با بسط برحسب سری تیلرداریم

$$e_{n+1} = \frac{e_{n-1}[f(x)-e_nf'(x)+(e_n^2/2)f''(x)-\cdots]-e_n[f(x)-e_{n-1}f'(x)+(e_{n-1}^2/2)f''(x)-\cdots]}{[f(x)-e_nf'(x)+\cdots]-[f(x)-e_{n-1}f'(x)+\cdots]}$$

$$\approx\left[\frac{-f''(x)}{2f'(x)}\right]e_{n-1}e_n \sim e_{n-1}e_n.^{1}$$

حال kیی را پیدا می‌کنیم که $e_n \sim e_{n-1}^k$؛ لذا، $e_{n+1}\sim e_n^k \sim e_{n-1}^{k^2}$ و $e_ne_{n-1}\sim e_{n-1}^{k+1}$؛ و از اینجا نتیجه می‌گیریم که

$k^2 \approx k+1$، و لذا $k\approx(1+\sqrt{5})/2 = 1٫618$.

بنا براین،سرعت همگرایی سریعتراز خطی ($k=1$)، اما کندتر از درجه دوم ($k=2$) است.

۳ـ مثال

معادلهٔ $3xe^x=1$ را تا سه رقم اعشار به‌وسیلهٔ روش نابجایی حل کنید.

درگسام قبلی مشاهـده‌کردیم که ریشهٔ این معادله در بازهٔ $0٫27 > x > 0٫25$ قرار دارد.

درنتیجه

$$\bar{x}=\frac{1}{0٫0466+0٫0288}\times\begin{vmatrix} 0٫25 & -0٫0288 \\ 0٫27 & 0٫0466 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{0٫01165+0٫00778}{0٫0754}=0٫2577.$$

اگرمثل گذشته بنویسیم $f(x)=3x-e^{-x}$ داریم:

---

۱. نماد $\sim$ به‌معنی «متناسب بودن» است ومفهوم ریاضی $x_n\sim y_n$ این است که $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n=\alpha$ که درآن α عددی حقیقی ومخالف صفراست. م.

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(۰٫۲۵۷۷) \\ &= ۳ \times ۰٫۲۵۷۷ - ۰٫۷۷۲۸ \\ &= ۰٫۷۷۳۱ - ۰٫۷۷۲۸ \\ &= ۰٫۰۰۰۳. \end{aligned}$$

وسوسه‌انگیز است نتیجه بگیریم که ریشه برابر ۰٫۲۵۸ است، اما لازم است که این مطلب تأیید شود. از این‌رو می‌دانیم که ریشه در بازهٔ $۰٫۲۵ < x < ۰٫۲۵۷۷$ است و لذا با تکرار شیوهٔ مذکور داریم:

$$\bar{x} = \frac{۱}{۰٫۰۰۰۳ + ۰٫۰۲۸۸} \begin{vmatrix} ۰٫۲۵ & -۰٫۰۲۸۸ \\ ۰٫۲۵۷۷ & ۰٫۰۰۰۳ \end{vmatrix}$$

$$= \frac{۰٫۰۰۰۰۷۵ + ۰٫۰۰۷۴۲۲}{۰٫۰۲۹۱} = ۰٫۲۵۷۶,$$

$$f(\bar{x}) = -۰٫۰۰۰۱.$$

بنابراین، $۰٫۲۵۷۶ < x < ۰٫۲۵۷۷$ و لذا ریشه ۰٫۲۵۸ است.

خود رابیازمایید

۱ـ برای یافتن ریشه‌ای از $f(x) = ۰$ چه موقع می‌توان ازروش نابجایی استفاده کرد؟
۲ـ روش نابجایی برچه ساخت هندسی استواراست؟

تمرین

۱ـ جهت به‌دست‌آوردن ریشهٔ مثبت معادلهٔ $۲\sin x + x - ۲ = ۰$ درست‌تا سه‌رقم اعشار از روش نابجایی استفاده کنید.

۲ـ نتایج حاصل از به کار گیری روش تنصیف، روش نابجایی و روش وتری (با مقادیر آغازی ۰٫۷ و ۰٫۹) رابرای حل معادلهٔ

$$۳ \sin x = x + \frac{۱}{x}$$

مقایسه کنید.

۳ـ روش نابجایی را جهت به‌دست‌آوردن ریشهٔ معادلهٔ

$$x + \cos x = ۰$$

گام نه

معادلات غیرخطی-۴

روش تکرار ساده

روش تکرارساده متضمن نوشتن معادلهٔ $f(x) = 0$ به شکل $x = \phi(x)$ است که جهت ساختن دنباله‌ای از تقریبات مربوط به‌یکی از ریشه‌ها، به شیوه‌ای تکراری، مناسب است.

۱- دستورالعمل

دستورالعمل تکرار به‌صورت زیر است. تقریبی سردستی چون x_0 از ریشهٔ مطلوب را به طریقی به دست می آوریم که جهت حصول تقریبی جدید چون $x_1 = \phi(x_0)$ بتواند در طرف راست قرار گیرد. تقریب جدید دوباره درطرف راست قرارداده می‌شود تا تقریب دیگر $x_2 = \phi(x_1)$ به دست آید و به‌همین ترتیب‌تااینکه (ان‌شاءالله) برای ریشه‌یك‌تقریب به‌قدرکافی دقیق به دست آید. این شیوهٔ تکراری مبتنی بر $x_{n+1} = \phi(x_n)$ را تکرار ساده می‌نامند، به شرطی که باافزایش n، $|x_{n+1} - x_n|$ کاهش یابد. این شیوه به $\alpha = \phi(\alpha)$ که درآن α نمایانگر ریشه است، میل می کند.

۲- مثال

با به‌کار بردن روش تکرار ساده ریشهٔ معادلهٔ $3xe^x = 1$ را با دقت ۰٫۰۰۰۱ به دست آورید.

ابتدا می‌نویسیم

$$x = \frac{1}{3} e^{-x}$$

$$= \phi(x).$$

با فرض ۱ = x_0 تکرارهای متوالی

$x_1 =$ ۰٫۱۲۲۶۳

$x_2 =$ ۰٫۲۹۴۸۶

$x_3 =$ ۰٫۲۴۸۲۱

$x_4 =$ ۰٫۲۶۰۰۷

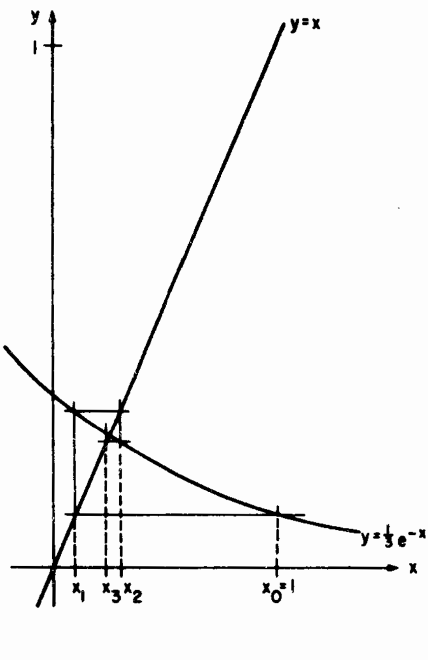
$x_5 =$ ۰٫۲۵۷۰۰

$x_6 =$ ۰٫۲۵۷۷۹

$x_7 =$ ۰٫۲۵۷۵۹

$x_8 =$ ۰٫۲۵۷۶۴

به‌دست‌می آیند. بنابراین،هشت‌تکرار لازم است‌تا داشته‌باشیم ۰٫۰۰۰۱ $> |x_{n+1} - x_n|$.
یك تعبیر هندسی از سه تکرار نخست در شکل ۸ نشان داده شده است.



شکل ۸. روش تکراری

۳ـ همگرایی

اینکه یك طریقهٔ تکراری سریعاً همگرا باشد، یا در واقع ابداً همگرا نباشد، بستگی به انتخاب تابع $\phi(x)$ و نیز به مقدار آغازی $x_۰$ دارد. مثلا، معادلهٔ $x^۲ = ۳$ دارای دوریشهٔ حقیقی $\pm\sqrt{۳}\,(\approx \pm ۱٫۷۳)$ است. این معادله را می‌توان به شکل

$$x = \frac{۳}{x} \equiv \phi(x)$$

که تکرار

$$x_{n+۱} = \frac{۳}{x_n}$$

را پیشنهاد می‌کند نیز نوشت. بنابراین، اگر از مقدار آغازی $x_۰ = ۱$ استفاده شود تکرارهای متوالی

$$x_۱ = \frac{۳}{x_۰} = ۳$$

$$x_۲ = \frac{۳}{x_۱} = ۱$$

$$x_۳ = \frac{۳}{x_۲} = ۳ \text{ وغیره}$$

به دست می‌آیند. همگرایی فرایند تکراری

$$x_{n+۱} = \phi(x_n)$$

به

$$\alpha = \phi(\alpha)$$

را می‌توان به کمك سری تیلر

$$\phi(\alpha) = \phi(x_k) + (\alpha - x_k)\,\phi'(\zeta_k), \qquad k = ۰, ۱, ۲, \ldots, n,$$

که در آن ζ_k نقطه‌ای بین ریشهٔ α و تقریب x_k است، بررسی کرد. داریم

$$\alpha - x_۱ = \phi(\alpha) - \phi(x_۰) = (\alpha - x_۰)\,\phi'(\zeta_۰)$$

$$\alpha - x_۲ = \phi(\alpha) - \phi(x_۱) = (\alpha - x_۱)\,\phi'(\zeta_۱)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\alpha - x_{n+۱} = \phi(\alpha) - \phi(x_n) = (\alpha - x_n)\,\phi'(\zeta_n).$$

با ضرب $(n+1)$ سطر بالا درهم وحذف عوامل مشترك $\alpha - x_1$، $\alpha - x_2$، $\alpha -$ ...، $\alpha - x_n$ خواهیم داشت

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_0)\ \phi'(\zeta_0)\ \cdots\ \phi'(\zeta_n).$$

در نتیجه

$$|\alpha - x_{n+1}| = |\alpha - x_0|\ |\phi'(\zeta_0)|\ |\phi'(\zeta_1)| \cdots |\phi'(\zeta_n)|,$$

که اگر در یك همسایگی از ریشه داشته باشیم $|\phi'| < 1$ ، خطای مطلق $|\alpha - x_{n+1}|$ را می‌توان با در نظر گرفتن تکرار کافی به‌دلخواه کوچك کرد. (توجه کنید که $\phi(x) = 3/x$ به ازای $|x| < \sqrt{3}$ دارای مشتق $|\phi'(x)| = |-3/x^2| > 1$ است.)

خود را بیازمایید

۱ـ دریك برنامهٔ عادی کامپیوتری که از روش تکرار ساده استفاده می‌شود یك برنامه‌نویس باید مواظب چه خطری باشد؟

۲ـ برای تضمین اینکه روش تکرار ساده حتماً به یك ریشه همگرا باشد چه لازم است؟

تمرین

۱ـ بافرض حدس اولیهٔ $x_0 = 1$، به وسیلهٔ روش تکرار ساده نشان دهید که یك ریشهٔ معادلهٔ $2x - 1 - 2\sin x = 0$ عبارت است از ۱٫۴۹۷۳.

۲ـ برای یافتن ریشهٔ $x + \cos x = 0$ (تا $4D$) از روش تکرار ساده استفاده کنید.

گام ده

معادلات غیرخطی-۵

روش تکراری نیوتن ـ رفسون[1]

روش نیوتن-رفسون* طریقه‌ای است برای تعیین ریشه‌ای از معادله‌ای چون $f(x)=0$، که درآن فقط یك نقطهٔ نزدیك به ریشهٔ مطلوب داده شده است. این روش را می‌توان به عنوان یك حالت حدی روش وتری (ر.ك. گام ۸) یا به‌عنوان حالت‌خاصی از روش تکرار ساده (ر. ك. گام ۹) در نظر گرفت.

۱- دستورالعمل

فرض کنید x_0 نمایانگر مقدار تقریبی معلوم ریشهٔ $f(x)=0$ و h نمایانگر تفاضل بین مقدار تحقیقی α و مقدار تقریبی آن باشد؛ یعنی

$$\alpha=x_0+h.$$

بسط تیلرمختوم درجهٔ دوم در نزدیکی x_0 عبارت است از

$$f(\alpha)=f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0+\theta h), \quad 0<\theta<1.$$

با چشم‌پوشی از جملهٔ باقیمانده ونوشتن $f(\alpha)=0$ داریم

---

1. Raphson

* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه واستفاده دربرنامه‌نویسی درصفحه ۱۷۸ یك فلوچارت داده شده‌است.

$$f(x_0)+hf'(x_0)\approx 0$$

بنابراین،

$$h\approx -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

و در نتیجه

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

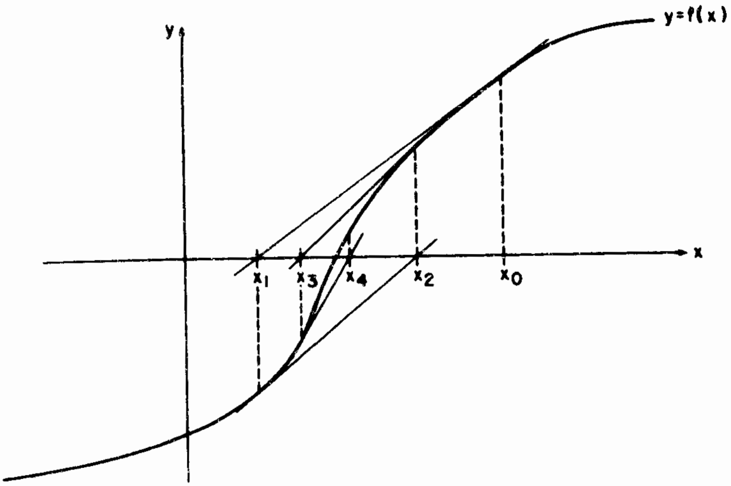
باید برآورد بهتری از x_0 برای ریشهٔ مورد نظر باشد.

حتی تقریبات بهتری را هم می‌توان باتکرار این عمل به شرح ذیل به دست آورد

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

توجه کنید که اگر $f(x)$ یك چند جمله‌ای باشد برای محاسبهٔ $f(x_n)$ و $f'(x_n)$ شیوهٔ تراجعی گام ۵ را به‌کار می‌بریم.

تعبیر هندسی این عمل آن است که از هرمرحله نقطه‌ای به دست می‌آید که مماس در نقطهٔ اصلی، محور xها را قطع می‌کند (با شکل ۹ مقایسه شود).



شکل ۹. روش نیوتن ـ رفسون

بنابراین معادلهٔ مماس در $(x_0, f(x_0))$ عبارت است از

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0)$$

و لذا $(x_1, 0)$ متناظر است با

$$-f(x_0)=f'(x_0)\,(x_1-x_0)$$

یا

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

۲- مثال

با به‌کار بردن روش نیوتن ــ رفسون ریشهٔ مثبت معادلهٔ $\sin x = x^2$ را، درست تا سه رقم اعشار، به دست آورید.

برای به دست‌آوردن یك تقریب اولیه بهتر است که از روش نابجایی استفاده کنیم. به وسیلهٔ جدول‌بندی داریم:

x	$f(x)=\sin x - x^2$
0	0
0.25	0.18
0.5	0.23
0.75	0.12
1	-0.16

ریشه‌ای دربازهٔ $0.75<x<1$ وجود دارد که تقریباً برابر است با

$$x_0=\frac{1}{-0.16-0.12}\begin{vmatrix}0.75 & 0.12\\ 1 & -0.16\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{0.28}(-0.12-0.12)$$

$$=\frac{0.24}{0.28}=0.857.$$

حال روش نیوتن ــ رفسون را به‌کار می‌بریم؛ داریم

$$f(0.857)=\sin(0.857)-(0.857)^2$$

$$= ۰٫۷۵۵۹ - ۰٫۷۳۴۴$$

$$= ۰٫۰۲۱۵$$

و چون $f'(x) = \cos x - ۲x$، داریم

$$f'(۰٫۸۵۷) = ۰٫۶۵۴۷ - ۱٫۷۱۴$$

$$= -۱٫۰۵۹۳.$$

در نتیجه یك تقریب بهتر عبارت است از

$$x_۱ = ۰٫۸۵۷ + \frac{۰٫۰۲۱۵}{۱٫۰۵۹۳}$$

$$= ۰٫۸۵۷ + ۰٫۰۲۰۳$$

$$= ۰٫۸۷۷۳.$$

با تکرار دستورالعمل به دست می‌آوریم

$$f(x_۱) = f(۰٫۸۷۷۳) = -۰٫۰۰۰۷$$

$$f'(x_۱) = f'(۰٫۸۷۷۳) = -۱٫۱۱۵۴$$

و لذا

$$x_۲ = ۰٫۸۷۷۳ - \frac{۰٫۰۰۰۷}{۱٫۱۱۵۴}$$

$$= ۰٫۸۷۷۳ - ۰٫۰۰۰۶$$

$$= ۰٫۸۷۶۷.$$

چون $f(x_۲) = ۰٫۰۰۰۰$، نتیجه می‌گیریم که ریشه تا $۳D$ برابر ۰٫۸۷۷ است.

۳- همگرایی

اگر بنویسیم :

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

دستور تکرار نیوتن ـ رفسون

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

را می‌توان چنین نوشت

$$x_{n+۱}=\phi\,(x_n).$$

مشاهده کردیم (ر. ك. صفحهٔ ۴۳) که به طور کلی وقتی در نزدیکی ریشه داشته باشیم $|\phi'\,(x)|<۱$ روش تکراری همگراست. درمورد روش نیوتن ـ رفسون داریم

$$\phi'(x)=۱-\frac{[f'(x)]^۲-f(x)f''(x)}{[f'(x)]^۲}=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^۲},$$

درنتیجه محك همگرایی عبارت است از

$$|f(x)f''(x)|<[f'(x)]^۲;$$

این همگرایی به اندازهٔ همگرایی درمورد روش تنصیف (مثلا) تضمین شده نیست.

۴ـ سرعت همگرایی

چون

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

داریم

$$e_{n+۱}=\alpha-x_{n+۱}=\alpha-x_n+\frac{f(x_n)}{f'\,(x_n)}$$

$$=e_n+\frac{f(\alpha-e_n)}{f'(\alpha-e_n)}$$

$$=e_n+\frac{f(\alpha)-e_nf'(\alpha)+(e_n{}^۲/۲)f''(\alpha)-\cdots}{f'(\alpha)-e_nf''(\alpha)+(e_n{}^۲/۲)f'''(\alpha)-\cdots}$$

$$=e_n-e_n+\frac{e_n{}^۲f''(\alpha)}{۲f'(\alpha)}+\cdots$$

وقتی که e_n به حد کافی کوچك باشد:

$$\approx+\frac{e_n{}^۲f''(\alpha)}{۲f'(\alpha)}$$

این نتیجه حاکی است که خطا در مرحلهٔ $n+۱$ با مربع خطا در مرحلهٔ n متناسب است. بنا براین (اگر $f''(\alpha)\approx ۴f'(\alpha)$) یك جواب درست تا ۱ رقم اعشار در یك مرحله، باید درمرحلهٔ بعد تا دو رقم اعشار، درمرحلهٔ بعد تا ۴، و درمرحلهٔ بعد تا ۸ رقم اعشار،

درست باشد و الی آخر. این همگرایی درجهٔ دوم (مرتبهٔ دوم) برمیزان همگرایی روشهای تنصیف و نابجایی پیشی می گیرد.

برای ما که از برنامه‌های کامپیوتری نسبتاً کم استفاده می کنیم ممکن است عاقلانه آن باشد که روشهای تنصیف یا نابجایی را ترجیح بدهیم، زیرا همگرایی آنها واقعاً تضمین شده است. برای محاسبهٔ دستی یا برای برنامه‌های فرعی کامپیوتری که مدام مورد استفاده هستند معمولا برتری با روش نیوتن ـ رفسون است.

۵ـ ریشهٔ دوم (جذر)

یکی از موارد استفادهٔ روش نیوتن ـ رفسون محاسبهٔ ریشه‌های دوم است. پیدا کردن $\sqrt{a}$ معادل است با پیدا کردن ریشهٔ مثبت $x^۲=a$ یا $f(x)=x^۲-a=۰$. چون $f'(x)=۲x$ دستور تکرار نیوتن ـ رفسون عبارت است از

$$x_{n+۱}=x_n-\frac{x_n{}^۲-a}{۲x_n}$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

(همان طور که درمقدمه ذکر شد این دستور نزد یونانیان قدیم شناخته شده بود.) بنابراین، اگر $a=۱۶$ و $x_۰=۵$، درحد $۳D$ داریم $x_۱=(۱/۲)(۵+۳٫۲)=۴٫۱$، $x_۲=(۱/۲)(۴٫۱+۳٫۹۰۲)=۴٫۰۰۱$، و $x_۳=(۱/۲)(۴٫۰۰۱+۳٫۹۹۹)=۴٫۰۰۰$

خودرا بیازمایید

۱ـ تعبیر هندسی دستورالعمل تکراری نیوتن ـ رفسون چیست؟

۲ـ محك همگرایی برای روش نیوتن ـ رفسون چیست؟

۳ـ روش نیوتن ـ رفسون چه مزیت بارزی بر بعضی از روشهای دیگر دارد؟

تمرین

۱ـ برای یافتن ریشهٔ (مثبت) $۳xe^x=۱$ تا چهار رقم اعشار از روش نیوتن ـ رفسون استفاده کنید.

[توجه: جداول لگاریتمهای طبیعی (نپری) سریعتر از جداول نمایی در دسترس هستند و لذا ممکن است ترجیح بدهید که به جای معادلهٔ فوق معادلهٔ

$$f(x)=\log_e ۳x+x=\log_e ۳+\log_e x+x=۰$$

را که با آن معادل است حل کنید.]

۲ـ دستور تکرار نیوتن ـ رفسون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{k x_n^{k-1}}$$

را برای پیدا کردن ریشهٔ k ام a به دست آورید.

۳ـ ریشهٔ دوم ۱۰ را از حدس اولیهٔ ۱، تا ۵ رقم اعشار حساب کنید.

۴ـ از روش نیوتن ـ رفسون برای پیدا کردن ریشهٔ معادلهٔ

$$x + \cos x = 0$$

(تا $4D$) استفاده کنید.

گام یازده

دستگاههای معادلات خطی - ۱

حل به روش حذفی

بسیاری از دستگاههای فیزیکی را می‌توان به وسیلهٔ چنان دسته‌ای از معادلات خطی قالب‌بندی کرد که معادلات، مبین روابط بین متغیرهای دستگاه باشند. درموارد ساده دو یا سه متغیر وجود دارند؛ در دستگاههای پیچیده (مثلا در یك قالب خطی مربوط به اقتصاد یك‌کشور) ممکن است چند صد متغیر وجود داشته باشند. در رابطه با بسیاری از مسائل آنالیز عددی نیز دستگاههای خطی به وجود می‌آیند. مثالهایی از این قبیل عبارتند از حل معادلات دیفرانسیل به روشهای تفاضل متناهی، تحلیل قهقرایی آماری وحل مسائل مقدار خاص (مثلا رجوع شود به کتاب کونت و دوبور).

بنابراین، لازم‌است که روشهای سریع و دقیقی برای حل دستگاههای معادلات خطی در دسترس داشته باشیم. دانشجویان قبلا با حل دستگاههای معادلات با دو یا سه متغیر به روشهای حذفی آشنا شده‌اند. دراین‌گام به توصیف صوری روش حذفی گاوس برای دستگاه با n متغیر می‌پردازیم ودرمورد خطاهای مشخصی که ممکن است درجوابها پدید آیند بحث می‌کنیم. علاوه برروش گاوس، موضوع دیگری هم در گام بعد تشریح خواهد شد که درکاستن خطا ما را یاری می‌دهد.

۱ـ علامت‌گذاری وتعاریف

i) یك نمونه از دستگاه معادلات با ۳ متغیر به‌صورت زیراست

$$x+y-z=۲$$
$$x+۲y+z=۶$$
$$۲x-y+z=۱۰$$

این دستگاه مشتمل است برسه معادلهٔ خطی برحسب ۳ متغیر (یا مجهول) x، y و z. منظور از «حل این دستگاه» تعیین دسته‌ای از مقادیر برای x، y و z است که در هریك از معادلات صدق کنند. به‌عبارت دیگر، اگرمقادیر (X, Y, Z) به‌طورهمزمان در کلیهٔ معادلات صدق کنند آنگاه (X, Y, Z) جوابی برای آن دستگاه است.

ii) صورت‌کلی دستگاه n معادلهٔ n مجهولی

صورت کلی دستگاه n معادلهٔ n مجهولی را می‌توان به‌صورت زیرنوشت:

$$n\ \text{معادله}\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n. \end{array}\right.$$

البته، نقطه‌چین‌ها معرف جملات مشابهی ازمجهولات x_3 و x_4 و غیره هستند و $(n-3)$ معادلهٔ باقیمانده دستگاه را کامل می‌کنند.

در این علامت گذاری، مجهولات با x_1 ، x_2 ، $\ldots$ ، x_n نشان داده می‌شوند؛ گاهی اوقات، برای نمایش مجهولات می‌نویسیم x_i ، $i=1, 2, \ldots, n$. ضرایب مجهولات را می‌توان استخراج کرد و در یك ماتریس به‌صورت زیرنوشت:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

برای نشان دادن ضریب x_j درمعادلهٔ iم از علامت a_{ij} استفاده می‌شود. توجه داشته باشید که a_{ij} درسطر iم و ستون jم ماتریس $\mathbf{A}$ قرار دارد.

اعداد طرف راست معادلات به ثابت‌ها موسوم هستند، وآنها را می‌توان به‌صورت بردار ستونی زیرهم نوشت

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}.$$

ماتریس ضرایب را می‌توان با بردار ثابت ترکیب کرد و ماتریس افزودهٔ زیر را تشکیل داد

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$$

وقتی برای حل یك دستگاه از روشهای حذفی استفاده می‌شود، معمول آن است که مستقیماً با ماتریس افزوده کار کنند.

۲- وجودجواب

برای هردستگاه مشخص n معادلهٔ خطی ممکن است صفرجواب، یا تنها یك جواب $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ یا بی‌نهایت جواب وجود داشته باشد. درنظریهٔ جبرخطی قضایایی ارائه وشرایطی وضع می‌شوندکه به‌کمك آنها می‌توان تشخیص دادکه یك دستگاه داده شده‌در زمرهٔ کدام دسته می‌باشد. مسئلهٔ وجود جوابهارا دراین‌کتاب بررسی نخواهیم‌کرد، ولی به‌خاطر دانشجویان آشنا به ماتریسها و دترمینانها، قضیهٔ زیررا بیان می‌کنیم.

قضیه : یك دستگاه از n معادلهٔ خطی n مجهولی با ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ و بردار ثابت $\mathbf{b} \neq 0$ جوابی منحصر به‌فرد دارد اگر و فقط اگر دترمینان $\mathbf{A}$ مخالف صفر باشد.

اگرتمامی‌اعضای $\mathbf{b}$ صفر باشند آنگاه دستگاه دارای جواب $\mathbf{x} = 0$ خواهد بود. این دستگاه جواب دیگری ندارد مگراینکه دترمینان $\mathbf{A}$ برابر صفر باشد، که دراین صورت دستگاه دارای بی‌نهایت جواب است.

۳- روش حذفی‌گاوس

روش حذفی‌گاوس عبارت است ازتبدیل دستگاه معادلات مفروض به دستگاه معادلی‌که به شکل مثلثی باشد؛ این شکل جدید را به‌آسانی می‌توان با روندی موسوم به جایگذاری از پایین حل‌کرد. با حل مثال بخش ۱ (i)، این روند را نشان می‌دهیم.

الف) تبدیل به شکل مثلثی

$$x+\ y-z=۲ \qquad (۱)$$
$$x+۲y+z=۶ \qquad (۲)$$
$$۲x-\ y+z=۱ \qquad (۳)$$

مرحلهٔ اول : با استفاده از معادلهٔ (۱)، x را از معادلات (۲) و (۳) حذف کنید.

$$x+y-\ z=۲ \qquad (۱)'$$

$y+۲z=۴ \qquad (۲)'$ (معادلهٔ (۲) منهای معادلهٔ (۱))

$-۳y+۳z=-۳ \qquad (۳)'$ (معادلهٔ (۳) منهای دو برابرمعادلهٔ (۱))

مرحلهٔ دوم : بااستفاده از $'$(۲)، y را از $'$(۳) حذف کنید.

$$x+y-z=۲ \qquad (۱)''$$
$$y+۲z=۴ \qquad (۲)''$$

$۹z=۹ \qquad (۳)''$ (معادلهٔ $'$(۳) به‌علاوهٔ سه‌برابر $'$(۲))

اکنون دستگاه به شکل مثلثی است. ماتریس ضرایب، ماتریس بالا مثلثی زیراست

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix}.$$

ب) حل با جایگذاری از پایین

این دستگاه مثلثی با به‌دست‌آوردن z از $''$(۳)، سپس y از $''$(۲) و بالاخره، x از $''$(۱) به‌آسانی حل می‌شود. این روند، جایگذاری از پایین نامیده می‌شود.
لذا، ازتقسیم $'$(۳) بر ۹ نتیجه می‌شود $z=۱$؛
از $''$(۲) نتیجه می‌شود :

$$y=۴-۲z;$$

بااستفاده از $z=۱$ داریم $\qquad y=۲$

از $''$(۱) نتیجه می‌گیریم :

$$x=۲-y+z=۱$$

و بااستفاده از $z=۱$ و $y=۲$ داریم $\qquad x=۱.$

۴- عملیات تبدیل

وقتی که یك دستگاه را به‌شکل مثلثی تبدیل می‌کنیم ، در هرمرحله، از اعمال مقدماتی زیر استفاده می‌نماییم:

۱) ضرب یك معادله دریك عدد ثابت؛
۲) افزودن مضربی از یك معادله به‌معادلهٔ دیگر؛
۳) تعویض دومعادله.

به بیان ریاضی، باید برای دانشجو روشن باشدکه انجام اعمال مقدماتی بریك دستگاه معادلات خطی منجر به‌دستگاههای معادلی می‌شودکه جوابهای هریك با دیگری یکسانند. این حکم نیاز به اثبات دارد؛ این مطلب را می‌توان درکتابهای جبرخطی تحت یك قضیه پیداکرد (ر. ك. فهرست منابع). این حکم اساس تمام روشهای حذفی برای حل دستگاههای معادلات خطی را تشکیل می‌دهد.

۵- بررسی کلی روند حذفی

اینك روند حذفی را با اعمال‌آن برسه معادله‌که به صورت کلی نوشته می‌شوند، تشریح می‌کنیم. برای این منظور، با ماتریس افزوده آغاز می‌کنیم ومضارب‌لازم برای انجام عملیات تبدیل را (درستون تحت m) نشان می‌دهیم.

مضارب   ماتریس افزوده

$$\begin{array}{r c l}
m & & \\
 & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right] & \begin{array}{l}(1)\\(2)\\(3)\end{array}
\end{array}$$

$$m_1 = -a_{21}/a_{11}, \qquad m_2 = -a_{31}/a_{11}$$

مرحلهٔ اول : بااستفاده ازسطر (۱)، ضرایب a_{21} و a_{31} را حذف کنید

$$\begin{array}{r c l}
m & & \\
 & \left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right] & \begin{array}{l}(1)'\\(2)' \\(3)' \end{array}
\end{array}$$

$(2)'$ ((۱) برابرسطر $m_1 +$ (۲)سطر)

$(3)'$ ((۱) برابرسطر $m_2 +$ (۳)سطر)

$$m_3 = -a'_{32}/a'_{22}$$

مرحلهٔ دوم : بااستفاده ازسطر $(2)'$، a'_{32} را حذف کنید

$$\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} & b_۱ \\ ० & a'_{۲۲} & a'_{۲۳} & b'_۲ \\ ० & ० & a''_{۳۳} & b''_۳ \end{bmatrix} \begin{array}{l} (۱)'' \\ (۲)'' \\ (۳)'' \end{array}$$

((سطر $(۳)'+m_۳$ برابر سطر $(۲)'$))

اکنون ماتریس به‌شکلی است که برای انجام جایگذاری از پایین ضروری است. دراین مرحله، کل دستگاه معادلات عبارت است از

$$a_{۱۱}x_۱+a_{۱۲}x_۲+a_{۱۳}x_۳=b_۱$$
$$a'_{۲۲}x_۲+a'_{۲۳}x_۳=b'_۲$$
$$a''_{۳۳}x_۳=b''_۳$$

این دستگاه معادل دستگاه اول است. راه حل به شرح زیرادامه می‌یابد:

$$x_۳=b''_۳/a''_{۳۳},$$
$$x_۲=(b'_۲-a'_{۲۳}x_۳)/a'_{۲۲},$$
$$x_۱=(b_۱-a_{۱۲}x_۲-a_{۱۳}x_۳)/a_{۱۱}.$$

یادآوری

i) اعضای قطری $a_{۱۱}, a'_{۲۲}, a''_{۳۳}$، که درحذفهای متوالی به‌کار می‌روند، به اعضای محوری موسومند.

ii) برای رفتن ازیك مرحله به‌مرحلهٔ دیگرلازم است که عضو محوری مخالف صفر باشد (توجه داشته باشید که از اعضای محوری به‌صورت مقسوم علیه درمضارب وهمچنین درجواب نهایی استفاده می‌شود.) اگردرمرحله‌ای عضو محوری صفرشود، سطرهای باقیماندهٔ ماتریس را چنان عوض می کنیم که یك محور غیرصفر به‌دست آید؛ درصورتی که این امرممکن نباشد، آن دستگاه معادلات خطی جواب نخواهد داشت.

iii) درصورتی که یك عضومحوری درمقایسه بااعضای هم ستون آن که باید حذف شوندکوچك باشد، اندازهٔ مضاربی که درآن مرحله به‌کارمی‌روند ازیك بیشترخواهندبود. استفاده ازمضارب بزرگ در روندهای حذفی وجایگذاری از پایین منجر به‌بزرگ شدن خطاهای گرد شده می‌شود. یك روش جلوگیری از اعضای محوری کوچك در گام بعدی ارائه خواهد شد.

iv) وقتی ازیك روش حذفی استفاده می‌شود، درهر مرحله یك‌ستون اضافی مقابله‌ای

شامل مجموعهای سطری نیز باید محاسبه گردد (ر. ك. مثال زیر). با اعضای ستون مقابله‌ای عیناً مانند ضرایب معادله عمل می‌شود. پس از اتمام هرمرحله مجموعهـای سطری جدید باید (درحدود خطای گرد شده) با اعضای ستون مقابله‌ای جدید برابر باشند.

۶- مثال عددی، باستون مقابله‌ای

دستگاه معادلات عبارت است از

$$۰٫۳۴x_1 - ۰٫۵۸x_2 + ۰٫۹۴x_3 = ۲٫۰$$

$$۰٫۲۷x_1 + ۰٫۴۲x_2 + ۰٫۱۳x_3 = ۱٫۵$$

$$۰٫۲۰x_1 - ۰٫۵۱x_2 + ۰٫۵۴x_3 = ۰٫۸.$$

حل

عملیات را به‌صورت جدول زیر تنظیم می کنیم. ضرایب قبل از استفاده تا ۳S گرد شده؛ نتایج نهایی حاصل ازمحاسبات دیگر تا ۲S گرد شده‌اند. به طوری که با آزمایشی از

	m	ماتریس افزوده				ستون مقابله
		۰٫۳۴	−۰٫۵۸	۰٫۹۴	۲٫۰	۲٫۷۰
		۰٫۲۷	۰٫۴۲	۰٫۱۳	۱٫۵	۲٫۳۲
		۰٫۲۰	−۰٫۵۱	۰٫۵۴	۰٫۸	۱٫۰۳
مرحلهٔ اول		۰٫۳۴	−۰٫۵۸	۰٫۹۴	۲٫۰	
	−۰٫۷۹۴		۰٫۸۸	−۰٫۶۲	−۰٫۰۸۸	۰٫۱۸ (۰٫۱۷)
	−۰٫۵۸۸		−۰٫۱۷	−۰٫۰۱	−۰٫۳۸	−۰٫۵۶ (−۰٫۵۶)
مرحلهٔ دوم		۰٫۳۴	−۰٫۵۸	۰٫۹۴	۲٫۰	
			۰٫۸۸	۰٫۶۲	−۰٫۰۸۸	
	۰٫۱۹۳			−۰٫۱۳	−۰٫۴۰	−۰٫۵۳ (−۰٫۵۳)

مانده‌ها، درزیرنشان داده شده‌است، عملیات با چنین تعداد کمی ازارقام بامعنی، منجر به خطاهای نسبتاً زیادی درجواب می‌شود.

جایگذاری ازپایین

$$-0.13x_3 = -0.40 \rightarrow x_3 \approx 3.1$$

$$0.88x_2 - 0.62 \times 3.1 = -0.088 \rightarrow x_2 \approx 2.1$$

$$0.34x_1 - 0.58 \times 2.1 + 0.94 \times 3.1 = 2.0 \rightarrow x_1 \approx 0.89.$$

امتحان

سه معادلهٔ اصلی را جمع کنید: $0.81x_1 - 0.67x_2 + 1.61x_3 = 4.3$

حال جواب را دراین معادله قرار دهید:

$$0.81 \times 0.89 - 0.67 \times 2.1 + 1.61 \times 3.1 = 4.3049\ .$$

مانده‌ها

برای قضاوت در دقت جواب، می‌توان جواب را درطرف چپ هریك ازمعادله‌های اصلی قرارداد ونتایج را بامقادیرثابت طرف راست نظیرمقایسه کرد. تفاضلهای بین این نتایج و مقادیرثابت را مانده‌ها می‌نامند. برای مثال:

مانده‌ها

$$0.34 \times 0.89 - 0.58 \times 2.1 + 0.94 \times 3.1 = 1.9986;\ 2.00 - 1.9986 = 0.0014$$

$$0.27 \times 0.89 + 0.42 \times 2.1 + 0.13 \times 3.1 = 1.5253;\ 1.50 - 1.5253 = -0.0253$$

$$0.20 \times 0.89 - 0.51 \times 2.1 + 0.54 \times 3.1 = 0.781;\ 0.80 - 0.781 = 0.019.$$

این گمان که اگرمانده‌ها کوچك باشند، جواب مربوط جواب خوبی است جایز به نظرمی‌رسد. معمولا، این موضوع صحت دارد. مع‌هذا، مانده‌های کوچك همیشه حاکی از یك جواب خوب نیستند. این مطلب درگام بعدی تحت عنوان «بدحالت بودن» بررسی می‌شود.

خود را بیازمایید

۱ــ به‌هنگام تبدیل ماتریس افزوده، چه‌نوع اعمالی مجازهستند؟

۲ـ شکل نهایی ماتریس ضرایب، قبل از آغاز جایگذاری از پایین چیست؟
۳ـ اعضای محوری چه هستند؟ چرا در صورت امکان باید از اعضای محوری کوچك اجتناب شود؟

تمرین

دستگاههای زیررا با روش حذفی گاوس حل و از یك ستون مقابله‌ای نیز استفاده کنید. مانده‌ها را محاسبه نمایید.

۱ـ
$$\begin{aligned} x_۱ + x_۲ - x_۳ &= ۰ \\ ۲x_۱ - x_۲ + x_۳ &= ۶ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ - ۴x_۳ &= -۴. \end{aligned}$$

۲ـ
$$\begin{aligned} ۵٫۶x + ۳٫۸y + ۱٫۲z &= ۱٫۴ \\ ۳٫۱x + ۷٫۱y - ۴٫۷z &= ۵٫۱ \\ ۱٫۴x - ۳٫۴y + ۸٫۳z &= ۲٫۴. \end{aligned}$$

۳ـ (i)
$$\begin{aligned} ۲x + ۶y + ۴z &= ۵ \\ ۶x + ۱۹y + ۱۲z &= ۶ \\ ۲x + ۸y + ۱۴z &= ۷. \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} ۱٫۳x + ۴٫۶y + ۳٫۱z &= -۱ \\ ۵٫۶x + ۵٫۸y + ۷٫۹z &= ۲ \\ ۴٫۲x + ۳٫۲y + ۴٫۵z &= -۳. \end{aligned}$$

گام دوازده

دستگاههای معادلات خطی ـ ۲

خطاها و بدحالت بودن

برای هردستگاه ازمعادلات خطی ، پاسخ به این سؤال‌که در جواب حاصل از یك روش عددی چه قدر خطا ممکن است وجود داشته باشد بسیار مشکل است . بحث‌کلی درمورد این‌مسائل ازحیطهٔ این‌کتاب خارج است. بااین‌وجود، به‌پاره‌ای ازمنابع خطاهای موجود درجوابها اشاره‌ای خواهیم‌کرد.

۱ـ شك در ضرایب و اعداد ثابت

در بسیاری ازمسائل عملی، ضرایب مجهــولات، و نیز اعداد ثابت طرف راست معادلات از مشاهدات تجربی یا ازمحاسبات عددی دیگر به‌دست می‌آیند. این اعداد به‌یقین معلوم نیستند؛ ودرنتیجه وقتی جواب دستگاه به‌دست می‌آید،آن نیزحاوی میزانی ازتردیداست. برای اینکه نشان دهیم این نوع خطا درسراسر محاسبات چگونه منتقل می‌شود ، با فرض اینکه هردو عدد ثابت درحدود ۰٫۰۱ $\pm$ مشکوك هستند، یك مثال ساده بادو متغیررا حل می‌کنیم.

$$۲x+y=۴(\pm ۰٫۰۱)$$
$$-x+y=۱(\pm ۰٫۰۱)$$

اگر این دستگاه را به‌وسیلهٔ حذفی گاوس وجایگذاری از پایین حل‌کنیم داریم:

$$۲x+y=۴(\pm ۰٫۰۱)$$

$$\frac{۳}{۲}y=۱(\pm ۰٫۰۱)+۲(\pm ۰٫۰۰۵).$$

بنابراین، $y(۳/۲)$ بین ۲ر۹۸۵ و ۳ر۰۱۵ و لذا y بین ۱ر۹۹۰ و ۲ر۰۱۰ قرار می گیرد.
حال ازمعادلهٔ اول داریم

$$۲x=۴(\pm ۰ر۰۱)-۲(\pm ۰ر۰۱),$$

ودر نتیجه، x بین ۰ر۹۹ و ۱ر۰۱ قرارمی گیرد.

اگر اعداد ثـابت وضرایب دستگاه دقیق بودند، جـواب دقیق $x=۱$ و $y=۲$ می‌شد. چون اعداد ثابت به‌طـور دقیق معلوم نیستند، صحبت از یك جواب دقیق بی‌معنی است؛ بهتـرین چیـزی راکـه مـی‌تـوان گفت این است کـه $۰ر۹۹ \leqslant x \leqslant ۱ر۰۱$ و $۱ر۹۹ \leqslant y \leqslant ۲ر۰۱$.

دراین مثال شك موجود درجواب باشك موجود دراعداد ثابت هم مرتبه‌است. ولی، عموماً شك موجود درجوابها بزرگتراز شك موجود دراعداد ثابت است.

۲ـ خطاهای گرد شده

هرروش عددی برای حل دستگاههای معادلات خطی، شامـل تعداد زیادی اعمال حسابی است. برای مثال، در روش حذفی گـاوس ، مذکور درگام قبل، می‌توان نشان داد (مثلا ، ر. ك. کونت و دوبور) که $n(n+۱)/۲$ عمل تقسیم، $\left(\frac{n^۳}{۳}+\frac{n^۲}{۲}-\frac{۵n}{۶}\right)$ عمل ضرب و $\left(\frac{n^۳}{۳}+\frac{n^۲}{۲}-\frac{۵n}{۶}\right)$ عمل‌جمع لازم‌است تاجواب دستگاهی که n مجهول دارد حاصل‌شود.

چون هر گام یك الگوریتم، مولد خطاهای گرد شده است، لذا وقتی n بزرگ باشد رشد خطاهای گرد شده می‌تواند چنان باشدکه به‌جوابی بسیار دور ازجواب واقعی منتهی گـردد.

۳ـ انقباض محوری

در روش حذفی گاوس، باتغییرترتیب معادلات به‌نحوی‌که دراعمال حذفی از به‌کارگیری مضارب بزرگ اجتناب شود، می‌توان از رشد خطاهای گرد شده کاست. روندی که بایـد انجام گیردبه انقباض محوری (یا حذفی گاوس با محور گیری جزئی) معروف است. قاعدهٔ کلی چنین است : درهرمرحلهٔ حذفی، سطرهای ماتریس افزوده را چنان مرتب می کنیم‌که قدر مطلق عضو جدید محوری بزرگتر از (یا مساوی با) قدرمطلق هرعضو زیرآن درهمان ستون باشد.

بااستفاده از این قاعده مـطمئن می‌شویم‌که اندازهٔ مضاربی‌که درهر مـرحله به‌کار می‌رود نابیشتر از یك‌است. برای نشان دادن این قاعده درعمل، به‌بررسی یك مثال ساده،

با استفاده از عملیات حسابی دقیق، می‌پردازیم.

مطلوب است حل

$$2x+5y+8z=36$$
$$4x+8y-12z=-16$$
$$x+8y+\ \ z=20.$$

حل جدول‌بندی شده به‌صورت زیراست؛ اعضای محوری پررنگ چاپ شده‌اند.

مرحله	ماتریس افزوده	مضارب	توضیح
۱. در دو معادله x را حذف کنید؛ توجه کنید که اندازهٔ هر یك از دو مضرب ازیك کمتراست	$\begin{matrix} \mathbf{4} & 8 & -12 & -16 \\ 2 & 5 & 8 & 36 \\ 1 & 8 & 1 & 20 \end{matrix}$	 $-1/2$ $-1/4$	معادلات اول ودوم باهم عوض شده‌اند؛ عضو محوری ۴ دارای بزرگترین مقدار درستون مربوط به x می‌باشد.
۲. y را از معادلهٔ سوم حذف کنید.	$\begin{matrix} \mathbf{4} & 8 & -12 & -16 \\ 0 & 1 & 14 & 44 \\ 0 & \mathbf{6} & 4 & 24 \end{matrix}$		باید سطرهای ۲ و ۳ با هم عوض شوند تا اینکه ۶ به‌جای ۱ عضومحوری گردد.
توجه کنید که $\|m\|<1$	$\begin{matrix} \mathbf{4} & 8 & -12 & -16 \\ 0 & \mathbf{6} & 4 & 24 \\ 0 & 0 & 40/3 & 40 \end{matrix}$	 $-1/6$	
۳. با جایگذاری از پایین حل کنید: $x=1$, $y=2$, $z=3$.			

۴ـ بدحالت بودن

پاره‌ای از دستگاههای معادلات خطی چنانند که جوابهایشان نسبت به تغییرات کوچك (ودر نتیجه نسبت به‌خطاها) درضرایب واعداد ثابت بسیارحساس هستند. مثالی را درزیرمی‌آوریم

که درآن تغییر دو ضریب به‌اندازهٔ ۱٪، جواب با مضربی از ۱ر۰۱ یا بیشتر تغییر می کند. این دستگاهها را بدحالت می گویند. اگر دستگاهی بدحالت باشد، جواب حاصل از یك روش عددی ممکن است، حتی اگر برای بسیار کوچك نگه داشتن خطاهای گرد شده و دیگرخطاها مراقبت زیادی هم به‌عمل آید، با جواب دقیق خیلی متفاوت باشد.

مثال

دستگاه دومعادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$۲x+ \qquad y=۴$$

$$۲x+۱ر۰۱y=۴ر۰۲.$$

این دستگاه دارای جواب دقیق $x=۱$ و $y=۲$ است.
اگرضرایب معادلهٔ دوم را به‌اندازهٔ ۱٪ وعدد ثابت معادلهٔ اول را به اندازهٔ ۵٪ تغییر دهیم، دستگاه زیرحاصل می‌شود.

$$۲x+y=۳ر۸۲$$

$$۲ر۰۲x+y=۴ر۰۲.$$

به آسانی نتیجه می‌شودکه جواب دقیق این دستگاه عبارت است از $x=۱۰$ و $y=-۱۶ر۱۸$. این جواب با جواب دستگاه اولی بسیار متفاوت است. بنابراین هر دو دستگاه بدحالت هستند.

اگردستگاهی بدحالت باشد، روند معمول امتحان یك جواب عددی ـ باقراردادن آن درمعادلات اصلی (یا ترکیبی ازآنها) و «مشاهدهٔ اینکه با چه کیفیتی در معادلات صدق می کند» ـ بی‌اعتباراست. طرق دقیقتری برای امتحان جوابها وجود دارند، وبرای تعیین اینکه آیا یك دستگاه بدحالت است یا نه، آزمایشهای بسیاری هم پیشنهاد شده‌اند. برای این‌گونه آزمایشها، خواننده می‌تواند به کتابهای پیشرفته‌ترآنالیزعددی رجوع کند.

خود را بیازمایید

۱ـ انواع خطاهایی‌راکه می‌توانندبرجواب یك‌دستگاه معادلات خطی اثر بگذارند شرح دهید.

۲ـ استفاده ازقاعدهٔ انقباض‌محوری چگونه می‌تواند برای‌کاستن‌خطاها کمك نماید؟

۳ـ آیا درست است بگوییم که یك‌دستگاه بدحالت جواب دقیقی ندارد؟

تمرین

۱ـ اگرفرض‌کنیم اعداد داخل پرانتز مبین حدود خطاهای اعداد ثابت باشند، حوزهٔ

جوابهای دستگاه زیررا بیابید:

$$x-y=۱٫۴(\pm ۰٫۰۱),$$
$$x+y=۳٫۸(\pm ۰٫۰۵).$$

۲ــ مطلوب است حل دستگاههای زیر به‌روش حذفی گاوس:

(i)
$$x-۱۰y=-۲۱٫۸,$$
$$۱۰x+\quad y=\quad ۱۴٫۳;$$

(ii)
$$x+۵y-\ z=۴,$$
$$۲x-\ y+۳z=۷,$$
$$۳x-\ y+۵z=۱۲;$$

(iii)
$$۲٫۱x_۱+۲٫۴x_۲+۸٫۱x_۳=۶۲٫۷۶,$$
$$۷٫۲x_۱+۸٫۵x_۲-۶٫۳x_۳=-۱٫۹۳,$$
$$۳٫۴x_۱-۶٫۴x_۲+۵٫۴x_۳=۱۶٫۲۴.$$

۳ــ با استفاده‌از حساب ممیز سیار با مانتیس چهار رقم اعشار، دستگاه زیررا بــا و بدون استفاده از انقباض محوری حل کنید. جوابهای خود را با جواب دقیق، که عبارت است از $x=۱٫۰۰۰$ و $y=۰٫۵۰۰۰$، مقایسه کنید.

$$۰٫۲۳۱۰\times ۱۰^{-۲}x+۰٫۴۱۰۴\times ۱۰^{-۱}y=۰٫۲۲۸۳\times ۱۰^{-۱}$$
$$۰٫۴۲۰۰\times ۱۰^{۰}x\ +۰٫۵۳۶۸\times ۱۰^{۱}y\ =۰٫۳۱۰۴\times ۱۰^{۱}\ .$$

۴ــ نشان دهید که تکمیل مثلثی کردن یك دستگاه خطی ۳ مجهــولی به روش حذفی گاوس، ۳ عمل تقسیم، ۸ عمل ضرب و ۸ عمل جمع، و انجام جایگذاری از پایین ۳ عمل تقسیم، ۳ عمل ضرب و ۳ عمل جمع دیگر لازم دارد.
دستور کلی مربوط به تعداد اعمال حسابی مــورد لزوم، مذکور در بخش ۲، را به‌دست آورید.

۵ــ مثال مربوط به بدحالت بودن مذکور در بخش ۴ را به‌طریق زیر بررسی کنید.
i) خطوط راست دستگاه اول را برروی کاغذ میلی‌متری رسم کنید؛ اکنون که تنها دو مجهول داریم، بدحالت بودن را به‌زبان هندسی شرح دهید.

ii) جواب دستگاه اول را درطــرف چپ دستگاه دوم قرار دهید. آیــا $x=۱$ و $y=۲$ جواب خوبی برای دستگاه دوم «به‌نظر می‌رسد»؟ تفسیر کنید.

iii) جواب دستگاه دوم را درطرف چپ دستگاه اول قراردهید. تفسیر کنید.

۶ـ (این مثالی است از بدحالت بودن منسوب به ت. س. ویلسون[1].)

$$۱۰x_۱+۷x_۲+۸x_۳+\ \ ۷x_۴=۳۲$$

$$۷x_۱+۵x_۲+۶\ \ x_۳+\ \ ۵x_۴=۲۳$$

$$۸x_۱+۶x_۲+۱۰x_۳+\ \ ۹x_۴=۳۳$$

$$۷x_۱+۵x_۲+\ \ ۹x_۳+۱۰x_۴=۳۱$$

«جـواب» (۶٫۰, −۷٫۲, ۲٫۹, −۰٫۱) را درطرف چپ دستگاه قرار دهید. آیـا می‌توانیدادعا کنیدکه‌این‌جواب،جواب‌خوبی است؟ اینك‌جواب(۱٫۰, ۱٫۰, ۱٫۰, ۱٫۰) را قراردهید. درمورد خطرات پیش داوری توضیح دهید!

---

1. T. S. Wilson

گام سیزده

دستگاههای معادلات خطی -۳

روش تکراری گاوس ـ سایدل[1]

روشهایی‌را که در گامهای قبل جهت حل دستگاههای معادلات خطی به‌کار بردیم، به‌روشهای مستقیم مصطلح هستند. هنگام استفاده از یك روش مستقیم، پس‌از انجام تعدادی متناهی از اعمال مربوط به حساب درصورتی که خطای گرد شده ودیگر خطاها به وجـود نیایند، به یك جواب دقیق می‌رسیم. البته، عموماً خطاهای گرد شده به‌وجود می‌آیند، و لذا وقتی که یك دستگاه بزرگ را با روشهای مستقیم حل می‌کنیم، رشد خطاها می‌تواند آن قدر زیاد باشدکه به نتایج بیهوده‌ای منجرشود.

۱ـ روشهای تکراری

روشهای تکراری شیوهٔ دیگری را فراهم می‌آورند. به‌خاطر آوریدکه دریك روش تکراری بایك جواب تقریبی شروع می‌کنیم، وآن را در یك دستور تراجعی به‌کار می‌بریم تاجواب تقریبی دیگری به دست آید. بابه‌کار بردن پی‌درپی این دستور، دنباله‌ای از جوابهاحاصل می‌گرددکه (تحت شرایط مناسب) به‌جواب دقیق همگرا می‌شود.روشهای تکراری دارای مزایای سادگی عمل وسهولت اجرا به‌وسیلهٔ‌کامپیوتر هستند، و نسبت به انتشار خطاها نسبتاً فاقد حساسیت . این روشها، با مزیت برروشهای مستقیم،برای‌حل دستگاههای خطی‌حاوی چند صد متغیر به‌کار می‌روند، به‌ویژه اگربسیاری ازضرایب صفرهم باشند. دستگاههای تا ۱۰۰۰۰ متغیر هم به‌طور موفقیت‌آمیز به وسیلهٔ روشهای تکراری باکامپیوترحل شده‌اند و

---

1. Seidel

حال آنکه حل دستگاههای با ۵۰۰ متغیر یا بیشتر به‌روشهای مستقیم مشکل است یا غیرممکن.

۲- روش گاوس - سایدل *

دراین کتاب برای معادلات خطی تنها یك روش تکراری، مرهون گاوس‌واصلاح شده توسط سایدل، ارائه خواهد شد. مثال زیررا درنظر بگیرید.

مثال

مطلوب است حل دستگاه

$$\begin{aligned} ۱۰x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ &= ۱۳ \\ ۲x_۱ + ۱۰x_۲ + x_۳ &= ۱۳ \\ ۲x_۱ + x_۲ + ۱۰x_۳ &= ۱۳. \end{aligned}$$

از روش تکراری استفاده می کنیم.

اولین قدم آن است که معادلهٔ اول برحسب $x_۱$، دوم برحسب $x_۲$ و سوم برحسب $x_۳$ حل شود. این عمل دستگاه فوق را به‌صورت زیر درمی‌آورد:

$$x_۱ = ۱٫۳ - ۰٫۲x_۲ - ۰٫۱x_۳ \qquad (۱)$$

$$x_۲ = ۱٫۳ - ۰٫۲x_۱ - ۰٫۱x_۳ \qquad (۲)$$

$$x_۳ = ۱٫۳ - ۰٫۲x_۱ - ۰٫۱x_۲ \qquad (۳).$$

اکنون جواب اولیه‌ای انتخاب می‌شود؛ ما از $x_۱ = ۰$ ، $x_۲ = ۰$ ، $x_۳ = ۰$ استفاده خواهیم کرد. با قراردادن این مقادیر درطرف راست (۱) نتیجه می‌شود $x_۱ = ۱٫۳$. بلافاصله این مقدار $x_۱$ همراه با بقیهٔ جوابهای اولیه (یعنی، $x_۲ = ۰$ و $x_۳ = ۰$) در طرف راست (۲) قرار داده می‌شوند تا $x_۲ = ۱٫۳ - ۰٫۲ \times ۱٫۳ - ۰ = ۱٫۰۴$ به دست آید. بالاخره، $x_۱ = ۱٫۳$ و $x_۲ = ۱٫۰۴$ در (۳) قرار داده می‌شود تا $x_۳ = ۰٫۹۳۶$ حاصل شود. این عمل اولین تکرار را تکمیل می کند؛ و بدین ترتیب دومین جواب تقریبی یعنی (۰٫۹۳۶ ، ۱٫۰۴ ، ۱٫۳) به‌دست می‌آید.

بااستفاده از دومین جواب می‌توانیم روند فوق را تکرار کنیم تا تقریب سومی را هم به‌دست‌آوریم. روشن است که بدین طریق می‌توان ادامه داد و دنباله‌ای از جوابهای

---

* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب‌است. جهت مطالعه واستفاده دربرنامه‌نویسی در صفحهٔ ۱۷۹ یك فلوچارت داده شده‌است.

تقریبی به دست آورد. چنانچه ضرایب دستگاه شرایط مشخصی را داشته باشند این دنباله به جواب دقیق همگرا خواهد شد.

با تشکیل روابط تراجعی مربوط، به‌روشنی می‌توان دید که این روند تکراری چگونه به پیش می‌رود. اگرجوابهای $(k+1)$ ام و k ام را به ترتیب با $(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k+1)})$ و $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ نمایش دهیم، داریم

$$x_1^{(k+1)} = 1.3 - 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)} \qquad (1)'$$

$$x_2^{(k+1)} = 1.3 - 0.2x_1^{(k+1)} - 0.1x_3^{(k)} \qquad (2)'$$

$$x_3^{(k+1)} = 1.3 - 0.2x_1^{(k+1)} - 0.1x_2^{(k+1)} \qquad (3)'$$

از $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (0, 0, 0)$ شروع می کنیم وسپس روابط فوق را به طور پی‌درپی با ترتیب $(1)'$، $(2)'$، $(3)'$ به کار می بریم. توجه داشته باشید که وقتی در طرفهای راست معادلات فوق به‌جای x_1، x_2 و x_3 مقدار قرار می‌دهیم همواره به‌جای هرمجهول ازآخرین برآوردهای حاصل استفاده می کنیم.

۳- همگرایی

دنبالهٔ جوابهای حاصل ازاین روند تکراری را می‌توان درجدولی به‌صورت زیر نمایش داد:

تکرار k	جواب تقریبی (گاوس-سایدل) $x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
۰	۰	۰	۰
۱	۱٫۳	۱٫۰۴	۰٫۹۳۶
۲	۰٫۹۹۸۴	۱٫۰۰۶۷۲	۰٫۹۹۹۶۴۸
۳	۰٫۹۹۸۶۹۱	۱٫۰۰۰۲۹۷	۱٫۰۰۰۲۳۲

دانشجومی‌تواند نشان دهد که جواب دقیق این دستگاه $(1, 1, 1)$ است. مشاهده می شود که جوابهای گاوس - سایدل به سرعت به این جواب نزدیك می‌شوند، به عبارت

دیگر، این روش درحال همگرا شدن است.

البته درعمل، جواب درست معلوم نیست. بنا به رسم بــه محض اینکه تفاضلات بین مقادیر $x^{(k)}$, $x^{(k+۱)}$ به اندازهٔ مناسب کوچك شدند، به این روند هم خاتمه داده می‌شود. یك قاعده برای توقف آن است که وقتی برای اولین دفعه $S_k = \sum_i |x_i^{(k+۱)} - x_i^{(k)}|$ از عددکوچك معلومی (مثلا ۰٫۰۰۰۰۰۱) کمترشد به تکرارخاتمه داده شود.

مسئلهٔ همگرایی یك دستگاه مفروض از معادلات مسئلهٔ مهمی است، مانند مثال فوق، ممکن است روش گاوس ـ سایدل سریعاً منجر به جوابی شود کــه خیلی نزدیك به جواب دقیق است؛ از طرف دیگر ممکن است چنان به کندی همگرا شود که از نظر عملی بی‌فایده باشد، یا ممکن است دنباله‌ای را تولیدکندکه از جواب دقیق دورهم بشود. برای بررسی این مسئله، دانشجو باید به کتابهای پیشرفته‌تر(مثلار.ك. به کتاب کنت ودوبور) مراجعه‌نماید.

برای بهتر کردن شانس (وسرعت) همگرایی، قبل از استفاده از روش تکراری باید دستگــاه معادلات را طوری مرتب کرد کــه تا حدامکان هرضریب قــطری مقدم (برحسب قدرمطلق) بیشترین مقدار موجود در همان سطر را داشته باشد.

خودرا بیازمایید

۱ـ فرق اساسی بین یك روش تکراری و یك روش مستقیم در چیست؟

۲ـ چند مزیت استفاده از روشهای تکراری به جای روشهای مستقیم را بیان کنید.

۳ـ شانس موفقیت روش گاوس ـ سایدل را چگونه می‌توان بهتر کرد؟

تمرین

۱ـ برای مثالی که در بــالا بررسی شد، مقدار $S_۳$، کمیت استفاده شده در قــاعدهٔ توقف پیشنهادی پس از تکرار سوم، را محاسبه کنید.

۲ـ دستگاههای زیررا به روش گاوس ـ سایدل حل کنید.

i) (تا $۴D$)

$$\begin{aligned} x - y + ۱۰z &= -۷ \\ ۲۰x + ۳y - ۲z &= ۵۱ \\ ۲x + ۸y + ۴z &= ۲۵ \end{aligned}$$

(تجدید ترتیب را فراموش نکنید.)

پس از هرتکرار مقدار S_k را (تا $۵D$) محاسبه کنید.

ii) (تا $۴D$)

$$\begin{aligned} ۱۰x - y \qquad\qquad &= ۱ \\ -x + ۱۰y - z \qquad &= ۱ \\ -y + ۱۰z - w &= ۱ \end{aligned}$$

گام چهارده

دستگاههای معادلات خطی-۴*

معکوس کردن ماتریس

دراین گام اختیاری فرض براین است که دانشجو با جبر ماتریسی مقدماتی آشنایی دارد. صورت کلی دستگاه n معادلهٔ خطی n مجهولی (ر.ك. بخش ۱ ازگام ۱۱) را می‌توان به‌شکل ماتریسی $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ هم نوشت، وبرداری مانند $\mathbf{x}$ را جستجو کرد که دراین‌معادله صدق کند.

۱- ماتریس معکوس

اگر دترمینان $\mathbf{A}$ مخالف صفر باشد، ماتریسی به نام معکوس $\mathbf{A}$ (که با $\mathbf{A}^{-1}$ نشان داده می‌شود) وجود دارد که حاصل ضرب ماتریسی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{A}^{-1}$ برابر ماتریس واحد $\mathbf{I}$ به‌ابعاد $n\times n$ باشد. یعنی، $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}=\mathbf{AA}^{-1}$.

اگرمعادلهٔ $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ را ازسمت چپ درماتریس معکوس، $\mathbf{A}^{-1}$، ضرب کنیم داریم $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$؛ که‌ازآن نتیجه می‌شود $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ (زیرا $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}=\mathbf{I}$ و $\mathbf{Ix}=\mathbf{x}$).

لذا جواب دستگاه معادلات خطی را می‌توان بدین ترتیب به دست آورد که ابتدا معکوس‌ماتریس ضرایب $\mathbf{A}$ را یافت وسپس حاصل ضرب $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ را محاسبه کرد.

مع‌هذا، نباید این روش حل برای حالت کلی هم‌توصیه شود. مسئلهٔ یافتن معکوس ماتریس، خود یك مسئلهٔ عددی است که حلش محتاج اعمال حسابی بسیار زیادتری (وبنابراین شامل خطای گرد شده وخطاهای دیگر بیشتری) در مقایسهٔ با هریك از روشهای توصیف شدهٔ درگامهای قبلی است.

محاسبهٔ معکوس‌ماتریس‌عاقلانه‌است هرگاه (الف) معکوس ماتریس به‌دلایل دیگری

هم موردنیاز باشد (مثلا حاوی اطلاعات آماری ویژه‌ای باشد یا در دستور یا محاسبهٔ دیگری نیزمورد استفاده قرارگیرد) یا (ب) حل چند دستگاه خطی که همه دارای یك ماتریس ضرایب یکسان هستند مورد نظر باشد.

۲ـ روش معکوس‌کردن یك ماتریس

روشهای عددی بسیاری برای یافتن معکوس‌یك ماتریس وجود دارند. به‌تشریح روشی می‌پردازیم که از روندهای حذفی گاوس و جایگذاری از پایین، گام ۱۱، استفاده می کند. این روش از نظرمحاسباتی کارا و به‌کار بردنش ساده‌است. با به کاربردن این روش برای یك ماتریس ۲×۲ و یك ماتریس ۳×۳، آن را تشریح می کنیم؛ پس از آن برای دانشجو باید روشن باشدکه این روش را چگونه می‌توان برای ماتریسهای $n \times n$ تعمیم داد.

i) مثال ۲×۲

فرض می کنیم

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}$$

می‌خواهیم ماتریسی مانند $\mathbf{A}^{-۱} = \begin{bmatrix} u_۱ & u_۲ \\ v_۱ & v_۲ \end{bmatrix}$ بیابیم‌که

$$\mathbf{AA}^{-۱} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}.$$

این رابطه با حل دو دستگاه زیر معادل است:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} u_۱ \\ v_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \text{ و } \mathbf{A} \begin{bmatrix} u_۲ \\ v_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}.$$

این روش به‌شرح زیرادامه می‌یابد:

الف) ماتریس افزودهٔ زیررا تشکیل دهید

$$[\mathbf{A}|\mathbf{I}] = \left[\begin{array}{cc|cc} ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

ب) عملیات سطری مقدماتی‌را برماتریس افزوده اعمال کنید تا $\mathbf{A}$ به‌یك ماتریس بالا مثلثی چون $\tilde{\mathbf{A}}$ تبدیل شود (ر. ك. بخش ۵ از گام ۱۱):

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} \quad\quad \mathbf{I} & \quad\quad \tilde{\mathbf{A}} \quad\quad \tilde{\mathbf{I}} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۵ & ۰ & ۱ \end{array}\right] & \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} ۲ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۳ & -۲ & ۱ \end{array}\right] \end{array}$$

(دو برابرسطر ۱ منهای سطر ۲).

پ) دو دستگاه

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_۲ \\ v_۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_۱ \\ v_۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

را بااستفاده از روش جایگذاری ازپایین حل کنید. توجه داشته باشید که بااستفاده از $\tilde{\mathbf{A}}$ وستونهای $\tilde{\mathbf{I}}$، چگونه‌دستگاهها ساخته می‌شوند. سپس ازدستگاه اول داریم $۳v_۱ = -۲$، یعنی $v_۱ = -\frac{۲}{۳}$ و $۲u_۱ + v_۱ = ۱$، بنـا براین $۲u_۱ = ۱ + \frac{۲}{۳}$ و لذا $u_۱ = \frac{۵}{۶}$.

از دستگاه دوم داریم $۳v_۲ = ۱$، یعنی $v_۲ = \frac{۱}{۳}$ و $۲u_۲ + v_۲ = ۰$، بنـــا برایـن $۲u_۲ = -\frac{۱}{۳}$ و درنتیجـه $u_۲ = -\frac{۱}{۶}$. ماتریس معکوس مطلوب عبارت است از

$$\mathbf{A}^{-۱} = \begin{bmatrix} u_۱ & u_۲ \\ v_۱ & v_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۶} & -\frac{۱}{۶} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix}.$$

ت) امتحان: باید $\mathbf{AA}^{-۱}$ برابر $\mathbf{I}$ شود. باانجام عمل ضرب خواهیم داشت

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۵ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{۵}{۶} & -\frac{۱}{۶} \\ -\frac{۲}{۳} & \frac{۱}{۳} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix},$$

بنابراین $\mathbf{A}^{-۱}$ درست است.

در این مثال ساده، انجام اعمال حسابی با کسرها امکان‌پذیر است، و لذا هیچ خطای گرد شده‌ای هم پیش نمی‌آید و ماتریس معکوس حاصل، دقیق است.

ii) یك مثال ۳ × ۳

هنگامی که تبدیل ماتریس افزوده انجام می‌گیرد باید یك ستون مقابله حاوی مجموعهای سطری هم در دست باشد. برای اجتناب از زوال زیاده از حد ارقام با معنی، به سبب تجمع خطاهای گرد شده، در تمامی محاسبات می‌توان یك یا دو رقم با معنی اضافی را هم منظور کرد. نتیجهٔ نهایی باید با محاسبهٔ $\mathbf{AA}^{-1}$ امتحان شود که تقریباً برابر با ماتریس واحد $\mathbf{I}$ باشد. به عنوان مثال، ماتریس معکوس $\mathbf{A}^{-1}$ از

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.20 & 0.24 & 0.12 \\ 0.10 & 0.24 & 0.24 \\ 0.05 & 0.30 & 0.12 \end{bmatrix}$$

را پیدا می‌کنیم.

برای نشان دادن تأثیرات خطاها، فرض می‌کنیم که اعضای $\mathbf{A}$ تا ۲S درست باشند و در محاسبهٔ $\mathbf{A}^{-1}$ هم عملیات را تا ۲S انجام می‌دهیم. نتایج محاسبات را می‌توان برای راحتی به‌صورت جدولی نمایش داد.

اینك به مثالی ازمحاسبات جایگذاری از پایین می‌پردازیم. اگر $\tilde{\mathbf{A}}$ با ستون دوم $\tilde{\mathbf{I}}$ در نظر گرفته شود آنگاه ستون دوم $\mathbf{A}^{-1}$ به‌دست می‌آید. لذا:

$$\begin{bmatrix} 0.20 & 0.24 & 0.12 \\ 0 & 0.12 & 0.18 \\ 0 & 0 & 0.10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_6 \\ u_5 \\ u_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

از معادلهٔ فوق به‌ترتیب نتیجه می‌شود $u_4=-20$، $u_5=38$ و $u_6=-34$. دانشجو باید امتحان کند که حاصل ضرب $\mathbf{AA}^{-1}$ عبارت از

$$\begin{bmatrix} 1.10 & -0.08 & 0.00 \\ 0.10 & 0.92 & 0.00 \\ 0.13 & -0.10 & 1.00 \end{bmatrix}$$

عملیات سطری	امتحان $\sum$	I به $\tilde{\mathbf{I}}$ تبدیل می‌شود			$\mathbf{A}$ به $\tilde{\mathbf{A}}$ تبدیل می‌شود			مضارب
(۱)	۱ر۵۶	۰	۰	۱	۰ر۱۲	۰ر۲۴	۰ر۲۰	
(۲)	۱ر۵۸	۰	۱	۰	۰ر۲۴	۰ر۲۴	۰ر۱۰	
(۳)	۱ر۸۴	۱	۰	۰	۰ر۴۹	۰ر۳۰	۰ر۰۵	
(۴)=(۱)		۰	۰	۱	۰ر۱۲	۰ر۲۴	۰ر۲۰	
(۵)=(۲)—۰ر۵(۱)	۰ر۸۰	۰	۱	—۰ر۵	۰ر۱۸	۰ر۱۲	۰	—۰ر۵
(۶)=(۳)—۰ر۲۵(۱)	۱ر۴۵	۱	۰	—۰ر۲۵	۰ر۴۶	۰ر۲۴	۰	—۰ر۲۵
(۷)=(۴)		۰	۰	۱	۰ر۱۲	۰ر۲۴	۰ر۲۰	
(۸)=(۵)		۰	۱	—۰ر۵	۰ر۱۸	۰ر۱۲	۰	
(۹)=(۶)—۲(۵)	—۰ر۱۵	۱	—۲	۰ر۷۵	۰ر۱۰	۰	۰	—۲
		[۹] ۱۲	[۶] —۳۴	[۳] ۱۹	ماتریس معکوس $\mathbf{A}^{-1}$ را دراینجا قرار داده‌ایم. (→)؛ اعضایش به ترتیبی که نشان داده شده‌است (شماره‌گذاری شده با ۱, ۲, . . . , ۹) تا ۲S محاسبه شده‌اند.			
		[۸] —۱۵	[۵] ۳۸	[۲] —۱۵				
		[۷] ۱۰	[۴] —۲۰	[۱] ۷ر۵				

هست که تقریباً برابر با $\mathbf{I}_n$ است. این تقریب به خاطر اینکه محاسبهٔ اعضای $\mathbf{A}^{-۱}$ تنها تا $۲S$ انجام شد، ضعیف است.

۳- حل دستگاههای خطی بااستفاده ازماتریس معکوس

به طوری که در بالا اشاره شد، جواب دستگاه خطی $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ عبارت است از $\mathbf{x}=\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{b}$. این مطلب را با حل مثالی، که از ماتریس $\mathbf{A}^{-۱}$ به‌دست‌آمده دربخش ۲ بالا استفاده می کند، تشریح می کنیم.

مثال

می‌خواهیم دستگاه زیررا حل کنیم

$$۰٫۲۰x+۰٫۲۴y+۰٫۱۲z=۱$$

$$۰٫۱۰x+۰٫۲۴y+۰٫۲۴z=۲$$

$$۰٫۰۵x+۰٫۳۰y+۰٫۴۹z=۳.$$

حل این دستگاه به‌شرح ذیل است. ماتریس ضرایب عبارت است از

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} ۰٫۲۰ & ۰٫۲۴ & ۰٫۱۲ \\ ۰٫۱۰ & ۰٫۲۴ & ۰٫۲۴ \\ ۰٫۰۵ & ۰٫۳۰ & ۰٫۴۹ \end{bmatrix}.$$

اگر فرض کنیم که اعضای $\mathbf{A}$ بادقت $۲S$ معلوم است، می‌توان $\mathbf{A}^{-۱}$ را به‌همان‌طریق‌بخش ۱ محاسبه و از آن به‌شرح زیر استفاده کرد:

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\mathbf{A}^{-۱}\mathbf{b}=\begin{bmatrix} ۱۹٫۰ & -۳۴٫۰ & ۱۲٫۰ \\ -۱۵٫۰ & ۳۸٫۰ & -۱۵٫۰ \\ ۷٫۵ & -۲۰٫۰ & ۱۰٫۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۳٫۰ \\ ۱۶٫۰ \\ -۲٫۵ \end{bmatrix}.$$

یعنی، جواب تا $۲S$ عبارت است از $x=-۱۳٫۰$، $y=۱۶٫۰$ و $z=-۲٫۵$.
با جمع کردن سه معادله، جواب را می توان امتحان کرد. نتیجه اینکه

$$۰٫۳۵x+۰٫۷۸y+۰٫۸۵z=۶.$$

اگرجواب فوق را درطرف چپ رابطهٔ اخیرقرار دهیم، تا S ۲ داریم:

$$۰٫۳۵(-۱۳)+۰٫۷۸\times ۱۶+۰٫۸۵(-۲٫۵)=۵٫۸.$$

خود را بیازمایید

۱ـ در روش یافتن معکوس $\mathbf{A}$، پس‌از انجام عملیات سطری مقدماتی، شکل نهایی $\mathbf{A}$ چیست؟

۲ـ آیا جواب، دستگاه $\mathbf{Mx}=\mathbf{d}$ عبارت از $\mathbf{x}=\mathbf{dM}^{-۱}$ یا $\mathbf{x}=\mathbf{M}^{-۱}\mathbf{d}$ (یا هیچ کدام)؟

۳ـ شرطی برای یك ماتریس ارائه دهیدکه معکوسی نداشته باشد.

تمرین

۱ـ با استفاده از روش حذفی وجایگذاری از پایین، معکوس ماتریسهای زیررا بیابید.

$$(\text{الف})\ \begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۴ \\ ۶ & ۱۹ & ۱۲ \\ ۲ & ۸ & ۱۴ \end{bmatrix},\quad (\text{ب})\ \begin{bmatrix} ۱٫۳ & ۴٫۶ & ۳٫۱ \\ ۵٫۶ & ۵٫۸ & ۷٫۹ \\ ۴٫۲ & ۳٫۲ & ۴٫۵ \end{bmatrix},$$

$$(\text{پ})\ \begin{bmatrix} ۰٫۳۷ & ۰٫۶۵ & ۰٫۸۱ \\ ۰٫۴۱ & ۰٫۷۱ & ۰٫۳۴ \\ ۰٫۱۱ & ۰٫۸۲ & ۰٫۵۲ \end{bmatrix}.$$

۲ـ (با دو بردارطرف راست) هریك ازدستگاههای زیررا حل کنید:

$$(\text{الف})\quad \begin{array}{l} ۲x+۶y+۴z=۵ \\ ۶x+۱۹y+۱۲z=۶ \\ ۲x+۸y+۱۴z=۷ \end{array}\quad \begin{bmatrix} =۱ \\ =۲ \\ =۳ \end{bmatrix}$$

$$(\text{ب})\quad \begin{array}{l} ۱٫۳x+۴٫۶y+۳٫۱z=-۱ \\ ۵٫۶x+۵٫۸y+۷٫۹z=۲ \\ ۴٫۲x+۳٫۲y+۴٫۵z=-۳ \end{array}\quad \begin{bmatrix} =۰ \\ =۱ \\ =۱ \end{bmatrix}$$

$$(\text{پ})\quad \begin{array}{l} ۰٫۳۷x_۱+۰٫۶۵x_۲+۰٫۸۱x_۳=۱٫۱ \\ ۰٫۴۱x_۱+۰٫۷۱x_۲+۰٫۳۴x_۳=۲٫۲ \end{array}\quad \begin{bmatrix} =۰٫۵ \\ =۲٫۱ \end{bmatrix}.$$

گام پانزده

تفاضلات متناهی-۱

جدول

متخصصین آنالیزعددی ازقدیم با جدولهایی از اعـداد سروکار داشته وفنون بسیاری هم جهت بررسی توابع ریاضی نمایش داده شده به‌وسیلهٔ جدول، توسعه یافته‌اند. مثلا، ممکن است مقدار تابع درنقطه‌ای که در جدول نیامده است خواسته شود، و مجبور شویم از یك روند درونیابی استفاده کنیم. تخمین زدن مشتق یا انتگرال معین یك تابع جدولی، با کمك برخی از فرایندهای متناهی،جهت تقریب کردن روندهای حدی (بینهایت کوچك) متناظر، از حساب دیفرانسیل و انتگرال، نیز میسراست. درهـرحالت به‌کار بردن تفاضلات متناهی مرسوم است.

۱- جدول مقادیر

کتابهای بسیاری جدولهایی از توابع ریاضی را شامل هستند. یکی از جامعترین آنها کتاب راهنمای توابع ریاضی است، که توسط م. آبراموویتس[1] و آی. ا. استگان[2] (ادارهٔ ملی استانداردهای ایالات متحده، ۱۹۶۴؛ دوور[3] ۱۹۶۵) تنظیم شده است، وشامل اطلاعات مفیدی درباره روشهای عددی نیز می‌باشد.

هرچند که اکثر جداول از شناسه‌هایی با فواصل ثابت استفاده می‌کنند، ولی مقادیر برخی ازتوابع در نواحی خاصی ازشناسه خود سریع تغییرمی‌کنند و لذا ممکن‌است بهتر باشدکه تابع مورد مطالعه برحسب فاصله‌های متغیری که نسبت به‌رفتارموضعی تابع تعیین

---

1. M. Abramowitz   2. I. A. Stegun   3. Dover

می‌شوند، جدول‌بندی شود. اما کارکردن با جداولی که فاصلهٔ شناسه‌ای متغیر دارند بسیار مشکل است و لذا هرجا که ممکن باشد ازفاصله‌های شناسه‌ای یکسان استفاده می‌کنند. به عنوان مثالی ساده جدول ۲S مربوط به‌تابع نمایی روی ۱۴ر۰(۰۱ر۰)۱۰ر۰ را در نظر می گیریم (این علامت حوزهٔ ۱۴ر۰ $\leqslant x \leqslant$ ۱ر۰ تقسیم شده به‌فاصله‌های ۰۱ر۰ را مشخص می کند).

x	$f(x)=e^x$
۱۰ر۰	۱۰۵۱۷ر۱
۱۱ر۰	۱۱۶۲۸ر۱
۱۲ر۰	۱۲۷۵۰ر۱
۱۳ر۰	۱۳۸۸۳ر۱
۱۴ر۰	۱۵۰۲۷ر۱

نکتهٔ بسیار مهم این است که فاصلهٔ بین شناسه‌های متوالی آن قدر کوچك باشد که تغییرات تابع جدول‌بندی شده جلوه گرشود. زیرا معمولا مقدار تابع درمقداری از شناسه بین مقادیر مشخص شده لازم خواهد بود (به عنوان مثال،مقدار e^x در $x=$ ۱۰۵ر۰ از جدول بالا). اگرجدول این طور تنظیم شده باشد، با اختیار کردن یك نمایش برحسب چند جمله‌ای (ان‌شاءالله از درجهٔ پایین) می‌توان چنین مقادیر میانی تابع مفروض را با تقریب خوب به‌دست آورد.

۲ـ تفاضلات متناهی

از زمان نیوتن تفاضلات متناهی به‌طور وسیعی مورداستفاده قرار گرفته‌اند. تنظیم جدولی از تفاضلات متناهی برای یك تابع جدولی ساده است. تفاضلات اول از تفریق هر مقدار از مقدار بعدی موجود در جدول، تفاضلات دوم با تکرار این عمل روی تفاضلات اول به‌دست می‌آیند و هکذا برای تفاضلات مراتب بالاتر. برای جدول بالا مربوط به e^x: ۱۴ر۰(۰۱ر۰)۱۰ر۰، جدول ذیل به‌دست می‌آید(به نحوهٔ تنظیم مرسوم جدول، یعنی حذف ممیزهاوصفرهای مقدم‌ازتفاضلات،توجه کنید).

(دراین مورد، برای مقایسه بامقادیرتابع، تفاضلات باید در 10^{-5} ضرب شوند.)

x	$f(x)=e^x$	تفاضلات اول	تفاضلات دوم	تفاضلات سوم
۰ر۱۰	۱ر۱۰۵۱۷			
		۱۱۱۱		
۰ر۱۱	۱ر۱۱۶۲۸		۱۱	
		۱۱۲۲		۰
۰ر۱۲	۱ر۱۲۷۵۰		۱۱	
		۱۱۳۳		۰
۰ر۱۳	۱ر۱۳۸۸۳		۱۱	
		۱۱۴۴		
۰ر۱۴	۱ر۱۵۰۲۷			

۳ـ تأثیر خطاهای گرد شده

جدول تفاضلی تابع $f(x)=e^x$: ۰ر۵(۰ر۰۵)۰ر۱۰، تا شش رقم با معنی‌را که همانند مثال قبل ساخته می‌شود، در نظر بگیرید. مثل گذشته، اندازه‌های تفاضلات، باافزایش مرتبه به‌سرعت نزول می‌کنند ولی تفاضلات مرتبهٔ سوم نامرتب هستند. همان گونه که جدول‌بندی تابـع تا هفت رقم با معنی ومحاسبهٔ تفاضل تا مرتبهٔ چهارم نشان می‌دهد این پدیده عمدتاً ناشی ازخطای گرد شده است (باتمرین ۲ ذیل مقایسه شود).

x	$f(x)=e^x$	تفاضلات اول	تفاضلات دوم	تفاضلات سوم
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷			
		۵۶۶۶		
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۲۹۱	
		۵۹۵۷		۱۵
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۳۰۶	
		۶۲۶۳		۱۴
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۳۲۰	
		۶۵۸۳		۱۸
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		۳۳۸	
		۶۹۲۱		۱۶
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۷		۳۵۴	
		۷۲۷۵		۲۰
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲		۳۷۴	
		۷۶۴۹		۱۸
۰٫۴۵	۱٫۵۶۸۳۱		۳۹۲	
		۸۰۴۱		
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲			

باوجودی که خطاهای گردشده در $f(x)$ باید درآخرین رقم با معنی کمتراز ۱/۲ باشند ولی خطاها ممکن است مجتمع شوند؛ بزرگترین خطایی که می‌تواند به‌دست آید متناظر است با :

خطای جدولی	تفاضلات اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم
+۱/۲						
	−۱					
−۱/۲		+۲				
	+۱		−۴			
+۱/۲		−۲		+۸		
	−۱		+۴		−۱۶	
−۱/۲		+۲		−۸		+۳۲
	+۱		−۴		+۱۶	
+۱/۲		−۲		+۸		
	−۱		+۴			
−۱/۲		+۲				
	+۱					
+۱/۲						

یك محك عملی نادقیق برای نوسانات مورد انتظار («سطح مزاحمت») ناشی از خطای گردشده، درجدول ذیل نشان داده شده است.

مرتبهٔ تفاضل	۱	۲	۳	۴	۵	۶
حدودخطای مورد انتظار	±۱	±۲	±۳	±۶	±۱۲	±۲۲

خود را بیازمایید

۱ـ چه عواملی فاصله‌های جدول‌بندی یك تابع را تعیین می‌کنند؟
۲ـ نام روندی که مقداری از یك تابع جدول‌بندی شده دریك نقطهٔ میانی را تعیین می‌کند چیست؟
۳ـ در یك جدول تفاضلی، چه چیز مسبب بی‌نظمی تفاضلات در بالاترین مرتبه است؟

تمرین

۱ـ برای تابع $f(x)=x^۳$ به‌ازای ۶(۱)ه $=x$، یك جدول تفاضلات بسازید.

۲ـ برای تابع $f(x)=e^x$ (که درجدول زیر تا ۷ رقم بامعنی داده شده‌است) به‌ازای ۵ر‌ه(۵ه‌ره)۱ر‌ه $=x$، یك جدول تفاضلی بسازید:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
ه‌ر۱	۱ر۱ه۵۱۷۱	ه‌ر۲۵	۱ر۲۸۴ه۲۵	ه‌ر۴	۱ر۴۹۱۸۲۵
ه‌ر۱۵	۱ر۱۶۱۸۳۴	ه‌ر۳	۱ر۳۴۹۸۵۹	ه‌ر۴۵	۱ر۵۶۸۳۱۲
ه‌ر۲	۱ر۲۲۱۴ه۳	ه‌ر۳۵	۱ر۴۱۹ه۶۸	ه‌ر۵	۱ر۶۴۸۷۲۱

گام شانزده

تفاضلات متناهی-۲

نمادهای تفاضل پیشرو، پسرو، ومرکزی

برای تنها دسته از تفاضلات متناهی که در گام قبل توضیح داده شد سه نماد مختلف وجود دارند؛ این نمادها معرف تفاضلات پیشرو، پسرو، و مرکزی هستند. هریك ازاین سه نماد را برحسب به‌اصطلاح عملگرانتقال معرفی می کنیم.

۱- عملگرانتقال E

فرض کنید $\{f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}, f_n\}$ نمایانگر مجموعه‌ای از مقادیر تابع $f(x)$ تعریف شده به‌صورت $f_j \equiv f(x_j)$ که درآن $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \cdots, n$ باشد. عملگرانتقال E با

$$Ef_j = f_{j+1}$$

تعریف می‌شود. درنتیجه:

$$E^2 f_j = E(Ef_j) = Ef_{j+1} = f_{j+2},$$

و الی آخر؛ یعنی،

$$E^k f_j = f_{j+k},$$

که درآن k عددی است‌صحیح. به‌علاوه، فرمول اخیررا برای تمام مقادیرحقیقی j و k چنان تعمیم می‌دهیم که مثلا ،

$$E^{\frac{1}{2}}f_j = f_{j+\frac{1}{2}} = f(x_0 + (j+\tfrac{1}{2})h),$$

و

$$E^{\frac{1}{2}}f_{j+\frac{1}{2}} = f_{j+1} = f(x_0 + (j+1)h).$$

۲- عملگر تفاضل پیشرو Δ

اگر عملگر تفاضل پیشرو Δ را به‌وسیلهٔ

$$\Delta = E - 1$$

تعریف کنیم نتیجه می‌گیریم

$$\Delta f_j = (E-1)f_j = Ef_j - f_j = f_{j+1} - f_j,$$

که تفاضل پیشرو مرتبهٔ اول در x_j است. به‌همین طریق،

$$\Delta^2 f_j = \Delta(\Delta f_j) = \Delta(f_{j+1} - f_j) = \Delta f_{j+1} - \Delta f_j = f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$$

تفاضل پیشرو مرتبهٔ دوم در x_j است و الی آخر. تفاضل پیشرو مرتبهٔ kام عبارت است از $\Delta^k f_j = \Delta^{k-1} f_{j+1} - \Delta^{k-1} f_j$، که درآن k عددی است صحیح.

۳- عملگر تفاضل پسرو ∇

اگر عملگر تفاضل پسرو ∇ را به‌وسیلهٔ

$$\nabla = 1 - E^{-1}$$

تعریف کنیم نتیجه می‌گیریم

$$\nabla f_j = (1 - E^{-1})f_j = f_j - E^{-1}f_j = f_j - f_{j-1},$$

که تفاضل پسرو مرتبهٔ اول در x_j است. به‌همین طریق،

$$\nabla^2 f_j = \nabla(\nabla f_j) = \nabla(f_j - f_{j-1}) = \nabla f_j - \nabla f_{j-1} = f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2},$$

تفاضل پسرو مرتبهٔ دوم در x_j است والی آخر. تفاضل پسرو مرتبهٔ k ام عبارت است از $\nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}$، که درآن k عددی است صحیح.

توجه کنید که:

$$\nabla^k f_j = \Delta^k f_{j-k} \quad \text{و} \quad \nabla f_j = \Delta f_{j-1}.$$

۴- عملگر تفاضل مرکزی δ

اگر عملگرتفاضل مرکزی δ را به‌وسیلهٔ

$$\delta = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}$$

تعریف کنیم نتیجه می گیریم

$$\delta f_j = (E^{-\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}) f_j = E^{\frac{1}{2}} f_j - E_j^{-\frac{1}{2}} f_j = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}},$$

که تفاضل مرکزی مرتبهٔ اول در x_j است. به همین طریق،

$$\delta^2 f_j = \delta(\delta f_j) = \delta(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) = f_{j+1} - 2f_j + f_{j-1},$$

تفاضل‌مرکزی مرتبهٔدوم در x_j است و الی آخر. تفاضل‌مرکزی مرتبهٔ kام عبارت است از $\delta^k f_j = \delta^{k-1} f_{j+\frac{1}{2}} - \delta^{k-1} f_{j-\frac{1}{2}}$، که درآن k عددی صحیح است.

توجه کنید که $\delta f_{j+\frac{1}{2}} = \Delta f_j = \nabla f_{j+1}$.

۵- نمایش تفاضلی

نقش تفاضلات پیشرو، مرکزی و پسرو به وسیلهٔ جـدول صفحه بعد نمایش داده می‌شود: باوجودی که‌تفاضلات پیشرو، مرکزی و پسرو دقیقاً یك مجموعه ازاعداد رانمایش می‌دهند، ولی:

i) تفاضلات پیشرو مخصوصاً درنزدیکی ابتدای یك جدول مفیدند،زیرا شامل‌مقادیر تابع جدول‌بندی شدهٔ در زیر x_j هستند؛

ii) تفاضلات مرکزی مخصوصاً دوراز دو انتهای جدول، یعنی‌جایی که‌مقادیر تابع جدول بندی شده در بالا و زیر x_j موجودند، مفید هستند؛

iii) تفاضلات پسرومخصوصاً در نزدیکی انتهای یك جدول مفیدند، چرا که شامل مقادیرتابع جدول‌بندی شده در بالای x_j هستند.

خود را بیازمایید

۱ـ تعریف عملگرانتقال چیست؟

۲ـ عملگرهای تفاضل پیشرو، پسرو ومرکزی چگونه تعریف می‌شوند؟

۳ـ چه وقت مناسب است که به‌ترتیب از نمادهای تفاضل پیشرو، پسرو و مرکزی استفاده شود؟

x	$f(x)$	تفاضل اول	دوم	سوم	چهارم
x_0	f_0				
		Δf_0			
x_1	f_1		$\Delta^2 f_0$		
		Δf_1		$\Delta^3 f_0$	
x_2	f_2		$\Delta^2 f_1$		$\Delta^4 f_0$
		Δf_2		$\Delta^3 f_1$	
x_3	f_3		$\Delta^2 f_2$		
		Δf_3			
x_4	f_4				
$\vdots$	$\vdots$				
x_{j-2}	f_{j-2}				
		$\delta f_{j-\frac{3}{2}}$			
x_{j-1}	f_{j-1}		$\delta^2 f_{j-1}$		
		$\delta f_{j-\frac{1}{2}}$		$\delta^3 f_{j-\frac{1}{2}}$	
x_j	f_j		$\delta^2 f_j$		$\delta^4 f_j$
		$\delta f_{j+\frac{1}{2}}$			
x_{j+1}	f_{j+1}		$\delta^2 f_{j+1}$	$\delta^3 f_{j+\frac{1}{2}}$	
		$\delta f_{j+\frac{3}{2}}$			
x_{j+2}	f_{j+2}				
$\vdots$	$\vdots$				
x_{n-4}	f_{n-4}				
		∇f_{n-3}			
x_{n-3}	f_{n-3}		$\nabla^2 f_{n-2}$		
		∇f_{n-2}		$\nabla^3 f_{n-1}$	
x_{n-2}	f_{n-2}		$\nabla^2 f_{n-1}$		$\nabla^4 f_n$
		∇f_{n-1}		$\nabla^3 f_n$	
x_{n-1}	f_{n-1}		$\nabla^2 f_n$		
		∇f_n			
x_n	f_n				

تمرین

۱ـ جدول تفاضلی $f(x)=e^x$ (در بخش ۳ از گام ۱۵) را به‌ازای $x=0.1(0.05)0.5$، تا پنج رقم بامعنی مجدداً درنظر بگیرید و عبارات زیر را (بافرض $x_0=0.1$) تعیین کنید:

i) Δf_2، $\Delta^2 f_2$، $\Delta^3 f_2$، $\Delta^4 f_2$

ii) ∇f_6، $\nabla^2 f_6$، $\nabla^3 f_6$، $\nabla^4 f_6$

iii) $\delta^2 f_4$، $\delta^4 f_4$

iv) $\Delta^2 f_1$، $\delta^2 f_2$، $\nabla^2 f_3$

v) $\Delta^3 f_3$، $\nabla^3 f_6$، $\delta^3 f_{\frac{9}{2}}$.

۲ـ ثابت کنید که

i) $Ex_j=x_{j+1}$

ii) $\Delta^3 f_j=f_{j+3}-3f_{j+2}+3f_{j+1}-f_j$

iii) $\nabla^3 f_j=f_j-3f_{j-1}+3f_{j-2}-f_{j-3}$

iv) $\delta^3 f_j=f_{j+\frac{3}{2}}-3f_{j+\frac{1}{2}}+3f_{j-\frac{1}{2}}-f_{j-\frac{3}{2}}$.

گام هفده

تفاضلات متناهی-۳

چند جمله‌ایها

چون تقریبات چند جمله‌ای در بسیاری از زمینه‌های آنالیزعددی به‌کار می‌روند بررسی آثار تفاضل گیری چند جمله‌ایها مهم است.

۱ـ تفاضلات متناهی یك چند جمله‌ای

تفاضلات متناهی یك چند جمله‌ای درجهٔ nم چون

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

راکه برای نقاط متساوی‌الفاصله بافاصله جدولی h جدول بندی شده‌است درنظرمی گیریم.

قضیه : تفاضل nم یك چند جمله‌ای از درجهٔ n یك عدد ثابت متناسب با h^n است و تفاضلات از مراتب بالاتر صفرند.

برهان: با حذف اندیس j x_j داریم:

$$\begin{aligned}\Delta f(x)&=f(x+h)-f(x)\\&=a_n[(x+h)^n-x^n]+a_{n-1}[(x+h)^{n-1}-x^{n-1}]+\cdots\\&\qquad+a_1[(x+h)-x]\end{aligned}$$

$$= a_n n x^{n-1} h + (\text{یك چند جمله‌ای از درجهٔ } n-2).$$

$$\Delta^2 f(x) = a_n n h[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}] + \cdots$$

$$= a_n n(n-1) x^{n-2} h^2 + (\text{یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ } n-3)$$

. . . .

$$\Delta^n f(x) = a_n n! h^n = \text{ثابت}$$

$$\Delta^{n+1} f(x) = 0.$$

درضمن دانشجوممکن است به خاطر آورد که درحساب دیفرانسیل نمو

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

به‌مشتق $f(x)$ درنقطهٔ x مربوط می‌شود.

مثال

$f(x) = x^3$ به‌ازای ۵٫۵(۰٫۱)۵٫۰ $= x$.

x	$f(x)=x^3$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۵٫۰	۱۲۵٫۰۰۰				
		۷۶۵۱			
۵٫۱	۱۳۲٫۶۵۱		۳۰۶		
		۷۹۵۷		۶	
۵٫۲	۱۴۰٫۶۰۸		۳۱۲		۰
		۸۲۶۹		۶	
۵٫۳	۱۴۸٫۸۷۷		۳۱۸		۰
		۸۵۸۷		۶	
۵٫۴	۱۵۷٫۴۶۴		۳۲۴		
		۸۹۱۱			
۵٫۵	۱۶۶٫۳۷۵				

دراین حالت $a_n=1$، $n=3$، $h=0.1$، ازآنجا،

$$\Delta^3 f(x)=1\times 3!\times(0.1)^3=0.006$$

توجه کنید که ممکن‌است خطای گردشده مزاحم شود: مثلا، جدول بندی $f(x)=x^3$ به ازای ۵٫۰(۰٫۱)۵٫۵، گردشده تا ۲ رقم اعشار، را در نظر بگیرید.

x	$f(x)=x^3$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۵٫۰	۱۲۵٫۰۰				
		۷۶۵			
۵٫۱	۱۳۲٫۶۵		۳۱		
		۷۹۶		۰	
۵٫۲	۱۴۰٫۶۱		۳۱		۰
		۸۲۷		۰	
۵٫۳	۱۴۸٫۸۸		۳۱		۳
		۸۵۸		۳	
۵٫۴	۱۵۷٫۴۶		۳۴		
		۸۹۲			
۵٫۵	۱۶۶٫۳۸				

۲- تقریب یك تابع به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای

هروقت‌که تفاضلات ازمراتب بالای یك جدول (با درنظر گرفتن خطای گردشده) کوچك شوند تابع نمایش داده شده‌را می‌توان به‌خوبی به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای تقریب کرد. مثلا جدول تفاضلی $f(x)=e^x$ به‌ازای، $x=$ ۰٫۱(۰٫۰۵)۰٫۵ تا شش رقم با معنی را مجدداً بررسی کنید.

x	$f(x)=e^x$	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$	$\Delta^۴$
۰٫۱	۱٫۱۰۵۱۷				
		۵۶۶۶			
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۲۹۱		
		۵۹۵۷		۱۵	
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰		۳۰۶		۱−
		۶۲۶۳		۱۴	
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۳۲۰		۴
		۶۵۸۳		۱۸	
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۶		۳۳۸		۲−
		۶۹۲۱		۱۶	
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۷		۳۵۴		۴
		۷۲۷۵		۲۰	
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲		۳۷۴		۲−
		۷۶۴۹		۱۸	
۰٫۴۵	۱٫۵۶۸۳۱		۳۹۲		
		۸۰۴۱			
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲				

چون تخمین خطای گردشده در $\Delta^۳$ برابر ۳± (ر. ك. ص ۸۱) است، می گوییم که تفاضلات سوم درحد خطای گردشده ثابت هستند ونتیجه می گیریم که برای e^x، روی حوزهٔ $۰٫۱ < x < ۰٫۵$ و بافواصل ۰٫۰۵، یك تقریب درجهٔ سوم مناسب است. بدین‌ترتیب، از تفاضلات می‌توان استفاده کرد وتشخیص داد که چند جمله‌ای تقریب از درجهٔ چند (درصورت امکان) مناسب است.

مثالی که درآن تقریب با چند جمله‌ای نامناسب است عبارت است از $f(x)=۱۰^x$ به‌ازای $x=۰(۱)۴$، که داریم

x	$f(x)$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۰	۱				
		۹			
۱	۱۰		۸۱		
		۹۰		۷۲۹	
۲	۱۰۰		۸۱۰		۶۵۶۱
		۹۰۰		۷۲۹۰	
۳	۱۰۰۰		۸۱۰۰		
		۹۰۰۰			
۴	۱۰۰۰۰				

با وجودی که $f(x)=10^x$ «همـوار» است فاصلهٔ جـدولی بزرگ $(h=1)$، تفاضلات متناهی‌مراتب بالای بزرگی‌را به‌دست می‌دهد. همچنین باید متذکرشد که توابعی هم وجود دارند که به هیچ‌وجه، حداقل دریك همسایگی، نمی‌توانند به‌طور مفیدی جدول‌بندی شوند. مثلا ، $f(x)=\sin(1/x)$ در نزدیکی مبدأ $x=0$ از این نوع است. با این وجود، این حالات نسبتاً استثنایی هستند.

بالاخره، متذکرمی‌شویم که در رابطه با استفادهٔ گسترده از روشهای تفاضل متناهی، تقریب یك تابع به وسیلهٔ یك چند جمله‌ای اساسی است.

خود رابیازمایید

۱ــ دربارهٔ تفاضلات (دقیق) از مراتب بالای یك چند جمله‌ای چه می‌توان گفت ؟

۲ــ تأثیرخطای گردشده برتفاضلات ازمراتب بالای یك چند جمله‌ای چیست؟

۳ــ چه وقت می‌توان یك تابع را با یك چند جمله‌ای تقریب کرد؟

تمرین

۱ــ درحالتهـای زیر یك جـدول تفاضلی برای چنـد جمـله‌ای $f(x)=x^4$ به ازای $x=0(0.1)1$ بسازید:

i) مقادیر $f(x)$ دقیق هستند؛

ii) مقادیر $f(x)$ تا سه رقم اعشار گرد شده‌اند.

خطاهای گرد شدهٔ تفاضل چهارم را با تخمین ۶± مقایسه کنید.

۲ــ درجهٔ چند جمله‌ایی را پیدا کنید که داده‌های جدول زیر را برازش می‌کند.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰	۳	۳	۲۴
۱	۲	۴	۵۹
۲	۷	۵	۱۱۸

گام هیجده

تفاضلات متناهی-۴

کشف و تصحیح اشتباهات

دیدیم که خطاهای گرد شده سبب نوسانات کوچکی در تفاضلات می‌شوند. اشتباهات، نوسانات بسیار بزرگتری را تولید می‌کنند، و در نتیجه به‌دست آوردن تفاضلات متناهی، امتحان دقیقی است از توابع جدول بندی شده. توصیه می‌شود که این امتحان درمورد هر جدول حاصل ازمحاسبات به‌کار گرفته شود.

۱- پرهٔ ناشی از یك اشتباه

خطایی چون ε در مقدار $f(x)$ یا در یك تفاضل به‌صورت زیر منتشر می‌شود:

۰		۰		۰		ε
	۰		۰		ε	
۰		۰		ε		−۶ε
	۰		ε		−۵ε	
۰		ε		−۴ε		۱۵ε
	ε		−۳ε		۱۰ε	
ε		−۲ε		۶ε		−۲۰ε
	−ε		۳ε		−۱۰ε	
۰		ε		−۴ε		۱۵ε
	۰		−ε		۵ε	
۰		۰		ε		−۶ε
	۰		۰		−ε	
۰		۰		۰		ε

یك جفت خطای مجاور به‌صورت زیر منتشر می‌شود:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & & 0 & & \varepsilon_1 \\
& 0 & & \varepsilon_1 & \\
0 & & \varepsilon_1 & & -4\varepsilon_1+\varepsilon_2 \\
& \varepsilon_1 & & -3\varepsilon_1+\varepsilon_2 & \\
\varepsilon_1 & & -2\varepsilon_1+\varepsilon_2 & & 6\varepsilon_1-4\varepsilon_2 \\
& \varepsilon_2-\varepsilon_1 & & 3\varepsilon_1-3\varepsilon_2 & \\
\varepsilon_2 & & \varepsilon_1-2\varepsilon_2 & & -4\varepsilon_1+6\varepsilon_2 \\
& -\varepsilon_2 & & -\varepsilon_1+3\varepsilon_2 & \\
0 & & \varepsilon_2 & & \varepsilon_1-4\varepsilon_2 \\
& 0 & & -\varepsilon_2 & \\
0 & & 0 & & \varepsilon_2
\end{array}
$$

درهرحالت یك «پرهٔ خطا» وجود داردکه محل اشتباه‌را نشان می‌دهد. دراولین پره، ضرایب یك قالب آشنا تشکیل می‌دهند: و آن صرفنظر از علامتهای منها، مثلث پاسکال، یعنی ضرایب دوجمله‌ای است.

به هرحال عملا می‌توان جای اشتباهات را یافت و آنها را تصحیح کرد. اگر تابع، در فاصله‌ای که به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای به خوبی نمایش داده می‌شود، به‌طور صحیح جدول‌بندی شده باشد انتظارداریم که (سرانجام) به‌ستونی‌ازتفاضلات تقریباً ثابت برسیم. اگر در عوض به ستونی مشتمل بر دنباله‌ای از تفاضلات با علامتهای متناوب برسیم که به‌مقدار قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از تفاضلات دیگردرهمان ستون باشند، به‌وجود یك یا چند اشتباه مظنون می‌شویم و اطلاعات درمورد پره‌های خطا را جهت تعیین محل و تصحیح آنها به‌کار می‌بریم (بامثالهای زیرمقایسه شود).

۲- چند مثال

i) درجدول‌بندی ذیل‌که مربوط به $f(x)=x^3$ به‌ازای $x=5.0(0.1)6.0$ است، در $x=5.5$ پرهٔ خطا یك اشتباه را نشان می‌دهد.

این اشتباه با نوسانات موجود در Δ^3 و Δ^4 آشکار می‌شود. چون تابع از درجهٔ سوم است می‌توان دنباله‌های $\{-18,\ 72,\ -108,\ 72,\ -18\}$ و

$$\{-12,\ 60,\ -48,\ 24\} \quad \text{یا} \quad \{\varepsilon,\ -4\varepsilon,\ 6\varepsilon,\ -4\varepsilon,\ \varepsilon\}$$

$$\{۶+\varepsilon,\ ۶-۳\varepsilon,\ ۶+۳\varepsilon,\ ۶-\varepsilon\}$$ و

را باهم مقایسه کرد. ازهر دو طریق نتیجه می گیریم که $\varepsilon = -۱۸$ و $f(۵ر۵) = ۱۶۶ر۳۷۵$.
این اشتباه ناشی از ترانهادن ارقام مجاور (ر. ک. گام۲) است.

x	$f(x)=x^{۳}$	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$	$\Delta^{۴}$
۵ر۰	۱۲۵ر۰۰۰				
		۷۶۵۱			
۵ر۱	۱۳۲ر۶۵۱		۳۰۶		
		۷۹۵۷		۶	
۵ر۲	۱۴۰ر۶۰۸		۳۱۲		۰
		۸۲۶۹		۶	
۵ر۳	۱۴۸ر۸۷۷		۳۱۸		−۱۸
		۸۵۸۷		−۱۲	
۵ر۴	۱۵۷ر۴۶۴		۳۰۶		۷۲
		۸۸۹۳		۶۰	
۵ر۵	۱۶۶ر۳۵۷		۳۶۶		−۱۰۸
		۹۲۵۹		−۴۸	
۵ر۶	۱۷۵ر۶۱۶		۳۱۸		۷۲
		۹۵۷۷		۲۴	
۵ر۷	۱۸۵ر۱۹۳		۳۴۲		−۱۸
		۹۹۱۹		۶	
۵ر۸	۱۹۵ر۱۱۲		۳۴۸		۰
		۱۰۲۶۷		۶	
۵ر۹	۲۰۵ر۳۷۹		۳۵۴		
		۱۰۶۲۱			
۶ر۰	۲۱۶ر۰۰۰				

حال فرض کنید اشتباه ترانهـادی را تصحیح بکنیم ولی درجـدول تفاضلی حاصل مرتکب اشتباه دیگری بشویم، به‌طوری که

x	$f(x)=x^{3}$	Δ	Δ^{2}	Δ^{3}	Δ^{4}
۵ر۰	۱۲۵ر۰۰۰				
		۷۶۵۱			
۵ر۱	۱۳۲ر۶۵۱		۳۰۶		
		۷۹۵۷		۶	
۵ر۲	۱۴۰ر۶۰۸		۳۱۲		۰
		۸۲۶۹		۶	
۵ر۳	۱۴۸ر۸۷۷		۳۱۸		۰
		۸۵۸۷		۶	
۵ر۴	۱۵۷ر۴۶۴		۳۲۴		−۲۷
		۸۹۱۱		−۲۱	
۵ر۵	۱۶۶ر۳۷۵		۳۰۳		۸۱
		۹۲۱۴		۶۰	
۵ر۶	۱۷۵ر۶۱۶		۳۶۳		−۸۱
		۹۵۷۷		−۲۱	
۵ر۷	۱۸۵ر۱۹۳		۳۲۲		۲۷
		۹۹۱۹		۶	
۵ر۸	۱۹۵ر۱۱۲		۳۴۸		۰
		۱۰۲۶۷		۶	
۵ر۹	۲۰۵ر۳۷۹		۳۵۴		
		۱۰۶۲۱			
۶ر۰	۲۱۶ر۰۰۰				

x	$f(x)=\log_{10} x$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^3 بعدازاولین تصحیح	Δ^3 بعدازدومین تصحیح
۱٫۰	۰٫۰۰۰۰					
		۴۱۴				
۱٫۱	۰٫۰۴۱۴		−۳۶			
		۳۷۸		۵	۵	۵
۱٫۲	۰٫۰۷۹۲		−۳۱			
		۳۴۷		−۵۴	۶	۶
۱٫۳	۰٫۱۱۳۹		−۸۵			
		۲۶۲		۱۸۳	۳	۳
۱٫۴	۰٫۱۴۰۱		+۹۸			
		۳۶۰		−۱۷۸	۲	۲
۱٫۵	۰٫۱۷۶۱		−۸۰			
		۲۸۰		۹۳	۳۳	۳
۱٫۶	۰٫۲۰۴۱		۱۳			
		۲۹۳		−۸۷	−۸۷	۳
۱٫۷	۰٫۲۳۳۴		−۷۴			
		۲۱۹		۹۰	۹۰	۰
۱٫۸	۰٫۲۵۵۳		۱۶			
		۲۳۵		−۲۹	−۲۹	۱
۱٫۹	۰٫۲۷۸۸		−۱۳			
		۲۲۲		۳	۳	۳
۲٫۰	۰٫۳۰۱۰		−۱۰			
		۲۱۲		۰	۰	۰
۲٫۱	۰٫۳۲۲۲		−۱۰			
		۲۰۲		۱	۱	۱
۲٫۲	۰٫۳۴۲۴		−۹			
		۱۹۳		۱	۱	۱
۲۰۳	۰٫۳۶۱۷		−۸			
		۱۸۵				
۲٫۴	۰٫۳۸۰۲					

مجدداً پره بر اشتباهی به‌اندازهٔ $\varepsilon=-۲۷$، (با دنبالهٔ $\{-۲۷, ۸۱, -۸۱, ۲۷\}$ مقایسه شود)، دلالت دارد که ناشی از وجود درایهٔ ۹۲۱۴ به‌جای درایهٔ صحیح ۹۲۴۱ است. دانشجو در صورت تمایل می‌تواند جدول تفاضلی صحیح را کامل کند.

ii) در جدول‌بندی صفحهٔ قبل در مورد $f(x)=\log_{۱۰}x$ به ازای $x=۱٫۰(۰٫۱)۲٫۴$ دو اشتباه کشف و تصحیح می‌شوند.

نوسانات در $\Delta^۲$ ما را مظنون می‌کند و ظن ما با رفتار $\Delta^۳$ تأیید می‌شود. دنبالهٔ تفاضلات $\{-۵۴, ۱۸۳, -۱۷۸, ۹۳, -۸۷, ۹۰, -۲۹\}$ علامت‌متناوب دارند و جملگی از دیگر تفاضلات مرتبهٔ سوم بسیار بزرگترند. ما انتظار پیدا کردن قالب $\varepsilon, -۳\varepsilon, ۳\varepsilon, -\varepsilon$ را داریم، و لذا نتیجه می‌گیریم که اشتباهاتی در $f(۱٫۴)$ و $f(۱٫۷)$ موجودند.

اگر فرض کنیم که $۰٫۱۴۰۱=f(۱٫۴)+\varepsilon_۱$ و $۰٫۲۳۳۴=f(۱٫۷)+\varepsilon_۲$ انتظار خواهیم داشت که خطاهای منتشر شدهٔ در $\Delta^۳$ عبارت باشند از $\{\varepsilon_۱, -۳\varepsilon_۱, ۳\varepsilon_۱, -\varepsilon_۱+\varepsilon_۲, -۳\varepsilon_۲, ۳\varepsilon_۲, -\varepsilon_۲\}$. با فرض اینکه تفاضلات مرتبهٔ سوم تقریباً ثابت هستند، از $۱۸۳\approx C-۳\varepsilon_۱$ و $-۱۷۸\approx C+۳\varepsilon_۱$ می‌توان جهت تخمین

$$\varepsilon_۱\approx(-۱۸۳-۱۷۸)/۶\approx-۶۰$$

استفاده کرد. نتایج این تصحیح در صفحهٔ قبل نشان داده شده‌اند. به‌همین ترتیب، $-۸۷\approx C-۳\varepsilon_۲$ و $۹۰\approx C+۳\varepsilon_۲$ پیشنهاد می‌دهند که $\varepsilon_۲\approx(۸۷+۹۰)/۶\approx ۳۰$.
بنابراین مقادیر صحیح پیشنهاد شده، از

$$f(۱٫۴)+\varepsilon_۱=۰٫۱۴۰۱$$

$$f(۱٫۷)+\varepsilon_۲=۰٫۲۳۳۴$$

به‌دست می‌آیند. یعنی،

$$f(۱٫۴)=۰٫۱۴۰۱+۰٫۰۰۶۰=۰٫۱۴۶۱$$

$$f(۱٫۷)=۰٫۲۳۳۴-۰٫۰۰۳۰=۰٫۲۳۰۴.$$

بعد از اینکه تصحیح دوم انجام شد، تفاضلات مرتبهٔ سوم بسیار مناسبتر به‌نظر می‌آیند. توجه کنید که به‌هنگام تخمین ε ترجیح می‌دهیم که در ستون مربوط از درایه‌های بزرگتر استفاده کنیم تا تأثیر تغییرات اصلی ناشی از گرد کردن، در تفاضلات مینیمم شوند.

خود را بیازمایید

۱ــ چگونه می‌توان اشتباهات موجود در جداول را یافت؟

۲ــ روی یك تابع جدول‌بندی شده به‌وسیلهٔ محاسبه چه امتحانی باید انجام گیرد؟

۳ـ اشتباهات جداول چگونه تصحیح می‌شوند ؟

تمرین

۱ـ جدول زیر از مقادیر دقیق تابع درجهٔ سومی چون $f(x)$ ، شامل یك اشتباه است. درایهٔ غلط را پیدا وآن را تصحیح کنید.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
۲	۳٫۰۶۷۱	۵	۱۳٫۳۱۸۴	۸	۲۴٫۲۵۷۳	۱۱	۳۵٫۹۰۰۰
۳	۶٫۴۰۸۸	۶	۱۶٫۸۸۷۵	۹	۲۸٫۰۵۹۲	۱۲	۳۹٫۹۴۰۱
۴	۹٫۸۲۵۷	۷	۲۰٫۵۳۶۶	۱۰	۳۱٫۹۳۹۹	۱۳	۴۴٫۰۶۰۸

۲ـ اشتباهات جدول زیررا پیدا وتصحیح کنید.

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰	۱٫۳۲۴۶	۴	۱٫۶۳۳۲	۸	۱٫۹۲۸۲
۱	۱٫۴۰۳۱	۵	۱٫۷۰۸۲	۹	۲٫۰۰۰۰
۲	۱٫۴۸۰۷	۶	۱٫۷۸۲۳	۱۰	۲٫۰۷۱۱
۳	۱٫۵۵۴۷	۷	۱٫۸۵۷۷	۱۱	۲٫۱۴۱۴

گام نوزده

درونیابی-۱

درونیابی خطی و درجهٔ دوم

درونیابی عبارت است از «هنر درك معانی مستتر در یك جدول» وآن را می‌توان به‌عنوان حالت خاصی از روند عمومی برازش منحنی در نظر گرفت (ر. ك. گام ۲۵). به‌عبارت دقیقتر، درونیابی روندی است که به‌وسیلهٔ آن مقادیرغیرموجود درجدول یك تابع جدولی برآورد می‌شوند، البته بااین فرض که تابع، بین نقاط موجود درجدول آن قدر به‌آرامی تغییر کند که بتواند بایك چند جمله‌ای ازدرجهٔ نسبتاً پایین تقریب شود.

درونیابی درآنالیزعددی فعلابه‌اندازهٔ زمان‌گذشته‌اهمیت ندارد، زیرا کامپیوترهای خودکار (ومحاسبهای الکترونی‌رومیزی باکلیدهای تابعی) دردسترس هستند، وغالباًمقادیر یك تابع را به‌آسانی به‌وسیلهٔ الگوریتم (احتمالا به‌وسیلهٔ یك برنامه فرعی استاندارد) به‌دست می‌دهند. بااین وجود:

i) درونیابی برای توابعی‌که تنها به‌صورت جداول معلومند حایزاهمیت است؛

ii) درونیابی برای معرفی‌کاربرد وسیعتر تفاضلات متناهی به‌کار می‌آید.

درگام ۱۷، مشاهده کردیم که هرگاه تفاضلات مرتبهٔ kام ثابت باشند (درحدود نوسانات خطای گرد شده)، تابع جدولی موردنظررا می‌توان بایك چند جمله‌ای درجهٔ k تقریب کرد. درونیابی‌خطی ودرجهٔ دوم به‌ترتیب متناظر باحالات $k = ۱$ و $k = ۲$ هستند.

۱- درونیابی خطی

وقتی یك تابع چنان‌کند تغییر کندکه تفاضلات مرتبهٔ اول‌آن ثابت باشند می‌توان‌آن را با یك خط مستقیم بین نقاط جدولی مجاور به دقت تقریب کرد. این مطلب، مفهوم اساسی

درونیابی خطی است که درمواقع استفادهٔ عادی از جدول لگاریتم و جدول توابع مثلثاتی به کار می‌رود.

در شکل ۱۰، دو نقطهٔ $(x_j,\ f_j)$ و $(x_{j+1},\ f_{j+1})$ از منحنی نمایش تابع با یك خط مستقیم به‌هم وصل شده‌اند. هر x بین x_j و x_{j+1} را می‌توان به‌وسیلهٔ مقداری چون θ به‌صورت زیرمشخص کرد:

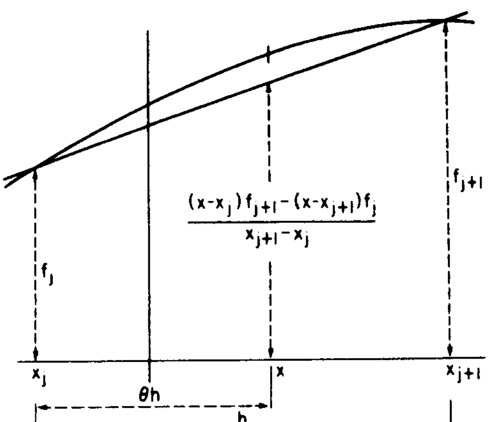
$$x-x_j=\theta(x_{j+1}-x_j)\equiv\theta h, \quad 0<\theta<1.$$

اگر $f(x)$ دراین بازه واقعاً به‌کندی تغییر کند، مقدار تابع در x به‌وسیلهٔ عرض خط‌مستقیم در x تقریب می‌شود. با توجه به‌هندسهٔ مقدماتی داریم:

$$\theta=\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}\approx\frac{f(x)-f_j}{f_{j+1}-f_j},$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} f(x)&\approx f_j+\theta\,(f_{j+1}-f_j)\\ &=f_j+\theta\Delta f_j\\ &=f_j+\theta\nabla f_{j+1}\\ &=f_j+\theta\,\delta f_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$



شکل ۱۰. درونیابی خطی

به‌بیان تحلیلی، $f(x)$ را به‌وسیلهٔ

$$P_1(x)=f_j+\frac{x-x_j}{x_{j+1}-x_j}(f_{j+1}-f_j),$$

که درآن $P_1(x)$ یك تابع خطی از x است و درشرایط

$$P_1(x_j)=f_j=f(x_j),\quad P_1(x_{j+1})=f_{j+1}=f(x_{j+1})$$

صدق می کند، تقریب کرده‌ایم.

مثال

از یك جدول $4D$ مربوط به e^{-x}، جدول تفاضلی زیـر را به دست می‌آوریم. تفاضلات

x	$f(x)$	Δ	Δ^2
۰٫۹۰	۰٫۴۰۶۶		
		−۴۱	
۰٫۹۱	۰٫۴۰۲۵		۱
		−۴۰	
۰٫۹۲	۰٫۳۹۸۵		۱
		−۳۹	
۰٫۹۳	۰٫۳۹۴۶		−۱
		−۴۰	
۰٫۹۴	۰٫۳۹۰۶		۱
		−۳۹	
۰٫۹۵	۰٫۳۸۶۷		۱
		−۳۸	
۰٫۹۶	۰٫۳۸۲۹		۰
		−۳۸	
۰٫۹۷	۰٫۳۷۹۱		۰
		−۳۸	
۰٫۹۸	۰٫۳۷۵۳		۱
		−۳۷	
۰٫۹۹	۰٫۳۷۱۶		

مرتبهٔ اول به‌طورموضعی تقریباً ثابت هستند، و درنتیجه، این جدول برای درونیابی خطی مناسب است. مثلا:

$$f(0.934)=0.3946+\frac{4}{10}(-0.0040)=0.3930\,.$$

۲- درونیابی درجهٔ دوم

به‌طوری که اشاره شد، درونیابی خطی تنها برای مقادیرجدولی نزدیك به‌هم توابعی که به کندی تغییر می‌کنند، مناسب است. ساده‌ترین روند دیگر درونیابی درجهٔ دوم است که بریك چند جمله‌ای تقریبی از درجهٔ ۲ استوار است؛ می‌توان انتظار داشت که این تقریب برای توابع با تغییرات بزرگتر،ازدقت بیشتری برخوردار باشد.

با معلوم بودن سه نقطهٔ مجاور x_j ، $x_{j+1}=x_j+h$ و $x_{j+2}=x_j+2h$ فرض می‌کنیم $f(x)$ به‌وسیلهٔ

$$P_2(x)=a+b(x-x_j)+c(x-x_j)(x-x_{j+1})$$

که درآن a ، b و c چنان انتخاب شده‌اند که

$$P_2(x_{j+k})=f(x_{j+k})=f_{j+k},\qquad k=0,\ 1,\ 2$$

تقریب شده باشد. بدین ترتیب:

$$P_2(x_j)=a=f_j$$
$$P_2(x_{j+1})=a+bh=f_{j+1}$$
$$P_2(x_{j+2})=a+2bh+2ch^2=f_{j+2},$$

و از اینجا

$$a=f_j$$
$$b=(f_{j+1}-a)/h=(f_{j+1}-f_j)/h=\Delta f_j/h$$
$$c=(f_{j+2}-2bh-a)/(2h^2)=(f_{j+2}-2f_{j+1}+f_j)/(2h^2)$$
$$=\Delta^2 f_j/(2h^2).$$

با قراردادن $x=x_j+\theta h$، فرمول درونیابی درجهٔ دوم زیررا به‌دست می‌آوریم

$$f(x_j+\theta h)\approx f_j+\theta\Delta f_j+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2 f_j.$$

فوراً متوجه می‌شویم که در فرمول درونیابی درجهٔ دوم، یك جملهٔ مرتبهٔ دوم (شامل $\Delta^2 f_j$) وجود دارد که در فرمول درونیابی خطی وجود نداشت.

مثال

برای مقدار $f(۰٫۹۳۴)$ حاصل از به کار گیری درونیابی خطی فوق، تصحیح مرتبهٔ دوم را تعیین کنید.

تصحیح مرتبهٔ دوم موردنظر عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۱۰}\times\left(-\frac{۶}{۱۰}\right)(+۰٫۰۰۰۱)=-\frac{۰٫۰۰۲۴}{۲۰۰},$$

درنتیجه، از فرمول درونیابی درجهٔ دوم داریم

$$f(۰٫۹۳۴)=۰٫۳۹۴۶-\frac{۰٫۰۱۶۰}{۱۰}-\frac{۰٫۰۰۲۴}{۲۰۰}=۰٫۳۹۳۰۰$$

تصحیح $-\frac{۰٫۰۰۲۴}{۲۰۰}$ قابل اغماض است.

خود را بیازمایید

۱ـ روند به‌دست‌آوردن یك مقدار غیرجدولی از یك تابع را چه می‌نامند؟

۲ـ چه موقع درونیابی خطی مناسب است؟

۳ـ چه موقع درونیابی درجهٔ دوم لازم ومناسب است؟

تمرین

۱ـ درایه‌های یك جدول $\cos x$ عبارتند از:

	$۰'$	$۱۰'$	$۲۰'$	$۳۰'$	$۴۰'$	$۵۰'$
۸۰°	۰٫۱۷۳۶	۰٫۱۷۰۸	۰٫۱۶۷۹	۰٫۱۶۵۰	۰٫۱۶۲۲	۰٫۱۵۹۳

مطلوب است مقدار $\cos ۸۰^\circ ۳۵'$ از (i) درونیابی خطی (ii) درونیابی درجهٔ دوم.

۲ـ درایه‌های یک جدول $\tan x$ عبارتند از:

	۰′	۱۰′	۲۰′	۳۰′	۴۰′	۵۰′
۸۰°	۵٫۶۷۱	۵٫۷۶۹	۵٫۸۷۱	۵٫۹۷۶	۶٫۰۸۴	۶٫۱۹۷

تعیین کنید که آیا می‌توان درونیابی خطی یا درجهٔ دوم را به کار برد؟ اگر چنین باشد، مقدار $\tan 80^\circ\ 35'$ را به‌دست آورید.

گام بیست

درونیابی -۲

دستورهای درونیابی نیوتن

فرمولهای درونیابیخطی ودرجهٔ دوم، مبتنی برتقریب چندجمله‌ای درجهٔ اول ودوم هستند. نیوتن برای جدولهای بافواصل ثابت h، فرمولهای درونیابی تفاضلی پیشرو و پسروکلی (متناظر با تقریب به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ n) را به‌دست‌آورده است.

۱- دستور تفاضل پیشرو نیوتن

نقاط x_j ، x_j+h، $x_j+۲h$، . . . را در نظر بگیرید و به‌خاطر بیاوریدکه اگر θ عدد حقیقی دلخواهی باشد

$$Ef_j=f_{j+۱}=f(x_j+h), \qquad E^\theta f_j=f_{j+\theta}=f(x_j+\theta h).$$

به طور صوری، (چون $\Delta=E-۱$) داریم

$$\begin{aligned}f(x_j+\theta h)&=E^\theta f_j\\&=(۱+\Delta)^\theta f_j\\&=[۱+\theta\Delta+\tfrac{۱}{۲}\theta(\theta-۱)\Delta^۲+\frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\Delta^۳+\cdots]f_j,\end{aligned}$$

و این دستور تفاضل پیشرو نیوتن است. از بریدن این دستور در مرتبهٔ اول ودوم،به‌ترتیب فرمولهای درونیابی (پیشرو) خطی و درجهٔ دوم به‌دست می‌آینـد. اگرآن را در مرتبهٔ nام ببریم، داریم

$$f(x_j+\theta h)$$
$$\approx[1+\theta\Delta+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2+\cdots+\frac{\theta(\theta-1)\cdots(\theta-n+1)}{n!}\Delta^n]f_j,$$

که تقریبی مبتنی برمقادیر f_j، f_{j+1}، . . . ، f_{j+n} است. این تقریب دقیق (درحد خطای گردشده) خواهد بود هرگاه

$$\Delta^{n+k}f_j=0, \qquad k=1,2,\cdots$$

که محقق است اگر $f(x)$ یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ n باشد.

۲ـ دستور تفاضل پسرو نیوتن

به‌طورصوری (چون $\nabla=1-E^{-1}$) داریم

$$f(x_j+\theta h)=E^\theta f_j$$
$$=(1-\nabla)^{-\theta}f_j$$
$$=[1+\theta\nabla+\frac{1}{2}\theta(\theta+1)\nabla^2+\frac{\theta(\theta+1)(\theta+2)}{3!}\nabla^3+\cdots]f_j,$$

و این دستورتفاضل پسرونیوتن است. از بریدن این دستور در مـرتبهٔ اول ودوم، به ترتیب فرمـولهای درونیـابی (پسرو) خطی ودرجهٔ دوم به‌دست می‌آیند. تقریب مبتنی برمقادیر f_j، f_{j-1}، . . . ، f_{j-n} عبارت است از

$$f(x_j+\theta h)$$
$$\approx[1+\theta\nabla+\frac{1}{2}\theta(\theta+1)\nabla^2+\cdots+\frac{\theta(\theta+1)\cdots(\theta+n-1)}{n!}\nabla^n]f_j.$$

۳ـ استفاده از دستورهای درونیابی نیوتن

دستورهای تفـاضل پسرو و پیشرو نیوتن به‌ترتیب برای استفاده در ابتدا و در انتهای یك جدول تفاضلی بسیار مناسبند. (بقیهٔ دستورهایی که ازتفـاضلات مرکزی استفاده می‌کنند، ممکن است برای جاهای دیگرمناسبتر باشند.) به‌عنوان مثال، جدول تفاضلی زیرمربوط به $f(x)=\sin x$ برای $x=0°(10°)50°$ را درنظر بگیرید:

x°	$f(x)=\sin x$	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$	$\Delta^۴$	$\Delta^۵$
۰	۰٫۰۰۰۰					
		۱۷۳۶				
۱۰	۰٫۱۷۳۶		−۵۲			
		۱۶۸۴		−۵۲		
۲۰	۰٫۳۴۲۰		−۱۰۴		۴	
		۱۵۸۰		−۴۸		۰
۳۰	۰٫۵۰۰۰		−۱۵۲		۴	
		۱۴۲۸		−۴۴		
۴۰	۰٫۶۴۲۸		−۱۹۶			
		۱۲۳۲				
۵۰	۰٫۷۶۶۰					

چون تفاضلات مرتبهٔ چهارم ثابت هستند، نتیجه می گیریم که یك تقریب درجهٔ چهارم مناسب است. (تفاضلات مرتبهٔ سوم درحد خطای گردشدهٔ منتظره ،کاملا ثابت نیستند، و پیش بینی می کنیم که یك تقریب درجهٔ سوم به‌قدرکافی خوب نباشد.) برای تعیین $\sin ۵^\circ$ ازاین جدول، دستورتفاضل پیشرو نیوتن (تا مرتبهٔ چهارم) را به‌کارمی بریم؛ لذا،باانتخاب $x_j = ۰$، داریم

$$\theta=\frac{۵-۰}{۱۰}=\frac{۱}{۲} \quad (h=۱۰)$$

و

$$\sin ۵^\circ=\sin ۰^\circ+\frac{۱}{۲}(۰٫۱۷۳۶)+\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)(-۰٫۰۰۵۲)$$

$$+\frac{۱}{۶}\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)(-۰٫۰۰۵۲)+\frac{۱}{۲۴}\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)\left(-\frac{۵}{۲}\right)(۰٫۰۰۰۴)$$

$$=۰+۰٫۰۸۶۸+۰٫۰۰۰۶(۵)-۰٫۰۰۰۳(۳)-۰٫۰۰۰۰(۲)$$

$$=۰٫۰۸۷۱.$$

(با ۰٫۰۸۷۲ از جداول مقایسه شود.)

توجه داشته باشید که برای حـداقل کردن خطای گردشدهٔ مجتمع، (درداخـل چند پرانتز) یك رقم محافظ هم نوشته شده است. برای تعیین $\sin ۴۵^\circ$ از این جدول، دستور تفاضل پسرو نیوتن (تا مرتبهٔ چهارم) را به‌کارمی‌بریم؛ لذا، با انتخـاب $x_j = ۴۰$ داریم

$$\theta = \frac{۴۵ - ۴۰}{۱۰} = \frac{۱}{۲}$$

و

$$\sin ۴۵^\circ = \sin ۴۰^\circ + \frac{۱}{۲}(۰٫۱۴۲۸) + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}\frac{۳}{۲}(-۰٫۰۱۵۲)$$

$$+\frac{۱}{۶}\frac{۱}{۲}\frac{۳}{۲}\frac{۵}{۲}(-۰٫۰۰۴۸) + \frac{۱}{۲۴}\frac{۱}{۲}\frac{۳}{۲}\frac{۵}{۲}\frac{۷}{۲}(۰٫۰۰۰۴)$$

$$= ۰٫۶۴۲۸ + ۰٫۰۷۱۴ - ۰٫۰۰۵۷ - ۰٫۰۰۱۵ + ۰٫۰۰۰۱(۱)$$

$$= ۰٫۷۰۷۱۰.$$

(با ۰٫۷۰۷۱ از جداول مقایسه شود.)

۴- یکتایی چندجمله‌ای درونیابی

به‌ازای یك دسته ازمقادیر $f(x_۰)$، $f(x_۱)$، ...، $f(x_n)$ با $x_j = x_۰ + jh$، دو دستور درونیابی مرتبهٔ nم به شرح ذیل موجودند:

$$f(x) \approx P_n(x)$$

$$= (۱ + \theta\Delta + \frac{۱}{۲}\theta(\theta - ۱)\Delta^۲ + \cdots + \frac{\theta(\theta-۱)\cdots(\theta-n+۱)}{n!}\Delta^n)f_۰$$

و

$$f(x) \approx Q_n(x)$$

$$= (۱ + \phi\nabla + \frac{۱}{۲}\phi(\phi+۱)\nabla^۲ + \cdots + \frac{\phi(\phi+۱)\cdots(\phi+n-۱)}{n!}\nabla^n)f_n,$$

که درآن $\theta = (x - x_۰)/h$ و $\phi = (x - x_n)/h$.

واضح است که هـردو چند جمـله‌ای $P_n(x)$ و $Q_n(x)$ برحسب x، از درجهٔ n هستند می‌توان نشان داد (ر. ك. تمرین ۲ ذیل) که

$$P_n(x_j) = Q_n(x_j) = f(x_j), \qquad j = ۰, ۱, \ldots, n,$$

و ازآن نتیجه گـرفت که $P_n(x) - Q_n(x)$ یك چند جمـله‌ای از درجهٔ n است که در $n+۱$ نقطه صفرمی‌شود. این به‌نوبهٔ خود نتیجه می‌دهد

$$P_n(x) - Q_n(x) \equiv ۰ \quad \text{یا} \quad P_n(x) \equiv Q_n(x).$$

در واقع، یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ n مسار برهر $n+1$ نقطهٔ (متمایز ولی نه الزاماً متساوی‌الفاصله) مفروض یکتاست، و به چند جمله‌ای هم محل موسوم است.

۵- قیاس با سری تیلر

اگر برای عدد صحیح k تعریف‌کنیم

$$D^k f_j \equiv \left.\frac{d^k f}{dx^k}\right|_{x=x_j},$$

آنگاه سری تیلرحول x_j به‌صورت زیرنوشته می‌شود

$$f(x)=f_j+(x-x_j)Df_j+\frac{(x-x_j)^۲}{۲!}D^۲f_j+\cdots.$$

با قراردادن $x=x_j+\theta h$، به‌طورصوری خواهیم داشت

$$f(x_j+\theta h)=f_j+\theta hDf_j+\frac{\theta^۲h^۲}{۲!}D^۲f_j+\cdots$$

$$=[۱+\theta hD+\frac{\theta^۲h^۲}{۲!}D^۲+\cdots]f_j$$

$$=e^{\theta hD}f_j.$$

مقایسه با صورت درونیابی نیوتن

$$f(x_j+\theta h)=E^\theta f_j,$$

نشان می‌دهد که عملگر e^{hD} (برتوابعی از یك متغیرمتصل) شبیهٔ عملگر E (برتوابعی از یك متغیر گسسته) است.

خود را بیازمایید

۱- ارتباط بین فرمولهای درونیابی خطی ودرجهٔ دوم پیشرو و پسرو (برای یك جدول با فواصل ثابت h) و دستورهای درونیابی نیوتن چیست؟
۲- دستور تفاضل پیشرو نیوتن چه موقع برای استفاده مناسب است؟
۳- دستور تفاضل پسرو نیوتن چه موقع برای استفاده مناسب است؟

تمرین

۱- مطلوب است برآورد

i) $e^{0.14}$ با استفاده از دستور تفاضل پیشرو نیوتن؛ و
ii) $e^{0.315}$ با استفاده از دستور تفاضل پسرو نیوتن
از یک جدول تفاضلی $f(x)=e^x$ (با ۵ رقم اعشار) برای $x = 0.10(0.05)0.40$.

۲- نشان دهید که برای $j = 0, 1, 2, \ldots$ ،

$$f_j = f(x_0+jh) = \left(1 + j\Delta + j\left(\frac{j-1}{2}\right)\Delta^2 + \cdots + \Delta^j\right) f(x_0).$$

۳- برای داده‌های زیر معادلهٔ چند جمله‌ای هم محل را به‌دست آورید.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰	۳	۳	۲۴
۱	۲	۴	۵۹
۲	۷	۵	۱۱۸

گام بیست و یك

درونیابی-۳*

دیگردستورهای درونیابی شامل تفاضلات متناهی

باوجودی‌که هر گونه درونیابی ازجدولهای با نقاط متساوی‌الفاصله را می‌توان بااستفاده از دستور پیشرو نیوتن انجام داد ولی دستورهـای درونیابی دیگری هم وجـود دارندکه احتمالا مرجحند. درگام قبلی ۲۰ اشاره‌کردیم‌که دستورپسرونیوتن ممکن‌است درنزدیکی انتهای یك جدول مرجح باشد.

دستورهای استرلینگ [1]، بسل واورت[2]، دستورهای دیگری هستندکه برای استفاده به‌طورمرکزی یك‌جدول تفاضلی مناسبند، واین دستورها دراین گام اختیاری مورد بررسی قرار می‌گیرنـد. اما، ابتدا دستورهای درونیـابی گاوس راکه بقیه به‌آسانی ازآن نتیجه می‌شوند، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دراین مرحله، تأکید می‌کنیم‌که تمامی این دستورها مبتنی برچند جمله‌ای هم محل هستند، وقبلاهم اشاره‌کرده‌ایم‌که چندجمله‌ای از (حداکثر) درجهٔ n ماربرهرزیرمجموعهٔ $(n+۱)$ نقطه‌ای ازجـدول یکتاست. ضابطهٔ انتخاب یك دستور، صرفاًکارآیی محاسباتی آن است.

۱- دستورهای درونیابی‌گاوس

چون

$$\Delta^{۲} f_j = \Delta^{۲}(f_{j-۱} + \Delta f_{j-۱}) = \Delta^{۲} f_{j-۱} + \Delta^{۳} f_{j-۱},$$

---

1. Stirling   2. Everett

$$\Delta^3 f_j = \Delta^3 f_{j-1} + \Delta^4 (f_{j-2} + \Delta f_{j-2}) = \Delta^3 f_{j-1} + \Delta^4 f_{j-2} + \Delta^5 f_{j-2},$$

و غیره.

از دستور پیشرو نیوتن فوراً

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \Delta f_j + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \Delta^2 f_{j-1} + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \Delta^3 f_{j-1} + \cdots,$$

نتیجه می‌شود که دستور پیشروگاوس است. به‌همین طریق، از

$$\Delta f_j = \Delta(f_{j-1} + \Delta f_{j-1}) = \Delta f_{j-1} + \Delta^2 f_{j-1},$$

$$\Delta^2 f_j = \Delta^2 f_{j-1} + \Delta^3 (f_{j-2} + \Delta f_{j-2}) = \Delta^2 f_{j-1} + \Delta^3 f_{j-2} + \Delta^4 f_{j-2},$$

و غیره،

و دستور نیوتن

$$f(x_j + \theta h) =$$

$$f_j + \theta \Delta f_{j-1} + \frac{(\theta+1)\theta}{2!} \Delta^2 f_{j-1} + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \Delta^3 f_{j-2} + \cdots.$$

به‌دست می‌آید که دستور پسروگاوس نام دارد.

ازروی یك جدول تفاضلی روشن است که این‌دستورها ازتفاضلات واقع درسراسر جدول استفاده می‌کنند:

$$\begin{array}{ccccc}
f_{j-1} & & \Delta^2 f_{j-2} \equiv \delta^2 f_{j-1} & & \Delta^4 f_{j-3} \equiv \delta^4 f_{j-1} \\
 & \Delta f_{j-1} \equiv \delta f_{j-\frac{1}{2}} & & \Delta^3 f_{j-2} \equiv \delta^3 f_{j-\frac{1}{2}} & \\
f_j & & \Delta^2 f_{j-1} \equiv \delta^2 f_j & & \Delta^4 f_{j-2} \equiv \delta^4 f_j \\
 & \Delta f_j \equiv \delta f_{j+\frac{1}{2}} & & \Delta^3 f_{j-1} \equiv \delta^3 f_{i-\frac{1}{2}} & \\
f_{j+1} & & \Delta^2 f_j \equiv \delta^2 f_{j+1} & & \Delta^4 f_{j-1} \equiv \delta^4 f_{+1}
\end{array}$$

دستور پسرو گاوس – – –　　　　دستور پیشرو گاوس ——

همچنین از این جدول برمی‌آید که نوشتن دستورهای گاوس برحسب علامت‌گذاری تفاضل مرکزی امری عادی است:

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \delta f_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\theta(\theta-1)}{2!} \delta^2 f_j + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{j+\frac{1}{2}} + \cdots,$$

$$f(x_j + \theta h) = f_j + \theta \delta f_{j-\frac{1}{2}} + \frac{(\theta+1)\theta}{2!} \delta^2 f_j + \frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!} \delta^3 f_{j-\frac{1}{2}} + \cdots.$$

دستورهای گاوس عمدتاً از نظر تئوری مورد توجه هستند و اینك می‌پردازیم به پیدا کردن دیگر دستورهای فوق‌الذکر. بازهم روال معمول را به‌کار می‌بریم و از تفاضلات مرکزی استفاده می‌کنیم.

۲- دستور استرلینگ

با افزودن دو دستور گاوس و تقسیم آن بر ۲، بلافاصله دستور استرلینگ به‌دست می‌آید:

$$f(x_j+\theta h)=f_j+\theta\mu\delta f_j+\frac{\theta^{۲}}{۲!}\delta^{۲}f_j+\frac{(\theta+۱)\theta(\theta-۱)}{۳!}\mu\delta^{۳}f_j+\cdots,$$

که در آن μ عملگرمقدار میانگین است. (برحسب عملگر انتقال، $\mu=\frac{۱}{۲}(E^{\frac{۱}{۲}}+E^{-\frac{۱}{۲}})$.) لذا، مثلاً، داریم $۲\mu\delta f_j=\delta f_{j+\frac{۱}{۲}}+\delta f_{j-\frac{۱}{۲}}=f_{j+۱}-f_{j-۱}$.) مناسب است که دستور استرلینگ برای θی کوچك، مثلاً $|\theta|\leqslant\frac{۱}{۴}$، به‌کار برده شود.

۳- دستور بسل

چون $x_j+\theta h=x_{j+۱}-h+\theta h=x_{j+۱}+(\theta-۱)h$، پس اگر در دستور پسرو گاوس، به‌ترتیب $(j+۱)$ را به‌جای j و $(\theta-۱)$ را به‌جای θ قرار دهیم، داریم

$$\begin{aligned}f(x_j+\theta h)&\equiv f(x_{j+۱}+(\theta-۱)h)\\&=f_{j+۱}+(\theta-۱)\delta f_{j+\frac{۱}{۲}}+\frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\delta^{۲}f_{j+۱}+\\&\qquad\frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۳!}\delta^{۳}f_{j+\frac{۱}{۲}}+\cdots.\end{aligned}$$

با افزودن این نتیجه به‌دستور پیشرو گاوس (پس‌از تقسیم بر ۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}f(x_j+\theta h)&=\mu f_{j+\frac{۱}{۲}}+(\theta-\tfrac{۱}{۲})\delta f_{j+\frac{۱}{۲}}+\\&\qquad\frac{\theta(\theta-۱)}{۲!}\mu\delta^{۲}f_{j+\frac{۱}{۲}}+\frac{\theta(\theta-۱)(\theta-\frac{۱}{۲})}{۳!}\delta^{۳}f_{j+\frac{۱}{۲}}+\cdots.\end{aligned}$$

که دستور بسل نام دارد. دستور بسل مناسب است که برای θی نزدیك به ۱/۲، مثلاً

$$\frac{۱}{۴}\leqslant\theta\leqslant\frac{۳}{۴}$$

به‌کار برده شود.

۴ـ دستور اورت

اگر دستور داده شده در بخش قبل،

$$f(x_j+\theta h)=f_{j+1}+(\theta-1)\delta f_{j+\frac{1}{2}}+\frac{\theta(\theta-1)}{2!}\delta^2 f_{j+1}+$$

$$+\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\delta^3 f_{j+\frac{1}{2}}+\cdots$$

را از دستور پیشرو گاوس،

$$f(x_{j+1}+\theta h)=f_{j+1}+\theta\delta f_{j+\frac{3}{2}}+\frac{\theta(\theta-1)}{2!}\delta^2 f_{j+1}+$$

$$+\frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!}\delta^2 f_{j+\frac{3}{2}}+\cdots$$

تفریق کنیم، نتیجه می‌شود:

$$f(x_{j+1}+\theta h)-f(x_j+\theta h)=\theta\delta f_{j+\frac{1}{2}}+\frac{(\bar\theta+1)\bar\theta(\bar\theta-1)}{3!}\delta^3 f_{j+\frac{1}{2}}+\cdots$$

$$+\theta\delta f_{j+\frac{3}{2}}+\frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!}\delta^3 f_{j+\frac{3}{2}}+\cdots,$$

که در آن $\theta-1=\bar\theta$. با تعریف $g_j=f_{j+1}-f_j=\delta f_{j+\frac{1}{2}}$، نتیجهٔ اخیر را می‌توان به‌صورت

$$g(x_j+\theta h)=\bar\theta g_j+\frac{(\bar\theta+1)\bar\theta(\bar\theta-1)}{3!}\delta^2 g_j+\cdots$$

$$+\theta g_{j+1}+\frac{(\theta+1)\theta(\theta-1)}{3!}\delta^2 g_{j+1}+\cdots$$

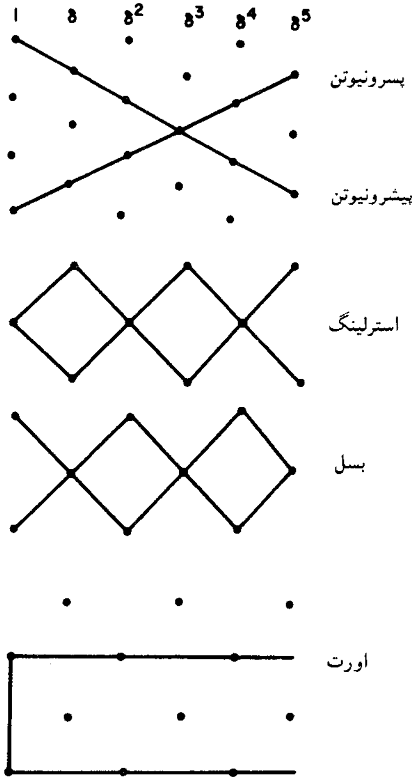
هم‌نوشت، که دستور اورت نام دارد.

دستور اورت گهگاه مورد استفاده واقع می‌شود: درجداول چاپ شده بهتر است که تنها تفاضلات زوج داده شوند، ضمناً جداولی از ضرایب اورت هم در دسترس هستند.

۵ـ طرح دستورها

اکثر دانشجویان به‌خاطرسپردن طرح حاصل از هرکاربرد یك دستور درونیابی در یك

جدول تفاضلی را مفید تشخیص می‌دهند.



شکل ۱۱. طرح دستورها

قبلا طرح مربوط به‌دستورهای نیوتن را مورد توجه قرارداده‌ایم واینك طرحهای مربوط به‌دستورهای استرلینگ، بسل و اورت ممکن‌است مورد توجه قرار بگیرند.

۶ـ مثال

در بخش ۳ از گام ۲۰، جهت درونیابی کردن برای $\sin ۵^\circ$ و $\sin ۴۵^\circ$، ازدستورهای نیوتن استفاده کردیم، می‌توانستیم ازدستور پیشرو نیوتن استفاده کنیم تا (مثلا)

$$\sin ۲۱^\circ = ۰٫۳۴۲۰ + \frac{۱}{۱۰}(۰٫۱۵۸۰) + \frac{۱}{۲}\,\frac{۱}{۱۰}\left(-\frac{۹}{۱۰}\right)(-۰٫۰۱۵۲)$$

$$\left(-\frac{۱۹}{۱۰}\right)(-۰٫۰۰۴۴)$$

$$= ۰٫۳۴۲۰ + ۰٫۰۱۵۸ + ۰٫۰۰۰۶(۸) - ۰٫۰۰۰۱(۳)$$

$$= ۰٫۳۵۸۴.$$

را به‌دست آوریم.

همین نتیجه بااستفاده ازدستور استرلینگ نیز به دست می‌آید:

$$\sin ۲۱^{\circ} = ۰٫۳۴۲۰ + \frac{۱}{۲۰}(۰٫۱۶۸۴ + ۰٫۱۵۸۰) + \frac{۱}{۲۰۰}(-۰٫۰۱۰۴)$$

$$+ \frac{۱}{۶}\frac{۱۱}{۱۰}\frac{۱}{۱۰}\left(\frac{-۹}{۱۰}\right)\frac{۱}{۲}(-۰٫۰۰۵۲ - ۰٫۰۰۴۸)$$

$$= ۰٫۳۴۲۰ - ۰٫۰۱۶۳(۲) - ۰٫۰۰۰۰(۵) + ۰٫۰۰۰۰(۸)$$

$$= ۰٫۳۵۸۴.$$

بازهم می‌توانستیم ازدستورپیشرو نیوتن استفاده‌کنیم تا (مثلا) $\sin ۲۵^{\circ}$ را به‌دست‌آوریم:

$$\sin ۲۵^{\circ} = ۰٫۳۴۲۰ + \frac{۱}{۲}(۰٫۱۵۸۰) + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)(-۰٫۰۱۵۲)$$

$$+ \frac{۱}{۶}\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)(-۰٫۰۰۴۴)$$

$$= ۰٫۳۴۲۰ + ۰٫۰۷۹۰ + ۰٫۰۰۱۹ - ۰٫۰۰۰۲(۸)$$

$$= ۰٫۴۲۲۶.$$

اما، با دستور بسل محاسبهٔ کمتری مورد نیازاست:

$$\sin ۲۵^{\circ} = \frac{۱}{۲}(۰٫۳۴۲۰ + ۰٫۵۰۰۰) + \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\frac{۱}{۲}(-۰٫۰۱۰۴ - ۰٫۰۱۵۲)$$

$$= ۰٫۴۲۱۰ + ۰٫۰۰۱۶$$

$$= ۰٫۴۲۲۶.$$

بالاخره، توجه داشته باشیدکه دراین حالت،ازدستور اورت نیز همین نتیجه حاصل می‌شود.

خود را بیازمایید

۱ـ چه موقع دستور درونیابی استرلینگ می‌تواند مناسب باشد؟
۲ـ چه موقع دستور درونیابی بسل می‌تواند مناسب باشد؟
۳ـ چرا دستور اورت با جداول چاپ شدهٔ مشخصی به‌کار می‌رود؟

تمرین

۱ـ از یك جدول تفاضلی $5D$ از $f(x)=e^x$ برای $x=$ ۰ر۱۰(۰ر۰۵)۰ر۴۰، مقادیر زیر را برآورد کنید

i) f(۰ر۳۱) با استفاده از دستور استرلینگ؛
ii) f(۰ر۳۱)، با استفاده از دستور اورت؛
iii) f(۰ر۳۱۵)، با استفاده از دستور بسل؛
iv) f(۰ر۳۱۵)، با استفاده از دستور اورت.

گام بیست و دو

درونیابی-۴

دستور درونیابی لاگرانژ

درگامهای ۱۹-۲۱، دستورهای درونیابی مختلفی‌را مورد بررسی قراردادیم که ازتفاضلات متناهی استفاده می‌کردند. دستور درونیابی دیگری منسوب به لاگرانژ هم وجود داردکه ابدأ از تفاضلات متناهی استفاده نمی‌کند، و دارای این مزیت است که می‌تواند برای توابعی که درفواصل متساوی ازشناسه‌ها جدول‌بندی نشده‌اند به‌کار گرفته شود.

اما کارکردن بادستور لاگرانژ سخت است وعلاوه براین، دارای این عیب است که باید درجهٔ چند جمله‌ای تقریبی از ابتدا انتخاب شود و لذا، این روش اصولا تنها از نظر تئوری مورد توجه است.

۱- دستورالعمل*

فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$ در $n+۱$ نقطهٔ (نه لزوماً متساوی‌الفاصله) $\{x_۰, x_۱, \ldots, x_n\}$ جدول‌بندی شده وقراراست به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ حداکثر n، مانند

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰$$

چنان تقریب شودکه برای $j = ۰, ۱, ۲, \ldots, n$ داشته باشیم

$$f_j = f(x_j) = P_n(x_j).$$

---

* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه واستفاده در برنامه‌نویسی درصفحه ۱۸۰ یك فلوچارت داده شده است.

اکنون، به‌ازای $k=0, 1, \dots, n$،

$$L_k(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

یك چندجمله‌ای از درجهٔ n است، که درشرایط زیر صدق می‌کند:

$$L_k(x_j)=0,\ j\neq k,\ j=0, 1, \dots, n,$$
$$L_k(x_k)=1.$$

لذا

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} L_k(x) f_k$$

یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ (حداکثر) n است که

$$P_n(x_j)=f_j, \qquad j=0, 1, \dots, n\ ;$$

یعنی، $P_n(x)$ چند جمله‌ای هم محل (یکتا) است. توجه داشته باشید که برای $x=x_j$، تمامی جملات در مجموع فوق صفر می‌شوند به استثنای جملهٔ jام که برابر f_j است؛ $L_k(x)$ را ضریب kام درونیابی لاگرانژ می‌نامند، واتحاد $\sum_{k=0}^{n} L_k(x)=1$ را (که با قرار دادن $f(x)\equiv 1$ به‌دست می‌آید) می‌توان به‌عنوان یك آزمون به‌کار برد. همچنین توجه کنید که به‌ازای $n=1$، بازهم دستور درونیابی خطی

$$P_1(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f_1=f_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}(f_1-f_0)$$

از گام ۱۹ به‌دست می‌آید.

۲ـ مثال

برای پیدا کردن چند جمله‌ای هم محل $P_3(x)$ ماربر نقاط (۰, ۳), (۱, ۲), (۲, ۷) و (۴, ۵۹)، دستور درونیابی لاگرانژرا به‌کارببرید، و ازآنجا مقدار $P_3(3)$ را بیابید.

ضرایب لاگرانژ عبارتند از:

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(0-1)(0-2)(0-4)}$$

$$=-\frac{1}{8}(x^3-7x^2+14x-8),$$

$$L_۱(x)=\frac{(x-۰)(x-۲)(x-۴)}{(۱-۰)(۱-۲)(۱-۴)}$$

$$=\frac{۱}{۳}(x^۳-۶x^۲+۸x),$$

$$L_۲(x)=\frac{(x-۰)(x-۱)(x-۴)}{(۲-۰)(۲-۱)(۲-۴)}$$

$$=-\frac{۱}{۴}(x^۳-۵x^۲+۴x),$$

$$L_۳(x)=\frac{(x-۰)(x-۱)(x-۲)}{(۴-۰)(۴-۱)(۴-۲)}$$

$$=\frac{۱}{۲۴}(x^۳-۳x^۲+۲x),$$

(دانشجویان باید بررسی کنند که $L_۰(x)+L_۱(x)+L_۲(x)+L_۳(x)=۱$). لذا، چند جمله‌ای مطلوب عبارت است از

$$P_۳(x)=-\frac{۳}{۸}(x^۳-۷x^۲+۱۴x-۸)$$

$$+\frac{۲}{۳}(x^۳-۶x^۲+۸x)$$

$$-\frac{۷}{۴}(x^۳-۵x^۲+۴x)$$

$$+\frac{۵۹}{۲۴}(x^۳-۳x^۲+۲x)$$

$$=\frac{۱}{۲۴}(-۹x^۳+۶۳x^۲-۱۲۶x+۷۲$$

$$+۱۶x^۳-۹۶x^۲+۱۲۸x$$

$$-۴۲x^۳+۲۱۰x^۲-۱۶۸x$$

$$+۵۹x^۳-۱۷۷x^۲+۱۱۸x)$$

$$=\frac{۱}{۲۴}(+۲۴x^۳+۰x^۲-۴۸x+۷۲)$$

$$=x^{۳}-۲x+۳$$

درنتیجه، $P_{۳}(۳)=۲۷-۶+۳=۲۴$. ولی توجه داشته باشید که اگر صورت صریح چند جمله‌ای هم محل‌لازم نبود، می‌توانستیم مقدار $P_{۳}(x)$ به‌ازای x مشخصی‌را مستقیماً ازصورتهای ضربی $L_k(x)$ محاسبه‌کنیم. ازاین‌رو، برای محاسبهٔ $P_{۳}(۳)$ داریم

$$L_{\circ}(۳)=\frac{(۳-۱)(۳-۲)(۳-۴)}{(\circ-۱)(\circ-۲)(\circ-۴)}=\frac{۱}{۴},$$

والی آخر.

۳ـ نکته تحذیری

در مورد دستورهای درونیابی تفاضل نیوتن یا سایردستورها درجهٔ چند جمله‌ای تقریب مورد نیاز را می‌توان صرفاً با احتساب جملات تعیین‌کرد، تااینکه جملات دیگراز اهمیتی برخوردار نباشند. دردستورالعمل لاگرانژ، درجهٔ چند جمله‌ای باید بدواً انتخاب شود. همچنین توجه داشته باشیدکه، (i) یك تغییر درجه، مستلزم محاسبهٔ تمامی جملات به‌طور کامل از اول است، و(ii) برای یك چند جمله‌ای ازدرجهٔ بالا، این روند مشتمل بر تعداد زیادی عمل ضرب می‌شود، ودرنتیجه ممکن‌است‌کاملا کند باشد.

درونیابی لاگرانژ را باید با احتیاط قابل توجهی به‌کاربرد. برای مثال، فرض می‌کنیم که‌دستورلاگرانژ را برای تخمین $\sqrt[۳]{۲\circ}$ ازروی نقاط $(\circ, \circ)$، $(۱, ۱)$، $(۸, ۲)$، $(۲۷, ۳)$ و $(۶۴, ۴)$ برروی $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ به‌کار ببریم. داریم:

$$f(x)\approx\frac{x(x-۸)(x-۲۷)(x-۶۴)}{۱(-۷)(-۲۶)(-۶۳)}\times ۱+\frac{x(x-۱)(x-۲۷)(x-۶۴)}{۸(۷)(-۱۹)(-۵۶)}\times ۲$$

$$+\frac{x(x-۱)(x-۸)(x-۶۴)}{۲۷(۲۶)(۱۹)(-۳۷)}\times ۳+\frac{x(x-۱)(x-۸)(x-۲۷)}{۶۴(۶۳)(۵۶)(۳۷)}\times ۴$$

که درنتیجه،

$$f(۲\circ)\approx-۱٫۳۱۳۹,$$

که به‌مقدار صحیح ۲٫۷۱۴۴ خیلی نزدیك نیست! با درونیابی خطی بین $(۸, ۲)$ و $(۲۷, ۳)$ می‌توان نتیجهٔ بهتر (۲٫۶۳۱۶) را به‌دست آورد.

مشکل دراینجاست که از روش‌لاگرانژ نمی‌توان پی‌بردکه $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ تا چه‌حد به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای درجهٔ چهارخوب نمایش داده می‌شود. بنابراین، عملا از دستور لاگرانژ خیلی به‌ندرت استفاده می‌شود. (درآنالیزعددی این دستوراز نظر گسترش تئوری

واجد اهمیت بیشتری است.)

خود را بیازمایید

۱- چه موقع دستور درونیابی لاگرانژ را درمحاسبهٔ عملی به‌کار می‌بریم؟
۲- چه‌چیزی دستور لاگرانژرا ازبسیاری ازدیگر دستورهای درونیابی متمایز می‌کند؟
۳- چرا دستور لاگرانژ را باید درعمل بااحتیاط فراوان به‌کار برد؟

تمرین

با فرض اینکه $f(-۲)=۴۶$ ، $f(-۱)=۴$ ، $f(۱)=۴$ ، $f(۳)=۱۵۶$ و $f(۴)=۴۸۴$ برای محاسبهٔ $f(\circ)$، ازدستور لاگرانژ استفاده کنید.

گام بیست و سه

درونیابی-۵*

تفاضلات تقسیم شده و روش ایتکن [1]

قبلا اشاره کردیم که دستور درونیابی لاگرانژ عمدتاً ازنظر تئوری مورد توجه است، زیرا دربهترین حالت عملی هم شامل محاسبات نسبتاً زیاد است و استفاده ازآن می‌تواند کاملا خطرناك باشد. استفاده از تفاضلات تقسیم شده، برای درونیابی یك تابع جدولی با شناسه‌های نامتساوی‌الفاصله، بسیار کاراتر ودرعین حال نسبتاً بدون خطراست؛ زیرا درجهٔ لازم از چند جمله‌ای هم محل را می‌توان تشخیص داد. درعمل یك دستورالعمل وابسته به این، که منتسب به ایتکن است به‌طور وسیعی به‌کارگرفته می‌شود.

۱- تفاضلات تقسیم شده

دوباره، فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ درنقاط (نه‌الزاماًمتساوی‌الفاصله) $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ جدول‌بندی شده باشد. تفاضلات تقسیم شدهٔ بین این‌نقاط را بدین ترتیب تعریف می‌کنیم:

تفاضل تقسیم شدهٔ اول (مثلا، بین x_0 و x_1) به‌صورت

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f(x_1, x_0);$$

تفاضل تقسیم شدهٔ دوم (مثلا، بین x_0، x_1 و x_2) به‌صورت

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0};$$

1. Aitken

و الی‌آخر تا تفاضل تقسیم شدهٔ nم (بین $x_{0}, x_{1}, \dots, x_{n}$) به‌صورت

$$f(x_{0}, x_{1}, \dots, x_{n}) = \frac{f(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}) - f(x_{0}, x_{1}, \dots, x_{n-1})}{x_{n} - x_{0}}.$$

مثال

از داده‌های زیر یك جدول تفاضل تقسیم شده بسازید:

x	۰	۱	۳	۶	۱۰
$f(x)$	۱	−۶	۴	۱۶۹	۹۲۱

این جدول تفاضل به‌صورت زیراست:

x	$f(x)$				
۰	۱				
		−۷			
۱	−۶		+۴		
		+۵		+۱	
۳	۴		+۱۰		۰
		+۵۵		+۱	
۶	۱۶۹		+۱۹		
		+۱۸۸			
۱۰	۹۲۱				

قابل توجه است که تفاضلات تقسیم شدهٔ سوم ثابت هستند. در زیر، بسا استفاده از دستور تفاضلات تقسیم شدهٔ نیوتن ، از این جــدول درونیابی می کنیم وچند جمله‌ای هم-

محل درجهٔ سوم نظیر را تعیین می‌نماییم.

۲- دستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن

به‌موجب تعاریف تفاضلات تقسیم شده داریم

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x,\ x_0)$$

$$f(x,\ x_0)=f(x_0,\ x_1)+(x-x_1)f(x,\ x_0,\ x_1)$$

$$f(x,\ x_0,\ x_1)=f(x_0,\ x_1,\ x_2)+(x-x_2)f(x,\ x_0,\ x_1,\ x_2)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f(x,x_0,x_1,\dots,x_{n-1})=f(x_0,x_1,\dots,x_n)+(x-x_n)f(x,x_0,x_1,\dots,x_n).$$

با ضرب تساوی دوم در $(x-x_0)$، و سوم در $(x-x_0)(x-x_1)$ و الی آخر و جمع نتایج حاصل خواهیم داشت:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,\ x_1)+(x-x_0)(x-x_1)f(x_0,\ x_1,\ x_2)$$
$$+\dots+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f(x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n)+R,$$

که در آن

$$R=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f(x,\ x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_n).$$

توجه داشته باشید که جملهٔ باقیماندهٔ R در x_0، x_1، ... و x_n صفر است و لذا می‌توان نتیجه گرفت که بقیهٔ جملات طرف راست، چند جمله‌ای هم محل یا، به‌طور معادل، چند جمله‌ای لاگرانژ را تشکیل می‌دهند. درصورتی که درجهٔ مورد نیاز چند جمله‌ای هم‌محل از پیش معلوم نباشد، رسم بر این است که نقاط x_0، x_1، ...، x_n را به‌نسبت ازدیاد فاصله‌شان از x مرتب می‌کنند و جملات را با هم جمع می‌نمایند تا اینکه R به‌قدر کافی کوچك بشود.

مثال

از تابع جدولی بخش ۱ این گام، $f(2)$ را به‌وسیلهٔ دستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن بیابید، و چند جمله‌ای هم محل نظیر را بنویسید. همین کار را برای $f(4)$ هم انجام دهید.

چون تفاضل سوم ثابت است، یك چند جمله‌ای درجهٔ سوم را می‌توان در این پنج نقطه برازش کرد. بنا بر دستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن، با استفاده از $x_0=0$، $x_1=1$، $x_2=3$ و $x_3=6$، این چند جمله‌ای درجهٔ سوم عبارت است از

$$f(x)=f(0)+xf(0,\ 1)+x(x-1)f(0,\ 1,\ 3)$$

$$+x(x-1)(x-3)f(0, 1, 3, 6)$$
$$=1-7x+4x(x-1)+1x(x-1)(x-3),$$

که درنتیجه

$$f(2)=1-14+8-2=-7.$$

به وضوح، چندجمله‌ای هم محل به‌صورت زیر است:

$$1-7x+4x^2-4x+x^3-4x^2+3x=x^3-8x+1.$$

برای یافتن $f(4)$ نقاط $x_0=1$، $x_1=3$، $x_2=6$ و $x_3=10$ را درنظر می گیریم، که درنتیجه

$$f(x)=-6+5(x-1)+10(x-1)(x-3)+(x-1)(x-3)(x-6),$$

و

$$f(4)=-6+5\times3+10\times3+3\times1(-2)=+33.$$

همان طورکه انتظار می‌رفت، این چند جمله‌ای هم محل همان چند جمله‌ای درجهٔ سوم، یعنی x^3-8x+1، است.

۳- روش ایتکن

درعمل، غالباً یك دستورالعمل منتسب به ایتکن به‌کار می‌رود که ازآن به طور منظم چند-جمله‌ایهای درونیاب بهتر و بهتری (متناظر با برش متوالیاً ازمراتب بالاتردستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن) تعیین می‌شوند. بدین ترتیب، داریم:

$$f(x)\approx f_0+(x-x_0)\frac{f_1-f_0}{x_1-x_0}$$
$$=\frac{f_0(x_1-x)-f_1(x_0-x)}{x_1-x_0}\equiv \mathrm{I}_{0,1}(x),$$

به‌وضوح

$$f_0=\mathrm{I}_{0,1}(x_0),\qquad f_1=\mathrm{I}_{0,1}(x_1).$$

سپس با توجه به

$$\mathrm{I}_{0,2}(x)=f_0+(x-x_0)\ f(x_0, x_2),$$

و غیره داریم:

$$f(x) \approx f_0 + (x-x_0) f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1) \frac{f(x_0,x_2) - f(x_0,x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{I_{0,1}(x)(x_2-x) - I_{0,2}(x)(x_1-x)}{x_2-x_1} \equiv I_{0,1,2}(x).$$

درضمن، می‌توان توجه کرد که

$$f_0 = I_{0,1,2}(x_0), \qquad f_1 = I_{0,1,2}(x_1), \qquad f_2 = I_{0,1,2}(x_2).$$

در دید اول این دستورالعمل ممکن است پیچیده به‌نظر برسد، ولی این روش از نظم برخوردار و بنابراین از نظر محاسباتی سرراست است. این دستورالعمل را می‌توان با طرح زیر نمایش داد:

x_0	f_0				$x_0 - x$
x_1	f_1	$I_{0,1}(x)$			$x_1 - x$
x_2	f_2	$I_{0,2}(x)$	$I_{0,1,2}(x)$		$x_2 - x$
x_3	f_3	$I_{0,3}(x)$	$I_{0,1,3}(x)$	$I_{0,1,2,3}(x)$	$x_3 - x$
. .	. .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .

یك مزیت بزرگ این روش این است که کامپیوتر می‌تواند با مقایسهٔ مراحل متوالی، دقت حاصل را اندازه بگیرد (البته این عمل متناظر است با اندازه‌گیری برش مناسب دستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن). همان طور که برای دستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن ذکر شد، معمولا نقاط x_0، x_1، x_2 ... را چنان مرتب می‌کنند که قدرمطلق اعداد $x_0 - x$، $x_1 - x$، $x_2 - x$، ... یك دنبالهٔ صعودی تشکیل بدهند.

در پایان، متذکر می‌شویم که هرچند نحوهٔ استخراج روش ایتکن ارتباطش را با دستور نیوتن نشان می‌دهد، ولی قابل توجه است که سرانجام روش ایتکن ابدا شامل تفاضلات تقسیم شده نیست!

مثال

از تابع جدولی بخش ۱ این گام، $f(2)$ را به‌روش ایتکن بیابید.

داریم $x = 2$، که در نتیجه $x_0 = 1$، $x_1 = 3$، $x_2 = 0$، $x_3 = 6$ و $x_4 = 10$ را انتخاب می‌کنیم:

	x_k	f_k					$x_k - x$
$k=\text{۰}$	۱	۶−					۱−
$k=\text{۱}$	۳	۴	۱−				۱+
$k=\text{۲}$	۰	۱	۱۳−	۵−			۲−
$k=\text{۳}$	۶	۱۶۹	۲۹	۱۱−	۷−		۴+
$k=\text{۴}$	۱۰	۹۲۱	۹۷	۱۵−	۷−	۷−	۸+

این محاسبه از چپ، سطر به سطر، با یک «ضرب قطری» تقسیم شدهٔ مناسبی از درایه‌های مربوط در درایه‌های ستون $x_k - x$ درطرف راست انجام می‌گیرد: بدین ترتیب،

$$\mathrm{I}_{\text{۰،۱}} = \frac{(-\text{۶})(+\text{۱})-(+\text{۴})(-\text{۱})}{\text{۳}-\text{۱}} = -\text{۱}$$

$$\mathrm{I}_{\text{۰،۲}} = \frac{(-\text{۶})(-\text{۲})-(+\text{۱})(-\text{۱})}{\text{۰}-\text{۱}} = -\text{۱۳}$$

$$\mathrm{I}_{\text{۰،۱،۲}} = \frac{(-\text{۱})(-\text{۲})-(-\text{۱۳})(+\text{۱})}{\text{۰}-\text{۳}} = -\text{۵}$$

و الی آخر.
درایهٔ ۷− (داخل دایره) دوبار متوالی در امتداد قطر ظاهر می‌شود و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که $f(\text{۲}) = -\text{۷}$.

خود را بیازمایید

۱ـ دستور درونیابی تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن چه برتری عملی مهمی نسبت به دستور لاگرانژ دارد؟

۲ـ معمولا نقاط جدولی برای درونیابی بادستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن یا روش ایتکن چگونه مرتب می‌شوند؟

۳ـ آیا عملا در درونیابی به روش ایتکن از تفاضلات تقسیم شده استفاده می‌شود؟

تمرین

۱ـ ازدستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن استفاده کنید ونشان دهید که درونیابی برای $\sqrt[\text{۳}]{\text{۲۰}}$ ازنقاط (۰, ۰)، (۱, ۱)، (۸, ۲)، (۲۷, ۳) و (۶۴, ۴) برروی $f(x)=\sqrt[\text{۳}]{x}$ کاملا

بی‌اعتبار است.

۲- با فرض اینکه $f(-۲)=۴۶$، $f(-۱)=۴$، $f(۱)=۴$، $f(۳)=۱۵۶$ و $f(۴)=۴۸۴$ ، مطلوب است محاسبهٔ $f(۰)$ به وسیلهٔ (i) دستور تفاضل تقسیم شده؛ و (ii) روش ایتکن.
درمورد اعتبار این درونیابی بحث کنید.

۳- با فرض اینکه $f(۰)=۲٫۳۹۱۳$ ، $f(۱)=۲٫۳۹۱۹$ ، $f(۳)=۲٫۳۹۳۸$ و $f(۴)=۲٫۳۹۵۱$، به روش ایتکن $f(۲)$ را برآورد کنید.

گام بیست وچهار

درونیابی - ٦*

درونیابی معکوس

به‌جای مقدار یك تابع $f(x)$ به‌ازای نقطهٔ معینی مانند x، می‌توان x متناظر با یك‌مقدار دادهٔ شدهٔ $f(x)$ را جستجو کرد؛ این‌روند به درونیابی معکوس موسوم است. برای مثال، شاید دانشجو درموردامکان به‌دست‌آوردن ریشه‌های $f(x) = 0$ به‌وسیلهٔ درونیابی‌معکوس اندیشیده باشد.

۱- درونیابی معکوس خطی

یك روند مقدماتی واضح این است که تابع را درهمسایگی مقدار داده شده به‌فاصله‌هایی آن قدر کوچك جدول بندی کنیم که بتوان درونیابی معکوس خطی را به‌کار برد. با توجه به تقریب خطی از گام ۱۹، داریم

$$x = x_j + \theta(x_{j+1} - x_j),$$

که درآن

$$\theta \approx \frac{f(x) - f_j}{f_{j+1} - f_j}.$$

(توجه داشته باشید که اگر $f(x) = 0$، بازهم روش نابجایی‌را به‌دست می‌آوریم ـــر.ك. گام ۸.)

مثلا، از یك جدول $4D$ برای $f(x) = e^{-x}$ داریم:
$f(0.91) = 0.4025$ و $f(0.92) = 0.3985$، و در نتیجه $f(x) = 0.4$ متناظر

است با

$$x \approx ۰٫۹۱ + \frac{۰٫۴ - ۰٫۴۰۲۵}{۰٫۳۹۸۵ - ۰٫۴۰۲۵} \times (۰٫۹۲ - ۰٫۹۱)$$

$$= ۰٫۹۱ + ۰٫۰۰۶۲۵ = ۰٫۹۱۶۲۵.$$

یك امتحان فوری آن است که از درونیابی (مستقیم) استفاده کنیم و $f(x) = ۰٫۴$ را دوباره به‌دست آوریم. بدین ترتیب:

$$f(۰٫۹۱۶۲۵) \approx ۰٫۴۰۲۵ + \frac{۰٫۹۱۶۲۵ - ۰٫۹۱}{۰٫۹۲ - ۰٫۹۱} \times (۰٫۳۹۸۵ - ۰٫۴۰۲۵)$$

$$= ۰٫۴۰۰۰.$$

۲- درونیابی معکوس تکراری

به جای جستجو برای جدول بندی در یك فاصله به قدر کافی کوچك جهت انجام درونیابی معکوس خطی، دانشجو هم بدون تردید تصدیق خواهد کرد که بهتر است (دست کم به‌طور تقریب) یك چندجمله‌ای هم محل ازدرجهٔ بیش‌از یك به‌کار گرفته شود. درجهٔ چندجمله‌ای تقریبی را می‌توان به طور ضمنی با یك روش تکراری (تقریب متوالی) تعیین کرد.

مثلاً، دستور تفاضل پیشرو نیوتن را می‌توان به صورت

$$\theta = \{f(x) - f_j - \frac{۱}{۲}\theta(\theta - ۱)\Delta^۲ f_j + \cdots\} / \Delta f_j$$

هم مرتب کرد. چون می‌توان انتظار داشت که جملات شامل تفاضلات مرتبهٔ دوم و بالاتر نسبتاً با سرعت کاهش یابند، تقریبات متوالی $\{\theta_s\}$ برای θ به‌صورت زیر داده می‌شوند:

$$\theta_۱ = \{f(x) - f_j\} / \Delta f_j,$$

$$\theta_۲ = \{f(x) - f_j - \frac{۱}{۲}\theta_۱(\theta_۱ - ۱)\Delta^۲ f_j\} / \Delta f_j,$$

و الی آخر.

روندهای تکراری مشابه را می‌توان براساس دیگر دستورهای تفاضلی بنا کرد؛ مثلاً، از دستور اورت خواهیم داشت

$$\theta_۱ = \{f(x) - f_j\} / \delta f_{j+\frac{۱}{۲}}$$

$$\theta_۲=\{f(x)-f_j+\tfrac{۱}{۶}\theta_۱(\theta_۱-۱)[(\theta_۱-۲)\delta^۲ f_j-(\theta_۱+۱)\,\delta^۲ f_{j+۱}]\}/\delta f_{j+\frac{۱}{۲}}$$

و الی‌آخر.

برای تشریح مطلب، جدول $f(x)=\sin x$ به ازای $x=۰^\circ(۱۰^\circ)۵۰^\circ$ داده شده در گام ۲۰ را درنظر بگیرید،وفرض کنید که می‌خواهیم x ی را بیابیم که $f(x)=۰٫۲$. چون برخی ازمحاسبهای رومیزی الکترونیکی فاقدکلیدهای تابع مثلثاتی معکوس هستند، این‌مثال ساده از نقطه‌نظر عملی جالب است. واضح‌است که، $۱۰^\circ < x < ۲۰^\circ$. ازدستور نیوتن داریم

$$\theta_۱=\frac{(۰٫۲-۰٫۱۷۳۶)}{۰٫۱۶۸۴}=\frac{۰٫۰۲۶۴}{۰٫۱۶۸۴}=۰٫۱۵۶۸\approx ۰٫۱۶,$$

$$\theta_۲=\frac{۰٫۰۲۶۴-\frac{۱}{۲}(۰٫۱۶)(-۰٫۸۴)(-۰٫۰۱۰۴)}{۰٫۱۶۸۴}$$

$$=\frac{۰٫۰۲۶۴-۰٫۰۰۰۷}{۰٫۱۶۸۴}=۰٫۱۵۲۶\approx ۰٫۱۵۳,$$

$$\theta_۳=\frac{۱}{۰٫۱۶۸۴}\{۰٫۰۲۶۴-\frac{۱}{۲}(۰٫۱۵۳)(-۰٫۸۴۷)(-۰٫۰۱۰۴)$$

$$-\frac{۱}{۶}(۰٫۱۵۳)(-۰٫۸۴۷)(-۱٫۸۴۷)(-۰٫۰۰۴۸)\}$$

$$=\frac{۱}{۰٫۱۶۸۴}\{۰٫۰۲۶۴-۰٫۰۰۰۷+۰٫۰۰۰۲\}$$

$$=۰٫۱۵۳۸.$$

(توجه‌کنیدکه در برآوردهای اولیهٔ θ ، منظورکردن ارقام متعدد ضرور نیست.)

به موجب دستور اورت،

$$\theta_۱=۰٫۱۶,$$

$$\theta_۲=\frac{۱}{۰٫۱۶۸۴}\{۰٫۰۲۶۴+\frac{۱}{۶}(۰٫۱۶)(-۰٫۸۴)[(-۱٫۸۴)(-۰٫۰۰۵۲)$$

$$-(۱٫۱۶)(-۰٫۰۱۰۴)]\}$$

$$=\frac{۱}{۰٫۱۶۸۴}\{۰٫۰۲۶۴-(۰٫۰۲۲۴)(۰٫۰۲۱۶)\}$$

$$= \frac{۱}{۰٫۱۶۸۴}\{۰٫۰۲۶۴ - ۰٫۰۰۰۰۵\}$$

$$= ۰٫۱۵۳۸.$$

درنتیجه، $\theta = ۰٫۱۵۳۸ = (x - ۱۰)/۱۰$ عدد $x = ۱۱٫۵۳۸^\circ$ را به دست می‌دهد.

با امتحان کردن به روش معمولی درونیابی مستقیم، یا در این مثال به روش مستقیم، داریم $\sin ۱۱٫۵۳۸^\circ = ۰٫۲۰۰۰$.

۳- تفاضلات تقسیم شده

چون تفاضلات تقسیم شده برای درونیابی بامقادیرجدولی نامتساوی‌الفاصله مناسب هستند، آنها را می‌توان برای درونیابی معکوس هم به کار برد. مجدداً، تابع $f(x) = \sin x$ را به ازای $x = ۰^\circ(۱۰^\circ)۵۰^\circ$ در نظرمی‌گیریم، و xی را می‌یابیم که $f(x) = ۰٫۲$. اگر $f(x)$ها را برحسب ازدیاد فاصله از $f(x) = ۰٫۲$ مرتب کنیم، جدول تفاضل تقسیم شدهٔ زیررا (درایه‌ها در ۱۰۰ ضرب شده‌اند) خواهیم داشت:

$f(x)$	x					
۰٫۱۷۳۶	۱۰					
		۵۹۳۸				
۰٫۳۴۲۰	۲۰		۵۱۸			
		۵۸۴۸		۱۳۶۰		
۰٫۰۰۰۰	۰		۹۶۲		۱۳۳۸	
		۶۰۰۰		۱۹۸۸		۳۴۸۶
۰٫۵۰۰۰	۳۰		۱۵۶۰		۲۴۰۳	
		۷۰۰۳		۳۴۳۱		
۰٫۶۴۲۸	۴۰		۴۱۸۸			
		۸۱۱۷				
۰٫۷۶۶۰	۵۰					

در نتیجه :

$$
\begin{aligned}
x = {} & ۱۰ + (۰٫۲ - ۰٫۱۷۳۶)\,۵۹٫۳۸ \\
& + (۰٫۲ - ۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲ - ۰٫۳۴۲۰)\,۵٫۱۸ \\
& + (۰٫۲ - ۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲ - ۰٫۳۴۲۰)(۰٫۲ - ۰)\,۱۳٫۶۰ \\
& + (۰٫۲ - ۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲ - ۰٫۳۴۲۰)(۰٫۲ - ۰)(۰٫۲ - ۰٫۵)\,۱۳٫۳۸ \\
& + (۰٫۲ - ۰٫۱۷۳۶)(۰٫۲ - ۰٫۳۴۲۰)(۰٫۲ - ۰)(۰٫۲ - ۰٫۵) \\
& \times (۰٫۲ - ۰٫۶۴۲۸)\,۳۴٫۸۶ \\
= {} & ۱۰ + ۱٫۵۶۷۶ = ۰٫۰۱۹۴ - ۰٫۰۱۰۲ + ۰٫۰۰۳۰ - ۰٫۰۰۳۵ \\
= {} & ۱۱٫۵۳۷۵.
\end{aligned}
$$

از طرف دیگر، طرح ایتکن را هم می‌توان به‌کار برد. به هرحال، درهریك ازدو شق قابل توجه‌است که درمقایسهٔ با درونیابی معکوس تکراری مزیتی به‌نام دقت، نمی‌تواند نیاز به محاسبات اضافی را توجیه کند .

خودرا بیازمایید

۱ـ چرا درونیابی معکوس خطی می‌تواند کسل کننده یا غیرعملی باشد؟
۲ـ روش متداول امتحان‌کردن درونیابی معکوس چیست؟
۳ـ درونیابی معکوس با به‌کار بردن هریك ازتفاضلات تقسیم شده یا طرح ایتکن، چه مزیت بالقوه‌ای نسبت به روش تکراری دارد؟ عیب احتمالی‌آن چیست؟

تمرین

۱ـ برای یافتن ریشهٔ $x + \cos x = ۰$ از درونیابی معکوس خطی استفاده‌کنید.

۲ـ مطلوب است حل $۳xe^{x} = ۱$ تا $۳D$.

۳ـ جدول تصحیح شدهٔ مربوط به تابع درجهٔ سوم $f(x)$ داده شده در تمرین ۱ ازگام ۱۸ عبارت است از:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
۲	۳٫۰۶۷۱	۸	۲۴٫۲۵۷۳
۳	۶٫۴۰۸۸	۹	۲۸٫۰۵۹۲
۴	۹٫۸۲۵۷	۱۰	۳۱٫۹۳۹۹
۵	۱۳٫۳۱۸۴	۱۱	۳۵٫۹۰۰۰
۶	۱۶٫۸۸۷۵	۱۲	۳۹٫۹۴۰۱
۷	۲۰٫۵۳۳۶	۱۳	۴۴٫۰۶۰۸

بدون آگاهی ازصورت صریح $f(x)$، مقدار x را به‌ترتیب برای $f(x)=$ ۱۰, ۲۰, ۴۰ به‌دست‌آورید. جوابهای خود را با درونیابی (مستقیم) امتحان کنید. بالاخره، معادلهٔ درجهٔ سوم را به دست‌آورید و با استفاده ازآن جوابهای خود را دوباره امتحان کنید.

گام بیست و پنج

برازش منحنی

دانشمندان وجامعه‌شناسان اغلب می‌خواهند منحنی هموراری را به چند دادهٔ تجربی برازش کنند. یك شیوهٔ واضح برای $(n+1)$ نقطهٔ مفروض این‌است که ازچند جمله‌ای درونیاب درجهٔ n استفاده کنیم، ولی این‌شیوه هنگامی که n بزرگ باشد غالباً رضایت‌بخش نیست. با استفاده ازچند جمله‌ایهـای تکه‌ای، یعنی برازش چند جمله‌ایهای ازدرجهٔ پایین به زیر مجموعه‌هایی از نقاط داده شده، می‌توان نتایج بهتری به‌دست‌آورد. دراین مورد استفاده ازتوابع اسپلاین (که معمولا برازش هموار خاصی را به دست می‌دهند) همه جا متداول شده است (مثلا ر. ك. کونت و دوبور)

نوع نسبتاًمتفاوت دیگر برازش منحنی که غالباً کاراترهم‌هست، برازش‌کمترین‌مربعات است که در آن به‌جای سعی در برازش دقیق نقاط، یك چند جمله‌ای از درجهٔ پایین (غالباً از مرتبهٔ اول یا دوم) پیدا می‌کنیم که آن نقاط را به طور تنگاتنگ برازش کند (به‌هرجهت خود نقاط هم مشمول خطای تجربی بوده دقیق نخواهند بود).

۱- تشریح مسئله

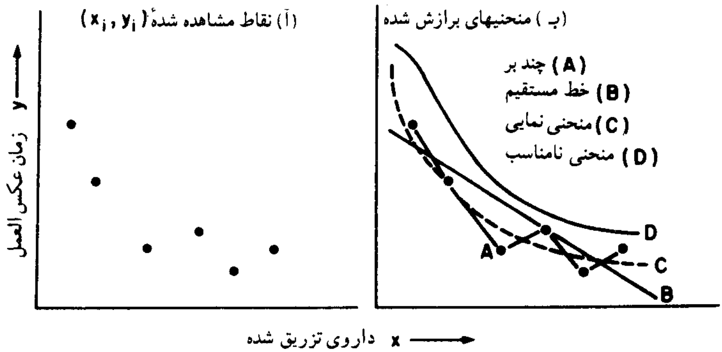
فرض کنید به طور تجربی مشغول مطالعهٔ ارتباط بین دو متغیر x و y هستیم ــ مثلا، (x) مقدار داروی تزریق شده و (y) زمان عکس‌العمل مشاهده شده روی نمونه‌ای ازموشهای صحرایی باشد. با مثلا شش بار انجام آزمایش مربوط، شش جفت ازمقـادیر $(x_i\ ,\ y_i)$ به دست می‌آیند، این مقادیر را می‌توان درنموداری مانند شکل (آ) ۱۲ رسم کرد.

ممکن است گمان کنیم که ارتباط بین این متغیرها را می‌توان به طور رضایت‌بخشی بایك رابطهٔ تابعی $y=f(x)$ بیان کرد، ولی چون مقادیر y به‌طورتجربی به‌دست‌آمده‌اند مقید به خطا (یا اختلال) هستند. قالب ریاضی این وضعیت به شرح زیراست:

(وقتی که n نقطهٔ مشاهده شده در دست باشد، به ازای $i = ۱, \ldots, n$) داریم $f(x_i) = y_i + \varepsilon_i$. دراینجا $f(x_i)$ مقدار تابعی y نظیر مقدار x_i است که در آزمایش به‌کار گرفته شده و ε_i عبارت است ازخطای تجربی مربوط به اندازه‌گیری متغیر y در این نقطه. لذا خطای موجود در y، در نقطهٔ مشاهده شده، برابراست با $\varepsilon_i = f(x_i) - y_i$.

مسئلهٔ برازش منحنی این است که جهت تعیین یك منحنی مناسب ازاطلاعات مربوط به نقاط دادهٔ‌نمونه چنان استفاده کنیم (یعنی، تابع مناسبی مانند $f(x)$ بیابیم) که از معادلهٔ $y = f(x)$ بتوان به‌عنوان توصیفی ازرابطهٔ (x, y) استفاده کرد؛ امید آن‌است که پیش‌بینی‌هایی که از این معادله انجام می‌گیرند خیلی درخطا نباشند.

تابع $f(x)$ را چگونه باید انتخاب کرد؟ تعداد نامحدودی تابع وجود دارند که f باید از میانشان انتخاب شود، و شکل (ب) ۱۲ چهار انتخاب ممکن را نشان می‌دهد. چندبر A از تمام شش نقطه می‌گذرد؛ اما به‌طور شهودی ممکن است مرجح باشد که برازش با خط مستقیمی مانند B، یا با یك منحنی نمایی چون C انجام شود. روشن‌است که منحنی D برازش خوبی برای این داده‌ها نیست.



شکل ۱۲. عکس‌العمل موشها نسبت به‌دارو

۲ـ شیوهٔ کلی حل مسئله

جهت آغاز پاسخگویی به این سؤال که کدام تابع باید انتخاب شود یك شیوهٔ ممکن را توضیح می‌دهیم.

برای مجموعهٔ مفروضی از مقادیر $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$، ...، (x_n, y_n) تابعی را انتخاب می‌کنیم که برای مقادیرمجموعه‌ای از k پارامتر $c_۱$، $c_۲$، ...، c_k بتواند به‌طورکامل مشخص شود. این تابع را با $y = f(x; c_۱, c_۲, \ldots, c_k)$ نمایش می‌دهیم.

مقادیری برای این پارامترها انتخاب خواهیم کرد که در نقاط اندازه‌گیری شدهٔ (x_i, y_i) خطاها حتی‌الامکان کوچك باشند. سه روش پیشنهاد خواهیم کرد که با کمك آنها بتوانیم به عبارت «حتی‌الامکان کوچك» معنی مشخصی ببخشیم.

مثالهایی از توابع مورد استفاده

(چند جمله‌ای) (i) $y=c_1+c_2x+\dots+c_kx^{k-1}$

(ترکیبی از توابع سینوسی)

(ii) $y=c_1\sin\omega x+c_2\sin 2\omega x+\dots+c_k\sin k\omega x$

(ترکیبی از توابع کسینوسی)

(iii) $y=c_1\cos\omega x+c_2\cos 2\omega x+\dots+c_k\cos k\omega x$

مثالهای (i)، (ii)، و (iii) خود مثالهایی از آنچه که می‌توانند فرم خطی کلی :

(iv) $y=c_1\phi_1(x)+c_2\phi_2(x)+\dots+c_k\phi_k(x)$

نامیده‌شوند هستند که در آن توابع $\phi_1(x)$، $\phi_2(x)$، ...، $\phi_k(x)$ متشکل از مجموعه‌ای از توابع از پیش انتخاب‌شده می‌باشند. در (i) این مجموعه از توابع عبارت است از $\{1, x, x^2, \dots, x^{k-1}\}$ در (ii) این مجموعه عبارت است از $\{\sin\omega x, \sin 2\omega x, \dots, \sin k\omega x\}$، که در آن ثابت ω طوری انتخاب می‌شود که با یك دورهٔ تناوب موجود در داده‌ها توافق داشته باشد؛ در (iii) مجموعه عبارت است از $\{\cos\omega x, \cos 2\omega x, \dots, \cos k\omega x\}$، توابع دیگری که عموماً در برازش منحنی به کار می‌روند عبارتند از توابع نمایی، توابع بسل، چند جمله‌ایهای لژاندر، وچند جمله‌ایهای چبیشف (مثلا ر. ك. کونت و دوبور).

۳ـ خطاهای «حتی‌الامکان کوچك»

در اینجا معیاری را ارائه می‌دهیم که مفهوم انتخاب تابعی که خطاهای اندازه‌گیری را حتی‌الامکان کوچك کند روشن می‌سازد. فرض می کنیم که منحنی مورد برازش را بتوان به شکل خطی کلی با مجموعهٔ معلومی از توابع $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_k(x)\}$ بیان کرد.

خطاهای $\varepsilon_i=y-y_i$ در n نقطهٔ داده شده به قرار ذیل هستند:

$$\varepsilon_1=c_1\phi_1(x_1)+c_2\phi_2(x_1)+\dots+c_k\phi_k(x_1)-y_1$$

$$\varepsilon_2=c_1\phi_1(x_2)+c_2\phi_2(x_2)+\dots+c_k\phi_k(x_2)-y_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varepsilon_n=c_1\phi_1(x_n)+c_2\phi_2(x_n)+\dots+c_k\phi_k(x_n)-y_n.$$

اگر تعداد نقاط داده شده نابیشتر از تعداد پارامترها (یعنی، $n\leqslant k$) باشد، پیدا کردن مقادیری برای $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ که تمامی خطاهای ε_i را صفر کنند امکان‌پذیر است. اگر $n<k$، تعدادی نامتناهی جواب برای $\{c_i\}$ موجود است که تمامی خطاها را

صفر می‌کنند (و لذا بینهایت منحنی با شکل مفروض از همهٔ نقاط تجربی می‌گذرند)؛ در این حالت مسئله به طور کامل حل نمی‌شود ـ جهت انتخاب یك منحنی مناسب اطلاعات بیشتری مورد نیازاست.

اگر $n>k$، که معمولا در عمل هم چنین است، نمی‌توان تمامی خطاها را با یك انتخاب صفر کرد. سه دستورالعمل ممکن به قرار زیرند:

(i) مجموعه‌ای مانند $\{c_i\}$ انتخاب کنید که خطای مطلق کل را مینیمم سازد؛

یعنی، مجموع $\sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i|$ را مینیمم کنید؛

(ii) مجموعه‌ای مانند $\{c_i\}$ انتخاب کنید که ماکزیمم خطای مطلق را مینیمم سازد؛

یعنی، $\underset{i=1,\dots,n}{\mathrm{Max}}\ \{|\varepsilon_i|\}$ را مینیمم کنید؛

(iii) مجموعه‌ای مانند $\{c_i\}$ انتخاب کنید که مجموع مربعات خطاها را مینیمم سازد؛

یعنی، $S=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{2}$ را مینیمم کنید.

استفاده از دستورالعملهای (i) و (ii) عموماً مشکل است. دستورالعمل (iii) به یك دستگاه معادلات خطی منجر می‌شود که برای تعیین مجموعهٔ $\{c_i\}$ باید حل شود؛ این دستورالعمل اصل کمترین مربعات نام دارد ودستورالعملی است که معمولا به‌کار برده می‌شود.

۴ـ روش کمترین مربعات

برای به‌کاربردن اصل کمترین مربعات استفاده ازمشتق گیری جزئی، فنی ازحساب دیفرانسیل و انتگرال که ممکن است برمتعلمین این کتاب ناشناخته باشد، لازم است. به این دلیل، به جای یك توصیف کلی ازاین روش به شرح رئوس مطالب توأم بامثالهایی ازکاربرد مطلب مبادرت می‌ورزیم.

الف) معادلات نرمال

مجموع مربعات خطاها که باید مینیمم شود عبارت است از:

$$S=\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{2}=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i;\, c_1,\, c_2,\, \dots,\, c_k)-y_i]^{2}.$$

n مقدار $(x_i,\ y_i)$ اندازه‌های معلوم ومأخوذ از n آزمایش هستند. اگراین مقادیر

را در طرف راست قرار دهیم S به عبارتی تبدیل می‌شود کـه تنها k مجهول، به نامهای $c_۱$، $c_۲$، ...، c_k را دربردارد. به عبارت دیگر، S را می‌توان به‌صورت تابعی از c_iها؛ یعنی

$$S \equiv S(c_۱, c_۲, \cdots, c_k)$$

در نظر گرفت. مسئله انتخاب مقادیری است برای $\{c_i\}$ که S را مینیمم کند.

قضیه‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال حاکی است که (تحت شرایط معینی که معمولا درعمل برقرار هستند) مینیمم درنقطه‌ای واقع می‌شود که در آن نقطه تمام مشتقات جزئی $\partial S/\partial c_۱$، $\partial S/\partial c_۲$، ...، $\partial S/\partial c_k$ صفر هستند. (مشتق جزئی $\partial S/\partial c_۱$ (مثلا)، همان ضریب دیفرانسیلی $dS/dc_۱$ است بافرض ثابت نگه داشتن تمام c_iهای دیگر؛ مثلا اگر $S = ۳c_۱ + ۵c_۲$، $\partial S/\partial c_۱ = ۳$ و $\partial S/\partial c_۲ = ۵$.)

بنابراین، باید دستگاه متشکل از k معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$\frac{\partial S}{\partial c_۱} = ۰$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_۲} = ۰$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_k} = ۰.$$

این دستگاه مجموعه‌ای است از معـادلات که نسبت به مجهولات $c_۱$، $c_۲$، ...، c_k خطی هستند و به معادلات نرمال برای تقریب کمترین مربعات موسوم است. این معادلات را می‌توان با روشهای عددی ارائه شده در گامهـای ۱۱ و ۱۳ حل کرد. جواب مشترك این معادلات مجموعهٔ مطلوب $\{c_i\}$ را که مینیمم‌کنندهٔ S است به‌دست می‌دهد.

ب) مثالهایی از روش کمترین مربعات

نقاط زیر در یك آزمایش به‌دست آمده‌اند:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۱	۳	۴	۳	۴	۲

این نقاط را در نموداری رسم، وجهت برازش (i) یك خط راست، (ii) یك سهمی، به این نقاط، ازروش کمترین مربعات استفاده کنید.

نقاط فوق درشکل (آ) ۱۳ نشان داده شده‌اند.

i) جهت برازش یك خط مستقیم باید تابعی چون $y=c_1+c_2x$ (یعنی یك چند جمله‌ای درجهٔ اول) پیدا کرد که

$$S=\sum_{i=1}^{6}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{6}(y_i-c_1-c_2x_i)^2$$

را مینیمم سازد.

اگر ابتدا نسبت به c_1 (با ثابت نگهداشتن c_2) و بعد نسبت به c_2 (با ثابت نگهداشتن c_1) دیفرانسیل بگیریم ونتایج را برابر صفر قرار دهیم، معادلات نرمال ذیل به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1}\equiv-2\sum_{i=1}^{6}(y_i-c_1-c_2x_i)=0$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_2}\equiv-2\sum_{i=1}^{6}x_i(y_i-c_1-c_2x_i)=0.$$

می‌توان هردومعادله را بر ۲ − تقسیم کرد، اعمال سیگما را به‌داخل پرانتزها برد، جملات را مرتب کرد ودستگاه زیررا به دست آورد:

$$\sum y_i\equiv 6c_1+(\sum x_i)c_2$$

$$\sum x_iy_i\equiv(\sum x_i)c_1+(\sum x_i^2)c_2.$$

ملاحظه می‌شود که برای رسیدن به جواب بایدچهار مجموع $\sum x_i$، $\sum y_i$، $\sum x_i^2$ و $\sum x_iy_i$ را محاسبه کرد و در آخرین معادلات قرارداد. این عملیات‌را می‌توان در یك جدول به قرار جدول صفحه بعد مرتب کرد (سه ستون آخر مربوط به برازش سهمی مورد نظر است).

بنابراین، معادلات نرمال جهت برازش خط مستقیم عبارتند از:

$$17=6c_1+21c_2$$

$$63=21c_1+91c_2.$$

جواب تا $2D$ عبارت است از:

$$c_1=2{,}13$$

$$c_2=0{,}20$$

	x	y	$x^{۲}$	xy	$x^{۲}y$	$x^{۳}$	$x^{۴}$
	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
	۲	۳	۴	۶	۱۲	۸	۱۶
	۳	۴	۹	۱۲	۳۶	۲۷	۸۱
	۴	۳	۱۶	۱۲	۴۸	۶۴	۲۵۶
	۵	۴	۲۵	۲۰	۱۰۰	۱۲۵	۶۲۵
	۶	۲	۳۶	۱۲	۷۲	۲۱۶	۱۲۹۶
مجموعهـای مطلوب	۲۱	۱۷	۹۱	۶۳	۲۶۹	۴۴۱	۲۲۷۵

در نتیجه:

$$y=۲٫۱۳+۰٫۲x$$

خط مطلوب می‌باشد که درشکل (ب) ۱۳ رسم شده‌است.

ii) جهت برازش یك سهمی باید چند جمله‌ای درجهٔ دومی مانند

$$y=c_{۱}+c_{۲}x+c_{۳}x^{۲}$$

یافت که

$$S=\sum \varepsilon_i^{۲}=\sum (y_i-c_{۱}-c_{۲}x_i-c_{۳}x_i^{۲})^{۲}$$

را مینیمم کند.

با گرفتن مشتقات جزئی وادامهٔ عمل همانند فوق، معادلات نرمال زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sum y_i=۶c_{۱}+(\sum x_i)c_{۲}+(\sum x_i^{۲})c_{۳}$$

$$\sum x_i y_i=(\sum x_i)c_{۱}+(\sum x_i^{۲})c_{۲}+(\sum x_i^{۳})c_{۳}$$

$$\sum x_i^{۲} y_i=(\sum x_i^{۲})c_{۱}+(\sum x_i^{۳})c_{۲}+(\sum x_i^{۴})c_{۳}.$$

بامنظور کردن مقادیر مجموعها (ر. ك. جدول بالا)، دستگاه معادلات خطی زیر حاصل می‌شود:

$$۱۷=۶c_{۱}+۲۱c_{۲}+۹۱c_{۳}$$

$$۶۳=۲۱c_{۱}+۹۱c_{۲}+۴۴۱c_{۳}$$

$$۲۶۹=۹۱c_{۱}+۴۴۱c_{۲}+۲۲۷۵c_{۳}.$$

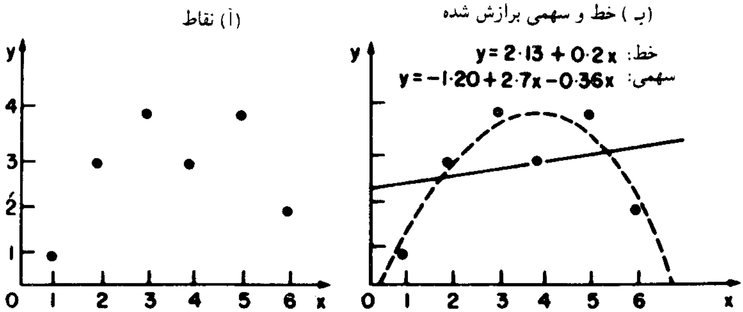
جواب تا $۳D$ عبارت است از:

$$c_1 = -۱٫۲۰۰$$
$$c_2 = ۲٫۷۰۰$$
$$c_3 = -۰٫۳۵۷.$$

بنابراین، سهمی مطلوب (تا $۲D$) چنین است:

$$y = -۱٫۲۰ + ۲٫۷۰x - ۰٫۳۶x^2.$$

این سهمی نیز در شکل (ب) ۱۳ رسم شده‌است. روشن‌است که این سهمی از خط مستقیم، برازش بهتری است!



شکل ۱۳. برازش یك خط و یك سهمی به وسیلهٔ کمترین مربعات

خود را بیازمایید

۱ــ خطا در یك نقطه به چه معناست؟
۲ــ سه معیاری را که ممکن است جهت انتخاب مجموعهٔ $\{c_i\}$ به کار رود ارائه دهید.
۳ــ معادلات نرمال چگونه به‌دست می‌آیند؟

تمرین

۱ــ برای مثال ۴(ب) فوق‌الذکر، مقدار S، مجموع مربعات خطای نقاط، را از (i) خط برازش‌شده، و(ii) سهمی برازش شده، حساب کنید. نقاط مربوط را روی کاغذ رسم مشخص کنید و «با نگاه» خط مستقیمی به آنها بیرازانید. (یعنی، باحدس بهترین مکان، خطی با یك خط کش رسم کنید)؛ مقدار S را برای این خط تعیین، و آن را با مقدار مربوط به خط

کمترین مربعات مقایسه کنید.

۲ــ با روش کمترین مربعات خط مستقیمی به هریك از مجموعه داده‌های زیر برازانید:

(i) سختی (x) و درصد نیکل (y) در هشت نمونه ازآلیاژ فولاد:

سختی (x)	۳۶	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۷	۵۰
درصدنیکل (y)	۲٫۵	۲٫۷	۲٫۸	۲٫۹	۳٫۰	۳٫۲	۳٫۳	۳٫۵

(ii) نمرهٔ آزمایش استعداد (x) شش فروشنده‌کارآموز وفروشهای اولین سال‌آنها (y) برحسب هزارتومان:

آزمایش استعداد (x)	۲۵	۲۹	۳۳	۳۶	۴۲	۵۴
فروش اولین سال (y)	۴۲	۴۵	۵۰	۴۸	۷۳	۹۰

برای هردو مجموعه، نقاط را برروی یك نمودار مشخص و خط کمترین مربعات را رسم کنید. با استفاده از این خطوط (i) درصد نیـکل یك نمونه راکه سختی‌آن ۳۸ است، و (ii) حدود فروش اولـین سال یك فروشندهٔ کارآموز راکه نمرهٔ آزمایش استعدادش ۴۸ است، پیش‌بینی کنید.

۳ــ معادلات نرمال مربوط به برازش یك چند جمله‌ای درجهٔ سوم مانند $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3$ به‌مجموعه‌ای از n نقطه را به‌دست‌آورید. نشان‌دهیدکه این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی زیر هم نوشت:

$$\begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2y \\ \sum x^3y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 \\ \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

شکل ماتریسی معادلات‌نرمال برای برازش یك چندجمله‌ای درجهٔ چهارم را نتیجه‌بگیرید.

۴ـ با روش کمترین مربعات، یك سهمی به نقاط (۰, ۰)، (۱, ۱)، (۲, ۳)، (۳, ۳)، و (۴, ۲) ببرازانید. مقدار S مربوط به این برازش را بیابید.

۵ـ معادلات نرمال مربوط به برازش معادله‌ای به شکل $y=c_1+c_2 \sin x$ به‌مجموعهٔ نقاط (۰, ۰)، ($\pi/۶$, ۱)، ($\pi/۲$, ۳)، و ($۵\pi/۶$, ۲) را بـه وسیلهٔ روش کمترین مربعات پیدا کنید. این معادلات را برای به دست آوردن c_1 و c_2 حل کنید.

گام بیست و شش

مشتق گیری عددی

در آنالیز ، معمولا قادریم مشتق یك تابع را با روشهای حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی به دست آوریم. ولی اگر این تابع خیلی پیچیده یا تنها به صورت یك جدول معلوم باشد، ممکن است لازم شود که به مشتق‌گیری عددی متوسل شویم.

۱ـ دستورالعمل

دستورهای مشتق گیری عددی را می‌توان به‌آسانی با مشتق گرفتن ازچندجمله‌ای درونیاب به دست آورد. ایدهٔ اساسی این است که مشتقات $f'(x)$، $f''(x)$، ... از یك تابع مانند $f(x)$ به وسیلهٔ مشتقات $P'_n(x)$، $P''_n(x)$، ... از چند جمله‌ای هم محل $P_n(x)$ نمایش داده می‌شوند.

برای مثال، با مشتق‌گرفتن از دستور تفاضل پیشرو نیوتن

$f(x)=$

$$f(x_j+\theta h)\approx[1+\theta\Delta+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2+\frac{\theta(\theta-1)(\theta-2)}{3!}\Delta^3+\dots]f_j$$

نسبت به x، (چون $x=x_j+\theta h$ و $\dfrac{df}{dx}=\dfrac{df}{d\theta}\times\dfrac{d\theta}{dx}$، و غیره) به‌طور صوری

$$f'(x)=\frac{1}{h}\frac{df}{d\theta}\approx\frac{1}{h}\,[\Delta+(\theta-\frac{1}{2})\,\Delta^2+\frac{3\theta^2-6\theta+2}{6}\Delta^3+\dots]f_j,$$

$$f''(x)=\frac{1}{h^{2}}\frac{d^{2}f}{d\theta^{2}}\approx\frac{1}{h^{2}}[\Delta^{2}+(\theta-1)\Delta^{3}+\dots]f_{j},$$

و غیره حاصل می‌شود. به ویژه با قرار دادن $\theta=0$، برای مشتقات در نقاط جدولی $\{x_j\}$ دستورهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$f'_{j}\approx\frac{1}{h}[\Delta-\frac{1}{2}\Delta^{2}+\frac{1}{3}\Delta^{3}-\dots]f_{j}$$

$$f''_{j}\approx\frac{1}{h^{2}}[\Delta^{2}-\Delta^{3}+\frac{11}{12}\Delta^{4}-\dots]f_{j}.$$

و غیره.

(درگام ۲۰ اشاره کردیم که E شبیه به e^{hD} است؛ لذا می‌توان «نتیجه گرفت» که

$$hD=\log_{e}E=\log_{e}(1+\Delta)=\Delta-\frac{1}{2}\Delta^{2}+\frac{1}{3}\Delta^{3}-\dots!)$$

با قراردادن $\theta=1/2$، یك دستور نسبتاً دقیق به صورت زیر برای نقاط میانی (بدون تفاضلات مرتبهٔ دوم) به دست می‌آید:

$$f'_{j+\frac{1}{2}}\approx\frac{1}{h}[\Delta-\frac{1}{24}\Delta^{3}+\dots]f_{j}\ ;$$

حال آنکه با قرار دادن $\theta=1$ در دستور مربوط بـه مشتق مرتبهٔ دوم (بـدون تفاضلات مرتبهٔ سوم) داریم:

$$f''_{j+1}\approx\frac{1}{h^{2}}[\Delta^{2}-\frac{1}{12}\Delta^{4}+\dots]f_{j},$$

که دستوری برای مشتق مرتبهٔ دوم در نقطهٔ بعدی است.

توجه داشته باشید که اگر تنها یك جمله را منظور کنیم، دستورهای معروف

$$f'(x_{j})\approx\frac{f(x_{j}+h)-f(x_{j})}{h};$$

$$f''(x_{j})\approx\frac{f(x_{j}+2h)-2f(x_{j}+h)+f(x_{j})}{h^{2}}\ (\theta=0);$$

$$f'(x_{j}+\frac{1}{2}h)\approx\frac{f(x_{j}+h)-f(x_{j})}{h}\ (\theta=\frac{1}{2});$$

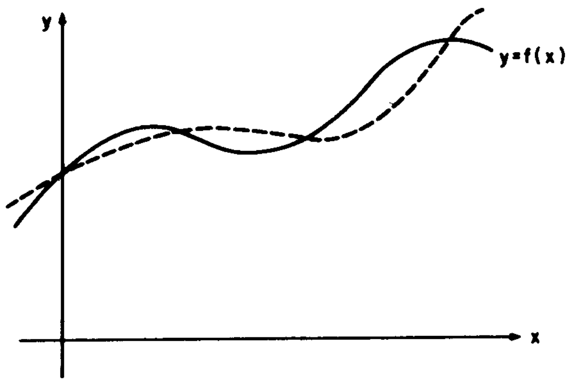
$$f''(x_j+h)\approx\frac{f(x_j+2h)-2f(x_j+h)+f(x_j)}{h^2}\,(\theta=1);$$

و غیره، را دوباره به دست می‌آوریم.

۲- خطا در مشتق‌گیری عددی

باید درك شود که مشتق گیری عددی مقید به خطای نسبتاً زیادی است؛ اشکال اساسی در این‌است که‌امکان دارد $(f(x)-P_n(x))$ کوچك باشد ولی‌اختلافات $(f'(x)-P_n'(x))$ و $(f''(x)-P''_n(x))$ و غیره، خیلی بزرگ باشند. به بیان هندسی، گرچه ممکن است دومنحنی نزدیك هم باشند ولی امکان دارد اختلاف شیب، تغییردرشیب، وغیره قابل‌ملاحظه باشند (ر. ك. شکل ۱۴).

همچنین باید توجه شود که دستورهای فوق،همگی شامل تقسیم ترکیبی از تفاضلات (که به‌ویژه وقتی h کوچك باشد مستعد خطاهای حذفی‌هستند) برتوان مثبتی از h می‌باشند. در نتیجه اگر بخواهیم خطاهای گردشده را پایین نگهداریم، باید از یك مقدار بزرگ h استفاده کنیم. از طرف دیگر، می‌توان نشان داد (ر. ك. تمرین ۳ زیر) که خطای برشی تقریباً متناسب با h^p است، که درآن p یك عدد صحیح مثبت است، و لذا h باید به قدر کافی‌کوچك باشد تاخطای برشی قابل اغماض شود. بدین ترتیب، در «تنگنا» قرارداریم، و باید با انتخاب بهینه‌ای از h بسازیم.



شکل ۱۴. درون‌یابی کردن $f(x)$

به‌اختصار، در یك مشتق گیری عددی مبتنی‌بر تقریب‌مستقیم یك چندجمله‌ای، خطاهای بزرگ می‌توانند به وجود آیند، ودر نتیجه همواره یك امتحان خطا توصیه می‌شود. چند روش دیگر مبتنی برچند جمله‌ایها هم وجود دارند که از دستورالعملهای پیچیده‌تر نظیر کمترین‌مربعات یا اقل‌اکثر استفاده می‌کنند، ودستورالعملهایی‌مشتمل برسایر توابع مقدماتی

(نظیر توابع مثلثاتی) هم وجود دارند. به هرحال، احتمالا، بهترین شیوه آن باشد که تنها به هنگام اجبار از مشتق گیری عددی استفاده کنیم!

۳- مثال

با استفاده از داده‌های در گام ۱۷ (ص ۹۰) برای $f(x)=e^x$، مطلوب است برآورد $f'(۰٫۱)$ و $f''(۰٫۱)$.

اگر از دستورهای صفحه ۱۰۶ (با $\theta=۰$) استفاده کنیم، خواهیم داشت:

$$f'(۰٫۱)\approx\frac{۱}{۰٫۰۵}[۰٫۰۵۶۶۶-\frac{۱}{۲}(۰٫۰۰۲۹۱)+\frac{۱}{۳}(۰٫۰۰۰۱۵)]$$

$$=۲۰(۰٫۰۵۶۶۶-۰٫۰۰۱۴۵(۵)+۰٫۰۰۰۰۵)=$$

$$=۱٫۱۰۵۱,$$

$$f''(۰٫۱)\approx۴۰۰(۰٫۰۰۲۹۱-۰٫۰۰۰۱۵)=۱٫۱۰۴.$$

چون $۱٫۱۰۵۱۷=f(۰٫۱)=f'(۰٫۱)=f''(۰٫۱)$، بدیهی است که (به‌خاطر خطاهای گرد شده) نتیجهٔ دوم بسیار نادقیقتر است.

خودرا بیازمایید

۱- چگونه دستورهای مشتق یك تابع از دستورهای درونیابی به دست می‌آیند؟

۲- چرا لزوماً دقت روند مشتق گیری عددی معمولی، باکاهش فاصلهٔ شناسه افزایش نمی‌یابد؟

۳- چه وقت باید از مشتق گیری عددی استفاده کنیم؟

تمرین

۱- دستورهای مشتمل بر تفاضلات پسرو را برای مشتقات مرتبه‌های اول و دوم یك تابع به دست آورید.

۲- تابع $f(x)=\sqrt{x}$ به ازای $x=۱٫۰۰(۰٫۰۵)۱٫۳۰$ تا ۵ رقم اعشار جدول بندی شده است:

x	$f(x)$
۱٫۰۰	۱٫۰۰۰۰۰
۱٫۰۵	۱٫۰۲۴۷۰
۱٫۱۰	۱٫۰۴۸۸۱
۱٫۱۵	۱٫۰۷۲۳۸
۱٫۲۰	۱٫۰۹۵۴۵
۱٫۲۵	۱٫۱۱۸۰۳
۱٫۳۰	۱٫۱۴۰۱۸

i) از دستور تفاضل پیشرو نیوتن استفاده کنید و $f'(۱)$ و $f''(۱)$ را تخمین بزنید.

ii) از دستور تفاضل پسرو نیوتن استفاده کنید و $f'(۱٫۳۰)$ و $f''(۱٫۳۰)$ را تخمین بزنید.

۳ـ برای یافتن خطاهای برشی در دستورهای زیر، از سری تیلر استفاده کنید:

i) $f'(x_j)\approx(f(x_j+h)-f(x_j))/h$

ii) $f'(x_j+\frac{۱}{۲}h)\approx(f(x_j+h)-f(x_j))/h$

iii) $f''(x_j)\approx(f(x_j+۲h)-۲f(x_j+h)+f(x_j))/h^۲$

iv) $f''(x_j+h)\approx(f(x_j+۲h)-۲f(x_j+h)+f(x_j))/h^۲.$

گام بیست و هفت

انتگرال گیری عددی - ۱

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

محاسبهٔ انتگرالهای معین به شکل

$$\int_a^b f(x)dx$$

به روشهای تحلیلی غالباً یا مشکل است یا غیرممکن، لذا از انتگرال‌گیری عددی یا کوادراتور استفاده می کنیم.

معلوم است که انتگرال معین را می‌توان به عنوان مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ به‌ازای $a \leqslant x \leqslant b$ تعبیر کرد و با تقسیم بازهٔ موردنظر و جمع کردن مساحتهای مربوط به این تقسیمات آن را محاسبه نمود. با این خاصیت جمعی انتگرال معین می‌توان محاسبه را به صورت تکه‌ای انجام داد. می‌توان برای هر زیر بازهٔ $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$ از بازهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ تقریب با چند جمله‌ای $f(x) \approx P_n(x)$ را اختیار کرد و برای اینکه

$$\int_{x_0}^{x_n} P_n(x)dx$$

با تقریب خوبی محاسبه شود، n را چنان انتخاب نمود که به قدر کافی کوچك بودن خطای $(f(x)-P_n(x))$ در هریك از زیربازه‌های جدولی $x_j \leqslant x \leqslant x_{j+1}$ تضمین گردد. قابل توجه است که (برای $n>1$) این خطا غالباً در زیر بازه‌های متوالی، متناوباً مثبت و منفی است و به‌مقدار قابل‌توجهی حذف خطا پیش می‌آید؛ و لذا به عکس مشتق گیری عددی، کوادراتور ذاتاً دقیق است! معمولا کافی است که بر هر زیر بازهٔ $x_0 \leqslant x \leqslant x_n$، از یك

تقریب با چند جمله‌ای از درجهٔ نسبتاً پایینی استفاده کنیم.

۱ـ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای*

شاید سرراست‌ترین کوادراتور آن باشد که بازهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ را به وسیلهٔ نقاط

$$x_j = a + jh, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N$$

که در آن $b = a + Nh$، به N نوار متساوی به عرض h تقسیم کنیم. سپس می‌توانیم از خاصیت جمعی

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_{N-1}}^{x_N} f(x)\mathrm{d}x$$

و تقریبات خطی (مشتمل بر $x = x_j + \theta h$)

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_j}^{x_j+h} f(x_j + \theta h)\mathrm{d}x = h\int_0^1 f(x_j + \theta h)\mathrm{d}\theta$$

$$\approx h\int_0^1 [1 + \theta\Delta] f_j \mathrm{d}\theta \quad = h[(\theta + \tfrac{1}{2}\theta^2\Delta) f_j]_0^1$$

$$= h[1 + \tfrac{1}{2}\Delta] f_j \qquad = h[f_j + \tfrac{1}{2}(f_{j+1} - f_j)]$$

$$= \tfrac{1}{2} h(f_j + f_{j+1}),$$

استفاده کنیم و قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{N-1} + f_N)$$

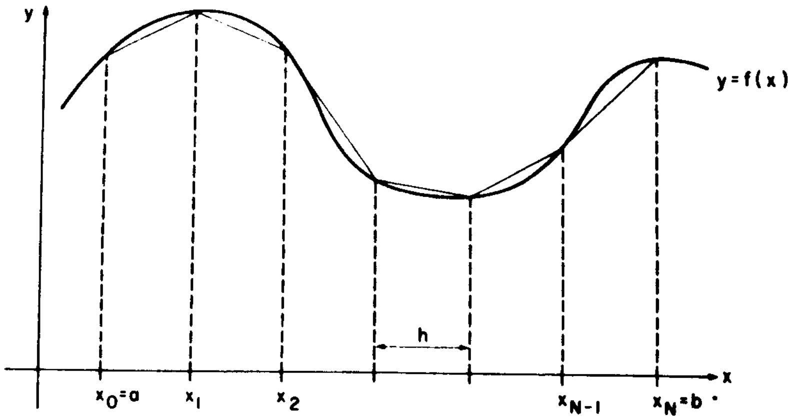
$$= \frac{h}{2}(f_0 + f_N) + h(f_1 + f_2 + \cdots + f_{N-1})$$

را به دست آوریم. بنابراین، انتگرال‌گیری به وسیلهٔ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای شامل محاسبهٔ یک مجموع متناهی ازمقادیر داده شده به‌وسیلهٔ انتگران $f(x)$ است و بسیارهم سریع می‌باشد.

توجه کنید که این روند را ازنظر هندسی می‌توان به‌صورت مجموع مساحتهای N ذوزنقهٔ به‌عرض h و ارتفاع متوسط $(1/2)(f_j + f_{j+1})$ تعبیر کرد (ر. ک. شکل ۱۵).

---

* این الگوریتم برای‌محاسبهٔ کامپیوتری مناسب‌است. جهت مطالعه واستفاده در برنامه‌نویسی در صفحهٔ ۱۸۱ یک فلوچارت داده شده است.



شکل ۱۵. قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

۲ـ دقت

قاعدهٔ ذوزنقه‌ای متناظر است با یك تقریب چند جمله‌ای نسبتاً خام (یك خط راست) بین نقاط متوالی x_j و $x_{j+۱}=x_j+h$ ، و لذا تنها برای hهای به قدرکافی کوچك می‌تواند دقیق باشد. به قرار زیر می‌توان برای خطای این قاعده یك کران تقریبی (بالا) به دست آورد.

به موجب بسط تیلر

$$f_{j+۱}=f(x_j+h)=f_j+hf'_j+\frac{۱}{۲!}h^۲f''_j+\cdots,$$

از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای

$$\int_{x_j}^{x_{j+۱}} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{۱}{۲}h(f_j+f_{j+۱})=h\left(f_j+\frac{h}{۲}f'_j+\frac{h^۲}{۴}f''_j+\cdots\right)$$

حاصل می‌شود. حال آنکه در $x_j\leqslant x\leqslant x_{j+۱}$ می‌توان $f(x)$ را به صورت

$$f(x)=f_j+(x-x_j)f'_j+\frac{۱}{۲!}(x-x_j)^۲f''_j+\cdots$$

بسط داد وصورت دقیق

$$\int_{x_j}^{x_{j+۱}} f(x)\mathrm{d}x=h[f_j+\frac{h}{۲}f_j'+\frac{h^۲}{۶}f_j''+\cdots]$$

را به دست آورد. با مقایسهٔ این دوصورت نتیجه می‌شود که تصحیح لازم عبارت است از

$$h\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)h^2 f_j''+\dots=-\frac{1}{12}h^3 f_j''+\dots.$$

بنابراین، اگر ازجملات‌مرتبهٔ بالا صرفنظر کنیم ،کران تقریبی خطای مربوط‌به به‌کارگیری قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (بر N زیربازه) عبارت خواهد بود از :

$$+\frac{N}{12}h^3\,\mathrm{Max}\,|f''(x)|=+\frac{(b-a)h^2}{12}\,\mathrm{Max}\,|f''(x)|.$$

برای قابل اغماض‌کردن این خطا، هرجاکه ممکن باشد، h را به قدرکافی کوچك انتخاب می‌کنیم. این‌کار احتمالا درحالت استفاده ازجدول ومحاسبهٔ با دست ممکن نباشد. ازسوی دیگر، در یك برنامهٔ‌کامپیوتری الکترونیکی که درآن $f(x)$ درهر نقطهٔ $a\leqslant x\leqslant b$ قابل محاسبه است، بازه را می‌توان به زیربازه‌های‌کوچك و کوچکتری تقسیم‌کرد و دقت کافی را به‌دست آورد. (مقادیر انتگرال مربوط به‌زیر تقسیمات متوالی را می‌توان با هم مقایسه کرد و وقتی که بین مقادیر متوالی تطابق کافی حاصل شد ، به روند تقسیم بازه‌ها خاتمه داد.)

۳- مثال

با به‌کار بردن قاعدهٔ ذوزنقه‌ای وداده‌های مندرج درگام ۱۷ (ص ۹۰) $\int_{0/1}^{0/3} e^x\mathrm{d}x$ را برآورد کنید.

اگر $T(h)$ را جهت نشان دادن تقریب‌گیری با نواری به‌عرض h به کار بگیریم، خواهیم داشت:

$$T(0/2)=\frac{0/2}{2}[1/10517+1/34986]=0/24550$$

$$T(0/1)=\frac{0/1}{2}[1/10517+2(1/22140)+1/34986]$$

$$=0/24489$$

$$T(0/05)=\frac{0/05}{2}[1/10517+2(1/16183+1/22140$$

$$+1/28403)+1/34986]$$

$$=0/24474.$$

چون $\int_{0.1}^{0.3} e^x \mathrm{d}x = e^{0.3} - e^{0.1} = 0.24469$، می‌توان مشاهـده کرد که دنبالهٔ خـطا -0.000081, -0.000020, -0.000005 باکاهشی به نسبت h^2 متناظر است.

خود را بیازمایید

۱ــ چرا کوادراتوری که از یک تقریب چندجمله‌ای برای انتگران استفاده می‌کند، حتی اگرچند جمله‌ای از درجهٔ پایین هم باشد، احتمالا رضایت‌بخش است؟

۲ــ درجهٔ چند جمله‌ای تقریبی متناظر باقاعدهٔ ذوزنقه‌ای چیست؟

۳ــ چرا قاعدهٔ ذوزنقه‌ای برای محاسبهٔ کامپیوتری کاملا مناسب است؟

تمرین

۱ــ بااستفاده از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای وداده‌های مفروض درگام قبلی

$$\int_{1.00}^{1.30} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

را برآورد کنید.

۲ــ برای برآورد

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$$

از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای با $h=1.0$، $h=0.5$، و $h=0.25$ استفاده کنید.

گام بیست وهشت

انتگرال گیری عددی ـ ۲

قاعدهٔ سیمپسون[1]

اگر جهت به دست آوردن کوادراتور دقیقتر ، تقسیم تزایدی بازه‌ای چون $a \leqslant x \leqslant b$ (همچون درموقع استفاده‌ازجداول) نامطلوب باشد،راه دیگر، به‌کاربردن یك چندجمله‌ای تقریبی از درجهٔ بالاتر است. یك انتگرال گیری مبتنی بر تقریب درجهٔ دوم (یعنی تقریب سهموی)، به‌نام قاعدهٔسیمپسون ، برای اکثر کوادراتورها مناسب است.

۱ـ قاعدهٔ سیمپسون

قاعدهٔ سیمپسون با تقریب درجهٔ دوم متناظر است، لذا، به ازای $x_j \leqslant x \leqslant x_j + 2h$،

$$\int_{x_j}^{x_j+2h} f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^2 f(x_j+\theta h)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\approx h\int_0^2 \left[1+\theta\Delta+\frac{1}{2}\theta(\theta-1)\Delta^2\right] f_j\,\mathrm{d}\theta$$

$$= h\left[\left(\theta+\frac{1}{2}\theta^2\Delta+\left(\frac{1}{6}\theta^3-\frac{1}{4}\theta^2\right)\Delta^2\right)f_j\right]_0^2$$

$$= h\left[2f_j+2(f_{j+1}-f_j)+\frac{1}{3}(f_{j+2}-2f_{j+1}+f_j)\right]$$

---

1. Simpson

$$=\frac{h}{3}(f_j+4f_{j+1}+f_{j+2}).$$

به منحنی $y=f(x)$، درسه نقطهٔ جدولی x_j، x_j+h و x_j+2h قوسی ازسهمی برازش می‌شود. درنتیجه، اگر $N=(b-a)/h$ زوج بـاشد، قاعـدهٔ سیمپسون به صورت ذیل به دست می آید :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_2}^{x_4} f(x)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{x_{N-2}}^{x_N} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\approx\frac{1}{3}h[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\cdots+4f_{N-1}+f_N],$$

که درآن

$$f_j=f(x_j)=f(a+jh),\qquad j=0,\ 1,\ \ldots,\ N.$$

همانند قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، انتگرال گیری به وسیلهٔ قاعدهٔ سیمپسون شامل محاسبهٔ یك مجموع متناهی از مقادیر حاصل از انتگران $f(x)$ است. قـاعدهٔ سیمپسون برای محاسبهٔ کامپیوتری نیز کاراست و معمولا ازکاربرد مستقیم آن در محاسبات دستی هم دقتٔ کافی به دست می آید.

۲ـ دقت

تأکید می کنیم که درمحاسبات کامپیوتری مشتمل بریك انتگران معلوم مانند $f(x)$، برنامه‌ریزی تقسیم تزایدی بازه به‌زیربازه‌ها جهت حصول دقت مطلوب، کاملا مناسب است ولی برای محاسبات دستی، بازهم استفاده از یك کران خطا (خطای برشی) مفید است.

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازهٔ $x_j-h\leqslant x\leqslant x_j+h$ دارای بسط تیلر

$$f(x)=f_j+(x-x_j)f'_j+\frac{1}{2!}(x-x_j)^2f''_j+\cdots,$$

باشد و لذا داشته باشیم

$$\int_{x_j-h}^{x_j+h} f(x)\,\mathrm{d}x=2h\left[f_j+\frac{1}{3}\times\frac{h^2}{2!}f_j''+\frac{1}{5}\times\frac{h^4}{4!}f_j^{(4)}+\cdots\right].$$

با بسط $f_{j+1}=f(x_j+h)$ و $f_{j-1}=f(x_j-h)$ به‌سری تیلرمی توان قاعدهٔ کوادراتور مربوط به $x_j-h\leqslant x\leqslant x_j+h$ را به‌صورت زیرهم نوشت:

$$\int_{x_j-h}^{x_j+h} f(x)\,\mathrm{d}x\approx\frac{1}{3}h(f_{j-1}+4f_j+f_{j+1})$$

$$=\frac{۱}{۳}h\Big[\Big(f_j-hf_j'+\frac{۱}{۲!}h^۲f_j''-\cdots\Big)+۴f_j$$

$$+\Big(f_j+hf'_j+\frac{۱}{۲!}h^۲f''_j+\cdots\Big)\Big]$$

$$=۲h\Big[f_j+\frac{۱}{۳}\frac{h^۲}{۲!}f''_j+\frac{۱}{۳}\frac{h^۴}{۴!}f_j^{(۴)}+\cdots\Big].$$

مقایسهٔ این دوصورت نشان می‌دهد که تصحیح‌لازم عبارت است از

$$۲h\Big(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۳}\Big)\frac{h^۴}{۴!}f_j^{(۴)}+\cdots=-\frac{۱}{۹۰}h^۵f_j^{(۴)}+\cdots.$$

با چشم‌پوشی ازجملات مرتبهٔ بالاترنتیجه می‌گیریم که در برآورد

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

به وسیلهٔ قاعدهٔ سیمپسون (با تعداد $N/۲$ زیربازه به عرض $۲h$) یك کران تقریبی خطای برشی عبارت است از:

$$+\frac{N}{۲}\frac{۱}{۹۰}h^۵\mathrm{Max}|f^{(۴)}(x)|=+\frac{(b-a)h^۴}{۱۸۰}\mathrm{Max}\,|f^{(۴)}(x)|.$$

قابل ذکراست که کران خطا متناسب است با $h^۴$. درحالی که درقاعدهٔ خامتر ذوزنقه‌ای، کران خطا متناسب است با $h^۲$. درضمن می‌توان ملاحظه کرد که قاعدهٔ سیمپسون برای یك چند جمله‌ای درجهٔ سوم دقیق است.

۳ـ مثال

با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون وداده‌های مندرج درگام ۲۶،

$$\int_{۱٫۰۰}^{۱٫۳۰}\sqrt{x}\,dx$$

را برآورد کنید.

اگر $h=۰٫۰۵$ و $h=۰٫۱۵$ انتخاب شوند تعدادبازه‌ها زوج خواهند بود. اگر تقریب مربوط به نواری به عرض h را با $S(h)$ نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$S(۰٫۱۵)=\frac{۰٫۱۵}{۳}[۱+۴(۱٫۰۷۲۳۸)+۱٫۱۴۰۱۸]=۰٫۳۲۱۴۸۵$$

و

$$S(۰٫۰۵)=\frac{۰٫۰۵}{۳}[۱+۴(۱٫۰۲۴۷۰+۱٫۰۷۲۳۸+۱٫۱۱۸۰۳)$$
$$+۲(۱٫۰۴۸۸۱+۱٫۰۹۵۴۵)+۱٫۱۴۰۱۸]$$
$$=۰٫۳۲۱۴۸۶.$$

چون $f^{(۴)}(x)=-۱۵/۱۶x^{-\frac{۷}{۲}}$ کران تقریبی خطای برشی به ازای $h=۰٫۱۵$ عبارت است از $(۰٫۳۰/۱۸۰)(۱۵/۱۶)h^۴=۰٫۰۰۱۵۶۲۵h^۴$، و در نتیجه ۰٫۰۰۰۰۰۰۸، در حالی که به ازای $h=۰٫۰۵$ برابر است با ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۱. توجه کنید که خطای برشی قابل اغماض است؛ و برآورد انتگرال، درمحدودهٔ خطای گردشده، برابر است با ۰٫۳۲۱۴۸(۶).

خود را بیازمایید

۱ـ درجهٔ چند جمله‌ای تقریبی متناظر با قاعدهٔ سیمپسون چیست؟
۲ـ کران خطای مربوط به قاعدهٔ سیمپسون چیست؟
۳ـ چرا قاعدهٔ سیمپسون برای محاسبهٔ کامپیوتری کاملا مناسب است؟

تمرین

بااستفاده از انتگرال‌گیری عددی،

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+x}\,dx$$

را تا $۴D$ برآورد کنید.

گام بیست و نه

انتگرال گیری عددی ـ ۳

کوادراتور از یك جدول مقادیر

به طور کلی، دستورهای مربوط به کوادراتور از یك جدول تفاضلات متناهی را می‌توان با انتگرال گیری از فرمولهای درونیابی به دست آورد. قاعدهٔ ذوزنقه‌ای متناظر است با برش خطی و سپس انتگرال گیری روی $x_j \leqslant x \leqslant x_j + h$، درحالی که قاعدهٔ سیمپسون متناظر است با برش درجهٔ دوم و بعد انتگرال گیری روی $x_j \leqslant x \leqslant x_j + ۲h$. گرچه قاعدهٔ ذوزنقه‌ای یا قاعدهٔ سیمپسون معمولا برای کوادراتور، به ویژه در محاسبات کامپیوتری، مناسب است، با این حال انتگرال گیری از یك تابع جدولی ممکن است نیاز به یك برش از مرتبهٔ بالاتر (متناظر با یك چند جمله‌ای هم محل از درجهٔ بیشتر از ۲) داشته باشد.

۱ـ کوادراتور بین نقاط جدولی مجاور

برای انتگرال گیری بر یك بازهٔ وسیع، فرمولهای مربوط به زیربازه‌ها را مانند قبل با هم جمع می‌کنیم. اما، برای انتگرال گیری بین نقاط جدولی مجاور باید یك بازهٔ تنها را اختیار کرد و برای حصول دقت مورد نظر تعدادی کافی جمله نگه داشت. در این روند مستتر است که مقادیر جدولی خارج بازهٔ انتگرال گیری با چند جمله‌ایهای درجهٔ بالاتر متناظر مطابقت داده می‌شوند؛ چنین روندهایی را دستورهای انتگرال گیری حوزهٔ جزئی می‌نامند. درعمل، نقطهٔ برش (درجهٔ چند جمله‌ای) از اندازهٔ جملات تفاضلی مراتب بالا نتیجه می‌شود.

i) انتگرال گیری از دستور تفاضل پیشرو نیوتن

کافی است بازه‌ای به عرض h در نظر گرفته شود:

$$\int_{x_\circ}^{x_\circ+h} f(x)\mathrm{d}x =$$

$$h\int_\circ^\text{۱}\left[\text{۱}+\theta\Delta+\frac{\text{۱}}{\text{۲}!}\theta(\theta-\text{۱})\Delta^\text{۲}+\frac{\theta(\theta-\text{۱})(\theta-\text{۲})}{\text{۳}!}\Delta^\text{۳}+\cdots\right]f_\circ\mathrm{d}\theta$$

$$=h\left[\left(\theta+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\theta^\text{۲}\Delta+\frac{\frac{\text{۱}}{\text{۳}}\theta^\text{۳}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\theta^\text{۲}}{\text{۲}!}\Delta^\text{۲}+\frac{\frac{\text{۱}}{\text{۴}}\theta^\text{۴}-\theta^\text{۳}+\theta^\text{۲}}{\text{۳}!}\Delta^\text{۳}+\cdots\right)f_\circ\right]_\circ^\text{۱}$$

$$=h\left(f_\circ+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\Delta f_\circ-\frac{\text{۱}}{\text{۱۲}}\Delta^\text{۲}f_\circ+\frac{\text{۱}}{\text{۲۴}}\Delta^\text{۳}f_\circ+\cdots\right).$$

ii) انتگرال‌گیری از دستور تفاضل پسرو نیوتن

$$\int_{x_j}^{x_j+h} f(x)\mathrm{d}x=h\int_\circ^\text{۱}\left[\text{۱}+\theta\nabla+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\theta(\theta+\text{۱})\nabla^\text{۲}+\right.$$

$$\left.+\frac{\theta(\theta+\text{۱})(\theta+\text{۲})}{\text{۳}!}\nabla^\text{۳}+\cdots\right]f_j\mathrm{d}\theta$$

$$=h\left(f_j+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\nabla f_j+\frac{\text{۵}}{\text{۱۲}}\nabla^\text{۲}f_j+\frac{\text{۳}}{\text{۸}}\nabla^\text{۳}f_j+\frac{\text{۲۵۱}}{\text{۷۲۰}}\nabla^\text{۴}f_j+\cdots\right).$$

۲ـ مثال

با استفاده از داده‌های $x=\text{۱٫۰۰}(\text{۰٫۰۵})\text{۱٫۳۰}$ در گام ۲۶، انتگرالهای

$$\text{(i)}\ \int_{\text{۱٫۰۰}}^{\text{۱٫۰۵}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \qquad , \qquad \text{(ii)}\ \int_{\text{۱٫۲۵}}^{\text{۱٫۳۰}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

را محاسبه کنید.

i) $x_\circ=\text{۱٫۰۰}$ ، $x_\circ+h=\text{۱٫۰۵}$ (تفاضلات پیشرو)

$$\int_{\text{۱٫۰۰}}^{\text{۱٫۰۵}}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx \text{۰٫۰۵}(\text{۱}+\text{۰٫۰۱۲۳۵}+\text{۰٫۰۰۰۰۴}(\text{۹})+\text{۰٫۰۰۰۰۰۰}(\text{۲}))$$

$$=\text{۰٫۰۵}(\text{۱٫۰۱۲۴۰})$$

$$=\text{۰٫۰۵۰۶۲}.$$

ii) $x_0 = ۱ر۲۵$، $x_0 + h = ۱ر۳۰$ (تفاضلات پسرو)

$$\int_{۱ر۲۵}^{۱ر۳۰} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx ۰ر۰۵(۱ر۱۱۸۰۳ + ۰ر۰۱۱۲۹ - ۰ر۰۰۰۲۰(۴) + ۰ر۰۰۰۰۰۰(۴))$$

$$= ۰ر۰۵(۱ر۱۲۹۱۲) =$$

$$= ۰ر۰۵۶۴۶.$$

خود را بیازمایید

۱ــ قاعدهٔ سیمپسون چه موقع ممکن است برای کوادراتور نامناسب باشد؟

۲ــ چگونه می‌توان انتگرال یك تابع را بین نقاط جدولی مجاور محاسبه کرد؟

۳ــ برای چند جمله‌ای هم محل درجهٔ سوم، درکــوادراتور بین دو نقطهٔ جدولی مجاور، از کدام نقاط جدولی استفاده می‌شود؟

تمرین

تابعی به صورت زیر جدول‌بندی شده‌است:

x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$	x	$f(x)$
۰ر۶۸	۰ر۸۰۸۷	۰ر۸۰	۱ر۰۲۹۶	۰ر۹۲	۱ر۳۱۳۳	۱ر۰۴	۱ر۷۰۳۶
۰ر۷۲	۰ر۸۷۷۱	۰ر۸۴	۱ر۱۱۵۶	۰ر۹۶	۱ر۴۲۸۴	۱ر۰۸	۱ر۸۷۱۲
۰ر۷۶	۰ر۹۵۰۵	۰ر۸۸	۱ر۲۰۹۷	۱ر۰۰	۱ر۵۵۷۴	۱ر۱۲	۲ر۰۶۶۰

i) برای محاسبهٔ

$$\int_{۰ر۸۸}^{۰ر۹۲} f(x)\,\mathrm{d}x$$

از تفاضلات پیشرو استفاده کنید.

ii) برای محاسبهٔ

$$\int_{۰ر۸۸}^{۰ر۹۲} f(x)\,\mathrm{d}x$$

از تفاضلات پسرو استفاده کنید.

گام سی

انتگرال گیری عددی - ۴

دستورهای انتگرال گیری گاوس

روندهای انتگرال گیری عددی که قبلا مورد بحث قرار گرفتند (یعنی، قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، قاعدهٔ سیمپسون یا قواعد از درجات بالاتر ناشی از دستورهای درونیابی) شامل مقادیر متساوی‌الفاصلهٔ شناسه هستند. اما، اگر اصراری برمتساوی‌الفاصله بودن نقاط نداشته باشیم، دقت را می‌توان برای تعداد ثابتی از نقاط افزایش داد. این مطلب زیربنای یك فرایند دیگر از انتگرال گیری منتسب به گاوس است که اکنون آن را بررسی می‌کنیم. به‌طور خلاصه، با فرض تعداد معینی از مقادیر انتگران (با محل تعیین نشده)، با تعیین محلهای جدولی در محدودهٔ انتگرال گیری، فرمولی را به‌دست خواهیم داد که دقیقترین فرمول انتگرال گیری است.

۱- دستور انتگرال گیری دو نقطه‌ای گاوس*

دستور دونقطه‌ای دلخواهی به شکل

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)\mathrm{d}x \approx af(\alpha)+bf(\beta)$$

را در نظر بگیرید که در آن وزنهای a و b و طولهای α و β باید طوری تعیین شوند که این دستور از ۱، x، $x^۲$ و $x^۳$ (و در نتیجه ازتمام توابع درجهٔ سوم) به‌طور دقیق

* این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است جهت مطالعه واستفاده در برنامه‌نویسی در صفحهٔ ۱۸۳ یك فلوچارت داده شده‌است.

انتگرال بگیرد. برای این چهار مجهول، چهار شرط به شرح زیر داریم:

i) اگر $۲=a+b$ آنگاه از $f(x)=۱$ به‌دقت انتگرال گرفته می‌شود؛

ii) اگر $۰=a\alpha+b\beta$ آنگاه از $f(x)=x$ به‌دقت انتگرال گرفته می‌شود؛

iii) اگر $۲/۳=a\alpha^۲+b\beta^۲$ آنگاه از $f(x)=x^۲$ به‌دقت انتگرال گرفته می‌شود؛

iv) اگر $۰=a\alpha^۳+b\beta^۳$ آنگاه از $f(x)=x^۳$ به‌دقت انتگرال گرفته می‌شود.

به‌سادگی ثابت می‌شود که

$$a=b=۱,\quad \alpha=-\beta,\quad \alpha^۲=\frac{۱}{۳}$$

و دستور انتگرال‌گیری دونقطه‌ای گاوس به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)\,\mathrm{d}x\approx f\left(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)+f\left(\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$$

$$\approx f(-۰٫۵۷۷۳۵۰۲۷)+f(۰٫۵۷۷۳۵۰۲۷).$$

با یك تغییر متغیر می‌توان این دستور را برای هربازهٔ دیگری هم به‌کاربرد، اگرمثلا بخواهیم

$$\int_a^b \phi(u)\mathrm{d}u$$

را محاسبه کنیم، تغییر متغیر زیررا اختیار می‌کنیم:

$$u=\frac{۱}{۲}[(b-a)x+(b+a)].$$

اگر بنویسیم:

$$\phi(u)=\phi\left\{\frac{۱}{۲}[(b-a)x+(b+a)]\right\}\equiv f(x)$$

آنگاه

$$\int_a^b \phi(u)\,\mathrm{d}u=\frac{۱}{۲}(b-a)\int_{-۱}^{۱} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

زیرا، $\mathrm{d}u=(۱/۲)(b-a)\mathrm{d}x$ و $u=a$ وقتی که $x=-۱$، و $u=b$ وقتی که $x=۱$.

قابل توجه است که دستور دو نقطه‌ای گاوس برای چندجمله‌ایهای درجهٔ سوم دقیق است، و لذا می‌توان آن را از نظر دقت با قاعدهٔ سیمپسون مقایسه کرد. (در واقع خطای برشی برای دستور گاوس حدود ۲/۳ خطای برشی برای قاعدهٔ سیمپسون است.) چون برای دستور گاوس از تعدادمقادیرموردنیاز تابع یکی کم می‌شود، به شرط اینکه اصم بودن

طول نقاط (همچون درمحاسبات کامپیوتری) بی‌اهمیت باشد، این دستور مرجح است.

۲- سایر دستورهای گاوس

دستور انتگرال گیری دونقطه‌ای گاوس که مورد بحث قرارگرفت تنها یك دستور از دستهٔ وسیع این قبیل دستورهاست. مثلا، می‌توان دستور انتگرال‌گیری سه نقطه‌ای گاوس را هم به‌دست آورد.

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{۱}{۹}\left[۵f\left(-\sqrt{\frac{۳}{۵}}\right)+۸f(۰)+۵f\left(\sqrt{\frac{۳}{۵}}\right)\right],$$

که برای چند جمله‌ایهای درجهٔ پنج دقیق است: در واقع خطا کمتراز

$$\frac{۱}{۱۵۷۵۰}\,\mathrm{Max}\,|f^{(۶)}(x)|$$

است.

این دستور ودستور دونقطه‌ای قبلی، دردستهٔ دستورهای معروف به گاوس - لژاندر، به‌خاطر ارتباطشان با چند جمله‌ایهای لژاندر، دستورهایی از پایین‌ترین مرتبه هستند.

در ارتباط با دیگر چند جمله‌ایهای متعامد (لاگور[1]، هرمیت[2]، چبیشف و غیره) دستورهای دیگری نیز وجود دارند؛ شکل‌کلی انتگرال گیری گاوس را می‌توان با دستور

$$\int_a^b w(x)f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=۱}^{n} A_i f(x_i)$$

نمایش داد، که در آن $\{x_۱, x_۲, \dots, x_n\}$ مجموعهٔ نقاط در حوزهٔ انتگرال گیری $a \leqslant x \leqslant b$ است، A_iها ثابت هستند، و $w(x)$ معروف به تابع وزن است.

۳- کاربرد کوادراتور گاوس

عموماً مجموعه‌های $\{x_i\}$ و $\{A_i\}$ آماده برای رجوع، جدول بندی می‌شوند و لذاکاربرد کوادراتور گاوس فوری است.

مثال

برای محاسبهٔ

1. Laguerre 2. Hermite

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \, dt$$

دستور دو نقطه‌ای گاوس (گاوس - لژاندر) را به‌کار ببرید. این انتگرال را با استفاده از دستور چهار نقطه‌ای گاوس هم حساب کنید.

دستور دو نقطه‌ای $(n=۲)$ عبارت‌است از:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)\, dx \approx f(-\circ/۵۷۷۳۵\circ۲۷) + f(\circ/۵۷۷۳۵\circ۲۷).$$

با تغییر متغیر

$$t = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲}x + \frac{\pi}{۲}\right) = \pi(x+۱)/۴$$

نتیجه می‌شود

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{۴}\int_{-۱}^{۱} \sin\frac{\pi(x+۱)}{۴} \, dx,$$

$$f(x) = \sin\frac{\pi(x+۱)}{۴} \Longrightarrow f(-\circ/۵۷۷۳۵\circ۲۷) = \circ/۳۲۵۸۹$$

$$f(\circ/۵۷۷۳۵\circ۲۷) = \circ/۹۴۵۴۱,$$

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{۴}(\circ/۳۲۵۸۹ + \circ/۹۴۵۴۱)$$

$$= \circ/۹۹۸۴۸.$$

از دستور چهار نقطه‌ای $(n=۴)$:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x) dx \approx \circ/۳۴۷۸۵۴۸۵[f(-\circ/۸۶۱۱۳۶۳۱) + f(\circ/۸۶۱۱۳۶۳۱)]$$

$$+ \circ/۶۵۲۱۴۵۱۵[f(-\circ/۳۳۹۹۸۱\circ۴) + f(\circ/۳۳۹۹۸۱\circ۴)]$$

که منجر می‌شود به:

$$\int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \sin t \, d t = ۱/\circ\circ\circ\circ\circ\circ\circ$$

و این تا شش رقم اعشار درست است. این دقت به قدر کافی قانع کننده است، از قاعدهٔ سیمپسون با ۶۵ نقطه مقدار ۰/۹۹۹۹۹۹۸۳ به دست می‌آید!

خود را بیازمایید

۱ـ عیب دستورهای انتگرال گیری که از بـازهٔ شناسه‌ای ثابت استفاده می‌کنند چیست ؟

۲ـ شکل کلی دستور انتگرال گیری گاوس چیست ؟

۳ـ دستورهای دو و سه نقطه‌ای گاوس ـ لژاندر چقدر دقیق هستند؟

تمرین

دستورهای دو وچهار نقطه‌ای گاوس را جهت محاسبهٔ انتگرال زیر به‌کار ببرید:

$$\int_{۰}^{۱} \frac{۱}{۱+u} \mathrm{d}u.$$

گام سی و یك

انتگرال گیری عددی-۵*

معادلات دیفرانسیل

در درس ریاضیات محض دقت زیادی صرف خواص معادلات دیفرانسیل وفنون «تحلیلی» برای‌حل آنها می‌شود. متأسفانه بسیاری ازمعادلات دیفرانسیل (ازجمله، تقریباً تمام‌معادلات دیفرانسیل‌غیرخطی) که در«جهان واقعی» باآن روبه‌رومی‌شویم جواب تحلیلی‌ندارند. حتی مسئلهٔ ظاهراً سادهٔ حل

$$y' = \frac{x+y}{x-y}، \text{ با } y = ۰ \text{ اگر } x = ۱،$$

قبل از اینکه جواب بدقوارهٔ

$$\log_e(x^۲ + y^۲) = ۲\tan^{-۱}\left(\frac{y}{x}\right)$$

به‌دست آید محاسبات زیادی را ایجاب می‌کند. تازه به‌دست‌آوردن مقدار y نظیرفقط یك مقدار x، کار بسیار بیشتری می‌برد. درچنین حالاتی مرجح‌است که ازآغاز یك شیوهٔ عددی به‌کار برده شود.

معادلات دیفرانسیل‌جزئی خارج ازحد این کتاب درسی‌است، ولی‌می‌توان به‌اختصار بعضی ازروشهای حل تنها یك معادلهٔ دیفرانسیل معمولی مرتبهٔ اول

$$y' = f(x, y)$$

با مقدار اولیهٔ مفروض $y(x_۰) = y_۰$ را بررسی کرد. حل عددی مشتمل است بر برآورد مقادیر $y(x)$ درنقاط (معمولاً متساوی‌الفاصله) $x_۱$، $x_۲$، ...، x_N.

۱- سری تیلر

قبلاً، یك فن برای حل این مسئله به‌دست آوردیم و آن برآورد مقدار $y(x_1)$ به‌وسیلهٔ یك سری تیلر از مرتبه p بود (این مقدار خاص p به اندازهٔ $(x_1 - x_0)$ و دقت مورد نیاز بستگی دارد):

$$y(x_1) \approx y_1 = y(x_0) + (x_1 - x_0) y'(x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} y''(x_0) + \cdots + \frac{(x_1 - x_0)^p}{p!} y^{(p)}(x_0).$$

دراینجا $y(x_0)$ معلوم است، و $y'(x_0)$ را می‌توان با جایگذاری $x = x_0$ و $y = y_0$ درمعادلهٔ دیفرانسیل به‌دست آورد؛ اما مقادیر $y''(x_0)$، ...، $y^{(p)}(x_0)$ نیاز به مشتق گیری از $f(x, y)$ دارند که می‌توانند پیچیده باشند. توجه کنید که y_1، y_2، ...، y_N جهت نشان دادن برآوردهای $y(x_1)$، $y(x_2)$، ...، $y(x_N)$ به‌کار خواهند رفت.

وقتی که $y(x_1)$ حساب شده باشد می‌توان $y(x_2)$ را به‌وسیلهٔ یك سری تیلر یامتکی بر x_1 (که در این حالت خطای موجود در y_1 انتشار می‌یابد) یا متکی بر x_0 (که در این‌حالت ممکن است مجبور به افزایش p باشیم) برآورد کرد. در شیوهٔ موضعی، y_{n+1} ازیك سری تیلرمتکی بر x_n محاسبه می‌شود، درصورتی که درشیوهٔ جامع y_1، y_2، ...، y_N جملگی از سری تیلرمتکی بر x_0 محاسبه می‌شوند.

یك‌راه اجتناب ازمشتق‌گیری از $f(x, y)$ این است که $p = 1$ را ثابت نگه‌داریم و

$$y_{n+1} = y_n + (x_{n+1} - x_n) f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, \ldots, N-1$$

را محاسبه کنیم این طریقه به‌نام روش اویلر معروف‌است. اما خطای برشی بزرگ و نتایج، نادقیق خواهند بود، مگر آنکه فاصله بین x_iها بسیارکوچك باشند.

۲- روشهای[1] رانگ[2]- کوتا[3]

یك راه معمولی اجتناب از مشتق گیری از $f(x, y)$، بدون از دست دادن دقت، مشتمل است بر برآورد $y(x_{n+1})$ از y_n و از یك میانگین وزن‌دار از مقادیر $f(x, y)$، به شرطی که این وزنها چنان انتخاب شوند که خطای برشی حاصل با خطای برشی سری تیلر از مرتبهٔ p قابل مقایسه باشد. جزئیات به‌دست آوردن این طریقه خارج ازحد این کتاب است

---

۱. این الگوریتم برای محاسبهٔ کامپیوتری مناسب است. جهت مطالعه و استفاده در برنامه نویسی درصفحه ۱۸۴ یك فلوچارت داده شده‌است.

2. Runge 3. Kutta

ولی دو روش ساده از روشهای رانگ‌ـکوتا را می‌توانیم ذکر کنیم.

روش اول دارای دقتی هم مرتبه با دقت سری تیلر به ازای $p=2$ است، ومعمولا به‌صورت سه مرحله‌ای زیر نوشته می‌شود:

$$k_1 \quad = h_n f(x_n,\ y_n)$$

$$k_2 \quad = h_n f(x_n + h_n,\ y_n + k_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

روش دوم روش مرتبهٔ چهارذیل است:

$$k_1 \quad = h_n\ f(x_n,\ y_n)$$

$$k_2 \quad = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 \quad = h_n f\left(x_n + \frac{1}{2}h_n, y_n + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 \quad = h_n f(x_n + h_n,\ y_n + k_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

اگر نقاط متساوی‌الفاصله باشند، طول گام $h_n (= x_{n+1} - x_n)$ ثابت خواهدبود. هیچ یك ازاین‌دو روش شامل محاسبهٔ مشتقات $f(x,\ y)$ نیست؛ درعوض خود $f(x,\ y)$ چندین بار (دوبار در روش مرتبهٔ دو، چهار بار در روش مرتبهٔ چهار)محاسبه می‌شود.

۳ـ روشهای چندگامی

روشهای سری تیلر و رانگ ـ کوتا در ردهٔ روشهای تك گامی قرار می گیرند، زیرا تنها مقدار جواب تقریبی که در ساختن y_{n+1} به‌کار می‌رود y_n، یعنی نتیجهٔ گام قبلی، است. روشهای چندگامی، برای تقلیل تعداد دفعاتی که $f(x,y)$ یامشتقاتش باید محاسبه شوند، از مقادیرقبلی‌ترنظیر y_{n-1}، y_{n-2}، ... نیز استفاده می کنند.

از جملهٔ روشهای چند گامی که می‌توان آنها را باانتگرال‌گیری از چند جمله‌ایهای درونیابی به‌دست‌آورد (با به‌کار بردن f_n برای نشان دادن $f(x_n,\ y_n)$) عبارتند از:

الف) روش نقطهٔ میانی (مرتبهٔ دو):

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf_n,$$

ب) روش میلن[1] (مرتبهٔ چهار):

$$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{4}{3}h(2f_n-f_{n-1}+2f_{n-2}),$$

پ) روش ادمز[2]- بشفورث[3] (مرتبهٔ چهار):

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{24}h(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}).$$

دراینجا نقاط مورد استفاده درهریك از دستورها، متساوی‌الفاصله و با طول گام h هستند. ما به‌بحث درباره طرق گوناگونی که در آنها روشهای چندگامی استفاده می‌شوند نمی‌پردازیم، اما مسلماً به‌بیش از یك «مقداراولیه» احتیاج داریم که خود یك‌نقص است. از سوی دیگر، برای ساختن y_{n+1} تنها نیاز به محاسبهٔ $f(x, y)$ برای یکبار داریم، زیرا f_{n-1}، f_{n-2}، . . . قبلا محاسبه شده‌اند. اینکه کدام یك ازسه نوع‌روش (تیلر، رانگ-کوتا، چندگامی) بهترین روش‌است عمدتاً به‌پیچیدگی $f(x, y)$ بستگی دارد. ملاحظات دیگر در کتابهای درسی پیشرفته‌تر بحث می‌شوند.

۴- مثال

مقایسهٔ بعضی از روشهای فوق‌الذکردرمورد یك مسئلهٔ بسیار ساده‌آموزنده است: مطلوب است برآورد $y(0.5)$ مشروط به اینکه:

$$y(0)=1 \qquad \text{با} \qquad y'=x+y$$

یعنی،

$$y_0=1 \qquad \text{و} \qquad x_0=0$$

جواب دقیق عبارت است از:

$$y(x)=2e^x-x-1.$$

بنابراین،

$$y(0.5)=1.79744.$$

ازیك طول گام ثابت $h=0.1$ استفاده می کنیم و محاسبه راتا $5D$ انجام می‌دهیم.

(الف) روش اویلر (مرتبهٔ یك):

$$y_{n+1}=y_n+0.1(x_n+y_n)=0.1x_n+1.1y_n$$

بنابراین،

1. Milne 2. Adams 3. Bashforth

$$y_۱ = ۰ر۱(۰ر۰) + ۱ر۱(۱) = ۱ر۱$$
$$y_۲ = ۰ر۱(۰ر۱) + ۱ر۱(۱ر۱) = ۱ر۲۲$$
$$y_۳ = ۰ر۱(۰ر۲) + ۱ر۱(۱ر۲۲) = ۱ر۳۶۲$$
$$y_۴ = ۰ر۱(۰ر۳) + ۱ر۱(۱ر۳۶۲) = ۱ر۵۲۸۲$$
و
$$y_۵ = ۰ر۱(۰ر۴) + ۱ر۱(۱ر۵۲۸۲) = ۱ر۷۲۱۰۲$$
که خطایی درحدود ۰ر۰۸ دارد.

ب) سری تیلر (مرتبهٔ چهار):

چون

$$y' = x + y,\ y'' = ۱ + y',\ y''' = y'' \text{ و } y^{(۴)} = y'''$$

داریم:

$$y_{n+۱} = y_n + ۰ر۱(x_n + y_n) + \frac{(۰ر۱)^۲}{۲}(۱ + x_n + y_n) + \frac{(۰ر۱)^۳}{۶}(۱ + x_n + y_n) + \frac{(۰ر۱)^۴}{۲۴}(۱ + x_n + y_n)$$

$$\approx ۰ر۰۰۵۱۷ + ۰ر۱۰۵۱۷ x_n + ۱ر۱۰۵۱۷ y_n.$$

بنابراین،

$$y_۱ = ۰ر۰۰۵۱۷ + ۰ر۱۰۵۱۷(\ ۰\ ) + ۱ر۱۰۵۱۷(۱) = ۱ر۱۱۰۳۴$$
$$y_۲ = ۰ر۰۰۵۱۷ + ۰ر۱۰۵۱۷(۰ر۱) + ۱ر۱۰۵۱۷(۱ر۱۱۰۳۴) = ۱ر۲۴۲۸۰$$
$$y_۳ = ۰ر۰۰۵۱۷ + ۰ر۱۰۵۱۷(۰ر۲) + ۱ر۱۰۵۱۷(۱ر۲۴۲۸۰) = ۱ر۳۹۹۷۱$$
$$y_۴ = ۰ر۰۰۵۱۷ + ۰ر۱۰۵۱۷(۰ر۳) + ۱ر۱۰۵۱۷(۱ر۳۹۹۷۱) = ۱ر۵۸۳۶۴$$
و
$$y_۵ = ۰ر۰۰۵۱۷ + ۰ر۱۰۵۱۷(۰ر۴) + ۱ر۱۰۵۱۷(۱ر۵۸۳۶۴) = ۱ر۷۹۷۴۳$$
که خطایی درحدود ۰ر۰۰۰۰۱ دارد.

پ) رانگ ـ کوتا (مرتبهٔ دو):

$$k_۱ = ۰ر۱(x_n + y_n),\ k_۲ = ۰ر۱(x_n + ۰ر۱ + y_n + k_۱),\ y_{n+۱} = y_n + \frac{۱}{۲}(k_۱ + k_۲).$$

$$n=0 : k_1 = 0.1(0+1) = 0.1,\ k_2 = 0.1(0.1+1.1) = 0.12,$$
$$y_1 = 1 + \frac{1}{2}(0.1 + 0.12) = 1.11.$$

$$n=1 : k_1 = 0.1(0.1+1.11),\ k_2 = 0.1(0.2+1.11+0.121),$$
$$y_2 = 1.11 + \frac{1}{2}(0.121 + 0.1431) = 1.24205.$$

$$n=2 :\ k_1 = 0.1(0.2+1.24205),$$
$$k_2 = 0.1(0.3+1.24205+0.14421)$$
$$y_3 = 1.24205 + \frac{1}{2}(0.14421 + 0.16863) = 1.39847.$$

$$n=3 :\ k_1 = 0.1(0.3+1.39847),$$
$$k_2 = 0.1(0.4+1.39847+0.16985)$$
$$y_4 = 1.39847 + \frac{1}{2}(0.16985 + 0.19683) = 1.58181.$$

$$n=4 :\ k_1 = 0.1(0.4+1.58181),$$
$$k_2 = 0.1(0.5+1.58181+0.19818)$$
$$y_5 = 1.58181 + \frac{1}{2}(0.19818 + 0.22800) = 1.79490.$$

y_5 دارای خطای تقریبی 0.003 است.

همچنان که ممکن است انتظار داشته باشیم، روش مرتبهٔ چهار به وضوح برتر است، روش مرتبهٔ یك به‌وضوح پست‌تر، و روش مرتبهٔ دو بین آنها قرار دارد.

خود را بیازمایید

۱ــ عیب اصلی هریك از سه نوع روش عرضه شده در این گام چیست؟
۲ــ چرا باید انتظار داشته باشیم که روشهای ازمراتب بالاتر دقیقتر باشند؟

تمرین

۱ــ با فرض اینکه $y' = x + y$ و $y(0) = 1$، ازروش نقطهٔ میانی با طول گام $h = 0.1$ استفاده و $y(0.5)$ را برآورد کنید.
به‌عنوان دومین مقدار آغازی (از (پ) فوق) $y_1 = 1.11$ را اختیار کنید.

۲ــ درصورتی که $y' = -xy^2$ و $y(0) = 2$ ، از روش اویلر با طول گام $h = 0.2$ استفاده‌و $y(1)$ را برآورد کنید.

ضمیمه

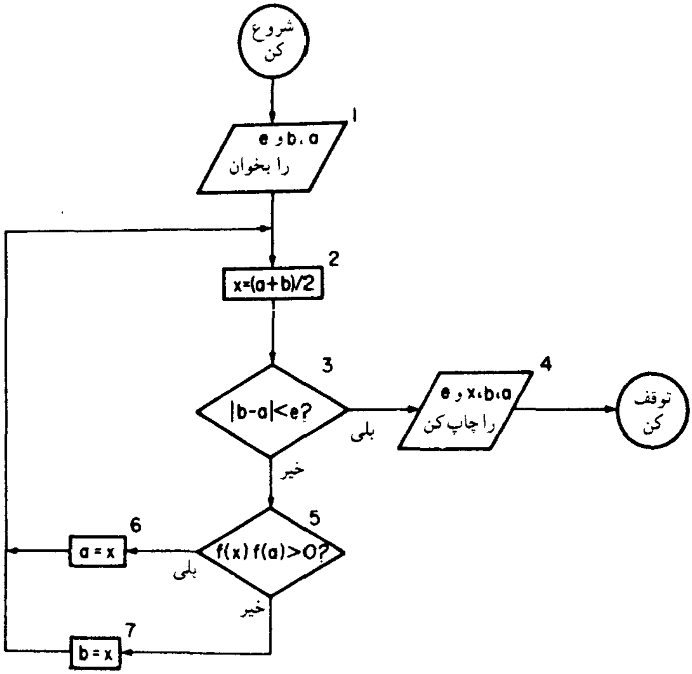
فلوچارتها

دراینجا برای بعضی از الگوریتمهایی که در این کتاب معرفی شده‌اند فلوچارتهای مبنا را ارائه می‌دهیم. اگردانشجویان فلوچارت یك‌روش را همزمان با یادگیری آن روش در گام مربوط مطالعه کنند بیشترنتیجه می گیرند. اگرآنها با یك زبان برنامه‌نویسی هم‌آشنا باشند باید بکوشند لااقل برخی از فلوچارتها را به برنامه‌های کامپیوتری برگردانند وآنها را برای تمرینهای مربوط به‌کار ببرند.

فهرست مطالب

۱ـ روش تنصیف (گام ۷)

فرض کنید معادلهٔ مورد نظر به‌صورت $f(x)=0$ باشد.

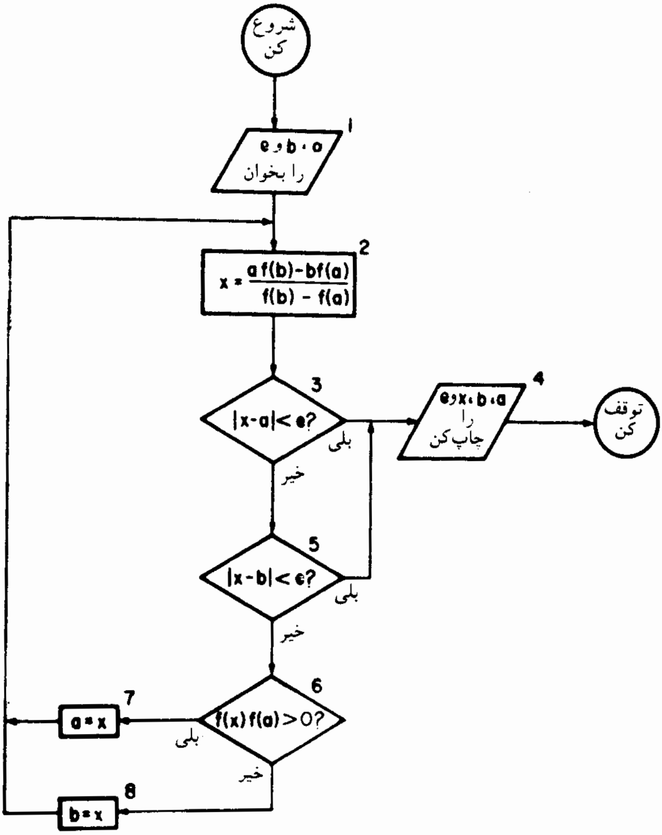


نکاتی برای مطالعه

الف) موارد استفادهٔ مقادیرورودی چه هستند؟
ب) منظور بلوکهای ۵، ۶ و ۷ را توضیح دهید.
پ) فلوچارت بالا را چنان اصلاح کنید که این فرایند همواره درست بعداز M مرحله خاتمه پذیرد.
ت) فلوچارت بالا را چنان تغییردهید که این فرایند به مجردی که $|f(x)|<e$ توقف کند.
ث) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.
ج) این برنامهٔ کامپیوتری را برای حل معادلهٔ $x+\cos x=0$ به‌کار برید.

۲ـ روش نابجایی (گام ۸)

فرض کنید معادله مورد نظر به صورت $f(x)=0$ باشد.



نکاتی برای مطالعه

الف) موارد استفادهٔ مقادیر ورودی چه هستند؟

ب) منظور بلوکهای ۳ و ۵ را شرح دهید.

پ) تحت چه شرایطی فرایند بالا ممکن است با خطای بزرگی برای x توقف کند؟

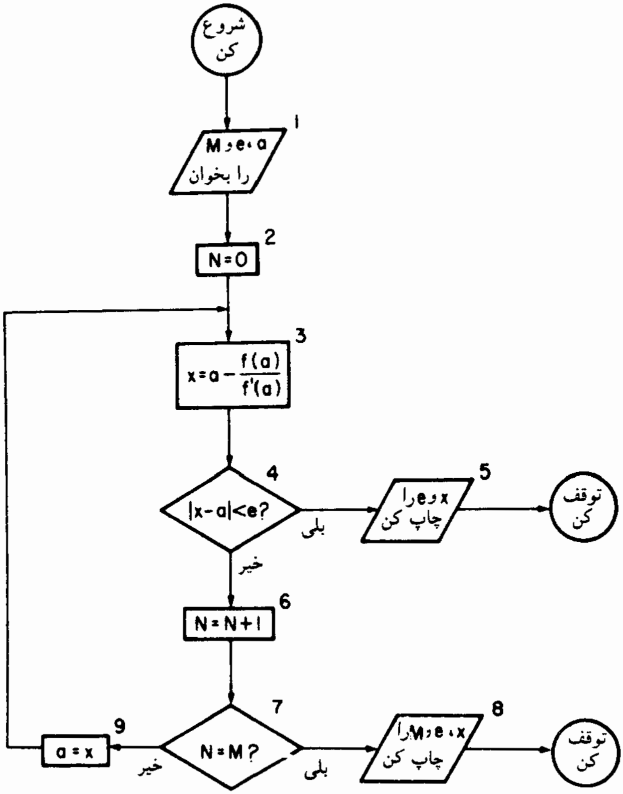
ت) فلوچارت بالا را چنان اصلاح کنید که این فرایند به‌محض اینکه $|f(x)|<e$ توقف کند.

ث) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.

ج) این برنامهٔ کامپیوتری را برای حل معادلهٔ $x+\cos x=0$ به کار ببرید.

۳- روش نیوتن ـ رفسون (گام ۱۰)

فرض کنید که معادلهٔ موردنظر به‌صورت $f(x) = 0$ باشد.



چند نکته برای مطالعه

الف) موارد استفادهٔ مقادیر ورودی چه هستند؟

ب) چرا M در بلوك خروجی ۸ منظور شده است؟

پ) اگر $f'(a)$ خیلی کوچك باشد، چه اتفاقی می‌افتد؟

ت) فلوچارت بالا را چنان اصلاح کنید که وقتی $f(a)$ خیلی کوچك باشد عمل مناسبی انجام پذیرد.

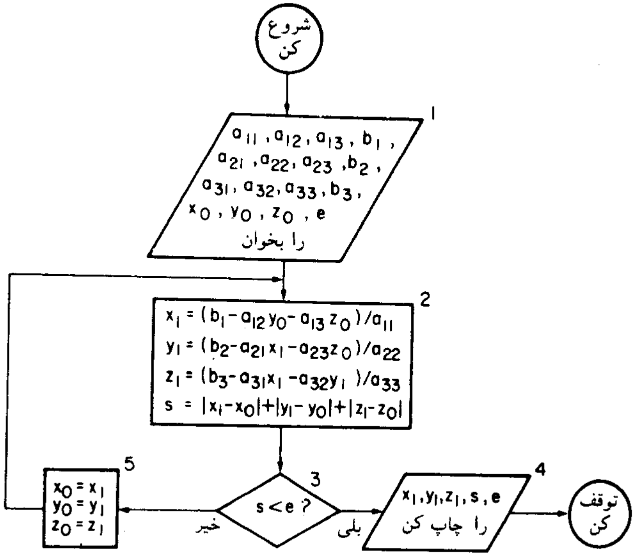
ث) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.

ج) این برنامهٔ کامپیوتری را برای حل معادلهٔ $x + \cos x = 0$ به‌کار ببرید.

۴- روش تکراری گاوس ـ سایدل (گام ۱۳)

فرض کنید دستگاه عبارت باشد از:

$$a_{۱۱}x+a_{۱۲}y+a_{۱۳}z=b_{۱}$$
$$a_{۲۱}x+a_{۲۲}y+a_{۲۳}z=b_{۲}$$
$$a_{۳۱}x+a_{۳۲}y+a_{۳۳}z=b_{۳}$$



چند نکته برای مطالعه

الف) موارد استفادهٔ مقادیر ورودی چه هستند؟

ب) منظور از عدد s چیست؟

پ) فلوچارت بالا را چنان اصلاح کنید که حفاظی برای واگرایی یا همگرایی کند وجود داشته باشد (با فلوچارت ۳ مقایسه شود).

ت) فلوچارت بالا را برای حل یك دستگاه کلی $n\times n$ مانند $Ax=b$ اصلاح کنید.

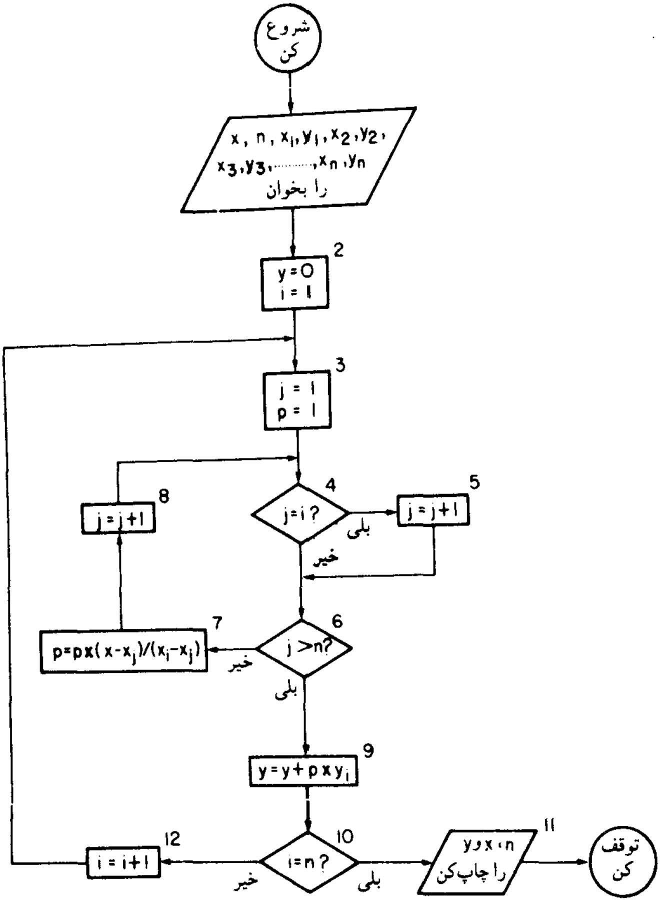
ث) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.

ج) این برنامهٔ کامپیوتری را برای حل دستگاه ذیل به‌کار ببرید:

$$۸x+y-۲z=۵$$
$$x-۷y+z=۹$$
$$۲x+۹z=۱۱۰$$

۵- درونیابی لاگرانژ (گام۲۲)

با فرض اینکه $y_1=y(x_1)$، $y_2=y(x_2)$، ...، $y_n=y(x_n)$، مطلوب است $y(x)$.



نکاتی برای مطالعه

الف) منظور از بلوکهای ۴ و ۵ چیست؟

ب) در بلوك ۹، مقدار p (با جملات جبری) چیست؟

پ) در بلوك ۹، مقدار y (با جملات جبری) چیست؟

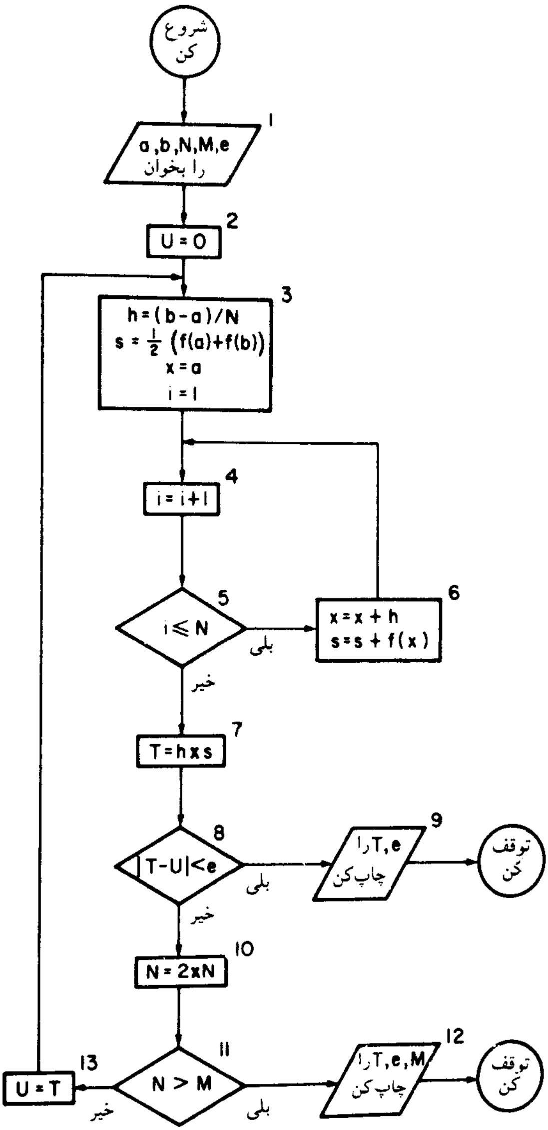
ت) از فلوچارت بالا با دادههای $x=۱٫۵$، $n=۳$، $x_1=۰$، $y_1=۲٫۵$، $x_2=۱$، $y_2=۴٫۷$، $x_3=۳$، $y_3=۳٫۱$، استفاده کنید.

ث) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.

ج) این برنامهٔ کامپیوتری را درمورد دادههای (ت) بالا بهکار ببرید.

۶ـ قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (گام ۲۷)

فرض کنید انتگرال موردنظر به‌صورت $\int_a^b f(x)\,dx$ باشد.



چند نکته برای مطالعه

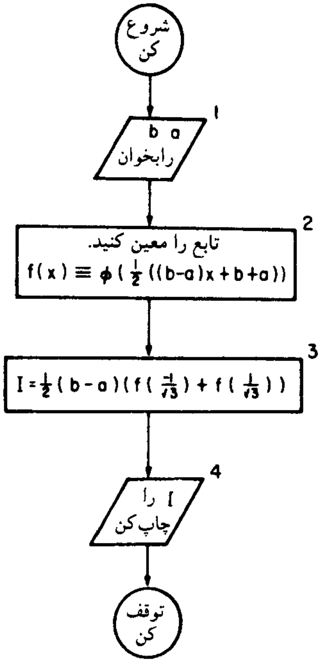
الف) موارد استفادهٔ مقادیر ورودی چه هستند؟

ب) مقدار T بعداز بلوك ۷ (با جملات جبری) چیست؟
پ) منظور از بلوکهای ۸، ۱۰ و ۱۱ چیست؟
ت) چرا M در بلوك خروجی ۱۲ منظور شده‌است؟
ث) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.
ج) این برنامهٔ کامپیوتری را جهت محاسبهٔ انتگرالهای زیر به‌کار ببرید:

$$\int_{۰}^{۱} e^{-x^{۲}}\mathrm{d}x \quad \text{و} \quad \int_{۰}^{۲} \frac{\mathrm{d}x}{۱+x^{۳}}\,.$$

۷ـ فرمولهای انتگرال‌گیری گاوس (گام ۳۰)

فرض کنید انتگرال مورد نظر به صورت $\int_a^b \phi(u)\,du$ باشد. ازدستور دو نقطه‌ای گاوس استفاده کنید.



چند نکته برای مطالعه

الف) منظور از بلوك ۲ چیست؟

ب) برای به‌دست آوردن الگوریتمی مبتنی بردستور سه نقطه‌ای گاوس، چه‌تغییراتی لازم است؟

پ) فلوچارت بالا را چنان اصلاح کنید که، جهت محاسبه انتگرال فوق درحد خطای قابل اغماض e، از تقسیمات جزء متوالی بازهٔ (a و b) استفاده کند (با فلوچارت۶ مقایسه شود).

ت) برای الگوریتم بالا (به‌طریقی که در قسمت (پ) اصلاح گردید) یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.

ث) این برنامهٔ کامپیوتری را جهت محاسبهٔ انتگرالهای زیر به‌کار ببرید:

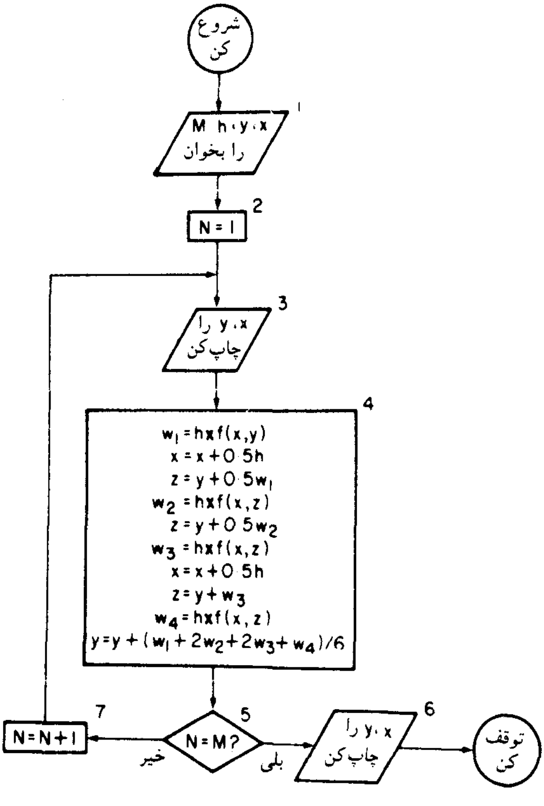
$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \quad \text{و} \quad \int_0^2 \frac{dx}{1+x^3}.$$

۸- روش رانگ-کوتا (گام ۳۱*)

فرض کنید معادلهٔ مورد نظر به صورت

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y)$$ باشد.

از روش مرتبهٔ چهار معمولی استفاده کنید.



چند نکته برای مطالعه

الف) موارد استفادهٔ مقادیر ورودی چه هستند؟
ب) بین بلوك ۲ و بلوك ۶ تابع f چند بار محاسبه می‌شود؟
پ) جهت استفاده از روش مرتبهٔ دو رانگ-کوتا فلوچارت بالا را اصلاح کنید.
ت) برای الگوریتم فوق یك برنامهٔ کامپیوتری بنویسید.
ث) این برنامهٔ کامپیوتری را جهت حل معادلهٔ $y' = x - y$، با شروع از $x = 0$، $y = 1$ و گرفتن ۱۰ گام به‌طول ۰٫۱ به‌کار ببرید.

فهرست منابع

آنچه ذیلا آمده‌است لیست کوتاهی‌است از کتابهایی که ممکن‌است جهت مطالعات تکمیلی، برهانهای حذف شده در این کتاب درسی، یا مطالعهٔ بیشتر در زمینهٔ آنالیزعددی، به کار گرفته شود.

Calculus

Thomas, *Calculus and Analytic Geometry* [1] (Addison - Wesley, 1967).

Computer Science

Davis, *Introduction to Electronic Computers* (McGraw-Hill, 1971).

Forsythe, Keenan, Organick and Stenberg, *Computer Science* (Wiley, 1969).

Linear Algebra

Murdoch. *Linear Algebra for Undergraduates* (Wiley, 1962).

Numerical Analysis

Acton, *Numerical Methods that work* (Harper and Row, 1970).

Conte and de Boor, *Elementary Numerical Analysis* (Mc Graw - Hill, 1972).

Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra* (Dover, 1959).

Fox and Mayers, *Computing Methods for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, 1968).

Tables

Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1965).

---

۱. توماس، جورج ب. حساب دیفرانسیل وانتگرال وهندسهٔ تحلیلی، چاپ‌دوم. ترجمهٔ علی‌اکبر جعفریان وابوالقاسم میامئی، مرکز نشردانشگاهی، تهران ۱۳۶۲.

جواب تمرینها

گام ۱

محل خطا باستاره مشخص شده‌است. توجه داشته باشید که استفاده ازهردودستور، خطاهای از نوع (الف) و (ب) را در برمی‌گیرد.

۱ـ
$$T \approx ۲ \times ۳٫۱\underset{*}{۴} \times \sqrt{\underset{*}{۷}۵/۹۸\underset{*}{۱}} \approx ۶٫۲۸ \times \sqrt{۰٫۰۷۶\underset{*}{۵}}$$

$$\approx ۶٫۲۸ \times ۰٫۲۷\underset{*}{۷}$$

$$\approx ۱٫۷\underset{*}{۴} \quad \text{ثانیه}$$

۲ـ
$$R \approx ۰٫۰۲\underset{*}{۸} \times ۳٫۱\underset{*}{۴} \times ۵۶٫۲\underset{*}{۵} \times \sqrt{۲ \times ۹۸۱ \times \underset{*}{۶}۵\underset{*}{۰}}$$

$$\approx ۴٫۹۴\underset{*}{۶} \times ۱۱۲\underset{*}{۹}$$

$$\approx ۵٫۵\underset{*}{۸} \times ۱۰^{۳} \quad \text{ثانیه/سانتیمترمکعب}.$$

گام ۲

۱ـ $۱٫۲۳۴۵ \times ۱۰^{۱}$، $۸٫۰۰۵۹ \times ۱۰^{-۱}$، $۲٫۹۶۸۴۴ \times ۱۰^{۲}$، $۵٫۱۹ \times ۱۰^{-۳}$

۲ـ (الف) ۳۴٫۷، ۳٫۴۷؛ ۰٫۳۴۷ و ۰٫۰۳۴۷.

(ب) ۳۴٫۷۸۲، ۳٫۴۷۸، ۰٫۳۴۷ و ۰٫۰۳۴.

(پ) ۳۴٫۸، ۳٫۴۸، ۰٫۳۴۸ و ۰٫۰۳۴۸.

(ت) ۳۴٫۷۸۲، ۳٫۴۷۸، ۰٫۳۴۸ و ۰٫۰۳۵.

گام ۳

(الف) نتیجهٔ مورد نظر ۱۳٫۵۷ است، $\text{Max}|e_{abs}| = ۰٫۰۰۵ + ۰٫۰۰۵ = ۰٫۰۱$، بنابراین جواب ۱۳٫۵۷ ± ۰٫۰۱، یا درست تا ۳S، ۱۳٫۶ است.

(ب) نتیجهٔ مورد نظر ۰٫۰۱ است، $\text{Max}|e_{abs}| = ۰٫۰۱$، ولذا، با وجودی که مؤلفه ها تا ۵S درست هستند ولی، جواب ممکن است حتی تا ۱S هم درست نباشد! این پدیده به از دست دادن رقم با معنی یا به حذف معروف است.

(پ) نتیجه ۱۳٫۳۶۵۱ است،

$$\text{Max}|e_{abs}| = (۴٫۲۷ + ۳٫۱۳) \times ۰٫۰۰۵ = ۰٫۰۳۷$$

و لذا جواب عبارت است از ۱۳٫۳۶۵۱ ± ۰٫۰۳۷ یا، درست تا ۲S، عبارت است از ۱۳.

(ت) جواب موردنظر ۱٫۸۵۶۷۶− است و

$$\text{Max}|e_{abs}| \approx ۰٫۵۱۳ \times ۰٫۰۰۵ + ۹٫۴۸ \times ۰٫۰۰۰۵ + ۰٫۰۰۵ \approx ۰٫۰۱۲,$$

لذا جواب عبارت است از ۱٫۸۵۶۷۶− ± ۰٫۰۱۲ یا، درست تا ۱S، عبارت است از ۲−.

(ث) نتیجه ... ۱٫۱۰۹ است و

$$\text{Max}|e_{rel}| \approx \frac{\text{Max}|e_{abs}|}{۱٫۱۰۹} \approx \frac{۰٫۰۰۵}{۰٫۲۵} \approx \frac{۰٫۰۰۵}{۲٫۸۴} + \frac{۰٫۰۰۵}{۰٫۶۴} \approx ۰٫۰۳۰,$$

لذا جواب ۱٫۱۰۹ ± ۰٫۰۳۳ است یا، درست تا ۲S، ۱٫۱ است.

(ج) جواب مورد نظر ۰٫۴۷ است، $\text{Max}|e_{abs}| = ۷ \times ۰٫۰۰۵ = ۰٫۰۳۵$، و لذا جواب عبارت است از ۰٫۴۷ ± ۰٫۰۳۵ که حتی نمی‌توانیم نتیجه را تا ۱S هم تضمین کنیم.

گام ۴

۱- (الف) $۱۲٫۰۱ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۱٫۲۰ \times ۱۰^{۳}$

(ب) $۶٫۱۹ \times ۱۰^{۲} + ۰٫۳۶۱ \times ۱۰^{۲} = ۶٫۵۵۱ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۶٫۵۵ \times ۱۰^{۲}$

(پ) $۰٫۳۷ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۳٫۷۰ \times ۱۰^{۱}$

(ت) $۶٫۱۹ \times ۱۰^{۲} - ۰٫۳۶۱ \times ۱۰^{۲} = ۵٫۸۲۹ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۵٫۸۳ \times ۱۰^{۲}$

(ث) $۳٫۶۳۶۰۰ \times ۱۰^{۲} \rightarrow ۳٫۶۴ \times ۱۰^{۲}$

(ج) $۳۳٫۳۰۰۰ \times ۱۰^{۰} \rightarrow ۳٫۳۳ \times ۱۰^{۱}$

(چ) $۱٫۲۵۰۰۰ \times ۱۰^{۳} \rightarrow ۱٫۲۵ \times ۱۰^{۳}$

(ح) $-۰٫۸۶۹۳۰۰ \ldots, \times ۱۰^{-۵} \rightarrow -۸٫۶۹ \times ۱۰^{-۶}$

۲- چون اندازه و علامت خطاهای اولیه معلوم نیستند، با درنظر گرفتن بدترین حالت برای خطاهای اولیه، از نتایج گام ۳ اندازهٔ ماکزیمم خطای مجتمع E را برآورد می‌کنیم. جهت برآورد خطای منتشر شده برای اعمال جمع و تفریق، از $\mathrm{Max}|e_{abs}| = |e_۱| + |e_۲|$ و برای اعمال ضرب و تقسیم از

$$\mathrm{Max}|e_{rel}| \approx \left|\frac{e_۱}{x^*}\right| + \left|\frac{e_۲}{y^*}\right|$$

استفاده می‌کنیم. اندازهٔ خطای تولید شده با ε نشان داده می‌شود.

(الف) $\mathrm{Max}|e_{abs}| = ۰٫۰۰۵ \times ۱۰^{۲} + ۰٫۰۰۵ \times ۱۰^{۲}$, $\varepsilon = ۰٫۰۰۱ \times ۱۰^{۳}$,

$= ۰٫۰۱ \times ۱۰^{۲}, \; E = ۰٫۰۰۲ \times ۱۰^{۳}.$

(ب) $\varepsilon = ۰٫۰۰۱ \times ۱۰^{۲}$,

$$\mathrm{Max}|e_{abs}| = ۰٫۰۰۵ \times ۱۰^{۲} + ۰٫۰۰۵ \times ۱۰^{۱} = ۰٫۰۰۵۵ \times ۱۰^{۲},$$

$E = ۰٫۰۰۶۵ \times ۱۰^{۲}.$

(پ) $\varepsilon = ۰, \; \mathrm{Max}|e_{abs}| = ۰٫۰۰۵ \times ۱۰^{۲} + ۰٫۰۰۵ \times ۱۰^{۲}$

$= ۰٫۰۱ \times ۱۰^{۲},$

$E = ۰٫۱ \times ۱۰^{۱}$ (نسبتاً بزرگ).

(ت) نظیر (ب) است.

(ث) $\varepsilon = ۰٫۰۰۴ \times ۱۰^{۲}, \; \mathrm{Max}|e_{rel}| \approx \dfrac{۰٫۰۰۵}{۳٫۶۰} + \dfrac{۰٫۰۰۵}{۱٫۰۱},$

$$\mathrm{Max}|e_{abs}| \approx ۰٫۰۰۵ \times (۱٫۰۱ + ۳٫۶۰) \times ۱۰^{۲} \approx ۰٫۰۲۳ \times ۱۰^{۲},$$

$E \approx ۰٫۰۲۷ \times ۱۰^{۲}.$

(ج)
$$\varepsilon=۰,\ \mathrm{Max}|e_{abs}|\approx ۰٫۰۰۵\times(۷٫۵۰+۴٫۴۴)\times ۱۰^{۰}$$
$$=۰٫۰۶\times ۱۰^{۰}$$
$$E\approx ۰٫۰۰۶\times ۱۰^{۱}.$$

(چ)
$$\varepsilon=۰,\ \mathrm{Max}|e_{rel}|\approx \frac{۰٫۰۰۵}{۶٫۴۵}+\frac{۰٫۰۰۵}{۵٫۱۶},$$
$$\mathrm{Max}|e_{abs}|\approx \frac{۰٫۰۰۵\times ۱۱٫۶۱}{۶٫۴۵\times ۵٫۱۶}\times ۱٫۲۵\times ۱۰^{۳}\approx ۰٫۰۰۲\times ۱۰^{۳},$$
$$E\approx ۰٫۰۰۲\times ۱۰^{۳}.$$

(ح)
$$\varepsilon\approx ۰٫۰۰۳\times ۱۰^{-۶},\ \ \mathrm{Max}|e_{rel}|\approx \frac{۰٫۰۰۵}{۲٫۸۶}+\frac{۰٫۰۰۵}{۳٫۲۹},$$
$$\mathrm{Max}|e_{abs}|\approx \frac{۰٫۰۰۵\times ۶٫۱۵}{۲٫۸۶\times ۳٫۲۹}\times ۸٫۶۹\times ۱۰^{-۶}\approx ۰٫۰۲۸\times ۱۰^{-۶},$$
$$E\approx ۰٫۰۳۱\times ۱۰^{-۶}.$$

۳- (الف)
$$b-c=۵٫۶۸۵\times ۱۰^{۱}-۵٫۶۴۱\times ۱۰^{۱}=۰٫۰۴۴\times ۱۰^{۱}\rightarrow ۴٫۴۰۰\times ۱۰^{-۱}.$$
$$a(b-c)=۶٫۸۴۲\times ۱۰^{-۱}\times ۴٫۴۰۰\times ۱۰^{-۱}$$
$$=۳۰٫۱۰۴۸\times ۱۰^{-۲}\rightarrow ۳٫۰۱۰\times ۱۰^{-۱}.$$
$$ab=۶٫۸۴۲\times ۱۰^{-۱}\times ۵٫۶۸۵\times ۱۰^{۱}$$
$$=۳۸٫۸۹۶۷۷۰\times ۱۰^{۰}\rightarrow ۳٫۸۹۰\times ۱۰^{۱}.$$
$$ac=۶٫۸۴۲\times ۱۰^{-۱}\times ۵٫۶۴۱\times ۱۰^{۱}$$
$$=۳۸٫۵۹۵۷۲۲\times ۱۰^{۰}\rightarrow ۳٫۸۶۰\times ۱۰^{۱}.$$
$$ab-ac=$$
$$۳٫۸۹۰\times ۱۰^{۱}-۳٫۸۶۰\times ۱۰^{۱}=۰٫۰۳۰\times ۱۰^{۱}\rightarrow ۳٫۰۰۰\times ۱۰^{-۱}.$$

جواب به‌دست‌آمده (باعملیات تا $۶S$) عبارت است از $۳٫۰۱۰۴۸\times ۱۰^{-۱}$، باحداکثر خطای منتشرشدهٔ $۰٫۰۶۹\times ۱۰^{-۱}$ (ولذا تنها می‌توان به اولین رقم اعتماد کرد).

(ب)

$$a+b=۹٫۸۱۲\times ۱۰^{۱}+۰٫۰۴۶۳۱\times ۱۰^{۱}=۹٫۸۵۸۳۱\times ۱۰^{۱}$$
$$\to ۹٫۸۵۸\times ۱۰^{۱}.$$

$$(a+b)+c=۹٫۸۵۸\times ۱۰^{۱}+۰٫۰۸۳۴۰\times ۱۰^{۱}$$
$$=۹٫۹۴۱۴۰\times ۱۰^{۱}\to ۹٫۹۴۱\times ۱۰^{۱}.$$

$$b+c=۴٫۶۳۱\times ۱۰^{-۱}+۸٫۳۴۰\times ۱۰^{-۱}$$
$$=۱۲٫۹۷۱\times ۱۰^{-۱}\to ۱٫۲۹۷\times ۱۰^{۰}.$$

$$a+(b+c)=۹٫۸۱۲\times ۱۰^{۱}+۰٫۱۲۹۷\times ۱۰^{۱}$$
$$=۹٫۹۴۱۷\times ۱۰^{۱}\to ۹٫۹۴۲\times ۱۰^{۱}.$$

جواب به‌دست آمده (باعملیات تا $۶S$) عبارت است از $۹٫۹۴۱۷۱\times ۱۰^{۱}$، با حداکثر خطای منتشرشدهٔ $۰٫۰۰۰۵۱\times ۱۰^{۱}$.

گام ۵

۱- $f(x)=\cos x,\ f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ \cdots$

$$\cos x=\cos ۰-x\sin ۰-\frac{x^{۲}}{۲!}\cos ۰+\cdots$$

$$=۱-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\cdots.$$

۲- i) خطی: چند جمله‌ای مطلوب برحوزهٔ $-۰٫۱<x<۰٫۱$ عبارت است از $۱+x$.

ii) درجهٔ دوم: چند جمله‌ای مطلوب برحوزهٔ $-۰٫۳<x<۰٫۳$ عبارت است از $۱+x+(۱/۲)x^{۲}$.

iii) درجهٔ سوم: چندجمله‌ای مطلوب برحوزهٔ $-۰٫۵<x<۰٫۵$ عبارت‌است‌از

$$۱+x+\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۶}x^{۳}.$$

۳ــ داریم:

$$e^x \approx ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

که درآن برای هر x بین ۰ و ۱ داریم:

$$R_n = \frac{x^{n+۱}}{(n+۱)!} e^{\xi} < \frac{۱^{n+۱} e^۱}{(n+۱)!}.$$

لذا $R_n < ۱/۲ \times ۱۰^{-۵}$، مشروط براینکه $(n+۱)! \geqslant ۲e \times ۱۰^۵ \approx ۵۴۳۶۵۶$؛ یعنی بااین شرط که داشته باشیم $n = ۹$ (از این‌رو، ۱۰ جمله)، زیرا $۹! = ۳۶۲۸۸۰$.

۴ــ

$$q_۰ = ۰ \qquad p_۰ = ۱$$

$$q_۱ = q_۰(۳٫۱) + (۱) = ۱ \qquad p_۱ = p_۰(۳٫۱) + (-۲) = ۱٫۱,$$

$$q_۲ = q_۱(۳٫۱) + (۱٫۱) = ۴٫۲ \qquad p_۲ = p_۱(۳٫۱) + (۲) = ۵٫۴۱,$$

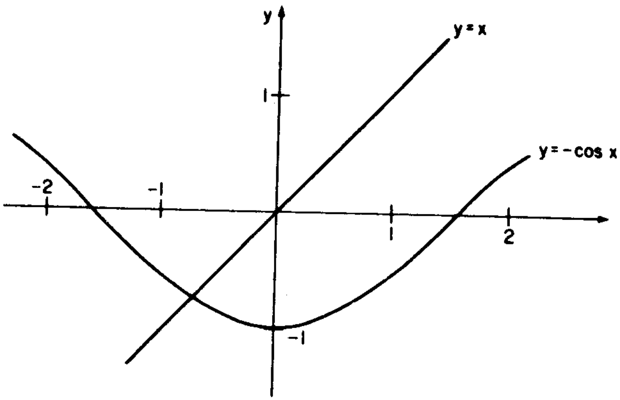
$$q_۳ = q_۲(۳٫۱) + (۵٫۴۱) = ۱۸٫۴۳ \qquad p_۳ = p_۲(۳٫۱) + (۳) = ۱۹٫۷۷۱,$$

برای محاسبهٔ $p(۳٫۱)$ تنها ۳ عمل ضرب و ۳ عمل جمع لازم است، حال آنکه $۳٫۱ \times ۳٫۱ \times ۳٫۱ - ۲ \times ۳٫۱ \times ۳٫۱ + ۲ \times ۳٫۱ + ۳$ به ۵ عمل ضرب و ۳ عمل جمع نیاز دارد.

گام ۶

منحنیهای موردنظر، درشکل ۱۶ (صفحه ۱۹۲)، و به‌شیوه‌ای مشابهٔ شیوه‌های بخش (آ)۲ ازگام ۶، رسم شده‌اند و ما را به‌این‌نتیجه می‌رسانند که یك ریشهٔ حقیقی درنزدیکی $x = -۰٫۷$ موجود است. جدول‌بندی زیراین مطلب را تأیید می‌کند:

x	$-۰٫۷$	$-۰٫۸$	$-۰٫۷۵$
$\cos x$	۰٫۷۶۴۸	۰٫۶۹۶۷	۰٫۷۳۱۷
$x + \cos x$	۰٫۰۶۴۸	$-۰٫۱۰۳۳$	$-۰٫۰۱۸۳$



شکل ۱۶. نمودارهای $y=x$ و $y=-\cos x$

گام ۷

۱ـ درگام ۶ دیدیم که ریشهٔ مورد نظر دربازهٔ (۷ر۰ — و ۷۵ر۰ —) قرار دارد. با تنصیفات پی‌درپی، دنبالهٔ ذیل متشکل از بازه‌های شامل ریشه به‌دست می‌آید: (۷۲۵ر۰ — و ۷۵ر۰ —)، (۷۳۷۵ر۰ — و ۷۵ر۰ —)، (۷۳۷۵ر۰ — و ۷۴۳۷۵ر۰ —). بنابراین ریشهٔ موردنظر تا $2D$ برابراست با ۷۴ر۰ —.

۲ـ ریشه تا $3D$ برابر است با ۶۱۵ر۰.

گام ۸

۱ـ تابع $f(x)$ را جدول بندی کنید:

x	$f(x)$
۰	— ۲
۲ر۰	— ۴ر۱
۶ر۰	— ۲۷ر۰
۸ر۰	+ ۲۳ر۰

ریشه‌ای دربازهٔ ۸ر۰ > x > ۶ر۰ موجود است.

داریم:

$$x=\frac{۱}{۰٫۲۳+۰٫۲۷}\begin{vmatrix} ۰٫۶ & -۰٫۲۷ \\ ۰٫۸ & ۰٫۲۳ \end{vmatrix}$$

$$=\frac{۰٫۱۳۸+۰٫۲۱۶}{۰٫۵۰}=۰٫۷۰۸,$$

$$f(x)=f(۰٫۷۰۸)$$

$$=۲\sin(۰٫۷۰۸)+۰٫۷۰۸-۲$$

$$=۱٫۳۰۰۶+۰٫۷۰۸-۲$$

$$=۰٫۰۰۸۶.$$

چون $f(۰٫۶)$ و $f(۰٫۷۰۸)$ مختلف‌العلامه هستند، ریشهٔ موردنظر در بازهٔ $۰٫۷۸>x>۰٫۶$ واقع است. با تکرار فرایند فوق داریم:

$$\bar{x}=\frac{۱}{۰٫۰۰۸۶+۰٫۲۷}\begin{vmatrix} ۰٫۶ & -۰٫۲۷ \\ ۰٫۷۰۸ & ۰٫۰۰۸۶ \end{vmatrix}$$

$$=\frac{۰٫۰۰۵۱۶+۰٫۱۹۱۱۶}{۰٫۲۷۸۶}=۰٫۷۰۴۷.$$

چون $f(\bar{x})=f(۰٫۷۰۴۷)=۰٫۰۰۰۳$ معلوم می‌شود که ریشه بین ۰٫۶ و ۰٫۷۰۴۷ قراردارد. لذا:

$$\bar{x}=\frac{۱}{۰٫۰۰۰۳+۰٫۲۷}\begin{vmatrix} ۰٫۶ & -۰٫۲۷ \\ ۰٫۷۰۴۷ & ۰٫۰۰۰۳ \end{vmatrix}=۰٫۷۰۴۶$$

محاسبه می‌شود.

با تکرار مجدد این فرایند بازهم (تا $۴D$) ۰٫۷۰۴۶ به‌دست می‌آید. لذا ۰٫۷۰۵ را می‌توان به‌طور یقین به‌عنوان جواب اختیار کرد. توجه کنید که برای تمام $\bar{x}$های محاسبه شده $f(\bar{x})$ مثبت است.

۲ــ فرض کنید که $f(x)=(۳\sin x-x)-۱/x$. توجه می‌کنیم که $f(۰٫۷)=-۰٫۱۹۵۹$ و $f(۰٫۹)=۰٫۳۳۸۹$؛ پس، ریشهٔ موردنظر احاطه می‌شود. با کار کردن تا ۴ رقم اعشار نتایج ذیل به‌دست می‌آیند.

(الف) روش تنصیف، دنبالهٔ بازه‌های زیر را به‌دست می‌دهد:

(۰٫۷۷۵ و ۰٫۷۵)، (۰٫۸ و ۰٫۷۵)، (۰٫۸ و ۰٫۷)، (۰٫۹ و ۰٫۷)

(۰٫۷۶۵۷ و ۰٫۷۶۲۵)، (۰٫۷۶۸۸ و ۰٫۷۶۲۵)، (۰٫۷۷۵ و ۰٫۷۶۲۵)،

(۰٫۷۶۳۳ و ۰٫۷۶۲۹)، (۰٫۷۶۳۳ و ۰٫۷۶۲۵)، (۰٫۷۶۴۱ و ۰٫۷۶۲۵).

چون $f(۰٫۷۶۳۱)=۰٫۰۰۰۰$، این فرایند خاتمه می‌یابد.

(ب) از روش نابجایی با $a=۰٫۷$ و $b=۰٫۹$ نتیجه می‌شود $\bar{x}=۰٫۷۷۳۳$. چون $f(۰٫۷۷۳۳)=+۰٫۰۲۹۰$، این فرایند با $a=۰٫۷$ و $b=۰٫۷۷۳۳$ تکرار می‌شود تا $x=۰٫۷۶۳۸$ به‌دست آید. با در نظرگرفتن $a=۰٫۷$ و $b=۰٫۷۶۳۸$ (چون $f(۰٫۷۶۳۸)=+۰٫۰۰۲۰$) نتیجه می‌شود $\bar{x}=۰٫۷۶۳۲$ و $f(\bar{x})=۰٫۰۰۰۲$. بالاخره به ازای $a=۰٫۷$ و $b=۰٫۷۶۳۲$ نتیجه می‌شود $\bar{x}=۰٫۷۶۳۱$. توجه کنید که تمام $f(\bar{x})$ها مثبت هستند.

(پ) از روش وتری با $x_۰=۰٫۷$، و $x_۱=۰٫۹$ نتیجه می‌شود $x_۲=۰٫۷۷۳۳$، $x_۳=۰٫۷۶۱۴$ و $x_۴=۰٫۷۶۳۱$. برای این مثال، روش وتری به‌وضوح کاراترین سه روش است.

۳ــ فرض کنید $f(x)=x+\cos x$. در گام ۷ دریافتیم که ریشهٔ مورد نظر در بازهٔ ($-۰٫۷۳۷۵$ و $-۰٫۷۴۳۷۵$) قرار دارد. از روش نابجایی با $a=-۰٫۷۵$، و $b=-۰٫۷۳$ (وبا استفاده از $f(a)=-۰٫۰۱۸۳۱$، و $f(b)=۰٫۰۱۵۱۷$). نتیجه می‌شود که $\bar{x}=-۰٫۷۳۹۰۶$. چون

$$f(-۰٫۷۳۹۰۶)=۰٫۰۰۰۰۴,$$

این فرایند با $a=-۰٫۷۵$ و $b=-۰٫۷۳۹۰۶$ تکرار می‌شود تا $\bar{x}=-۰٫۷۳۹۰۸$ به دست آید. از آنجا که $f(-۰٫۷۳۹۰۸)=۰٫۰۰۰۰۱$ می‌توان ریشه را (تا $۴D$) برابر با $-۰٫۷۳۹۱$ گرفت.

گام ۹

۱ــ با استفاده ازفرمول تکرار

$$x_{n+۱}=۰٫۵+\sin x_n$$

تنها شش تکرارذیل‌لازم می‌شود:

$$x_۱=۱٫۳۴۱۴۷$$

$$x_۲=۱٫۴۷۳۸۲$$

$$x_۳=۱٫۴۹۵۳۰$$

$$x_۴ = ۱٫۴۹۷۱۵$$

$$x_۵ = ۱٫۴۹۷۲۹$$

$$x_۶ = ۱٫۴۹۷۳۰۰$$

توجه کنید که در نزدیکی ریشه داریم: $\phi'(x) = \cos x \approx ۰٫۰۷$؛ بنابراین، همگرایی سریع (و «یکطرفه») است.

۲ــ در گام ۷ دیدیم که ریشهٔ موردنظر تا $۲D$ برابراست با ۰٫۷۴ــ بااستفاده از فرمول تکرار

$$x_{n+۱} = -\cos x_n$$

و با ۰٫۷۴ــ $= x_۰$ داریم:

$$x_۱ = -۰٫۷۳۸۴۷$$

$$x_۲ = -۰٫۷۳۹۵۰$$

$$x_۳ = -۰٫۷۳۸۸۱$$

$$x_۴ = -۰٫۷۳۹۲۷$$

$$x_۵ = -۰٫۷۳۸۹۶$$

$$x_۶ = -۰٫۷۳۹۱۷$$

$$x_۷ = -۰٫۷۳۹۰۳$$

$$x_۸ = -۰٫۷۳۹۱۲$$

$$x_۹ = -۰٫۷۳۹۰۶$$

$$x_{۱۰} = -۰٫۷۳۹۱۰.$$

چون $x_۹$ و $x_{۱۰}$ تا $۴D$ مثل هم هستند، می‌توان ریشه را برابر با ۰٫۷۳۹۱ــ گرفت. توجه کنید که درنزدیکی ریشه $\phi'(x) = \sin x \approx -۰٫۶۷$، و لذا همگرایی کند (و «نوسانی») است.

گام ۱۰

۱ــ چون $x > ۰$، ریشهٔ $f(x) = \log_e ۳x + x = ۰$ باید دربازهٔ $۰ < x < ۱/۳$، که درآن $\log_e ۳x < ۰$، قرارگیرد. اگر $x_۰ = ۰٫۲۵$ حدس اولیه باشد،

$$f(۰٫۲۵) = \log_e(۰٫۷۵) + ۰٫۲۵$$
$$= -۰٫۲۸۷۷ + ۰٫۲۵$$
$$= -۰٫۰۳۷۷.$$

چون

$$f'(x) = \frac{۱}{x} + ۱,$$

$$f'(۰٫۲۵) = ۵$$

و

$$x_۱ = ۰٫۲۵ + \frac{۰٫۰۳۷۷}{۵}$$
$$= ۰٫۲۵ + ۰٫۰۰۷۵$$
$$= ۰٫۲۵۷۵.$$

لذا:

$$f(۰٫۲۵۷۵) = \log_e(۰٫۷۷۲۵) + ۱٫۲۵۷۵$$
$$= -۰٫۲۵۸۱ + ۰٫۲۵۷۵$$
$$= ۰٫۰۰۰۶ \text{ و}$$
$$f'(۰٫۲۵۷۵) = ۳٫۸۸۳ + ۱ = ۴٫۸۸۳$$

و

$$x_۲ = ۰٫۲۵۷۵ + \frac{۰٫۰۰۰۶}{۴٫۸۸۳}$$
$$= ۰٫۲۵۷۵ + ۰٫۰۰۰۱$$
$$= ۰٫۲۵۷۶.$$

چون $f(۰٫۲۵۷۶) = -۰٫۰۰۰۱$ نتیجه می‌گیریم که ریشهٔ موردنظر تا $۴D$ برابر است با ۰٫۲۵۷۶. توجه‌کنید که برای فرایند نیوتن- رفسون تنها ۲ یا ۳ گام لازم است، در صورتی که برای روش تکراری مبتنی بر

$$x_{n+1} = \frac{۱}{۳} e^{-x_n}$$

۸ گام لازم بود.

۲ـ
$$x^k = a$$
$$f(x) = x^k - a = ۰$$
$$f'(x) = kx^{k-۱}$$
$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n{}^k - a}{kx_n{}^{k-۱}}.$$

به‌ازای $k = -۱$، جهت محاسبهٔ وارونها، بدون‌استفاده ازعمل تقسیم، یك فرمول‌تکراری داریم:

$$x_{n+۱} = x_n(۲ - ax_n).$$

۳ـ $x_۰ = ۱$، $a = ۱۰$.

$$x_۱ = \frac{۱}{۲}\left(۱ + \frac{۱۰}{۱}\right) = ۵٫۵$$

$$x_۲ = \frac{۱}{۲}\left(۵٫۵ + \frac{۱۰}{۵٫۵}\right) = ۳٫۶۶$$

$$x_۳ = \frac{۱}{۲}\left(۳٫۶۶ + \frac{۱۰}{۳٫۶۶}\right) = ۳٫۱۹۶$$

$$x_۴ = \frac{۱}{۲}\left(۳٫۱۹۶ + \frac{۱۰}{۳٫۱۹۶}\right) = ۳٫۱۶۲۵$$

$$x_۵ = \frac{۱}{۲}\left(۳٫۱۶۲۵ + \frac{۱۰}{۳٫۱۶۲۵}\right) = ۳٫۱۶۲۸$$

$$x_۶ = \frac{۱}{۲}\left(۳٫۱۶۲۸ + \frac{۱۰}{۳٫۱۶۲۸}\right) = ۳٫۱۶۲۸.$$

بنابراین، $\sqrt{۱۰}$ تا $۴D$ برابر است با ۳٫۱۶۲۸.

۴ـ درگام ۷ دیدیم که ریشه تا $۲D$ برابر با ۰٫۷۴— است. باانتخاب $x_۰ = -۰٫۷۴$ و $f(x) = x + \cos x$ که درنتیجه $f'(x) = ۱ - \sin x$ داریم:

$$x_۱ = -۰٫۷۴ - \frac{(-۰٫۰۰۱۵۳)}{۱٫۶۷۴۲۹} = -۰٫۷۳۹۰۹$$

و

$$x_2 = -0.73909 - \frac{(-0.000001)}{1.67361} = -0.73908$$

چون x_1 و x_2 تا $4D$ مثل هم هستند. می‌توان ریشه را برابر با -0.7391 اختیار کرد.

گام ۱۱

تنها برای سؤالهای ۱ و ۲ جوابهای کامل را ارائه می‌کنیم.

۱−

m	ماتریس افزوده				مقابله
	۱	۱	−۱	۰	۱
	۲	−۱	۱	۶	۸
	۳	۲	−۴	−۴	−۳
	۱	۱	−۱	۰	۱
−۲		−۳	۳	۶	۶
−۳		−۱	−۱	−۴	−۶
	۱	۱	−۱	۰	۱
		−۳	۳	۶	۶
$-\frac{1}{3}$			−۲	−۶	−۸

حل به‌طریق جایگذاری از پایین

$$-2x_3 = -6 \rightarrow x_3 = 3$$

$$-3x_2 + 9 = 6 \rightarrow x_2 = 1$$

$$x_1 + 1 - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 2$$

مانده‌ها

$$0 - (2 + 1 - 3) = 0$$

$$6 - (4 - 1 + 3) = 0$$

$$-4 - (6 + 2 - 12) = 0$$

۲−

با عملیات تا $۲D$ (گرد شده)

m	ماتریس افزوده				مقابله
	۵٫۶	۳٫۸	۱٫۲	۱٫۴	۱۲٫۰
	۳٫۱	۷٫۱	−۴٫۷	۵٫۱	۱۰٫۶
	۱٫۴	−۳٫۴	۸٫۳	۲٫۴	۸٫۷
	۵٫۶	۳٫۸	۱٫۲	۱٫۴	۱۲٫۰
−۰٫۵۵۴		۴٫۹۹	−۵٫۳۶	۴٫۳۲	۳٫۹۵
−۰٫۲۵۰		−۴٫۳۵	۸٫۰۰	۲٫۰۵	۵٫۷۰
	۵٫۶	۳٫۸	۱٫۲	۱٫۴	۱۲٫۰
		۴٫۹۹	−۵٫۳۶	۴٫۳۲	۳٫۹۵
+۰٫۸۷۲			۳٫۳۳	۵٫۸۲	۹٫۱۴(۹٫۱۵)

حل به طریق جایگذاری از پایین

$$۳٫۳۳z = ۵٫۸۳ \rightarrow z = ۱٫۷۵$$

$$۴٫۹۹y - ۵٫۳۶ \times ۱٫۷۵ = ۴٫۳۲ \rightarrow y = ۲٫۷۵$$

$$۵٫۶x + ۳٫۸ \times ۲٫۷۵ + ۱٫۲ \times ۱٫۷۵ = ۱٫۴ \rightarrow x = -۱٫۹۹.$$

مانده‌ها

$$۱٫۴ - (-۱۱٫۱۴ + ۱۰٫۴۵ + ۲٫۱۰) = -۰٫۰۱$$

$$۵٫۱ - (-۶٫۱۷ + ۱۹٫۵۳ - ۸٫۲۳) = -۰٫۰۳$$

$$۲٫۴ - (-۲٫۷۹ - ۹٫۳۵ + ۱۴٫۵۳) = ۰٫۰۱.$$

۳− i) $x = ۲۵٫۵$، $y = -۹$، و $z = ۲$؛ مانده‌ها ۰، ۰ و ۰.

ii) $x = -۴٫۳۰$، $y = -۲٫۴۲$، و $z = ۵٫۰۷$؛ مانده‌ها ۰٫۰۰، ۰٫۰۶، و −۰٫۰۱ (با عملیات تا $۲D$).

گام ۱۲

۱ـ اگر ثابتها دارای هیچ خطایی نبودند، جواب دقیق عبارت می‌بود از $x = ۲٫۶$ و $y = ۱٫۲$. با در نظر گرفتن خطاها، حوزهٔ جوابها عبارت است از $۲٫۵۷ \leqslant x \leqslant ۲٫۶۳$ و $۱٫۱۷ \leqslant y \leqslant ۱٫۲۳$.

۲ـ i) $x = ۱٫۲$، و $y = ۲٫۳$

ii) $x = ۱$، $y = ۱$، و $z = ۲$

iii) $x_۱ = ۱٫۲$، $x_۲ = ۳٫۵$، و $x_۳ = ۶٫۴$.

۳ـ بدون انقباض محوری، $x = ۱٫۰۰۴$، و $y = ۰٫۴۹۹۸$. باانقباض محوری، $x = ۱٫۰۰۰$، و $y = ۰٫۵۰۰۰$.

گام ۱۳

۱ـ
$$S_۳ = |x_۱^{(۴)} - x_۱^{(۳)}| + |x_۲^{(۴)} - x_۲^{(۳)}| + |x_۳^{(۴)} - x_۳^{(۳)}|.$$

باادامهٔ جدول بخش۳ برای یك سطر اضافی، مقادیر تکرار چهارم یعنی $x^{(۴)}$ به‌دست می‌آیند، بدین ترتیب :

۱٫۰۰۰۰۱۷	۰٫۹۹۹۹۹۳	۰٫۹۹۹۹۱۷	۴

سپس $S_۳$ چنین به‌دست می‌آید:

$$S_۳ = ۰٫۰۰۱۲۲۶ + ۰٫۰۰۰۳۰۴ + ۰٫۰۰۰۲۱۵ = ۰٫۰۰۱۷۴۵.$$

۲ـ i) معادلات مرتب شده:
(جهت قرار گرفتن بزرگترین ضرایب
روی قطراصلی)

$$\begin{aligned} ۲۰x + ۳y - \ \ ۲z &= ۵۱ \\ ۲x + ۸y + \ \ ۴z &= ۲۵ \\ x - \ \ y + ۱۰z &= -۷ \end{aligned}$$

روابط تراجعی:

$$x^{(k+۱)} = ۲٫۵۵ - ۰٫۱۵ y^{(k)} + ۰٫۱ z^{(k)}$$
$$y^{(k+۱)} = ۳٫۱۲۵ - ۰٫۲۵ x^{(k+۱)} - ۰٫۵ z^{(k)}$$
$$z^{(k+۱)} = -۰٫۷ - ۰٫۱ x^{(k+۱)} + ۰٫۱ y^{(k+۱)}.$$

با انتخاب $S_k<$ ۰٫۰۰۰۰۵ به عنوان معیار توقف، نتایج زیررا خواهیم داشت:

تکرار k	x^k	y^k	z^k	S_k(تا ۵D)
۰	۰	۰	۰	۵٫۷۴۴۰۰
۱	۲٫۵۵۰	۲٫۴۸۸	۰٫۷۰۶−	۰٫۹۹۹۰۰
۲	۲٫۱۰۶	۲٫۹۵۲	۰٫۶۱۵−	۰٫۰۹۳۷۰
۳	۲٫۰۴۵۷	۲٫۹۲۱۱	۰٫۶۱۲۵−	۰٫۰۰۸۰۹
۴	۲٫۰۵۰۵۹	۲٫۹۱۸۶۰	۰٫۶۱۳۲۰−	۰٫۰۰۰۵۸
۵	۲٫۰۵۰۸۹۰	۲٫۹۱۸۸۷۸	۰٫۶۱۳۲۰۱−	۰٫۰۰۰۰۶
۶	۲٫۰۵۰۸۴۸	۲٫۹۱۸۸۸۹	۰٫۶۱۳۱۹۶−	۰٫۰۰۰۰۰
۷	۲٫۰۵۰۸۴۷	۲٫۹۱۸۸۸۶	۰٫۶۱۳۱۹۶−	

توجه کنیدکه دقت عملیات به‌طور تصاعدی افزایش می‌یابد.

جواب تا ۴D: $x=$ ۲٫۰۵۰۸، $y=$ ۲٫۹۱۸۹، و $z=-$ ۰٫۶۱۳۲.

(ii) $x=$ ۰٫۱۱۲۴، $y=$ ۰٫۱۲۳۶، $z=$ ۰٫۱۲۳۶، و $w=$ ۰٫۱۱۲۴.

گام ۱۴

خوب دقت کنید: هرچند جوابها دراینجا داده شده‌اند، ولی دانشجویان نباید قبل‌ازانجام مقابله‌های پیشنهادی روی عملیات خود به‌آنها نگاه کنند. جوابها تا ۳D داده شده‌اند.

۱ــ (الف) (حل کامل)

m	A	I	مقابله	عمل سطری
	۲ ۶ ۴	۱ ۰ ۰	۱۳	(۱)
	۶ ۱۹ ۱۲	۰ ۱ ۰	۳۸	(۲)
	۲ ۸ ۱۴	۰ ۰ ۱	۲۵	(۳)
	۲ ۶ ۴	۱ ۰ ۰	۱۳	(۴)=(۱)
−۳	۰ ۱ ۰	−۳ ۱ ۰	−۱	(۵)=(۲)−۳(۱)
−۱	۰ ۲ ۱۰	−۱ ۰ ۱	۱۲	(۶)=(۳)−۱(۱)
	۲ ۶ ۴	۱ ۰ ۰	۱۳	(۷)=(۱)
	۰ ۱ ۰	−۳ ۱ ۰	−۱	(۸)=(۵)
−۲	۰ ۰ ۱۰	۵ −۲ ۱	۱۴	(۹)=(۶)−۲(۵)
ماتریس معکوس		۸ر۵ −۲ر۶ −۰ر۲ −۳ ۱ ۰ ۰ر۵ −۰ر۲ ۰ر۱		(امتحان کنید که $AA^{-۱}=I$)

توجه: ستون اول $A^{-۱}$ عبارت است از $\begin{pmatrix} u_۳ \\ u_۲ \\ u_۱ \end{pmatrix}$، که ازحل

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۳ \\ u_۲ \\ u_۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

به طریق جایگذاری از پایین به دست می‌آید. ستون دوم ازحل

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۶ & ۴ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۶ \\ u_۵ \\ u_۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

و ستون سوم از حل

$$\begin{bmatrix} \text{۲} & \text{۶} & \text{۴} \\ \text{۰} & \text{۱} & \text{۰} \\ \text{۰} & \text{۰} & \text{۱۰} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\text{۹}} \\ u_{\text{۸}} \\ u_{\text{۷}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{۰} \\ \text{۰} \\ \text{۱} \end{bmatrix}$$

به‌دست می‌آید.

(ب)

$$\begin{bmatrix} \text{۰ر۰۴۶} & -\text{۰ر۶۰۵} & \text{۱ر۰۳۱} \\ \text{۰ر۴۴۸} & -\text{۰ر۴۰۳} & \text{۰ر۳۹۸} \\ -\text{۰ر۳۶۲} & +\text{۰ر۸۵۱} & -\text{۱ر۰۲۳} \end{bmatrix}$$

(پ)

$$\begin{bmatrix} \text{۰ر۷۰۵} & \text{۲ر۵۴۴} & -\text{۲ر۷۶۱} \\ -\text{۱ر۳۷۱} & \text{۰ر۸۰۶} & \text{۱ر۶۰۹} \\ \text{۲ر۰۱۳} & -\text{۱ر۸۰۸} & -\text{۰ر۰۳۰} \end{bmatrix}$$

۲ـ(الف)

$$x = \begin{bmatrix} \text{۲۵ر۵۰۰} \\ -\text{۹ر۰۰۰} \\ \text{۲ر۰۰۰} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{۲ر۷۰۰} \\ -\text{۱ر۰۰۰} \\ \text{۰ر۴۰۰} \end{bmatrix}$$

(ب)

$$x = \begin{bmatrix} -\text{۴ر۳۴۹} \\ -\text{۲ر۴۴۸} \\ \text{۵ر۱۳۳} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{۰ر۴۲۶} \\ -\text{۰ر۰۰۵} \\ -\text{۰ر۱۷۲} \end{bmatrix}$$

(پ)

$$x = \begin{bmatrix} \text{۶ر۶۴۸} \\ \text{۰ر۱۰۳} \\ -\text{۱ر۷۶۱} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{۲ر۳۸۱} \\ \text{۲ر۹۳۷} \\ -\text{۲ر۸۲۷} \end{bmatrix}.$$

گام ۱۵

۱-

x	$f(x)=x^{3}$	تفاضلات اول	دوم	سوم	چهارم
۱	۱	۷			
۲	۸		۱۲		
		۱۹		۶	
۳	۲۷		۱۸		۰
		۳۷		۶	
۴	۶۴		۲۴		۰
		۶۱		۶	
۵	۱۲۵		۳۰		
		۹۱			
۶	۲۱۶				

۲-

x	$f(x)=e^{x}$	تفاضلات اول	دوم	سوم	چهارم
۰٫۱	۰٫۱۰۵۱۷۱				
		۵۶۶۶۳			
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳۴		۲۹۰۶		
		۵۹۵۶۹		۱۴۷	
۰٫۲	۱٫۲۲۱۴۰۳		۳۰۵۳		۱۲
		۶۲۶۲۲		۱۵۹	
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۲۵		۳۲۱۲		۴
		۶۵۸۳۴		۱۶۳	
۰٫۳	۱٫۳۴۹۸۵۹		۳۳۷۵		۱۰
		۶۹۲۰۹		۱۷۳	
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۶۸		۳۵۴۸		۹
		۷۲۷۵۷		۱۸۲	
۰٫۴	۱٫۴۹۱۸۲۵		۳۷۳۰		۱۰
		۷۶۴۸۷		۱۹۲	
۰٫۴۵	۱٫۵۶۸۳۱۲		۳۹۲۲		
		۸۰۴۰۹			
۰٫۵	۱٫۶۴۸۷۲۱				

فقط در تفاضلات مرتبهٔ چهارم نشانه‌ای از یك «مزاحمت» دیده می‌شود.

گام ۱۶

۱- i) ۰٫۰۶۲۶۳، ۰٫۰۰۳۲۰، ۰٫۰۰۰۱۸، ۰٫۰۰۰۰۲—.

ii) ۰٫۰۷۲۷۵، ۰٫۰۰۳۵۴، ۰٫۰۰۰۱۶، ۰٫۰۰۰۰۲—.

iii) ۰٫۰۰۳۳۸، ۰٫۰۰۰۰۲—.

iv) درهرحالت ۰٫۰۰۰۱۶.

v) درهرحالت ۰٫۰۰۳۰۶.

۲- i) $f(x)=x$ را درنظر بگیرید.

ii)

$$
\begin{aligned}
\Delta^3 f_j &= \Delta^2(\Delta f_j)\\
&= \Delta^2(f_{j+1}-f_j)\\
&= \Delta(\Delta f_{j+1}-\Delta f_j)\\
&= \Delta(f_{j+2}-2f_{j+1}+f_j)\\
&= f_{j+3}-3f_{j+2}+3f_{j+1}-f_j.
\end{aligned}
$$

iii)

$$
\begin{aligned}
\nabla^3 f_j &= \nabla^2(\nabla f_j)\\
\nabla^2&(f_j-f_{j-1})\\
&= \nabla(\nabla f_j-\nabla f_{j-1})\\
&= \nabla(f_j-2f_{j-1}+f_{j-2})\\
&= f_j-3f_{j-1}+3f_{j-2}-f_{j-3}.
\end{aligned}
$$

iv)

$$
\begin{aligned}
\delta^3 f_j &= \delta^2(\delta f_j)\\
&= \delta^2(f_{j+\frac{1}{2}}-f_{j-\frac{1}{2}})\\
&= \delta(\delta f_{j+\frac{1}{2}}-\delta f_{j-\frac{1}{2}})\\
&= \delta(f_{j+1}-2f_j+f_{j-1})\\
&= f_{j+\frac{3}{2}}-3f_{j+\frac{1}{2}}+3f_{j-\frac{1}{2}}-f_{j-\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

گام ۱۷

۱- (i

x	$f(x)=x^۴$	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$	$\Delta^۴$
۰	۰٫۰۰۰۰				
		۱			
۰٫۱	۰٫۰۰۰۱		۱۴		
		۱۵		۳۶	
۰٫۲	۰٫۰۰۱۶		۵۰		۲۴
		۶۵		۶۰	
۰٫۳	۰٫۰۰۸۱		۱۱۰		۲۴
		۱۷۵		۸۴	
۰٫۴	۰٫۰۲۵۶		۱۹۴		۲۴
		۳۶۹		۱۰۸	
۰٫۵	۰٫۰۶۲۵		۳۰۲		۲۴
		۶۷۱		۱۳۲	
۰٫۶	۰٫۱۲۹۶		۴۳۴		۲۴
		۱۱۰۵		۱۵۶	
۰٫۷	۰٫۲۴۰۱		۵۹۰		۲۴
		۱۶۹۵		۱۸۰	
۰٫۸	۰٫۴۰۹۶		۷۷۰		۲۴
		۲۴۶۵		۲۰۴	
۰٫۹	۰٫۶۵۶۱		۹۷۴		
		۳۴۳۹			
۱٫۰	۱٫۰۰۰۰				

(ii

x	$f(x)=x^4$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
۰	۰٫۰۰۰				
		۰			
۰٫۱	۰٫۰۰۰		۲		
		۲		۲	
۰٫۲	۰٫۰۰۲		۴		۶
		۶		۸	
۰٫۳	۰٫۰۰۸		۱۲		−۱
		۱۸		۷	
۰٫۴	۰٫۰۲۶		۱۹		۴
		۳۷		۱۱	
۰٫۵	۰٫۰۶۳		۳۰		۲
		۶۷		۱۳	
۰٫۶	۰٫۱۳۰		۴۳		۴
		۱۱۰		۱۷	
۰٫۷	۰٫۲۴۰		۶۰		−۱
		۱۷۰		۱۶	
۰٫۸	۰٫۴۱۰		۷۶		۶
		۲۴۶		۲۲	
۰٫۹	۰٫۶۵۶		۹۸		
		۳۴۴			
۱٫۰	۱٫۰۰۰				

بدترین خطای گردشده عبارت است از ۶ر۳.

۲–

x	$f(x)$	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$
۰	۳			
		۱–		
۱	۲		۶	
		۵		۶
۲	۷		۱۲	
		۱۷		۶
۳	۲۴		۱۸	
		۳۵		۶
۴	۵۹		۲۴	
		۵۹		
۵	۱۱۸			

داده‌ها به‌وسیلهٔ یك چند جمله‌ای درجهٔ سوم برازش شده‌اند.

گام ۱۸

۱-

x	$f(x)$	Δ	Δ^{2}	Δ^{3}
۲	۳٫۰۶۷۱			
		۳۳۴۱۷		
۳	۶٫۴۰۸۸		۷۵۲	
		۳۴۱۶۹		۶
۴	۹٫۸۲۵۷		۷۵۸	
		۳۴۹۲۷		۶
۵	۱۳٫۳۱۸۴		۷۶۴	
		۳۵۶۹۱		۳۶
۶	۱۶٫۸۸۷۵		۸۰۰	
		۳۶۴۹۱		−۸۴
۷	۲۰٫۵۳۶۶		۷۱۶	
		۳۷۲۰۷		۹۶
۸	۲۴٫۲۵۷۳		۸۱۲	
		۳۸۰۱۹		−۲۴
۹	۲۸٫۰۵۹۲		۷۸۸	
		۳۸۸۰۷		۶
۱۰	۳۱٫۹۳۹۹		۷۹۴	
		۳۹۶۰۱		۶
۱۱	۳۵٫۹۰۰۰		۸۰۰	
		۴۰۴۰۱		۶
۱۲	۳۹٫۹۴۰۱		۸۰۶	
		۴۱۲۰۷		
۱۳	۴۴٫۰۶۰۸			

چون این تابع یك تابع درجهٔ سوم است انتظار داریم که $\Delta^{۳}$ ثابت باشد. از هریك از $\varepsilon+۶=۳۶$، $-۳\varepsilon+۶=-۸۴$، $۳\varepsilon+۶=۹۶$، و $-\varepsilon+۶=-۲۴$ استفاده می‌کنیم تا نتیجه بگیریم که $\varepsilon=۳۰$ و از آنجا

$$f(۷)=۲۰٫۵۳۶۶-۰٫۰۰۳۰=۲۰٫۵۳۳۶$$

که مبین اشتباهی از نوع تکرار رقمها (ر. ك. گام ۲) است.

–۲

x	$f(x)$	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$
۰	۱٫۳۲۴۶			
		۷۸۵		
۱	۱٫۴۰۳۱		−۹	
		۷۷۶		−۲۷
۲	۱٫۴۸۰۷		−۳۶	
		۷۴۰		۸۱
۳	۱٫۵۵۴۷		۴۵	
		۷۸۵		−۸۰
۴	۱٫۶۳۳۲		−۳۵	
		۷۵۰		۲۶
۵	۱٫۷۰۸۲		−۹	
		۷۴۱		۲۲
۶	۱٫۷۸۲۳		۱۳	
		۷۵۴		−۶۲
۷	۱٫۸۵۷۷		−۴۹	
		۷۰۵		۶۲
۸	۱٫۹۲۸۲		۱۳	
		۷۱۸		−۲۰
۹	۲٫۰۰۰۰		−۷	
		۷۱۱		−۱
۱۰	۲٫۰۷۱۱		−۸	
		۷۰۳		
۱۱	۲٫۱۴۱۴			

اشتباهات، به‌وضوح در $x=۳$ و $x=۷$ هستند. بااستفاده ازروش مثال دوم بالا برآورد می کنیم که:

$$\varepsilon_{۱}\approx\frac{-۸۱-۸۰}{۶}\approx-۲۷ \quad \text{و} \quad \varepsilon_{۲}\approx\frac{۶۲+۶۲}{۶}\approx۲۱\cdot$$

تصحیحهای لازم عبارتند از:

$f(۳)=۱٫۵۵۴۷+۰٫۰۰۲۷=۱٫۵۵۷۴$ (رقمهای جابجا شده. ر. ك. گام ۲)

و $f(۷)=۱٫۸۵۷۷-۰٫۰۰۲۱=۱٫۸۵۵۶.$

درمورد دومی $f(۷)=۱٫۸۵۵۷$ بیشتر محتمل به‌نظر می‌رسد (تکرار ارقام).

بنابراین، تفاضلات مرتبهٔ سوم تصحیح شده عبارت خواهند بود از ۰، ۰، ۱، ۱ــ، ۲، ۲ــ، ۲، ۰ و ۱ــ.

گام ۱۹

۱ ـ جدول تفاضلی:

x	$f(x)=\cos x$	Δ	$\Delta^{۲}$
۸۰°	۰٫۱۷۳۶		
		-۲۸	
$۸۰^\circ\ ۱۰'$	۰٫۱۷۰۸		-۱
		-۲۹	
$۸۰^\circ\ ۲۰'$	۰٫۱۶۷۹		۰
		-۲۹	
$۸۰^\circ\ ۳۰'$	۰٫۱۶۵۰		۱
		-۲۸	
$۸۰^\circ\ ۴۰'$	۰٫۱۶۲۲		-۱
		-۲۹	
$۸۰^\circ\ ۵۰'$	۰٫۱۵۹۳		

(i
$$\cos ۸۰^\circ\ ۳۵' = f(۸۰^\circ\ ۳۰') + ۰٫۵\Delta f(۸۰^\circ\ ۳۰')$$
$$= ۰٫۱۶۵۰ + ۰٫۵(-۰٫۰۰۲۸) = ۰٫۱۶۳۶.$$

(ii
$$\cos ۸۰^\circ\ ۳۵' = ۰٫۱۶۵۰ + ۰٫۵(-۰٫۰۰۲۸)$$
$$+(۰٫۵)(۰٫۵) - ۰٫۵(-۰٫۰۰۰۱)$$
$$= ۰٫۱۶۳۶.$$

(تصحیح مرتبهٔ دوم $+۰٫۰۰۰۰۱۲۵$ است.)

۲ــ جدول تفاضلی:

x	$f(x)=\tan x$	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$
۸۰°	۵٫۶۷۱			
		۹۸		
$۸۰^\circ\ ۱۰'$	۵٫۷۶۹		۴	
		۱۰۲		−۱
$۸۰^\circ\ ۲۰'$	۵٫۸۷۱		۳	
		۱۰۵		۰
$۸۰^\circ\ ۳۰'$	۵٫۹۷۶		۳	
		۱۰۸		۲
$۸۰^\circ\ ۴۰'$	۶٫۰۸۴		۵	
		۱۱۳		
$۸۰^\circ\ ۵۰'$	۶٫۱۹۷			

تفاضلات مرتبهٔ دوم تقریباً ثابت هستند، که در نتیجه، یك تقریب درجهٔ دوم مناسب است: با قراردادن $\theta = ۱/۲$.

$$\tan ۸۰^\circ\ ۳۵' \approx f(۸۰^\circ\ ۳۵') + ۰٫۵\Delta f(۸۰^\circ\ ۳۰') - (۰٫۵)^۳\Delta^۲ f(۸۰^\circ\ ۳۰')$$
$$= ۵٫۹۷۶ + ۰٫۵(۰٫۱۰۸) - (۰٫۵)^۳(۰٫۰۰۵) = ۶٫۰۲۹.$$

گام ۲۰

۱ــ

x	$f(x)=e^x$	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$
۰٫۱۰	۱٫۱۰۵۱۷			
		۵۶۶۶		
۰٫۱۵	۱٫۱۶۱۸۳		۲۹۱	
		۵۹۵۷		۱۵
۰٫۲۰	۱٫۲۲۱۴۰		۳۰۶	
		۶۲۶۳		۱۴
۰٫۲۵	۱٫۲۸۴۰۳		۳۲۰	
		۶۵۸۳		۱۸
۰٫۳۰	۱٫۳۴۹۸۶		۳۳۸	
		۶۹۲۱		۱۶
۰٫۳۵	۱٫۴۱۹۰۷		۳۵۴	
		۷۲۷۵		
۰٫۴۰	۱٫۴۹۱۸۲			

(i $e^{۰٫۱۴}=f(۰٫۱۴)\approx f(۰٫۱)+\frac{۴}{۵}(۰٫۰۵۶۶۶)$

$+\frac{۱}{۲}\frac{۴}{۵}\left(-\frac{۱}{۵}\right)(۰٫۰۰۲۹۱)+\frac{۱}{۶}\frac{۴}{۵}\left(-\frac{۱}{۵}\right)\left(-\frac{۶}{۵}\right)(۰٫۰۰۰۱۵)$

$=۱٫۱۰۵۱۷+۰٫۰۴۵۳۲(۸)-۰٫۰۰۰۲۳(۳)+۰٫۰۰۰۰۰(۵)$

$=۱٫۱۵۰۲۷.$

(ii $e^{۰٫۳۱۵}=f(۰٫۳۱۵)\approx f(۰٫۳۰)+\frac{۳}{۱۰}(۰٫۰۶۵۸۳)$

$$+\frac{۱}{۲}\frac{۳}{۱۰}\frac{۱۳}{۱۰}(۰٫۰۰۳۲۰)+\frac{۱}{۶}\frac{۳}{۱۰}\frac{۱۳}{۱۰}\frac{۲۳}{۱۰}(۰٫۰۰۰۱۴)$$

$$=۱٫۳۴۹۸۶+۰٫۰۱۹۷۴(۹)+۰٫۰۰۰۶۲(۴)+۰٫۰۰۰۰۲(۱)$$

$$=۱٫۳۷۰۲۵.$$

۲ـ این رابطه مسلماً برای $j=۰$ و ۱ برقرار است، زیرا:

$$\Delta f(x_۰)=f(x_۰+h)-f(x_۰)\Longrightarrow f(x_۰+h)=(۱+\Delta)f(x_۰).$$

حکم را به استقرا ثابت می‌کنیم: فرض می‌کنیم که این رابطه برای $j=k$ برقرار باشد، یعنی

$$f_k=f_۰+k\Delta f_۰+\frac{k(k-۱)}{۲}\Delta^۲ f_۰+\cdots+\Delta^k f_۰,$$

که درآن، طبق معمول داریم $f_j=f(x_۰+jh)$.

لذا:

$$\Delta f_k=\Delta f_۰+k\Delta^۲ f_۰+\frac{k(k-۱)}{۲}\Delta^۳ f_۰+\cdots+\Delta^{k+۱} f_۰,$$

ولی

$$\Delta f_k=f_{k+۱}-f_k,$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} f_{k+۱}&=f_k+\Delta f_k\\ &=f_۰+(k+۱)\Delta f_۰+\left\{\frac{k(k-۱)}{۲}+k\right\}\Delta^۲ f_۰+\cdots+\Delta^{k+۱} f_۰\\ &=f_۰+(k+۱)\Delta f_۰+\frac{(k+۱)k}{۲}\Delta^۲ f_۰+\cdots+\Delta^{k+۱} f_۰; \end{aligned}$$

یعنی، رابطهٔ مورد نظر برای $j=k+۱$ هم برقرار است. بنابراین، به استقرا نتیجه می‌گیریم که رابطه برای $j=۰, ۱, ۲, \ldots$ برقرار است. با مراجعه به‌بخش ۴ از گام ۲۰، توجه کنید که با قرار دادن

$$\theta=j=۰, ۱, ۲, \ldots,$$

داریم:

$$f_j=f(x_j)=P_n(x_j).$$

۳ـ جدول تفاضلی مربوط، درجواب ۲ ازگام ۱۷ داده شده است.

چون $f_۰=۳$، $\Delta f_۰=-۱$، $\Delta^۲ f_۰=۶$، $\Delta^۳ f_۰=۶$، و $\Delta^۴ f_۰=۰$،

$$P(x)=f_۰+\theta\Delta f_۰+\frac{\theta(\theta-۱)}{۲}\Delta^۲ f_۰+\frac{\theta(\theta-۱)(\theta-۲)}{۶}\Delta^۳ f_۰$$

$$=۳-\theta+۳\theta(\theta-۱)+\theta(\theta-۱)(\theta-۲)$$

$$=\theta^۳-۲\theta+۳.$$

حال، $x=x_۰+\theta h=\theta$ (زیرا $x_۰=۰$ و $h=۱$)، و لذا، تنها چند جمله‌ای هم محل برای چهار درایهٔ اول جدول عبارت است از

$$P_۳(x)=x^۳-۲x+۳.$$

دانشجویان می‌توانند بررسی کنندکه چند جمله‌ای ماربر هر چهار نقطهٔ مجاور جدولی، همان چند جمله‌ای هم محل درجهٔ سوم فوق است؛ از این مطلب نتیجه می‌شودکه

$$f(x)\equiv P_۳(x);$$

یعنی، همان طورکه باتفاضلات مرتبهٔ سوم ثابت (به‌طوردقیق) بیان شد، خود تابع جدولی هم یك چند جمله‌ای درجهٔ سوم است.

گام ۲۱

جدول تفاضلی مربوط، درجواب به‌سؤال ۱ ازگام ۲۰ داده شده‌است.

i) دستور استرلینگ؛ $\theta=۱/۵$

$$f(۰٫۳۱)=۱٫۳۴۹۸۶+\frac{۱}{۵}\frac{۱}{۲}(۰٫۰۶۵۸۳+۰٫۰۶۹۲۱)$$

$$+\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۲۵}(۰٫۰۰۳۳۸)+\frac{۱}{۶}\frac{۶}{۵}\frac{۱}{۵}\left(-\frac{۴}{۵}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)(۰٫۰۰۰۱۸+۰٫۰۰۰۱۶)$$

$$=۱٫۳۴۹۸۶+۰٫۰۱۳۵۰(۴)+۰٫۰۰۰۰۶(۸)-۰٫۰۰۰۰۰(۵)$$

$$=۱٫۳۶۳۴۳.$$

ii) دستور اورت؛ $\theta=۱/۵$، $\bar{\theta}=۴/۵$.

$$f(۰٫۳۱)=\frac{۴}{۵}(۱٫۳۴۹۸۶)+\frac{۱}{۶}\frac{۹}{۵}\frac{۴}{۵}\left(-\frac{۱}{۵}\right)(۰٫۰۰۳۳۸)$$

$$+\frac{۱}{۵}(۱٫۴۱۹۰۷)+\frac{۱}{۶}\frac{۶}{۵}\frac{۱}{۵}\left(-\frac{۴}{۵}\right)(۰٫۰۰۳۵۴)$$

$$=۱٫۰۷۹۸۸(۸)-۰٫۰۰۰۱۶(۲)+۰٫۲۸۳۸۱(۴)-۰٫۰۰۰۱۱(۳)$$

$$=۱٫۳۶۳۴۳.$$

iii) دستور بسل؛ $\theta=۰٫۳$.

$$f(۰٫۳۱۵)=\frac{۱}{۲}(۱٫۳۴۹۸۶+۱٫۴۱۹۰۷)+(-۰٫۲)(۰٫۰۶۹۲۱)$$

$$+\frac{۱}{۲}(۰٫۳)(-۰٫۷)\frac{۱}{۲}(۰٫۰۰۳۳۸+۰٫۰۰۳۵۴)$$

$$+\frac{۱}{۶}(۰٫۳)(-۰٫۷)(-۰٫۲)(۰٫۰۰۰۱۶)$$

$$=۱٫۳۸۴۴۶(۵)-۰٫۰۱۳۸۴(۲)-۰٫۰۰۰۳۶(۳)+۰٫۰۰۰۰۰(۱)$$

$$=۱٫۳۷۰۲۶.$$

iv) دستوراورت؛ $\theta=۰٫۳$، $\bar{\theta}=۰٫۷$.

$$f(۰٫۳۱۵)=(۰٫۷)(۱٫۳۴۹۸۶)+\frac{۱}{۶}(۱٫۷)(۰٫۷)(-۰٫۳)(۰٫۰۰۳۳۸)$$

$$+(۰٫۳)(۱٫۴۱۹۰۷)+\frac{۱}{۶}(۱٫۳)(۰٫۳)(-۰٫۷)(۰٫۰۰۳۵۴)$$

$$=۰٫۹۴۴۹۰(۲)-۰٫۰۰۰۲۰(۱)+۰٫۴۲۵۷۲(۱)-۰٫۰۰۰۱۶(۱)$$

$$=۱٫۳۷۰۲۶.$$

گام ۲۲

ضرایب لاگرانژ عبارتند از:

برای $x_۰=-۲$، $$L_۰(x)=\frac{(x+۱)(x-۱)(x-۳)(x-۴)}{(-۱)(-۳)(-۵)(-۶)}$$

برای $x_۱=-۱$، $$L_۱(x)=\frac{(x+۲)(x-۱)(x-۳)(x-۴)}{۱(-۲)(-۴)(-۵)}$$

برای $x_۲ = ۱$، $L_۲(x) = \dfrac{(x+۲)(x+۱)(x-۳)(x-۴)}{۳\times ۲(-۲)(-۳)}$

برای $x_۳ = ۳$، $L_۳(x) = \dfrac{(x+۲)(x+۱)(x-۱)(x-۴)}{۵\times ۴\times ۲(-۱)}$

برای $x_۴ = ۴$، $L_۴(x) = \dfrac{(x+۲)(x+۱)(x-۱)(x-۳)}{۶\times ۵\times ۳\times ۱}$.

لذا:

$$f(۰) = L_۰(۰)\times ۴۶ + L_۱(۰)\times ۴ + L_۲(۰)\times ۴ + L_۳(۰)\times ۱۵۶ + L_۴(۰)\times ۴۸۴$$
$$= \frac{۱}{۱۵}(-۹۲+۳۶+۴۰-۴۶۸+۴۸۴)$$
$$= ۰.$$

گام ۲۳

۱ــ برای بــه دست آوردن جــدول تفاضل تقسیم شده ، نقاط را چنین مــرتب می‌کنیم: $x_۰ = ۲۷$، $x_۱ = ۸$، $x_۲ = ۱$، $x_۳ = ۰$، و $x_۴ = ۶۴$؛ (درایه‌ها در $۱۰^۵$ ضرب شده‌اند):

x	$f(x)$				
۲۷	۳ر۰۰۰۰۰				
		۵۲۶۳			
۸	۲ر۰۰۰۰۰		-۳۴۷		
		۱۴۲۸۶		۳۸۴	
۱	۱ر۰۰۰۰۰		-۱۰۷۱۴		-۶
		۱۰۰۰۰۰		۱۶۵	
۰	۰ر۰۰۰۰۰		-۱۴۸۸		
		۶۲۵۰			
۶۴	۴ر۰۰۰۰۰				

به موجب دستور نیوتن داریم:

$$\begin{aligned} f(۲۰) &= f(۲۷)+(-۷)\ f(۲۷,\ ۸)+(-۷)(+۱۲)\ f(۲۷,\ ۸,\ ۱) \\ &\quad +(-۷)(+۱۲)(+۱۹)f(۲۷,\ ۸,\ ۱,\ ۰) \\ &\quad +(-۷)(+۱۲)(+۱۹)(+۲۰)f(۲۷,\ ۸,\ ۱,\ ۰,\ ۶۴) \\ &= ۳-۷(۰٫۰۵۲۶۳)-۸۴(-۰٫۰۰۳۴۷)-۱۵۹۶(۰٫۰۰۳۸۴) \\ &\quad -۳۱۹۲۰(-۰٫۰۰۰۰۰۶) \\ &= ۳-۰٫۳۶۸۴۱+۰٫۲۹۱۴۸-۶٫۱۲۸۶۴+۱٫۹۱۵۲۰ \\ &= -۱٫۲۹۰۳۷(!). \end{aligned}$$

چون جملات نزولی نیستند، لذا به این نتیجه نمی‌توان زیاد اطمینان داشت. دانشجویان ممکن است به‌خاطر بیاورند که این مثال را جهت تحذیری درمورد استفاده از دستور درونیابی لاگرانژ، در بخش ۳ ازگام ۲۲، نقل کردیم. با تفاضلات تقسیم شده، لااقل می‌توان فهمید که درونیابی برای $f(۲۰)$ فاقد اعتبار است!

۲- i) برای به دست آوردن طرح تفاضل تقسیم شده، نقاط را چنین مرتب می‌کنیم:

$x_۰=-۱$، $x_۱=۱$، $x_۲=-۲$، $x_۳=۳$ و $x_۴=۴$.

	x	$f(x)$				
$k=۰$	-۱	۴				
			۰			
$k=۱$	۱	۴		۱۴		
			-۱۴		۱	
$k=۲$	-۲	۴۶		۱۸		۲
			۲۲		۱۱	
$k=۳$	۳	۱۵۶		۵۱		
			۳۲۸			
$k=۴$	۴	۴۸۴				

لذا:

$$f(\text{۰})=f(-\text{۱})+(+\text{۱})f(-\text{۱},\ \text{۱})+(+\text{۱})(-\text{۱})f(-\text{۱},\ \text{۱},\ -\text{۲})$$
$$+(+\text{۱})(-\text{۱})(+\text{۲})f(-\text{۱},\ \text{۱},\ -\text{۲},\ \text{۳})$$
$$+(+\text{۱})(-\text{۱})(+\text{۲})(-\text{۳})f(-\text{۱},\ \text{۱},\ -\text{۲},\ \text{۳},\ \text{۴})$$
$$=\text{۴}+\text{۱}\times\text{۰}-\text{۱}\times\text{۱۴}-\text{۲}\times\text{۱}+\text{۶}\times\text{۲}$$
$$=\text{۰}.$$

ii) برای به دست آوردن طرح ایتکن، نقاط را مجدداً چنین مرتب می کنیم:

$x_\text{۴}=\text{۴}$ ، $x_\text{۳}=\text{۳}$ ، $x_\text{۲}=-\text{۲}$ ، $x_\text{۱}=\text{۱}$ ، $x_\text{۰}=-\text{۱}$.

	x	$f(x)$					x_k-x
$k=\text{۰}$	−۱	۴					−۱
$k=\text{۱}$	۱	۴	۴				۱
$k=\text{۲}$	−۲	۴۶	−۳۸	−۱۰			−۲
$k=\text{۳}$	۳	۱۵۶	۴۲	−۱۵	−۱۲		۳
$k=\text{۴}$	۴	۴۸۴	۱۰۰	−۲۸	−۱۶	۰	۴

اعتبار این درونیابی مشکوک است. جملات دستور تفاضل تقسیم شدهٔ نیوتن به اندازهٔ کافی نزولی نیستند (با (i) مقایسه شود) ، در طرح ایتکن ، روی قطر به یك مقدار مکرر برنمی‌خوریم.

۳-

x	$f(x)$				x_k-x
۱	۲٫۳۹۱۹				−۱
۳	۲٫۳۹۳۸	۲٫۳۹۲۸(۵)			+۱
۰	۲٫۳۹۱۳	۲٫۳۹۲۵	۲٫۳۹۲۷(۳)		−۲
۴	۲٫۳۹۵۱	۲٫۳۹۲۹(۷)	۲٫۳۹۲۷(۳)	۲٫۳۹۲۷(۳)	+۲

گام ۲۴

۱ـ ریشهٔ $f(x)=x+\cos x$ در بازهٔ $-۰٫۸ < x < -۰٫۷$ قرار دارد؛ درواقع،

$$f(-۰٫۸)=-۰٫۱۰۳۳$$

و

$$f(-۰٫۷)=+۰٫۰۶۴۸.$$

چون $f(x)$ به طور صریح معلوم است، لذا به‌آسانی می‌توان‌آن را (مثلا، با تنصیف بازه به طور پی در پی) در نقاط جدید جدول‌بندی و از درونیابی معکوس خطی استفاده‌کرد:

$$f(-۰٫۷۵)=-۰٫۰۱۸۳,\ \theta=\frac{۰+۰٫۰۱۸۳}{۰٫۰۶۴۸+۰٫۰۱۸۳}=۰٫۲۲۰۲$$

و ازآنجا داریم: $x=-۰٫۷۵+(۰٫۲۲۰۲)(۰٫۰۵)=-۰٫۷۳۹۰$؛ همچنین

$$f(-۰٫۷۲۵)=+۰٫۰۲۳۵,\ \theta=\frac{۰+۰٫۰۱۸۳}{۰٫۰۲۳۵+۰٫۰۱۸۳}=۰٫۴۳۷۸$$

و ازآنجا داریم: $x=-۰٫۷۵+(۰٫۴۳۷۸)(۰٫۰۲۵)=-۰٫۷۳۹۱$؛ و نیز

$$f(-۰٫۷۳۷۵)=+۰٫۰۰۲۷,\ \theta=\frac{۰+۰٫۰۱۸۳}{۰٫۰۰۲۷+۰٫۰۱۸۳}=۰٫۸۷۱۴$$

و ازآنجا داریم : $x=-۰٫۷۵+(۰٫۸۷۱۴)(۰٫۰۱۲۵)=-۰٫۷۳۹۱$.

اگر $x=-۰٫۷۳۹۱$ را امتحان‌کنیم، داریم: $f(-۰٫۷۳۹۱)=۰٫۰۰۰۰$.

۲ـ باافزایش x، تابع $f(x)=۳xe^x$ نیزافزایش می‌یابد؛ در نتیجه تنها یك x وجود داردکه $f(x)=۱$. در واقع، درگام ۷ مشاهده‌کردیم کـه $۰٫۲۵ < x < ۰٫۲۷$، و این‌بازه برای درونیابی‌معکوس‌خطی به‌قدرکافی کوچك‌است: چون $f(۰٫۲۷)=۱٫۰۶۱۱$ و $f(۰٫۲۵)=۰٫۹۶۳۰$ ، داریم:

$$\theta=\frac{۱٫۰۰۰۰-۰٫۹۶۳۰}{۱٫۰۶۱۱-۰٫۹۶۳۰}=۰٫۳۷۷۲,$$

و لذا داریم : $x=۰٫۲۵+(۰٫۳۷۷۲)(۰٫۰۲)=۰٫۲۵۷۵$.

اگر $x=۰٫۲۵۸$ را امتحان‌کنیم، خواهـیم داشت $f(۰٫۲۵۸)=۱٫۰۰۱۸$، کـه به $f(x)=۱$ نزدیکتر است تا $f(۰٫۲۵۷)=۰٫۹۹۶۹$. (با اینکه مقدار تا $۳D$ فوراً از یك درونیابی معکوس خطی به دست می‌آید، ولی وقتی دقت بیشتر مورد نیاز باشد، ممکن است روش تنصیف توصیف شدهٔ درگام ۷ را ترجیح بدهیم.)

۳ـ اگر صورت صریح تابع معلوم نباشد، که در نتیجه جدول‌بندی مجدد هم به آسانی انجام‌پذیر نیست، می‌توان از درون‌یابی معکوس تکراری استفاده کرد. جدول تفاضلی مربوط چنین است:

x	$f(x)$	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
۲	۳٫۰۶۷۱			
		۳۳۴۱۷		
۳	۶٫۴۰۸۸		۷۵۲	
		۳۴۱۶۹		۶
۴	۹٫۸۲۵۷		۷۵۸	
		۳۴۹۲۷		۶
۵	۱۳٫۳۱۸۴		۷۶۴	
		۳۵۶۹۱		۶
۶	۱۶٫۸۸۷۵		۷۷۰	
		۳۶۴۶۱		۶
۷	۲۰٫۵۳۳۶		۷۷۶	
		۳۷۲۳۷		۶
۸	۲۴٫۲۵۷۳		۷۸۲	
		۳۸۰۱۹		۶
۹	۲۸٫۰۵۹۲		۷۸۸	
		۳۸۸۰۷		۶
۱۰	۳۱٫۹۳۹۹		۷۹۴	
		۳۹۶۰۱		۶
۱۱	۳۵٫۹۰۰۰		۸۰۰	
		۴۰۴۰۱		۶
۱۲	۳۹٫۹۴۰۱		۸۰۶	
		۴۱۲۰۷		
۱۳	۴۴٫۰۶۰۸			

برای یافتن x به طوری که $f(x) = 10$، می‌توان از درونیابی معکوس مبتنی بردستور پیشرو نیوتن استفاده کرد:

$$\theta_1 = \frac{10 - 9.8257}{3.4927} = \frac{0.1743}{3.4927} = 0.4990 \approx 0.05,$$

$$\theta_2 = \frac{1}{3.4927}\left\{0.1743 - \frac{1}{2}(0.05)(-0.95)(0.0764)\right\}$$

$$= \frac{1}{3.4927}\left\{0.1743 + 0.0018\right\} = 0.0504.$$

تصحیحهای بیشتر قابل اغماض هستند، و لذا

$$x = 4 + 0.0504 = 4.0504.$$

برای یافتن x به‌طوری که $f(x) = 20$، می‌توان درونیابی معکوس مبتنی بردستور اورت را انتخاب کرد:

$$\theta_1 = \frac{1}{3.6461}(20 - 16.8875) = \frac{3.1125}{3.6461} = 0.85365 \approx 0.85$$

$$\theta_2 = \frac{1}{3.6461}\{3.1125 + \frac{1}{6}(0.85)(-0.15)[(-1.15)(0.0770)$$

$$-(1.85)(0.0776)]\}$$

$$= \frac{1}{3.6461}\{3.1125 + (0.02125)(0.2321)\}$$

$$= \frac{3.1125 + 0.0049}{3.6461} = 0.8550$$

تصحیحهای بیشتر قابل اغماض هستند، ودرنتیجه

$$x = 6 + 0.8550 = 6.8550.$$

(البته دانشجویان ممکن است ترجیح بدهند که از فرم مبتنی بردستور پیشرو نیوتن استفاده کنند.)

برای یافتن x به‌طوری که $f(x) = 40$،می‌توان درونیابی معکوس‌مبتنی بردستور پسرو نیوتن را انتخاب کرد. لذا:

$$\theta_{۱}=\frac{f(x)-f_j}{\nabla f_j},$$

$$\theta_{۲}=\frac{f(x)-f_j-\frac{۱}{۲}\theta_{۱}(\theta_{۱}+۱)\nabla^{۲} f_j}{\nabla f_j},$$

و غیره. در نتیجه:

$$\theta_{۱}=\frac{۴۰-۳۹٫۹۴۰۱}{۴٫۰۴۰۱}=\frac{۰٫۰۵۹۹}{۴٫۰۴۰۱}=۰٫۰۱۴۸\approx ۰٫۰۱۵$$

$$\theta_{۲}=\frac{۰٫۰۵۹۹-\frac{۱}{۲}(۰٫۰۱۵)(۱٫۰۱۵)(۰٫۰۸۰۰)}{۴٫۰۴۰۱}$$

$$=\frac{۰٫۰۵۹۹-۰٫۰۰۰۶}{۴٫۰۴۰۱}=۰٫۰۱۴۷$$

و تصحیحهای بیشترهم قابل اغماض هستند، و لذا

$$x=۱۲+۰٫۰۱۴۷=۱۲٫۰۱۴۷.$$

اینك امتحان‌کردن بادرونیابی مستقیم را مورد توجه قرار می‌دهیم. از دستور پیشرو نیوتن داریم:

$$f(۴٫۰۵۰۴)=۹٫۸۲۵۷+(۰٫۰۵۰۴)(۳٫۴۹۲۷)$$
$$+\frac{۱}{۲}(۰٫۰۵۰۴)(-۰٫۹۴۹۶)(۰٫۰۷۶۴)$$
$$=۱۰٫۰۰$$

و

$$f(۶٫۸۵۵۰)=۱۶٫۸۸۷۵+(۰٫۸۵۵۰)(۳٫۶۴۶۱)$$
$$+\frac{۱}{۲}(۰٫۸۵۵۰)(-۰٫۱۴۵۰)(۰٫۰۷۷۶)$$
$$=۲۰٫۰۰,$$

حال‌آنکه به موجب دستور پسرو نیوتن داریم:

$$f(۱۲٫۰۱۴۷)=۳۹٫۹۴۰۱+(۰٫۰۱۴۷)(۴٫۰۴۰۱)$$

$$+\frac{۱}{۲}(۰٫۰۱۴۷)(۱٫۰۱۴۷)(۰٫۰۸۰۰)$$

$$=۴۰٫۰۰\,.$$

بالاخره چند جمله‌ای درجهٔ سوم $f(x)$ را تعیین وازآن برای امتحان کردن جواب استفاده می کنیم:

$$f(x)=f_j+\theta\Delta f_j+\frac{۱}{۲}\theta(\theta-۱)\Delta^{۲}f_j+\frac{۱}{۶}\theta(\theta-۱)(\theta-۲)\Delta^{۳}f_j$$

$$=۹٫۸۲۵۷+(x-۴)(۳٫۴۹۲۷)+\frac{۱}{۲}(x-۴)(x-۵)(۰٫۰۷۶۴)$$

$$+\frac{۱}{۶}(x-۴)(x-۵)(x-۶)(۰٫۰۰۰۶)$$

$$=\{۹٫۸۲۵۷-۴(۳٫۴۹۲۷)+۱۰(۰٫۰۷۶۴)-۲۰(۰٫۰۰۰۶)\}$$

$$+\left\{۳٫۴۹۲۷-\frac{۹}{۲}(۰٫۰۷۶۴)+\frac{۳۷}{۳}(۰٫۰۰۰۶)\right\}x$$

$$+\left\{\frac{۱}{۲}(۰٫۰۷۶۴)-\frac{۵}{۲}(۰٫۰۰۰۶)\right\}x^{۲}+\frac{۱}{۶}(۰٫۰۰۰۶)x^{۳}$$

$$=۰٫۰۰۰۱x^{۳}+۰٫۰۳۶۷x^{۲}+۳٫۱۵۶۳x-۳٫۳۹۳۱.$$

لذا:

$$f(۴٫۰۵۰۴)=۹٫۹۹۹۹$$

$$f(۶٫۸۵۵۰)=۲۰٫۰۰۰۱$$

$$f(۱۲٫۰۱۴۷)=۴۰٫۰۰۰۱.$$

(در هرحالت مقدار حاصل ازدرونیابی معکوس تکراری با دقت $۳D$ واقعاً برابر بامقدار نظیر از تابع است.)

گام ۲۵

۱ــ جدول زیرمقادیر خط وسهمی برای y، خطاهای مربوط، وهمچنین مربع خطاها را نشان می‌دهد.

معادلهٔ خط: $y =$ ۲ر۱۳ $+$ ۰ر۲x

معادلهٔ سهمی: $y = -$ ۱ر۲ $+$ ۲ر۷$x -$ ۰ر۳۶x^{2}

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶		
y	۱	۳	۴	۳	۴	۲		
مقدار yخط $= l$	۲ر۳۳	۲ر۵۳	۲ر۷۳	۲ر۹۳	۳ر۱۳	۳ر۳۳		
خطای خط $(y-l)$	—۱ر۳۳	۰ر۴۷	۱ر۲۷	۰ر۰۷	۰ر۸۷	—۱ر۳۳		
$(y-l)^{2}$	۱ر۷۶۹	۰ر۲۲۱	۱ر۶۱۳	۰ر۰۰۵	۰ر۷۵۷	۱ر۷۶۹	۶ر۱۳۴	$= S$ (خط)
مقدار y سهمی $= p$	۱ر۱۴	۲ر۷۶	۳ر۶۶	۳ر۸۴	۳ر۳۰	۲ر۰۴		
خطای سهمی $(y-p)$	—۰ر۱۴	۰ر۲۴	۰ر۳۴	—۰ر۸۴	۰ر۷۰	—۰ر۰۴		
$(y-p)^{2}$	۰ر۰۱۹۶	۰ر۰۵۷۶	۰ر۱۱۵۶	۰ر۷۰۵۶	۰ر۴۹۰۰	۰ر۰۰۱۶	۱ر۳۹۰	$= S$ (سهمی)

۲ـ پس از محاسبهٔ n، $\sum x$، $\sum y$، $\sum x^۲$، و $\sum xy$، درج آنها در معادلات نرمال، و حل معادلات حاصل خواهیم داشت:

i) معادلات نرمال:

$$۲۳٫۹ = ۸c_۱ + ۳۴۸c_۲$$

$$۱۰۴۹٫۱ = ۳۴۸c_۱ + ۱۵۲۶۰c_۲.$$

خطکمترین مربعات:

$$y = -۰٫۳۸ + ۰٫۰۷۷x$$

پیش بینی: وقتی $x = ۳۸$ درصد نیکل (y) (تا $۲D$) عبارت است از ۲٫۵۵.

ii) معادلات نرمال:

$$۳۴۸ = ۶c_۱ + ۲۱۹c_۲$$

$$۱۳۶۵۹ = ۲۱۹c_۱ + ۸۵۳۱c_۲.$$

خطکمترین مربعات:

$$y = -۶٫۹۹ + ۱٫۷۸x.$$

پیش بینی: وقتی $x = ۴۸$ فروش (y) عبارت است از ۷۸٫۴۵($\times$ ۱۰۰۰ تومان).

۴ـ شکل ماتریسی معادلات نرمال (ر. ك. سؤال ۳) عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} ۹ \\ ۲۴ \\ ۷۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & ۱۰ & ۳۰ \\ ۱۰ & ۳۰ & ۱۰۰ \\ ۳۰ & ۱۰۰ & ۳۵۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_۱ \\ c_۲ \\ c_۳ \end{bmatrix}$$

اعضای مندرج در ماتریسها، $\sum y = ۹$، $\sum xy = ۲۴$، و غیره هستند.

جواب: $y = c_۱ + c_۲x + c_۳x^۲ = -۰٫۲۵۷۲ + ۲٫۳۱۴۴x - ۰٫۴۲۸۶x^۲$

$S = ۰٫۶۲۸۶$ (تا $۴D$)

۵ـ جهت مینیمم کردن

$$S = \sum_{i=۱}^{۴} \varepsilon_i^۲ = \sum_{i=۱}^{۴} (y_i - c_۱ - c_۲ \sin x_i)^۲$$

لازم است که $c_۱$ و $c_۲$ را محاسبه کنیم.

اما $\frac{\partial S}{\partial c_۱}=\sum -۲\,(y_i-c_۱-c_۲\sin x_i)$ و

$$\frac{\partial S}{\partial c_۲}=\sum -۲(y_i-c_۱-c_۲\sin x_i)\sin x_i$$

لذا معادلات نرمال به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum y_i=۴c_۱+(\sum \sin x_i)c_۲$$

و

$$\sum y_i \sin x_i=(\sum \sin x_i)c_۱+(\sum \sin^۲ x_i)c_۲.$$

با جدول‌بندی کردن

x_i	y_i	$\sin x_i$	$y_i \sin x_i$	$\sin^۲ x_i$
۰	۰	۰	۰	۰
$\pi/۶$	۱	۰٫۵	۰٫۵	۰٫۲۵
$\pi/۲$	۳	۱	۳	۱
$۵\pi/۶$	۲	۰٫۵	۱	۰٫۲۵
$\sum$	۶	۲	۴٫۵	۱٫۵

و حل معادلات

$$۶=۴c_۱+\quad ۲c_۲$$

$$۴٫۵=۲c_۱+۱٫۵c_۲$$

به دست می‌آوریم: $c_۱=۰$ و $c_۲=۳$.

گام ۲۶

۱ــ دستور تفاضل پسرو نیوتن را در نظر بگیرید:

$$f(x)=f(x_j+\theta h)\approx[۱+\theta\nabla+\frac{۱}{۲}\theta(\theta+۱)\nabla^۲+\frac{\theta(\theta+۱)(\theta+۲)}{۳!}\nabla^۳$$

$$+\cdots]f_j,$$

$$f'(x)=\frac{۱}{h}\frac{df}{d\theta}\approx\frac{۱}{h}[\nabla+(\theta+\frac{۱}{۲})\nabla^۲+\frac{۳\theta^۲+۶\theta+۲}{۶}\Delta^۳+\dots]f_j,$$

$$f''(x)=\frac{۱}{h^۲}\frac{d^۲f}{d\theta^۲}\approx\frac{۱}{h^۲}[\nabla^۲+(\theta+۱)\Delta^۳+\dots]f_j.$$

۲ـ جدول تفاضلی:

x	$f(x)$	Δ	$\Delta^۲$	$\Delta^۳$
۱٫۰۰	۱٫۰۰۰۰۰۰			
		۲۴۷۰		
۱٫۰۵	۱٫۰۲۴۷۰		−۵۹	
		۲۴۱۱		۵
۱٫۱۰	۱٫۰۴۸۸۱		−۵۴	
		۲۳۵۷		۴
۱٫۱۵	۱٫۰۷۲۳۸		−۵۰	
		۲۳۰۷		۱
۱٫۲۰	۱٫۰۹۵۴۵		−۴۹	
		۲۲۵۸		۶
۱٫۲۵	۱٫۱۱۸۰۳		−۴۳	
		۲۲۱۵		
۱٫۳۰	۱٫۱۴۰۱۸			

توجه کنید که $h=۰٫۰۵$. لذا:

(i

$$f'(۱٫۰۰)\approx ۲۰[\Delta-\frac{۱}{۲}\Delta^۲+\frac{۱}{۳}\Delta^۳]f(۱٫۰۰)$$

$$=۲۰(۰٫۰۲۴۷۰+۰٫۰۰۰۲۹۵+۰٫۰۰۰۰۱۷)$$

$$=۰٫۵۰۰۲۴۰.$$

$$f''(۱٫۰۰)\approx(۲۰)^۲[\Delta^۲-\Delta^۳]f(۱٫۰۰)$$

$$=۴۰۰(-۰٫۰۰۰۵۹-۰٫۰۰۰۰۵)$$

البته مقادیر درست عبارتند از:

$$f'(۱/۰۰) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\Big|_{x=۱/۰۰} = ۰/۵ \quad ,$$

$$f''(۱/۰۰) = -\frac{۱}{۴x^{۳/۲}}\Big|_{x=۱/۰۰} = -۰/۲۵;$$

باوجودی‌که داده‌ها تا $۵D$ درستند، ولی نتایج به‌ترتیب تنها تا $۳D$ و $۱D$ دقیق هستند.

(ii

$$f'(۱/۳۰) \approx ۲۰\,[\nabla + \tfrac{۱}{۲}\nabla^{۲} + \tfrac{۱}{۳}\nabla^{۳}]f(۱/۳۰)$$

$$= ۲۰(۰/۰۲۲۱۵ - ۰/۰۰۰۲۱(۵) + ۰/۰۰۰۰۲)$$

$$= ۰/۴۳۹۱.$$

$$f''(۱/۳۰) \approx (۲۰)^{۲}[\nabla^{۲} + \nabla^{۳}]f(۱/۳۰)$$

$$= ۴۰۰(-۰/۰۰۰۴۳ + ۰/۰۰۰۰۶)$$

$$= -۰/۱۴۸.$$

مقادیر درست تا $۴D$ عبارتند از ۰/۴۳۸۵ و ۰/۱۶۸۷ −.

۳ـ i) اگرحول $x = x_j$ بسط داده شود داریم:

$$f(x_j + h) = f(x_j) + hf'(x_j) + \frac{۱}{۲}h^{۲}f''(x_j) + \cdots,$$

بنابراین:

$$\frac{۱}{h}(f(x_j + h) - f(x_j)) = f'(x_j) + \frac{۱}{۲}hf''(x_i) + \cdots$$

و

$$\text{خطا} \approx \frac{۱}{۲}hf''(x_j).$$

ii) اگرحول $x = x_j + \frac{۱}{۲}h$ بسط داده شود، خواهیم داشت:

$$f(x_j+h)=f\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)+\frac{۱}{۲}hf'\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)$$

$$+\frac{۱}{۸}h^۲f''\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)+\frac{۱}{۴۸}h^۳f'''\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)+\cdots,$$

و

$$f(x_j)=f\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)-\frac{۱}{۲}hf'\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)$$

$$+\frac{۱}{۸}h^۲f''\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)-\frac{۱}{۴۸}h^۳f'''\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)+\cdots.$$

لذا:

$$\frac{f(x_j+h)-f(x_j)}{h}=f'\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)+\frac{۱}{۲۴}h^۲f'''\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right)+\cdots$$

و

$$\text{خطا}\approx\frac{۱}{۲۴}h^۲f'''\left(x_j+\frac{۱}{۲}h\right).$$

iii) اگر حول $x=x_j$ بسط داده شود داریم:

$$f(x_j+۲h)=f(x_j)+۲hf'(x_j)+۲h^۲f''(x_j)+\frac{۴}{۳}h^۳f'''(x_j)+\cdots.$$

بنابراین:

$$\frac{f(x_j+۲h)-۲f(x_j+h)+f(x_j)}{h^۲}=f''(x_j)+hf'''(x_j)+\cdots,$$

و

$$\text{خطا}\approx hf'''(x_j).$$

iv) و اگر حول $x=x_j+h$ بسط داده شود داریم:

$$f(x_j+۲h)=f(x_j+h)+hf'(x_j+h)+\frac{۱}{۲}h^۲f''(x_j+h)$$

$$+\frac{۱}{۶}h^۳f'''(x_j+h)+\frac{۱}{۲۴}h^۴f^{(۴)}(x_j+h)+\cdots,$$

$$f(x_j)=f(x_j+h)-hf'(x_j+h)+\frac{۱}{۲}h^۲f''(x_j+h)$$

$$-\frac{۱}{۶}h^۳f'''(x_j+h)+\frac{۱}{۲۴}h^۴f^{(۴)}(x_j+h)+\cdots.$$

بنابراین:

$$\frac{1}{h^2}\left(f(x_j+2h)-2f(x_j+h)+f(x_j)\right)=f''(x_j+h)$$

$$+\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(x_j+h)+\cdots,$$

و

$$\text{خطا} \approx \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(x_j+h)\,.$$

گام ۲۷

۱– با $b-a=1.30-1.00=0.30$، می‌توان مقادیر $h=0.30$، $h=0.15$، $h=0.10$، $h=0.05$، ... را انتخاب کرد.
اگر $T(h)$ نمایانگر تقریب متناظر با نواری به عرض h باشد داریم:

$$T(0.30)=\frac{0.30}{2}(1.000000+1.14018)=0.32102(7)\,.$$

$$T(0.15)=\frac{0.15}{2}(1.000000+1.14018)+(0.15)(1.07238)\,.$$

$$=0.16051(4)+0.16085(7)=0.32137(1).$$

$$T(0.10)=\frac{0.10}{2}(1.000000+1.14018)$$

$$+(0.10)(1.04881+1.09545)$$

$$=0.10700(9)+0.21442(6)=0.32143(5).$$

$$T(0.05)=\frac{0.05}{2}(1.000000+1.14018)+$$

$$+(0.05)(1.02470+1.04881+1.07238+1.09545$$

$$+1.11803)$$

$$=0.05350(5)+0.26796(9)=0.32147(4).$$

در واقع جواب تا $8D$ برابر است با ۰٫۳۲۱۴۸۵۳۷ و در نتیجه می‌توان مشاهده کرد

که‌دنبالهٔ خطا یعنی، ۰ر۰۰۰۰۱(۱)، ۰ر۰۰۰۰۵(۰)، ۰ر۰۰۰۱۱(۴)، ۰ر۰۰۰۴۵(۸) متناظر است باکاهشی به نسبت $h^۲$ (خطای برشی برخطای گردشده غلبه می کند).

۲-
$$T(۱)=\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{۱+۰}+\frac{۱}{۱+۱}\right\}=۰ر۷۵,$$

$$T(۰ر۵)=\frac{۰ر۵}{۲}\left\{\frac{۱}{۱+۰}+\frac{۱}{۱+۱}\right\}+۰ر۵\left(\frac{۱}{۱+۰ر۵}\right)=۰ر۷۰۸۳(\text{تا } ۴D),$$

$$T(۰ر۲۵)=\frac{۰ر۲۵}{۲}\left\{\frac{۱}{۱+۰}+\frac{۱}{۱+۱}\right\}+۰ر۲۵\left\{\frac{۱}{۱+۰ر۲۵}+\frac{۱}{۱+۰ر۵}+\frac{۱}{۱+۰ر۷۵}\right\}=۰ر۶۹۷۰(\text{تا } ۴D).$$

مقدار دقیق برابراست با $\log_e ۲\approx ۰ر۶۹۳۱$، لذا خطاها (تقریباً) به ترتیب عبارتند از ۰ر۰۵۶۹، ۰ر۰۱۵۲، و ۰ر۰۰۳۹ (به‌کاهش متناسب با $h^۲$ توجه کنید).

گام ۲۸

داریم:

$$f(x)=\frac{۱}{۱+x}$$

$$f''(x)=\frac{۲}{(۱+x)^۳}$$

$$f^{(۴)}(x)=\frac{۲۴}{(۱+x)^۵}.$$

کران خطای برشی مربوط به‌قاعدهٔ ذوزنقه‌ای عبارت است از $\frac{۲}{۱۲}h^۲=\frac{۱}{۶}h^۲$، ولذا جهت به‌دست آوردن دقت $۴D$ نیاز به‌انتخاب $h\leqslant ۰ر۰۱$ داریم. اما برای قاعدهٔ سیمپسون، کران خطای برشی برابر است با $\frac{۲۴}{۱۸۰}h^۴=\frac{۲}{۱۵}h^۴$: می‌توانیم $h=۰ر۱$ را انتخاب کنیم.
جدول‌بندی عبارت است از:

x	۰	۰ر۱	۰ر۲	۰ر۳	۰ر۴	۰ر۵
$f(x)$	۱ر۰۰۰۰۰۰	۰ر۹۰۹۰۹۱	۰ر۸۳۳۳۳۳	۰ر۷۶۹۲۳۱	۰ر۷۱۴۲۸۶	۰ر۶۶۶۶۶۷
x	۰ر۶	۰ر۷	۰ر۸	۰ر۹	۱ر۰	
$f(x)$	۰ر۶۲۵۰۰۰	۰ر۵۸۸۲۳۵	۰ر۵۵۵۵۵۶	۰ر۵۲۶۳۱۶	۰ر۵۰۰۰۰۰	

با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون،

$$\begin{aligned}\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x}dx = \frac{۰ر۱}{۳}\Big[& ۱+۴(۰ر۹۰۹۰۹۱+۰ر۷۶۹۲۳۱+۰ر۶۶۶۶۶۷ \\ & +۰ر۵۸۸۲۳۵+۰ر۵۲۶۳۱۶) \\ & +۲(۰ر۸۳۳۳۳۳+۰ر۷۱۴۲۸۶+۰ر۶۲۵۰۰۰ \\ & +۰ر۵۵۵۵۵۶)+۰ر۵۰۰۰۰۰\Big] \\ =\ & ۰ر۶۹۳۱(۵).\end{aligned}$$

(توجه کنید که جهت مقابله با خطای گرد شده لازم است عملیات را دست‌کم تا $۵D$ انجام دهیم، و نیز توجه کنید که تا $۶D$، $\int_۰^۱ \frac{۱}{۱+x}dx = ۰ر۶۹۳۱۴۷$.)

گام ۲۹

به جدول تفاضلی (که ذیلاً آمده است) رجوع کنید:

i) $x_۰ = ۰ر۸۸$، $x_۰+h = ۰ر۹۲$ (تفاضلات پیشرو)

$$\begin{aligned}\int_{۰ر۸۸}^{۰ر۹۲} f(b)dx &\approx ۰ر۰۴(۱ر۲۰۹۷+۰ر۰۵۱۸-۰ر۰۰۰۹(۶)+۰ر۰۰۰۱) \\ &= ۰ر۰۴(۱ر۲۶۰۶) \\ &= ۰ر۰۵۰۴.\end{aligned}$$

ii) $x_۰ = ۰ر۸۸$، $x_۰+h = ۰ر۹۲$ (تفاضلات پسرو)

$$\begin{aligned}\int_{\text{۰ر۸۸}}^{\text{۰ر۹۲}} f(x)dx &\approx \text{۰ر۰۴}(\text{۱ر۲۰۹۷}+\text{۰ر۰۴۷۰}(\text{۵})+\text{۰ر۰۰۳۳}(\text{۸})\\ &\quad +\text{۰ر۰۰۰۴}(\text{۵}))\\ &= \text{۰ر۰۴}(\text{۱ر۲۶۶})\\ &= \text{۰ر۵۰۴}.\end{aligned}$$

x	$f(x)$	Δ	$\Delta^{۲}$	$\Delta^{۳}$	$\Delta^{۴}$
۰ر۶۸	۰ر۸۰۸۷				
		۶۸۴			
۰ر۷۲	۰ر۷۷۷۱		۵۰		
		۷۳۱		۷	
۰ر۷۶	۰ر۹۵۰۵		۵۷		۵
		۷۹۱		۱۲	
۰ر۸۰	۱ر۰۲۹۶		۶۹		۰
		۸۶۰		۱۲	
۰ر۸۴	۱ر۱۱۵۶		۸۱		۲
		۹۴۱		۱۴	
۰ر۸۸	۱ر۲۰۹۷		۹۵		۶
		۱۰۳۶		۲۰	
۰ر۹۲	۰ر۳۱۳۳		۱۱۵		۴
		۱۱۵۲		۲۴	
۰ر۹۶	۱ر۴۲۸۴		۱۳۹		۹
		۱۲۹۰		۳۳	
۱ر۰۰	۱ر۵۵۷۴		۱۷۲		۹
		۱۴۶۲		۴۲	
۱ر۰۴	۱ر۷۰۳۶		۲۱۴		۱۶
		۱۶۷۶		۵۸	
۱ر۰۷	۱ر۸۷۱۲		۲۷۲		
		۱۹۴۸			
۱ر۱۲	۲ر۰۶۶۰				

گام ۳۰

با تغییرمتغیر داریم:

$$u=\frac{۱}{۲}(x+۱).$$

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+u}du=\frac{۱}{۲}\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{۱+\frac{۱}{۲}(x+۱)}dx$$

$$=\int_{-۱}^{۱}\frac{dx}{۳+x}.$$

فرمول دو نقطه‌ای:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+u}du\approx\frac{۱}{۳-۰٫۵۷۷۳۵۰۲۷}+\frac{۱}{۳+۰٫۵۷۷۳۵۰۲۷}$$

$$=۰٫۴۱۲۷۷۱+۰٫۲۷۹۵۳۷$$

$$=۰٫۶۹۲۳۰۸$$

که تا $۲D$ درست است.

فرمول چهارنقطه‌ای:

$$\int_{۰}^{۱}\frac{۱}{۱+u}du\approx۰٫۳۴۷۸۵۴۸۵\left\{\frac{۱}{۳-۰٫۸۶۱۱۳۶۳۱}+\frac{۱}{۳+۰٫۸۶۱۱۳۶۳۱}\right\}$$

$$+۰٫۶۵۲۱۴۵۱۵\left\{\frac{۱}{۳-۰٫۳۳۹۹۸۱۰۴}+\frac{۱}{۳+۰٫۳۳۹۹۸۱۰۴}\right\}$$

$$\approx۰٫۳۴۷۸۵۵[۰٫۴۶۷۵۳۸+۰٫۲۵۸۹۹۱]$$

$$+۰٫۶۵۲۱۴۵[۰٫۳۷۵۹۳۷+۰٫۲۹۹۴۰۳]$$

$$=(۰٫۳۴۷۸۵۵)(۰٫۷۲۶۵۲۹)+(۰٫۶۵۲۱۴۵)(۰٫۶۷۵۳۴۰)$$

$$=۰٫۶۹۳۱۴۷(\text{درست تا } ۶D)$$

گام ۳۱

۱- $$y_{n+۱}=y_{n-۱}+۰٫۲(x_n+y_n)$$

$$y_۲ \quad = ۱ + ۰٫۲(۰٫۱ + ۱٫۱۱) = ۱٫۲۴۲$$

$$y_۳ \quad = ۱٫۱۱ + ۰٫۲(۰٫۲ + ۱٫۲۴۲) = ۱٫۳۹۸۴$$

$$y_۴ \quad = ۱٫۲۴۲ + ۰٫۲(۰٫۳ + ۱٫۳۹۸۴) = ۱٫۵۸۱۶۸$$

$$y_۵ \quad = ۱٫۳۹۸۴ + ۰٫۲(۰٫۴ + ۱٫۵۸۱۶۸) = ۱٫۷۹۴۷۳۶.$$

که دارای خطایی تقریباً برابر با ۰٫۰۰۳ است (با بخش (پ) از گام ۳۱ مقایسه کنید).

۲- $$y_{n+۱} = y_n - ۰٫۲x_n\, y_n{}^۲ = y_n(۱ - ۰٫۲x_n\, y_n)$$

$$y_۱ \quad = ۲(۱ - ۰٫۲ \times ۰ \times ۲) = ۲$$

$$y_۲ \quad = ۲(۱ - ۰٫۲ \times ۰٫۲ \times ۲) = ۱٫۸۴$$

$$y_۳ \quad = ۱٫۸۴(۱ - ۰٫۲ \times ۰٫۴ \times ۱٫۸۴) = ۱٫۵۶۹۱۵$$

$$y_۴ \quad = ۱٫۵۶۹۱۵(۱ - ۰٫۲ \times ۰٫۶ \times ۱٫۵۶۹۱۵) = ۱٫۲۷۳۶۸$$

$$y_۵ \quad = ۱٫۲۷۳۶۸(۱ - ۰٫۲ \times ۰٫۸ \times ۱٫۲۷۳۶۸) = ۱٫۰۱۴۱۲.$$

جواب درست عبارت است از $y(x) = ۲/(۱ + x^۲)$ ، لذا $y(۱) = ۱$ و خطا در $y_۵$ تقریباً برابر است با ۰٫۰۱۴.

واژه‌نامهٔ انگلیسی به فارسی

abscissa	طول
absolute error	خطای مطلق
acceleration	شتاب
accumulated error	خطای مجتمع
Adams - Bashforth method	روش ادمز - بشفورث
Aitken's interpolating method	روش درونیابی ایتکن
algorithm	الگوریتم
approximation	تقریب
— to functions	تقریب به‌توابع
asymptotic series	سری مجانبی
augmented matrix	ماتریس افزوده
back - substitution	جایگذاری از پایین
backward differences	تفاضلات پسرو
Bessel function	تابع بسل
Bessel's interpolating formula	دستور درونیابی بسل
bisection method	روش تنصیف
blunder	خبط
central difference	تفاضل مرکزی
— operator	عملگر تفاضل مرکزی

Chebyshev polynomials	چند جمله‌ایهای چبیشف
– series	سری چندجمله‌ایهای چبیشف
check column	ستون امتحان
chopping	بریدن
– error	خطای بریدن
coefficient matrix	ماتریس ضرایب
collocation polynomial	چندجمله‌ای هم‌محل
convergence	همگرایی
curve	منحنی
– fitting	برازش منحنی
data	داده‌ها
definite integral	انتگرال معین
derivative	مشتق
difference	تفاضل
– notation	نماد تفاضل
– table	جدول تفاضل
differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
differentiation	دیفرانسیل گیری
effectiveness	کارآیی
elementary	مقدماتی
elimination	حذف
equation	معادله
error	خطا
– generation	تولید خطا
estimate	تخمین
existence	وجود

expansion	بسط
exponent	نما
false position	نابجایی
_ flow-chart	فلوچارت نابجایی
fan of errors	پرهٔ خطاها
finite differences	تفاضلات متناهی
floating point arithmetic	حساب ممیز سیار
flow-chart	فلوچارت
forward differences	تفاضلات پیشرو
_ operator	عملگر تفاضلات پیشرو
Fourier series	سری فوریه
function	تابع
gereration	تولید
graph	نمودار
ill-conditioning	بدحالت بودن
increament	نمو
initial value	مقدار اولیه
integration	انتگرال گیری
interpolating polynomial	چند جمله‌ای درونیاب
interpolation	درونیابی
interval	بازه
inverse	معکوس
_ interpolation	درونیابی معکوس
iteration	تکرار
iterative	تکراری
_ method	روش تکراری

– procedure	روند تکراری
least square approximation	تقریب کمترین مربعات
linear	خطی
locating roots	تعیین محل ریشه‌ها
mantissa	مانتیس
matrix	ماتریس
– inversion	معکوس کردن ماتریس
mean	میانگین
– value	مقدار میانگین
measurement	اندازه‌گیری
– error	خطای اندازه‌گیری
method	روش
midpoint	نقطهٔ میانی
– method	روش نقطهٔ میانی
mistake	اشتباه
model	قالب
multistep method	روش چندگامی
nonlinear	غیرخطی
normal	نرمال
normalized	نرمال شده
notation	علامت‌گذاری، نمادگذاری
number	عدد
numerical	عددی
– differentiation	دیفرانسیل‌گیری عددی
– integration	انتگرال‌گیری عددی
– method	روش عددی

operations	اعمال [عملیات]
operator	عملگر
order	مرتبه
ordinary differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل معمولی
orthogonal	متعامد
– functions	توابع متعامد
– polynomials	چند جمله‌ایهای متعامد
parabola	سهمی
parameter	پارامتر
partial differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل جزئی
partial range integration formulae	دستورهای انتگرال‌گیری حوزهٔ جزئی
piecewise polynomial	چند جمله‌ای تکه‌ای
pivot	محور
– element	عضومحوری
– row	سطرمحوری
pivotal condensation	انقباض محوری
polynomial	چند جمله‌ای
– approximation	تقریب چند جمله‌ای
principle	اصل
propagation	انتشار
quadratic	درجهٔ دوم، مرتبهٔ دوم
– approximation	تقریب درجهٔ دوم
– convergence	همگرایی مرتبهٔ دوم
– interpolation	درونیابی درجهٔ دوم
quadrature	کوادراتور
range	حوزه

recursive	تراجعی
– procedure	روند تراجعی
relative error	خطای نسبی
remainder	باقیمانده
– term	جملهٔ باقیمانده
repeated root	ریشهٔ مکرر
residuals	مانده‌ها
root	ریشه
rounding	گردکردن
round off error	خطای گردشده
scientific notation	نمادگذاری علمی
secant method	روش وتری
series	سری
– expansion	بسط به سری
shift operator	عملگرانتقال
significant figure	رقم بامعنی
simple	ساده
– iteration method	روش تکرارساده
single step method	روش تك‌گامی
sketching curve	رسم منحنی
solution	جواب
spline functions	توابع اسپلاین
square root	جذر
step	گام
– length	طول گام
substitution	جایگذاری
table	جدول

three - point integration	انتگرال‌گیری سه‌نقطه‌ای
transcendental	متعالی
— equation	چند جمله‌ای متعالی
— function	تابع متعالی
transformation	تبدیل
trapezoidal rule	قاعدهٔ ذوزنقه‌ای
triangular	مثلثی
— form	شکل مثلثی
— matrix	ماتریس مثلثی
truncation	برش
— error	خطای برشی
two - point integration	انتگرال‌گیری دونقطه‌ای
uniqueness	یکتایی
zero	صفر

واژه‌نامهٔ فارسی به انگلیسی

ارقام	figures
ـ با معنی	significant figures
اشتباه	mistake
اصل	principle
اعمال	operations
ـ تبدیل	transformation operations
ـ مقدماتی	elementary operations
الگوریتم	algorithm
انتشار	propagation
انتگرال	integral
ـ معین	definite integral
انتگرال گیری	integration
ـ دونقطه‌ای	two-point integration
ـ سه‌نقطه‌ای	three-point integration
ـ عددی	numerical inlegration
اولیه	initial
بازه	interval
باقیمانده	remainder
بدحالت بودن	ill-conditioning
برازش منحنی	curve-fitting

truncation	برش
chopping	بریدن
expansion	بسط
series expansion	ـ به‌سری
taylor expansion	ـ تیلر
parameter	پارامتر
fan of errors	پرهٔ خطا
continuous	پیوسته
function	تابع
spline function	ـ اسپلاین
transcendental function	ـ متعالی
weight function	ـ وزن
transformation	تبدیل
estimate	تخمین
recursive	تراجعی
interchange	تعویض
differences	تفاضلات
backward differences	ـ پسرو
forward differences	ـ پیشرو
divided differences	ـ تقسیم شده
finite differences	ـ متناهی
centeral differences	ـ مرکزی
approximation	تقریب
approximation to functions	ـ به‌توابع
quadratic approximation	ـ درجهٔ دوم
iteration	تکرار

تکراری	iterative
توابع متعامد	orthogonal polynomials
تولید	generation
جایگذاری	substitution
ـ از بالا	forward substitution
ـ از پایین	backward substitution
جدول	table
جذر	square root
جمله	term
جواب	solution
چند جمله‌ای	polynomial
ـ درونیاب	interpolating polynomial
ـ هم محل	collocation polynomial
حذف	elimination
حساب	arithmatic
حوزه	range
خبط	blunder
خطا	error
ـ ی اندازه گیری	measurement error
ـ ی برشی	truncation error
ـ ی بریدن	chopping error
ـ ی گردشده	round off error
ـ ی گردکردن	rounding error
ـ ی مجتمع	accumulated error
ـ ی مطلق	absolute error

propagated error	ـ ی منتشر شده
relative error	ـ ی نسبی
qadratic	درجهٔ دوم [مرتبهٔ دوم]
interpolation	درونیابی
linear interpolation	ـ خطی
qadratic interpolation	ـ درجهٔ دوم
inverse interpolation	ـ معکوس
formula	دستور
sketching curves	رسم منحنی
method	روش
simple iteration method	ـ تکرار ساده
iterative method	ـ تکراری
single step method	ـ تك گامی
bisection method	ـ تنصیف
multistep method	ـ چند گامی
elimination method	ـ حذفی
false position method	ـ نابجایی
midpoint method	ـ نقطهٔ میانی
secant method	ـ وتری
root	ریشه
double root	ـ مضاعف
repeated root	ـ مکرر
procedure	روند
subinterval	زیربازه
column	ستون
check column	ـ امتحان

سری	series
ـ مجانبی	asymptotic series
سطر	row
ـ محوری	pivotal row
سهمی	parabola
شتاب	acceleration
شکل	form
ـ مثلثی	triangular form
صفر	zero
طول	abscissa, length
ـ گام	step length
عدد	number
عددی	numerical
عضو	element
ـ محوری	pivotal element
علامت گذاری	notation
ـ علمی	scientific notation
عملگر	operator
ـ انتقال	shift operator
فلوچارت	flow-chart
قاعده	rule
ـ ذوزنقه‌ای	trapezoidal rule
ـ سیمپسون	Simpson's rule
ـ نقطهٔ میانی	midpoint rule
قالب	model

ـ ریاضی	mathematical model
کارآیی	effectiveness
کمترین مربعات	least squares
کوادراتور	quadrature
گام	step
گرد کردن	rounding
ماتریس	matrix
ـ افزوده	augmented matrix
ـ ضرایب	coefficient matrix
ـ مثلثی	triangular matrix
مانتیس	mantissa
ـ نرمال شده	normalized matrix
مانده‌ها	residuals
متعالی	transcendental
متعامد	orthogonal
متناهی	finite
مثلثی	triangular
مرتبه	order
مرکزی	central
مشتق	derivative
ـ جزئی	partial derivative
مشتق گیری	differentiation
معادله	equation
ـ جبری	algebraic equation
ـ خطی	linear equation
ـ درجهٔ دوم	quadratic equation

differential equation	ـ دیفرانسیل
nonlinear equation	ـ غیرخطی
transcendental equation	ـ متعالی
value	مقدار
initial value	ـ اولیه
floating point	ممیزسیار
false position	نابجایی
exponent	نما
representation	نمایش
number representation	ـ اعداد
increament	نمو
graph	نمودار
existence	وجود
weight	وزن
convergent	همگرا
convergence	همگرایی
quadratic convergence	ـ مرتبهٔ دوم
uniqueness	یکتایی

فهرست راهنما