کاربردهای بینهایت

لیو زیپین

ترجمهٔ منوچهر میثاقیان

(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۷)

MATH75.IR

کاربردهای بینهایت

(ریاضیات پیش دانشگاهی ـ ۷)

لیو زیپین

ترجمهٔ منوچهر میثاقیان

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

MATH75.IR

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

MATH75.IR

پیشگفتار مؤلف

بیشتر مطالب این کتاب طوری تدوین شده است که خواننده نیاز به‌تخصص زیادی در زمینهٔ ریاضیات نداشته باشد. ایـن خواننده ممکن است دانش‌آموزی تازه‌آشنا با ریاضیات یا فردی باشد کـه بیشتر دانسته‌های خود را به کناری نهاده و به‌بوتهٔ فراموشی سپرده است. از سوی دیگر ایـن‌کتاب، جـز فصل اول آن، جنبهٔ ریاضی دارد ــ یعنی عرضهٔ منطقی دقیق مطالبی است تا حدی انتزاعی. بنابراین خواننده‌ای که موضوع کتاب را جالب می‌یابد، باید آمادگی داشته باشد تا کمی فکرش را به‌کار اندازد و با فکر کردن روی بعضی مطالب، گاهی بعضی از مسائل را حل کند. راه‌حلهای بعضی از ایـن مسأله‌هـا در کتاب داده شده است. ولـی از خـواننده نمی‌خواهم در هیچ جـای کتاب بیش از حـد درنگ کند، بسیاری از مطالب بعداً تکرار می‌شونـد و ممکن است خواننده در دید دوم به‌فهم مطالبی کـه در دید اول نامفهوم بوده، هدایت شود. ماهیت ریاضیات است که نویسنده را به‌این‌سبك عرضهٔ مطالب وامی‌دارد. یك‌مفهوم ریاضی با نکاتی کلیدی روشن می‌شود؛ تمام این نکات را نمی‌توان یکباره بیان کرد.

چه بسا خوانندگانی از خود بپرسند آیا ممکن است آدمی به‌موضوعی مانند «کاربرد بینهایت» که تـا این حد دور از دسترس است بپردازد؟ امـا همچنان که خواهیم دید، هر دو نفری که اعداد درست،

$$۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots$$

را بشناسند، می‌توانند پیرامون «بینهایتها» به‌تفصیل با یکدیگر گفتگو کنند.

من این کتاب را براساس گفته‌ای از داوید هیلبرت کـه ریاضیات را به‌مثابه

MATH75.IR

«دانش بینهایتها» تعریف می‌کند، نگاشته‌ام. قضایای جالب ریاضی با نتایج جالب سایر حوزه‌های دانش تفاوت دارند، زیرا گذشته‌از زیبایی و شگفت‌انگیزی‌مطالبی که بیان می‌کنند، «سیمایی جاودانی» دارند و همواره جزئی از رشتهٔ نامتناهی نتایج‌اند. مثال زیر منظورم را روشن می‌کند: این‌واقعیت که ۹+۷+۵+۳+۱ مجموع نخستین پنج عدد طبیعی فرد، ۵ برابر ۵ است از عجایب جالب است؛ اما اینکه به ازای جمیع مقادیر n، مجموع نخستین n عدد طبیعی فرد، $n^{۲}$ است یك قضیهٔ ریاضی است.

امیدوارم خوانندگان، این گفتهٔ مرا باور کنند که ریاضیدانان حرفه‌ای معتقد نیستند که معنی آنچه را که‌از دیدگاه فلسفی «بینهایت» نامیده می‌شود، بهتر ازدیگران می‌فهمند. من فکر می‌کنم اینکه بیشتر ریاضیدانان ازاین نوع مسائل صحبتی‌نمی کنند و آنهایی هم که صحبت می کنند اتفاق‌نظر ندارند، گفتهٔ مرا تأیید می کند.

MATH75.IR

فصل یك

بینهایتهای متداول و بینهایتهای ریاضی

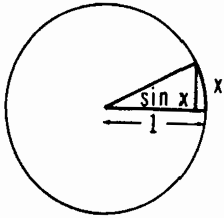
اگر «به‌کار بردن» چیزی به‌معنای حصول نوعی تسلط بر آن باشد، کسی که درعلوم ریاضی کار نکرده است، احتمال دارد شك کند کــه بینهایت کاربردی داشته باشد. البته به‌مفهوم بالا «به‌کار بردن بینهایت» کار ریاضیدانان است.

متخصصان دیگر نیز تاحدی از بینهایت استفاده می‌کنند. معماران ومهندسان جدولهای تابعهای مثلثاتی، لگاریتم، ونظیر اینها را به‌کارمی‌برند اما توجه ندارند که این جدولها به کمك تعداد زیادی از جمله‌های بعضی سریهای نامتناهی مناسب محاسبه شده‌اند. آنها به‌راحتی ازخمها و رویه‌های ریاضی‌استفاده می‌کنند، امانیازی ندارند که از بینهایتها اطلاعی داشته باشند. فیلسوفان و علمای الهیات با بینهایت آشنا هستند، امــا از دیدگاه ریاضیدانان اینان بینهایت را می‌ستایند اما زیاد به‌کار نمی‌برند.

ریاضیدانان نیز بینهایت را می‌ستایند. داوید هیلبرت* دانشمند بزرگ‌دربارهٔ آن گفته است که این‌فکر درهمهٔ اعصار ژرفترین تحرك را در اندیشهٔ آدمی به‌وجود

---

* داوید هیلبرت (۱۹۴۳—۱۸۶۲) یکی‌از بزرگترین ریاضیدانان سدهٔ بیستم است.

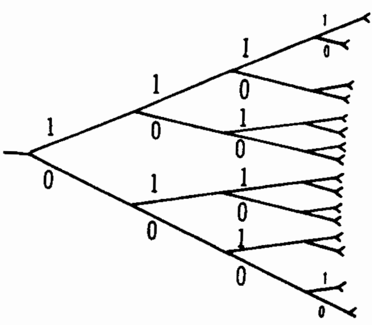


شکل ۱۰۱ $\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۶} + \frac{x^{۵}}{۱۲۰} - \frac{x^{۷}}{۵۰۴۰} + \ldots$.

آورده است و کار کانتور* را واردکردن بشر بـه بهشت بینهایت توصیف می‌کند. البته ریاضیدان بینهایتها را نیز به‌کار می‌برد. همچنان‌که دردوفصل بعد نشان‌خواهیم داد، او بزرگترین گردآورندهٔ بینهایتها درجهان است ــ بینهایت‌آرایه از بینهایتهایی به‌هر نوع و هر اندازه. این بینهایتها مواد خام و ابزار اویند.

پیش‌از روی‌آوردن به‌ریاضیات، لحظه‌ای به‌نمونه‌هایی از بینهایتهای‌متداول «روزمره» می‌پردازیم. چنانکه خواهیم دید، ایـن بینهایتها چندان‌هم از بینهایتهای ریاضی دور نیستند. بـا این‌گفتهٔ رایج بین مردم شروع می‌کنیم: «همواره دو امکان وجود دارد.» بیایید در اینجا آن‌دو را «صفر» و «یك» بنامیم. با انتخاب هر یك‌از دو امکان، دوشق جدید عرضه می‌شود، این امر تصویری از بینهایت را القا می‌کند که در شکل ۲۰۱ می‌بینید.

مثال بعدی، قوطی یکی‌از نوشابه‌هاست کـه در جوانی نخستین تصویـر از

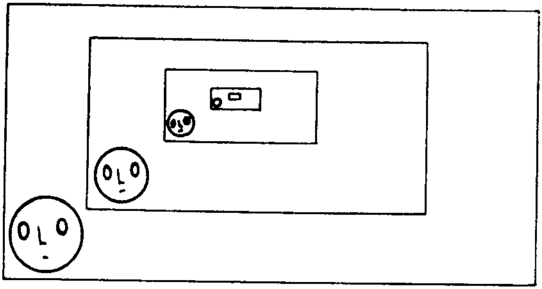


شکل ۲۰۱ همواره دو امکان وجود دارد.

---

* گئورگ کانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸) نظریهٔ مجموعه‌ها را آفرید.

MATH75.IR



شکل ۳۰۱ تصوری از بینهایت.

بینهایت را روی آن می‌دیدیم. براین قوطی تصویری از یك قوطی دیده می‌شد که برآن تصویری ازهمان قوطی وجود داشت وبه‌همین ترتیب برهرتصویر، تصویری کوچکتر ازآن دیده می‌شد. شکل ۳۰۱ اثری راکه این‌تصاویر روی ما می‌گذاشت تداعی می‌کند.

نمونهٔ بعدی، اشاره‌ای به‌بینهایت است که مخصوصاً برای بچه‌ها طرح‌شده است. صنعتگران ژاپنی عروسکهایی چوبی می‌سازندکه هر عروسك باز می‌شود و درآن عروسکی مشابه قرار دارد. درون این عروسك، عروسك مشابه دیگری وجود دارد، و این، پنج یا شش‌بار ادامه می‌یابد.

شاعران نیز همین واژه را به‌روشهایی به‌کار برده‌اندکه از جنبهٔ ریاضی بینهایت چندان دور نیستند. آنجاکه ژولیت از عشقش نسبت به‌رومئو می‌گوید: «هرچه بیشتر به‌تو عشق می‌ورزم، عشقم بیشتر می‌شود» مبالغه‌ای است از ویژگی مشخصهٔ بینهایتهای اعداد اصلی؛ پندار بلیك* «در اختیارگرفتن بینهایت در کف دست و ابدیت در یك ساعت» متناظر با این واقعیت است که پاره‌خطی به‌کوتاهی خط طول‌عمر درکف دست، به‌همان اندازه نقطه داردکه خطی به‌درازای بینهایت. در آنتونی و کلئوپاترا[1] ژنرال انوباربس[2] دروصف کلئوپاترا می‌گوید: «زیباییهای بینهایت او را نه گذشت ایام می‌تواند پژمرده سازد و نه عادت می‌تواند ازتازگی بیندازد». هوگو در توصیف شکسپیر می‌گوید: «نبوغ اعتلایی است به سوی بینهایت.»

از جملهٔ طرحهای تخیلی سیرانو دو برژراك[3] قهرمان یکی از نمایشنامه‌های

---

* Christian William Blake (1757–1827) عارف، شاعر و نقاش انگلیسی است. ـ م.

1. *Anthony and Cleopatra* 2. Enobarbus 3. Cyrano de Bergerac

MATH75.IR

روستان* برای رفتن به کرهٔ ماه استفاده از استقرای ریاضی ملایمتری است به‌نحو طنزآمیز که می‌گوید: «درحالی‌که آهنربایی قوی در اختیار دارم بر سکویی می‌ایستم و آن‌را به‌طرف بالا پرتاب می‌کنم. سکو نیز به‌دنبال آن به‌بالا کشید می‌شود. آهنربا را می‌گیرم و دوباره آن‌را به‌طرف بالا پرتاب می‌کنم تا سکو ر مجدداً به‌دنبال خود بکشد و این‌کار را به دفعات بسیار بسیار زیاد تکرار می‌کنم تا به کرهٔ ماه برسم.»

استدلالهای متافیزیکی زنون** در راستای استنتاج عدم‌امکان حرکت فیزیکی بسیار آموزنده‌اند. بیان او تقریباً چنین است: «آشیل نمی‌تواند بر لاك‌پشت سبقت بگیرد. زیرا درطی زمانی‌که فاصلهٔ بین‌خود و لاك‌پشت را می‌پیماید لاك‌پشت‌دورتر می‌رود. حتی اگر لاك‌پشت منتظر او بماند، آشیل باید ابتدا به‌نیمهٔ راه بین خود و لاك‌پشت برسد و این مستلزم آن است که ابتدا به نیمهٔ این نیمه‌راه برسد. رسیدن به‌این‌نیمه‌راهها به‌طور بی‌پایان ادامه‌دارد. درقبال چنین سیرقهقرای خیالی بی‌انتها اونمی‌تواند حتی شروع به‌حرکت‌کند، و بنابراین حرکت ناممکن‌است.» زنون در پارادوکس زیبای دیگر می‌کوشد نشان دهد غیرممکن است که نتوان فضا و زمان را به‌بینهایت جزء تقسیم‌کرد. پارادوکس دیگری نیز هست که معمولا چنین بیان می‌شود: «تیری‌که رها می‌کنیم در هرلحظه درحال سکون است.» این پارادوکسها با کاربردی مهم از بینهایتهای ریاضی مربوط‌اند و جا دارد در اینجا بررسی‌شوند، بیشتر بدین‌جهت‌که پارادوکس تیر رهاشده بیان روشنی‌از مفهوم ریاضی حرکت است. حرکت شبیه یك‌جدول زمانی است و به‌طور دقیقتر، تابعی است‌که نقطهٔ معینی در«فضای» مجازی‌را به‌لحظهٔ‌معینی در «زمان» مجازی وابسته می‌کند. ازاین‌دیدگاه، بیان اینکه تیر در لحظه‌ای مفروض «درحال سکون» است، بدین‌معنی است‌که مکان آن معین شده است و این معرف یك تابع است. تابعهای معرف حرکت را همانند هر تابع ریاضی دیگر یا با جدول مناسبی از مقادیر، یا با یك فرمول و یا با یك توصیف بازگشتی می‌توان ساخت.

اگر لاك‌پشت زنون یك متر جلوتر از آشیل شروع به‌حرکت‌کند و مسافت

---

* Edmond Rostand (1868–1918) درام‌نویس و نمایشنامه‌نویس فرانسوی است.ـم.

** فیلسوف بزرگ مکتب ایلیایی است‌که در سدهٔ پنجم پیش‌از میلاد می‌زیست.

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots$$

متر را (که درست یك متر است) در مدت

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots$$

ثانیه (که درست یك ثانیه است) طی کند، در همان حال آشیل مسافت

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots$$

متر را که (درست دو متر است) در مدت

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۳۲}+\cdots$$

ثانیه (کــه درست یك ثانیه است) می‌پیماید. پس این مسابقه در یك ثانیه به‌پایان می‌رسد.

پیش‌ازکار ائودوکسوس[1] (۳۵۰سال‌پیش‌ازمیلاد) و ارشمیدس[2] (۱۵۰ سال پیش‌از میلاد) درك این‌گونه سریهای نامتناهی ممکن نبود. درسدهٔ هفدهم با توسعهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال، می‌بایست اصول سریهای‌نامتناهی دوباره کشف‌می‌شد. احتمالا برای «پاسخ» دادن به‌مسألهٔ زنون نیازی به‌ایـن سریها نیست، اما برخورد این سریها با زمینه‌های فکری زنون بسیار جالب است.

جالب‌بودن دومین پارادوکس زنون تا حدودی از این ناشی می‌شود که بین هر دو نقطهٔ یك خط، نقطهٔ دیگری وجود دارد. از این‌نتیجه می‌شودکه هر پاره‌خط شامل یك دنبالهٔ نزولی نامتناهی است، یعنی دنبالهٔ مرتبی از نقاط بدون کوچکترین جمله. مثال شکل ۴.۱ این موضوع را نشان می‌دهد؛ درکسرهایی به صورت $۱/n$

$$۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۹},\ldots$$

شکل ۴.۱

---

1. Eudoxus
2. Archimedes

MATH75.IR

که به‌ترتیب اندازه مرتب شده‌اند، جمله‌ای وجود ندارد که پیش‌از همهٔ جمله‌های دیگر باشد. نظیر چنین دنباله‌ای در مجموعهٔ اعداد طبیعی وجود ندارد. احتمالا زنون کاملا علاقه‌مند به‌مسأله‌ای بوده‌است که ریاضیدانان کاربردی با آن مواجه‌هستند: ریاضیات یك ایدآل‌سازی است که الزاماً «در زندگی واقعیت ندارد». روشنترین مثال،این واقعیت ساده‌است که پاره‌خط هندسی بی‌نهایت‌بار تقسیم‌پذیر است اما یك سیم مادی این‌طور نیست. البته در زمان زنون، برخلاف امروز، اثباتی متقاعدکننده برای این واقعیت وجود نداشت. با وجود این، همچون گذشته، پاره‌خط ریاضی در بسیاری مسائل‌خاص اجسام‌مادی (نظیر تارمرتعش، تیرآهن خم‌پذیر، اجسام‌صلب) به‌صورت الگو به‌کار می‌رود. بالاتر از همه، پاره‌خط ریاضی الگویی است برای پیوستار زمان و پیوستار فضای یك‌بعدی، و بر ادراك ما از جهان اطرافمان تأثیری کلی دارد.

سرانجام بیایید به‌دومثال از زندگی روزمره که مایه‌ای از ریاضیات دارند، نگاه‌کنیم. شخصی که دوستی چندسال بزرگتر از خود دارد ملاحظه‌می‌کند که‌چگونه با گذشت زمان اختلاف سنی‌شان نامحسوس می‌شود. در اینجا مثالی از یك‌جفت متغیر داریم که تفاضلشان ثابت است، اما نسبتشان ثابت نیست و در این مثال این نسبت به ۱ می گراید.

مثال آخر مربوط به تجارت است. اگر جنسی را ۱ دلار بخرند و ۲ دلار بفروشند، سود این معامله نسبت به‌قیمت خرید ۱۰۰ درصد و نسبت به‌قیمت فروش ۵۰ درصد است. جنسی‌را می‌توان فروخت به‌قسمی که سود آن نسبت به‌قیمت‌خرید با درصدی به‌دلخواه زیاد باشد یا می‌توان فروخت به‌قسمی که سودآن ۹۹درصد یا حتی۹۹٫۹۹درصدنسبت به‌قیمت‌فروش‌باشد، اما هیچگاه عملا یا نظراً سودنمی‌تواند معادل ۱۰۰ درصد قیمت فروش باشد. خواننده خود باید در این‌باره تأمل کند، زیرا این مثالی ساده از حالتی است که ممکن است خواننده را دربارهٔ «حد»ی که وجود ندارد به‌شگفت آورد. شاید آسانترین راه وارسی این مسألهٔ خاص،بررسی قیمتهای مختلف فروش باشد.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)=1+\lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}=1$$

شکل ۵٫۱ فرمولبندی ریاضی یك رخداد روزمره: به‌نظر می‌رسد دو دوست که یکی چهار سال بزرگتر از دیگری است با گذشت زمان به‌یك سن نزدیك می‌شوند.

اگر C معرف قیمت خرید باشد و S معرف قیمت فروش، دراین‌صورت

$$\frac{S-C}{C} = \text{سود بر واحد قیمت خرید}$$

و

$$\frac{S-C}{S} = \text{سود بر واحد قیمت فروش}$$

اگر هر پیراهن به‌قیمت ۸ دلار تمام شود و ۱۲ دلار به‌فروش برسد دراین‌صورت

$$\frac{۱۲-۸}{۸} = \text{سود برقیمت تمام‌شده}$$

$$=\frac{۱}{۲}$$

و

$$\frac{۱۲-۸}{۱۲} = \text{سودبرواحدقیمت‌فروش}$$

$$=\frac{۱}{۳}$$

شکل ۶.۱

اکنون بیایید به‌کاربردهای بینهایت در ریاضیات باز گردیم. کمکی به‌خواننده خواهد بود اگر بینهایتها را در چهار طبقه قرار دهد.

طبقهٔ نخست را با قضیهٔ هندسی زیر توصیف می‌کنیم: اگر دو ضلع مثلثی برابرباشند آنگاه، زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ آن برابرند (**قضیهٔ ۵، کتاب I اقلیدس**).

برهان. $AC = BC$* داده شده است، شکل ۷.۱ را ببینید. از مقایسهٔ مثلث ABC با خودش وقتی‌که به‌صورت BAC خوانده‌شود، می‌بینیم که $AC = BC$ و $\angle ACB = \angle BCA$. بنابراین مطابق قضیهٔ ۴، کتاب I اقلیدس زاویهٔ CAB با زاویهٔ CBA برابر است.

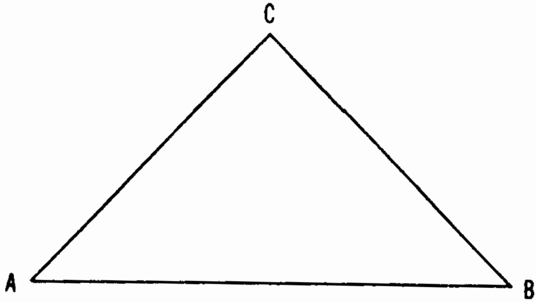
برابربودن زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین، از روی‌هم قرار دادن مثلث بر خودش نتیجه می‌شود. این‌کار به‌قسمی انجام می‌گیرد که A بر B، B بر A و C بر C جای بگیرد.

درصورت و برهان قضیه‌که به‌قضیه‌ای مشهور به «دوضلع و زاویهٔ بین» یا

---

* عبارت $AC = BC$ یعنی طول پاره‌خطهای AC و BC باهم برابرند. در بسیاری کتابها، فاصلهٔ نقطهٔ P تا نقطهٔ Q را با $\overline{PQ}$ نشان می‌دهند، اما به‌دلایل چاپی، در این کتاب این فاصله را به‌صورت سادهٔ PQ نشان می‌دهیم.

MATH75.IR



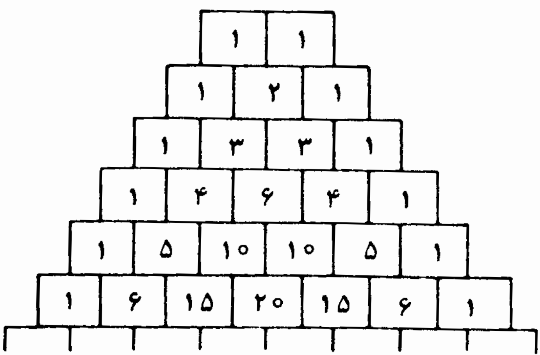
شکل ۷۰۱

«ض.ز.ض»(به‌معنای«ضلع، زاویه، ضلع») وابسته‌است، ذکری‌از بینهایت‌نمی‌شود. اما ردهٔ مثلثهای متساوی‌الساقین (با هر شکل واندازه) رده‌ای بینهایت است وقضیه برای هرکدام از آنها درست است.

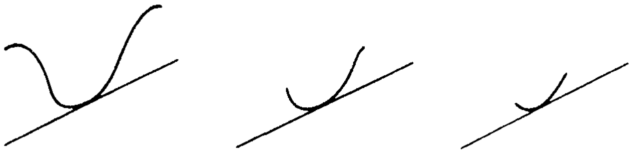
طبقهٔ دوم با اعدادی موسوم به «ضرایب دوجمله‌ای»، توصیف می‌شود، که آنها را فیثاغورسیان و تمدنهای پیشتر می‌شناختند، امـا به اعداد پاسکال (۱۶۲۰) معروف‌اند، به‌این‌دلیل که او درمطالعهٔ آنها استقرای‌ریاضی را به‌کاربرد. یادآوری می‌کنیم که ضرایب دوجمله‌ای، ضرایبی هستندکه وقتی $a+b$ را nبار در خودش ضرب کنیم در حاصلضرب ظاهر می‌شوند. مثلا، هنگامی‌که $n=۳$، داریم

$$(a+b)^۳=a^۳+۳a^۲b+۳ab^۲+b^۳,$$

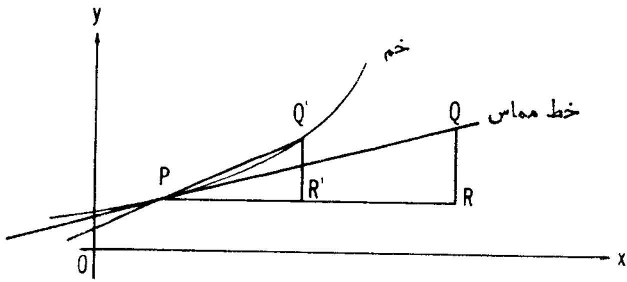
وضرایب دوجمله‌ای ۱، ۳، ۳، ۱ هستند. چون n می‌تواند هرعدد درست‌مثبتی باشد،



شکل ۸۰۱ مثلث پاسکال. سطر nام این آرایه ضرایبی را می‌دهدکه در بسط $(a+b)^n$ ظاهر می‌شوند.



شکل ۹.۱ تماس در یك نقطه، امری موضعی است.



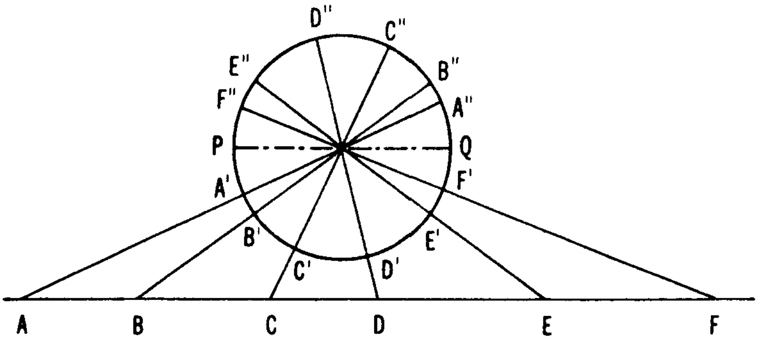
شکل ۱۰.۱ شیب خط مماس (نسبت QR/PR) حد شیب وتر (نسبت $Q'R'/PR'$) است وقتی که نقطهٔ Q' روی خم به P می‌گراید.

به صراحت بینهایت حالت داریم، که هرکدام شامل دسته‌ای است متناهی از ضرایب و ما به‌محاسبهٔ آنها دعوت شده‌ایم.

مسألهٔ یافتن خط‌مماس برخمی مفروض در نقطه‌ای از آن خم، به‌طبقهٔ سوم تعلق دارد. به‌سادگی دیده می‌شود که این‌مسأله به‌یك‌فرایند بینهایت مربوط می‌شود، زیرا تماس خط بر خم را می‌توان با استفاده ازپاره‌های به‌دلخواه‌کوچك خم و پاره‌های کوچك خط معین کرد. معلوم می‌شود که فرایند ریاضی حل این‌مسأله، مسألهٔ‌فیزیکی یافتن سرعت آنی را نیز حل می‌کند. به‌طور خلاصه، سرعت آنی عددی است که بر سرعت‌سنج اتومبیل خوانده می‌شود. سرعت حرکت و شیب خط حدهای نسبتها هستند.

طبقهٔ چهارم به‌نظریهٔ مجموعه‌های مجرد متعلق است، و به‌اعداد اصلی‌بینهایت مربوط می‌شود، این طبقه به‌نحوی شگفت‌آور با این پارادوکس توصیف می‌شود که ظاهراً دایره از یك خط راست نامحدود بیشتر نقطه دارد. شکل ۱۱.۱ این پارادوکس را نشان می‌دهد. هرنقطهٔ خط با یك‌نقطهٔ نیمدایرهٔ پایینی متناظرمی‌شود. حتی اگر دو نقطهٔ دایره را با یك نقطهٔ خط متناظر کنیم، باز دو نقطه (P و Q) می‌مانند که متناظر ندارند.

MATH75.IR



شکل ۱۱۰۱

در خلال این کتاب تشریح می‌کنیم که چگونه بینهایت درهریك ازاین‌حالتها مطرح می‌شود، اما به‌طور خلاصه می‌توان گفت: در مسائل طبقهٔ اول، روی یك شیئ منفرد به‌عنوان نماینده کارمی‌کنیم، که چون به‌هیچ‌وجه وضع‌خاصی ندارد، نتیجه‌ای که به‌دست می‌آوریم در همه صادق‌است. مسأله‌های طبقهٔ دوم معمولا به‌صورت‌نوع اول مطرح می‌شوند، اما چنانکه خواهیم دید گاهی در الگویی قرار می‌گیرند که می‌توان استقرای ریاضی یا اساساً هم‌ارز آن «اصل نزول نامتناهی» راکه با «اصل اولین عدد صحیح» نیز هم‌ارز است، به‌کار برد.

طبقهٔ سوم شامل گونه‌های‌مختلفی از فرایندهای بینهایت وابسته به‌مفهوم «حد» است. ما تنها یکی از این فرایندها راکه به‌تعریف طول بعضی اشکال منجر می‌شود، مطالعه خواهیم کرد، که خود به‌تعریف مجموع سریهای نامتناهی بازمی‌گردد.

اگرچه جمع کردن سری نامتناهی رابطهٔ نزدیکی با مسألهٔ تعریف (ومحاسبهٔ) مساحت محدود به‌خم بستهٔ مفروضی دارد، اما ما وارد جزئیات مساحت یا مسأله‌ای که پیشتر دربارهٔ خط‌مماس مطرح کردیم، نخواهیم‌شد. درعوض خواننده رابه‌کتاب مناسبی در حسابان رجوع می‌دهیم (همچنین نگاه‌کنید بـه ریاضیات چیست تألیف ریچاردکورانت، هربرت رابینز، ترجمهٔ حسن‌صفاری، انتشارات‌خوارزمی، تهران، ۱۳۴۸).

مسأله‌های طبقهٔ چهارم، ابداع نوع جدیدی ازاستدلال ریاضی‌را می‌طلبیدند که چشم به‌راه نبوغ کانتور بودند. استدلالهایی کـه کانتور به‌کار می‌گرفت، تعمیم سرراست فرایندهـای معمولی شمارش‌اند. کانتور ایـن فرایندهـا را شجاعانه در مجموعه‌های نامتناهی مستقیماً به‌کار می‌گرفت. شاید بزرگترین کشف یگانهٔ او این حقیقت باشدکه بینهایتهای اصلی متفاوتی وجود دارند، و به‌خصوص اینکه مجموعهٔ

MATH75.IR

نقاط واقع بر یك پاره‌خط به نحوی مقایسه‌ناپذیر بینهایتی «غنی‌تر» از مجموعهٔ همهٔ اعـداد درست است. بـه‌این موضوع و سایر جنبه‌هـای کار او در فصلهای ۲ و ۶ به‌اختصار برمی‌خوریم.

کتاب با چنداشاره به‌روشی که جنبهٔ اخیر بینهایت‌را به‌جریان اصلی ریاضی کاربردهای بینهایت ملحق می‌کند ختم می‌شود.

MATH75.IR

فصل دو

از اعداد طبیعی تا $\sqrt{2}$

پیکرهٔ اصلی این فصل را دسته‌ای از بخشهای کوتاه تشکیل می‌دهند که هر کدام یك مجموعهٔ بینهایت خاص، یك فرایند بینهایت، یا دیدگاه و تکنیکی را برای وارسی بینهایت، مدنظر دارد. کوشیده‌ایم هر کدام را تا حد امکان به‌طور جداگانه بررسی کنیم؛ با این‌حال بخش نخست با سه بینهایت آغاز می‌شود.

۱.۲ اعداد طبیعی

در صف بینهایتها جلوتر و برجسته‌تر از همه، اعداد معمولی می‌آیند. ما نمی‌توانیم مجموعه‌های بینهایت را بسازیم، یا چیزی درمورد آنها ثابت کنیم مگر به‌نحوی کار خود را دست‌کم با یك مجموعهٔ بینهایت از پیش ساخته آغاز کنیم. چنین مجموعه‌ای وجود دارد و آن اعداد معمولی: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ... است. درمورد این‌اعداد که اغلب اعداد طبیعی خوانده می‌شوند، می‌توانیم حقایق زیر را بپذیریم:

الف) هر عدد طبیعی دارای یك تالی بلافصل است، بنابراین سلسلهٔ اعداد طبیعی بی‌انتهاست.

MATH75.IR

ب) تکرار وجود ندارد؛ هر عدد با هریك از اعداد قبلی تفاوت دارد.
پ) اگر در زنجیر تالیها با یك شروع کنیم و یك‌یك تالیها را بشماریم پس‌از مراحلی متناهی به‌هر عدد طبیعی می‌رسیم.

۲.۲ بحث دربارهٔ دنباله‌ها

چون همهٔ عددهای مجموعهٔ اعداد طبیعی را نمی‌توان در زمانی متناهی نوشت از «...» یعنی، نماد ادامه یا نماد تکرار، استفاده می‌کنیم. این سه‌نقطه نظیر عبارتهای «و همین‌طور ادامه می‌یابد»،یا «وغیره»، یا «و الی آخر» است. در ریاضیات، این سه‌نقطه درپی چندجمله می‌آید و نشان می‌دهد که این‌مجموعه بی‌انتهاست و براساس طرحی روشن ساخته می‌شود. مثالهای زیر منظور را نشان می‌دهند. از خواننده خواسته می‌شود که درهر حالت، چندجملهٔ بعد را بنویسد.

۱, ۴, ۷, ۱۰, ۱۳, ...

۵, ۳, ۵, ۳, ۵, ۳, ...

۵, ۳, ۷, ۴, ۱۰, ۶, ۱۴, ...

۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ...

۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ...

۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ۲۴۳, ...

۶۰, ۳۶۰۰, ۲۱۶۰۰۰, ۱۲۹۶۰۰۰۰, ...

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۲, ۱۷, ۲۹, ۴۱, ۷۰, ۹۹, ...

$۲, \sqrt{۲}, ۲+\sqrt{۲}, \sqrt{۲+\sqrt{۲}}, ۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲}}, \ldots$

۱, ۶, ۱۲, ۲۰, ۳۰, ۴۲, ...

۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, ۷۲۰, ۵۰۴۰, ۴۰۳۲۰, ...

بحث ما در مورد استفاده از نقاط ادامه به‌تعریف ایدهٔ دنباله منجر می‌شود. این مفهوم برای تمام مطالبی که از این‌پس می‌آید آن‌قدر مهم است که ارزش‌دارد

خواننده روی تعریف صریح آن وقت صرف کند.

بنابر تعریف، هردنباله از دنبالهٔ بنیادی

$$۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ \dots \qquad (۱)$$

با قراردادن چیزی به‌جای هر عدد دنبالهٔ (۱) به‌دست می‌آید. بنابراین مثلا

$$a_۱,\ a_۲,\ a_۳,\ \dots \qquad (\mathrm{i}$$

دنباله‌ای از حرفهای متمایز است،

$$a,\ b,\ c,\ a,\ b,\ c,\ \dots \qquad (\mathrm{ii}$$

دنباله‌ای دوره‌ای از حروف است،

$$۱,\ ۱,\ ۱,\ \dots \qquad (\mathrm{iii}$$

دنبالهٔ ۱هاست، و

$$\sqrt{۶},\ \sqrt{۲۴},\ \sqrt{۶۰},\ \sqrt{۱۲۰},\ \sqrt{۲۱۰},\ \dots \qquad (\mathrm{iv}$$

دنباله‌ای از ریشه‌های دوم مثبت است.

چون دنباله نامتناهی است با چند جمله مشخص نمی‌شود مگر قاعده‌ای داشته باشیم که معلوم کند چگونه به‌جای هرعدد (۱) شیئی مناسب قرار دهیم. در حالتهای i)، ii) و iii) با سه جملهٔ اول و استفاده از نقاط ادامه، قاعده کاملا روشن است. درحالت iv) خواننده درمی‌یابدکه جمله‌ها را می‌توان بـا این قاعده محاسبه‌کرد: هر جملهٔ دنباله، ریشهٔ دوم حاصلضرب سه‌عدد صحیح متوالی است کـه اولین آنها شمارهٔ همین‌جمله‌است. بنابراین پنجمین جملهٔ iv) عبارت است از $\sqrt{۵\times۶\times۷}$. این قاعده را می‌توان با دستوری مناسب نیز بیان کـرد. گیریم n، شمارهٔ جمله‌ای است که در پی آن هستیم. ایـن جمله را a_n (بخـوانید: «a اندیس n») می‌نامیم. دراین‌صورت

$$a_n = \sqrt{n(n+۱)(n+۲)}$$

با وجود این، دستور فوق مسلم نیست و چه‌بسا بتوان پنج‌جملهٔ نخست را با استفاده از دستورهای دیگری به‌دست آوردکـه از آن دستورها جمله‌هـای بعدی متفاوتی به‌دست آید. بنابراین برای اینکه واقعاً معلوم‌شود در iv) کدام‌سری موردنظراست،

MATH75.IR

ذکر قاعدهٔ صریح بالا لازم است، اهمیتی ندارد که این قاعده با کلمات بیان شود یا با دستوری دقیق.

می‌توانیم بحث خود را به‌طور نمادی با نوشتن

$$a_n = f(n)$$

خلاصه کنیم، که در آن a_n جملهٔ nام دنباله است، یعنی، شیئی که جایگزین عدد n در (۱) می‌شود و نماد $f(n)$ معرف قاعده‌ای است برای یافتن a_n، خواه به‌صورت دستور نوشته شود و خواه به‌صورت لفظی.

بنابراین درحالتهای i) تا iii):

$$f(n) = a_n, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots, \qquad \text{(i}$$

$$f(n) = \begin{cases} a & n = ۱, ۴, ۷, \ldots \\ b & n = ۲, ۵, ۸, \ldots \\ c & n = ۳, ۶, ۹, \ldots, \end{cases} \qquad \text{(ii}$$

$$f(n) = ۱, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots . \qquad \text{(iii}$$

مواردی‌وجود دارد که این‌نقاط معنی دیگری‌دارند. مثلا می‌نویسیم «ده‌رقمی که در دستگاه دهدهی به کار می‌روند عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲، ...، ۹». در اینجا، نقاط به‌یك مجموعهٔ نامتناهی اشاره نمی‌کنند، بلکه صرفاً نمایشی اختصاری برای عددهای ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ هستند. ریاضیدانان اغلب از این‌نقاط استفاده می‌کنند تا نشان دهند دنباله‌ای پایان‌ناپذیر است، ولی براساس طرحی ساخته شده است که جزئیات آن درحال حاضر اهمیتی ندارد. پس در این راستا،

$$\pi = ۳٫۱۴۱۵۹ \ldots \quad \text{یا} \quad \sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴ \ldots$$

یعنی $\sqrt{۲}$ و π (بخوانید «پی») اعداد اعشاری مختوم‌نیستند، و رقمهای نخست آنها به‌صورتی است که نشان داده شده است. خواننده در هرمورد از سیاق متن می‌تواند منظور از نقاط را دریابد.

مسأله‌ها

کاربرد «...» را درحالتهای زیر توضیح دهید:

MATH75.IR

۱۰۲۰ شنبه، یکشنبه، دوشنبه، سه‌شنبه، چهارشنبه، ... .
۲۰۲۰ ش، ی، د، س، چ، پ، ج، ش، ی، د، ... .

۳.۲ اعداد اصلی و ترتیبی

مجموعهٔ اعداد طبیعی که نخستین عضو دستهٔ ماست، با دو مجموعهٔ نامتناهی بعدی مربوط می‌شود. این سه مجموعهٔ نامتناهی عبارت‌اند از:

الف) تمامیت اعداد طبیعی

یك، دو، سه، چهار، پنج، شش، ...

ب) گردایهٔ «قاعده‌ها»یی که هرعدد را به‌تالیش مربوط می‌کند:

یك و یك می‌شود دو،

دو و یك می‌شود سه،

سه و یك می‌شود چهار،

... ؛

پ) تودهٔ اعداد ترتیبی:

اول، دوم، سوم، چهارم، پنجم، ششم، ... .

مجموعهٔ الف) به‌ما داده شده است، ب) نتیجه‌ای است از مشاهداتی که در مورد برخی اعداد الف) انجام داده‌ایم و این نتیجه را برای همهٔ اعداد الف) پذیرفته‌ایم. چون این‌قاعده‌ها آشکارا تکراری هستند، به‌ما القا می‌کنند که‌می‌توانیم همهٔ‌عضوهای الف) را درذهن بررسی کنیم اگرچه تنها معدودی از آنهارا می‌توانیم به‌چشم جلوه‌گرسازیم. مجموعهٔ پ) باآگاه‌ساختن ما از ترتیب طبیعی عددهای الف) تاحدی گوشزد می‌کند که چگونه می‌توان براعداد این‌مجموعه نظارت داشت.

۴.۲ دنباله‌های حسابی

عددهای طبیعی فزودهٔ ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ... با نهادن صفر در جلو دنبالهٔ عددهای طبیعی به‌دست می‌آیند. که‌آنها را عددهای صحیح نامنفی یا به‌طورساده عددهای

MATH75.IR

صحیح می‌نامیم.

اگر با صفر شروع کنیم وعددها را یک‌درمیان بنویسیم دنبالهٔ عددهای صحیح زوج به‌دست می‌آید:

زوج ۰، ۲، ۴، ۶، ۸، ...

و اگر با ۱ شروع کنیم و عددها را یک‌درمیان بنویسیم دنبالهٔ عددهـای صحیح فرد به‌دست می‌آید:

فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ...

با کمی تأمل متقاعد می‌شویم کـه هرعدد طبیعی به یکی از این دو مجموعه (نه هر دو) تعلق‌دارد: هرعدد یا زوج‌است‌یا فرد. بهتراست این‌موضوع را کمی‌دقیقتر بیان‌کنیم: هرعدد صحیح یا دوبرابر یک عدد صحیح است یا از دوبرابر یک عدد صحیح یکی بیشتر است. می‌توان بـه‌جای‌کلمات از حروف استفاده‌کرد و نوشت: هرعدد صحیح به‌یکی از دو صورت

$$n=1+2q \qquad \text{یا} \qquad n=2q$$

است که در آنها q عددی صحیح است.

همین‌طور، بـا شمارش سه به‌سه، درمی‌یابیم که هرعدد صحیح بـه یکی از سه‌صورت

$$n=2+3q \qquad \text{یا} \qquad n=1+3q \qquad \text{یا} \qquad n=3q$$

است که در آنها q عددی صحیح است.

مسأله

۳.۲ این موضوع بـا این گفته کـه هرعدد صحیح به‌یکی از سه مجموعهٔ نامتناهی نامتقاطع (و تنها به‌یکی‌از آنها) تعلق دارد هم‌ارز است. این سه مجموعه کدام‌اند؟

به‌طور کلی اگر B معرف عدد صحیح ناصفر دلخواهی باشد، می‌توانیم همهٔ عددهای صحیح را به B ردهٔ جدا ازهم تفکیک کنیم:

MATH75.IR

$$\begin{array}{lllll}
0, & B, & 2B, & 3B, \dots, & \\
1, & 1+B, & 1+2B, & 1+3B, \dots, & \\
2, & 2+B, & 2+2B, & 2+3B, \dots, & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
B-1, & (B-1)+B, & (B-1)+2B, & (B-1)+3B, \dots; &
\end{array}$$

سطر آخر را به‌صورت جمع‌وجورتر زیر می‌توان نوشت

$$B-1, \quad 2B-1, \quad 3B-1, \dots .$$

بنابراین اگر B مثلا ۵ باشد، پنج رده به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l}
0,\ 5,\ 10,\ 15, \dots, \\
1,\ 6,\ 11,\ 16, \dots, \\
2,\ 7,\ 12,\ 17, \dots, \\
3,\ 8,\ 13,\ 18, \dots, \\
4,\ 9,\ 14,\ 19, \dots .
\end{array}$$

در بعضی کاربردها، این‌رده‌های مختلف‌را رده‌های‌مانده به‌پیمانهٔ B می‌نامند؛ که درعمل تقسیم بر B، متناظر با باقیمانده‌ها هستند.

محتوای جدول بالا را می‌توانیم به‌صورت زیر بیان‌کنیم: هرعدد صحیح n به‌صورت

$$n = qB + r$$

است که در آن q و r عددهایی صحیح‌اند، q مضروب‌فیه و r مانده است (اگر به‌تقسیم‌فکر کنیم q خارج‌قسمت و r باقیمانده است) و این‌مانده‌یکی‌از مقادیر واقع در مجموعهٔ متناهی ۰، ۱، ۲، ۳، ...، $B-1$ است.

این، مهمترین دستور در حساب است. در حالت $r=0$، B را یك عامل n می‌نامند. (مقدار q در این تعریف اهمیتی ندارد.)

در حالت $B=$ ۱۰، مانده‌ها دقیقاً متناظر با رقمهای ۰، ۱، ۲، ۳، ...، ۹ هستند.

مسأله

۴.۲. ثابت کنید n و $n+1$ عامل مشترک ندارند، یعنی، اگر عدد صحیح $q\neq 0, 1$ عدد صحیح n را بشمارد، $n+1$ را نمی‌شمارد.

۵.۲ عددنویسی مکانی

اکنون می‌رسیم به عددنویسی مکانی، یعنی روشی که عددهای فزوده را می‌نویسیم. این الگوی آشنای در مبنای ۱۰ (نماد هندی-عربی) با مثال زیر تشریح می‌شود:

نوزده‌تا صد و شصت‌تا یك

یك‌هزار، نه‌صد، شش‌ده، هیچ یك

یك، نه، شش، صفر

۱, ۹, ۶, ۰

۱۹۶۰

این الگو دارای مشخصات برجستهٔ زیر است (که خاص مبنای ده نیست):

الف) واحدهایی با اندازه‌های مختلف، مناسب برای همهٔ موارد،

ب) قاعده‌های سادهٔ پیوند واحدهای متوالی،

پ) صرفه‌جویی در بیان با افزایش سریع عددهایی که ارائه می‌شوند، و

ت) مجموعهٔ ثابت رقمها.

چون تنها رقمها و مکان نسبی آنها در نوشتن عددها دخالت دارند، نتیجه می‌شود که اگر مکان ارقام به دقت رعایت شود همهٔ عملهای حساب باید برحسب رقمها قابل بیان باشند. پیش‌از این، دستگاه مکانی در مبنای ۶۰ را بابلیهای باستان به‌کار می‌گرفتند. دستگاه اعشاری هندی-عربی در سدهٔ سیزدهم [میلادی] دراصل توسط لئوناردوی پیزایی[1] که فیبوناتچی* نیز نامیده می‌شود، در اروپا عمومیت

---

1. Leonardo of pisa

* Fibonacci به‌معنای «پسر نیك‌بخت» است.

MATH75.IR

یافت،او که این‌دستگاه را طی سفرهای تجاری خود به‌افریقا آموخته بود کتابی‌درسی در ریاضیات با عنوان لیبر آباکی[1] نوشت که درسال ۱۲۰۲ انتشار یافت؛ چاپ‌دوم این کتاب که درسال ۱۲۲۸ انتشار یافت، برای سده‌ها باقی ماند.

فرمولبندی تکنیکهای حساب با نمادها، آغاز جبر است. توزیعپذیری ضرب نسبت به‌جمع، مطابق الگوی زیر، توسط تساوی

$$a\cdot(b+c+d)=a\cdot b+a\cdot c+a\cdot d,$$

بیان می‌شود. مثلا،

$$\begin{aligned} ۴۳۲۱\times ۵۶۷ &= ۴۳۲۱\times(۵۰۰+۶۰+۷)\\ &= ۴۳۲۱\times ۵۰۰+۴۳۲۱\times ۶۰+۴۳۲۱\times ۷ \end{aligned}$$

برای استفادهٔ بهتراز دستگاه عددنویسی مکانی، هرکس باید جدول‌ضرب‌را دست‌کم تا «ده در ده» بداند. اگرچه همهٔ ما این‌جدول را می‌دانیم، اما عدهٔ زیادی تا این‌حدکه اکنون ملاحظه خواهیم‌کرد به‌آن دقیق نشده‌اند. جدول‌را درشکل ۱.۲ ملاحظه می کنید.

خط‌کشیها توجه را به‌این واقعیت جلب می‌کنندکه این جدول شبکه‌ای از جدولهای ضرب است که اندازه‌هایشان افزایش می‌یابد، جدول یك در یك، جدول دو در دو، سه در سه، وغیره.

شکلهای‌گونیایی شکل ۲.۲ که هندسه‌دانان‌یونان[باستان] شاخص می‌نامیدند، در مثالهایی که می آید اهمیت دارند.

احتمالا قبل‌از ۵۰۰ سال پیش از میلاد، متوجه بوده‌اند که مجموع عددهای صحیح درهریك از شاخصهای پایین، مکعب کامل است. بدین ترتیب:

$$۱=۱^۳,\ \ ۲+۴+۲=۸=۲^۳,\ \ ۳+۶+۹+۶+۳=۲۷=۳^۳,\ \ldots.$$

مجموع عددهای صحیح درهر جدول مربعی، خواه دو در دو یا سه در سه، و غیره، مربع کامل است. بدین ترتیب:

$$۱=۱^۲,\qquad ۱+۲+۲+۴=۹=۳^۲,$$

$$۱+۲+۳+۲+۴+۶+۳+۶+۹=۳۶=۶^۲,\ \ldots.$$

---

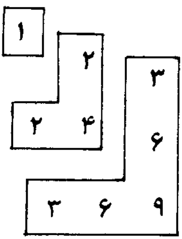
1. Liber Abaci

MATH75.IR

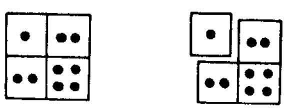
آن‌گونه‌که شکل ۳.۲ نشان می‌دهد، جدول نیز تصویری از قانون توزیع‌پذیری مضاعف است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	۲۴	۲۷	۳۰
۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	۳۲	۳۶	۴۰
۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰
۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	۵۶	۶۳	۷۰
۸	۱۶	۲۴	۳۲	۴۰	۴۸	۵۶	۶۴	۷۲	۸۰
۹	۱۸	۲۷	۳۶	۴۵	۵۴	۶۳	۷۲	۸۱	۹۰
۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰

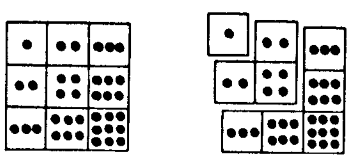
شکل ۱.۲



شکل ۲.۲



$$(۱+۲)^۲=۱^۳+۲^۳=۱(۱+۲)+۲(۱+۲)$$



$$(۱+۲+۳)^۲=۱^۳+۲^۳+۳^۳=۱(۱+۲+۳)+۲(۱+۲+۳)+۳(۱+۲+۳)$$

شکل ۳.۲

اثبات این واقعیتها درمورد جدول ده در ده مفروض، موضوعی است صرفاً از بررسی چند مجموع و چند حاصلضرب ساده. طبیعتاً این پرسش مطرح می‌شود که آیا درمورد هر جدول‌ضرب k در k، درصورتی‌که k عدد درست مثبتی باشد، نظایر این واقعیتها را می‌توان ثابت کرد.

مسأله

۵۰۲. تحقیق کنید که درجدول ۱۲ در۱۲ و یا جدول ۱۵ در۱۵ نظایر این‌واقعیتها وجود دارد. آیا می‌توانید طرحی استقرایی یا قاعده‌ای کلی در آنها بیابید؟

عددنویسی مکانی امتیازهایی دارد که پیشتر بدان اشاره شد، با وجود این چهره‌ای دردسرزا نیز دارد که با مثال

$$۹۹۹۹۹+۱=۱۰۰۰۰۰,$$

نشان می‌دهیم. افزودن یك واحد تغییراتی قابل ملاحظه در رقمهای بسیاری ایجاد می‌کند. هرماشین حسابی باید این‌موضوع را درنظر گیرد، و احتمالا هر کس‌صفحهٔ کیلومترسنج اتومبیل را دیده است که وقتی مسافت طی‌شده به ۱۰۰۰۰ می‌رسد، همهٔ ارقام باهم تغییر می‌کنند.

درحالت اعشاریها، جایگزین ساختن یك عدد با عددی دیگر معمول است، ۹۹۹٫۹۹ دلار بهایی فریبنده‌تر از ۱۰۰۰ دلار به‌نظر می‌آید. به‌منظورکاربردهایی که در پی می‌آیند توجه کنیدکه ۱٫۰۰۰۰۰۰ و ۰٫۹۹۹۹۹۹ با وجود تفاوت قابل توجه ظاهری، تنها ۰٫۰۰۰۰۰۱ اختلاف دارند. به‌همین ترتیب

۱٫۰۰۰ و ۰٫۹۹۹، ۰٫۰۰۱ اختلاف دارند،

۱٫۰۰۰۰۰۰ و ۰٫۹۹۹۹۹۹، ۰٫۰۰۰۰۰۱ اختلاف دارند،

۱٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰ و ۰٫۹۹۹۹۹۹۹۹۹، ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۱ اختلاف دارند.

استفاده از اعشاریهای ۰٫۱، ۰٫۰۱، ۰٫۰۰۱، ... برای بیان دهم، صدم، هزارم، ... قسمت از واحد به‌ما اجازه می‌دهد که در عددنویسی مکانی دهدهی، عددهای به‌دلخواه کوچك را مثل عددهای به‌دلخواه بزرگ بیان کنیم. در هرحال

همان‌گونه‌که بابلیها ممکن است برای نخستین‌بار کشف کرده باشند (قبل از ۲۱۰۰ پیش‌از میلاد)، عددهایی با کاربرد بسیار وجود دارند که با این نوع عددنویسی قابل بیان نیستند. این کشف در ارتباط با عددهای «کوچك»ی نظیر ۱/۳، ۱/۶، ۱/۷، ... انجام گرفت، اما این کشف واقعاً به‌اندازهٔ عدد مربوط نیست، بلکه تنها به‌فرم آن وابسته است، مثلا ۱۰/۳، ۱۰۰/۳، ... را هم نمی‌توان با عددنویسی اعشاری بیان‌کرد. این‌ناتوانی دستگاه‌اعشاری متناهی مشکلاتی جدی در ریاضیات ایجاد می کند. هر کس می‌بیندکه دنبالهٔ ۳ر۰، ۳۳ر۰، ۳۳۳ر۰، ۳۳۳۳ر۰، ... عددهای کوچکتر از ۱/۳ را نمایش می‌دهد که به ۱/۳ می گرایند: روشن است عدد اعشاری مختومی‌که بتواند ۱/۳ را نمایش دهد وجود ندارد. با وجود این از چنین ملاحظاتی نتیجه می‌شودکه نماد

$$۰٫۳۳۳۳ \ldots,$$

عدد اعشاری نامختومی‌که رقمهایش همه ۳ هستند، باید ۱/۳ را نمایش دهد. البته به‌شرطی‌که این نماد، اصولا معنایی داشته باشد.

استفاده از اعداداعشاری نامختوم، تنهاراه دستیابی به‌نمایش دقیق همهٔعددها به‌مبنای ۱۰ است. با وجود این، از دیدگاه عملی برای نوشتن عددها یا ذخیرهٔآنها در «مخازن حافظهٔ» ماشینهای حسابگر، لازم می آیدکه دقت را فداکنیم و از روش گردکردن بهره‌گیریم. بادرنظرگرفتن رقمهای موردنیاز برای مسألهٔ دردست‌بررسی وتعیین‌دامنهٔخطا، به‌هرمیزان که‌لازم‌باشدمی‌توان دقیق‌بود. معمولترین‌طرح گردکردن شامل خطایی است‌که از ۱/۲ واحد آخرین رقمی که نگه‌داشته‌ایم بیشتر نیست (۵ واحد رقمی‌که به‌دنبال می‌آید)، تمامی این مطلب درشکل ۴.۲ نشان داده شده است.

اگر حاصلضرب دو عدد ۱ باشد هریك از این‌دو را عکس دیگری می‌نامند. بنابراین چون ۱/۱۰ ضربدر۱۰ مساوی ۱ می‌شود، ۱/۱۰ عکس ۱۰ و ۱۰عکس ۱/۱۰ است. دردستورها اگر حرف m به‌جای یك‌عدد و r به‌جای عکس آن‌باشد، می‌توان نوشت

$$r \cdot m = ۱ \quad \text{و همین‌طور} \quad r = \frac{۱}{m} \quad \text{و نیز} \quad m = \frac{۱}{r} \cdot$$

چون ۰ (صفر) نقش خاصی در ضرب دارد و به‌ازای هر a، $۰ \times a = ۰$، نتیجه می‌شودکه $۰ \times a$ نمی‌تواند برابر با ۱ شود. بنابراین ۰ دارای عکس نیست.

MATH75.IR

عدد صحیح	کسر متعارفی	عکس اعداد: تا سه رقم اعشار	عکس اعداد: تا پنج رقم اعشار	عکس اعداد: تا هفت رقم اعشار	طرح بابلی
۱	$\frac{1}{1}$	۱٫۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰	۱٫۰۰۰۰۰۰۰	$\frac{60}{60}$
۲	$\frac{1}{2}$	۰٫۵۰۰	۰٫۵۰۰۰۰	۰٫۵۰۰۰۰۰۰	$\frac{30}{60}$
۳	$\frac{1}{3}$	۰٫۳۳۳	۰٫۳۳۳۳۳	۰٫۳۳۳۳۳۳۳	$\frac{20}{60}$
۴	$\frac{1}{4}$	۰٫۲۵۰	۰٫۲۵۰۰۰	۰٫۲۵۰۰۰۰۰	$\frac{15}{60}$
۵	$\frac{1}{5}$	۰٫۲۰۰	۰٫۲۰۰۰۰	۰٫۲۰۰۰۰۰۰	$\frac{12}{60}$
۶	$\frac{1}{6}$	۰٫۱۶۷	۰٫۱۶۶۶۷	۰٫۱۶۶۶۶۶۷	$\frac{10}{60}$
۷	$\frac{1}{7}$	۰٫۱۴۳	۰٫۱۴۲۸۶	۰٫۱۴۲۸۵۷۱	$\frac{8}{60}+\frac{34}{3600}+\frac{17}{216000}+\cdots$
۸	$\frac{1}{8}$	۰٫۱۲۵	۰٫۱۲۵۰۰	۰٫۱۲۵۰۰۰۰	$\frac{7}{60}+\frac{30}{3600}$
۹	$\frac{1}{9}$	۰٫۱۱۱	۰٫۱۱۱۱۱	۰٫۱۱۱۱۱۱۱	$\frac{6}{60}+\frac{40}{3600}$
۱۰	$\frac{1}{10}$	۰٫۱۰۰	۰٫۱۰۰۰۰	۰٫۱۰۰۰۰۰۰	$\frac{6}{60}$

شکل ۴۰۲ جدول عکسهای نخستین ده عدد صحیح، که تا سه، پنج، و هفت رقم اعشار بیان شده‌اند.

MATH75.IR

مسأله‌ها

۶.۲ با نشان‌دادن اینکه بسط اعشاری ۱/۷ دوره‌ای، یعنی تکراری‌است (دورهٔ آن شش رقم دارد) نتیجه بگیرید ۱/۷ به یک عدد اعشاری نامختوم منجر می‌شود. همین‌طور ۱/۹، ۱/۱۱، ۱/۹۹ دوره‌ای و لزوماً نامختوم‌اند. آیا می‌توانید ثابت کنید که اعداد اعشاری مختوم متناظر با کسرهایی هستند که مخرجشان حاصلضرب تعدادی ۲ و تعدادی ۵ است ($2^m \times 5^n$)؟

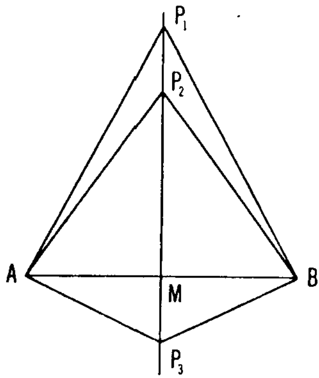
۷.۲ آیا می‌توانید نمادهای ...۰٫۹۰۹۰۹۰۹۰۹ و ...۰٫۰۹۰۹۰۹۰۹۰۹ را مشخص کنید؟ هنگامی که این عبارتها را به صورت دو عدد «جمع» می‌کنید چه می‌شود؟ انتظار دارید چه به‌دست آید؟ این شکل اعشاری نامختوم عدد ۱، یکی از مسأله‌های فرعی است که باید پیش‌ازاینکه شکل اعشاری نامختوم را برای نمایش عددها بپذیریم، روشن شود.

۸.۲ عمل تقسیم را به‌کمک جدول عکس اعداد به‌عمل ضرب تحویل کنید؛ شکل ۴.۲ را ببینید.

۶.۲ بینهایتها در هندسه

در هندسهٔ اقلیدسی بینهایتها فراوان‌اند. بعضی از قضیه‌های مقدماتی هندسهٔ مسطحه را می‌توان به‌صورت قضیه‌هایی دربارهٔ مجموعه‌های بینهایت تعبیر کرد.

قضیهٔ ۱. فرض کنید AB معرف یک‌پاره‌خط باشد. مکان هندسی همهٔ نقاط



شکل ۵.۲

MATH75.IR

صفحه که از A و B به‌یک فاصله باشند، خطی است که از M وسط AB بر آن عمود می‌شود.

قضیهٔ ۰۲ اگر سه ضلع مثلثی نظیربه‌نظیر با سه ضلع مثلث دیگر برابرباشند، آنگاه هر زاویهٔ مثلث اول با زاویهٔ نظیر خود از مثلث دوم برابر است.

در قضیهٔ ۱ اصطلاح «مکان هندسی» درست اصطلاح دیگر برای «مجموعه» است: در این‌حالت به‌مجموعه نقاطی چون P از صفحه مربوط می‌شود که (فاصلهٔ AP) = (فاصلهٔ PB). در اینجا از حرف P به‌عنوان نقطهٔ به‌خصوصی استفاده نشده است، بلکه برای نامیدن هر نقطه‌ای است که به‌یک فاصله از A و B قراردارد. مجموعهٔ چنین نقاطی یك مجموعهٔ نامتناهی است و این قضیه حاکی است که این نقاط یك خط مستقیم را پر می‌کنند. همچنین مطابق این قضیه این خط بر پاره‌خط قبلی عمود است، و این دو خط در نقطهٔ یگانهٔ M، وسط AB مشترك‌اند. این خط جدید را عمودمنصف پاره‌خط AB می‌نامند. ملاحظه خواهید کرد که یك‌راه یافتن M، وسط پاره‌خط AB رسم همین عمودمنصف است.

اگر نقطهٔ P را چنان بگیرید که $AP = PB$ و P را به M وسط پاره‌خط AB وصل کنید، مثلثهای APM و BPM به‌دست می‌آیند؛ می‌دانید که

$$AP = BP\text{،}\qquad AM = BM\text{،}\qquad \text{و}\qquad PM = PM\,.$$

اکنون اگر به‌قضیهٔ ۲ توجه‌کنید خواهید دید که در این‌مورد به‌کار می‌آیدو از آن نتیجه‌می‌شود $\measuredangle AMP = \measuredangle BMP$. چون مجموع این‌دو، زاویه‌ای نیمصفحه (180°) است، AMP و BMP زاویه‌های قائمه (90°) هستند. این بدان‌معنی است که خط PM بر خط AB عمود است، صرف‌نظر از اینکه نقطهٔ P کدام‌یك از بینهایت نقطه‌ای باشد که برایشان داریم $AP = PB$.

این، برهان قضیهٔ ۱ را تمام نمی‌کند (می‌توانید به‌آسانی باقی آن را تمام کنید)، اما آنچه را که می‌خواستیم انجام می‌دهد یعنی بدون استفاده از فرایندی نامتناهی چیزی را دربارهٔ هرنقطه از یك مجموعهٔ نامتناهی ثابت می‌کند. در واقع، دربرهان لازم نیست توجه‌داشته‌باشیم که مجموعهٔ نقاط P یك مجموعهٔ‌نامتناهی است.

اما البته به‌دو وسیلهٔ کمکی نیاز داشتیم. نخست ازمفهوم متغیر استفاده‌کردیم. واین، نامی است که به‌حرف P به‌علت طریقی‌که از آن استفاده‌کردیم، داده‌می‌شود. دربرهانمان حرفهای A و B و حرف M به‌دلیل طریق استفاده ازآنها متغیر نیستند.

حرفهای A و B در سرتاسر برهــان معرف نقاط ثابتی هستند. حرف M در خلال برهان ظاهر شد. می‌توانیم درصورت تمایل ادعا کنیم ما این نقطه را M نامیدیم اما AB فقط یك نقطهٔ وسط دارد و همواره منظور از M همین نقطهٔ وسط است.

اما بــه‌هنگام شروع برهان گمان می‌بریم کــه ممکن است تعداد زیادی نقطهٔ مختلف از قبیل $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، وغیره وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$AP_۱ = P_۱B, \qquad AP_۲ = P_۲B, \qquad AP_۳ = P_۳B,$$

وغیره. هنگامی‌که ازحرف تنهای P برای نشان‌دادن یکی از آنها استفاده می‌کنیم درمی‌یابیم که آنچه‌راکه می‌توانیم ثابت‌کنیم برای هرکدام ازآنها نیز درست‌است. و بنابراین واقعاً به‌نیرنگی کاملا قابل‌توجه دست یافته‌ایم. همان الفاظی‌که همراه با P به‌کاربردیم وقتی همراه با $P_۱$، $P_۲$، یا $P_۳$ وغیره به‌همان‌شکل قرارگیردیك‌نوع واقعیت را بارها وبارها درمورد کلیهٔ نقاط متعلق به‌مجموعهٔ نقطه‌ای‌نامتناهی، ثابت می‌کند. حرف P را که به‌این طریق به‌کار می‌رود، متغیر هندسی یا به‌طور خلاصه متغیر می‌نامند.

اگر P نقطهٔ متغیری بر عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، در این‌صورت طول AP نیز یك متغیر است، چون آن‌را می‌توان به‌طولهای مختلف بسیاری نسبت‌داد، همین مطلب را درمورد طول PB می‌توان گفت. با نوشتن

$$AP = PB$$

نوعی معادله بین متغیرها داریم که ریاضیدانان یونانی مرتباً به‌کار می‌بردند و بــا هندسهٔ تحلیلی نوین ما مطابقت دارد.

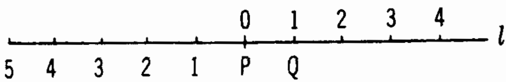
برای انجام برهانی‌کــه مستلزم مجموعــه‌ای نامتناهی است به‌متغیرهــا نیاز داشتیم،اما این تنها چیزی نیست‌که از آن بهره‌گرفتیم. ما همچنین از قضیه‌ای‌کــه قضیهٔ ۲ نامیدیم استفاده کردیم. گفتیم که آن‌را درمورد مثلثهای APM و BPM به‌کار می‌بریم. اما این مثلثها متغیرند که بــا انتخابهای مختلف P، تغییر می‌کنند و بنابراین یك مجموعهٔ نامتناهی ازآنها وجود دارد. خوشبختانه قضیهٔ ۲ این‌مجموعهٔ نامتناهی حالتهای ممکن را شامل می‌شود.

نتیجه‌ای‌که می‌توان بدان رسید این است‌که قضیه‌های هندسه به‌واقع دربارهٔ مجموعه‌های نامتناهی‌هستند. اما برهانها لزوماً شامل فرایندهای‌نامتناهی نمی‌شوند، زیرا استفاده از متغیرها اجازه می‌دهد‌که مجموعه‌ای نامتناهی از حقایق را تنها بــا یك استدلال ثابت‌کنیم.

۷.۲ حساب بازتاب هندسه است

اقلیدس[1] می‌گوید «اگر خط L و پاره‌خط $P'Q'$ داده شده باشند، می‌توان بر L (در هر جهت) به‌دفعاتی نامتناهی پاره‌خط PQ را برابر با $P'Q'$ جدا کرد.» انتهای هر پاره‌خط، ابتدای پاره‌خط بعدی است.

دنباله‌ای از نقاط که به‌این روش ساخته می‌شود، در سمت راست (یاچپ)، دقیقاً دریك تناظر یك‌به‌یك با مجموعهٔ همهٔ اعداد طبیعی است. اعداد طبیعی را هم می‌توان به‌صورت اعداد ترتیبی (یعنی، نشانه‌گذاری نقاط با رعایت ترتیب مثلا از چپ به‌راست) تصورکرد وهم به‌صورت اعداد اصلی (یعنی، نشان‌دادن اینکه تا رسیدن به‌نقطهٔمورد سؤال‌چندبار واحد PQ روی‌خط L گذاشته شده‌است)؛ شکل ۶.۲ را ببینید. البته دنباله‌ای که از هر دو طرف باشد به‌اعداد صحیح مثبت و منفی نظیر می‌شود.



شکل ۶.۲

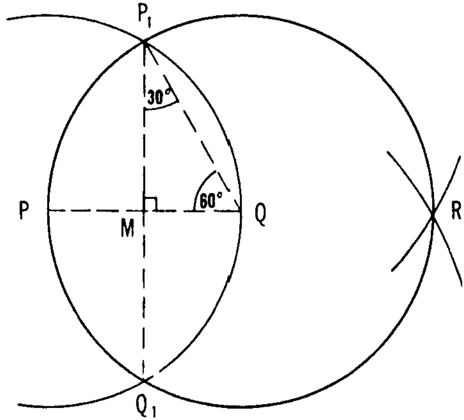
بعضی از مورخین براین عقیده‌اندکه کتابهای نخست هندسهٔ اقلیدس به‌منظور آغازی برای تمام هندسه درنظر گرفته‌نشده‌اند بلکه تنها برای پرداختن به‌قضیه‌هایی منظور شده‌اندکه به ترسیمهای با خط‌کش و پرگار مربوط می‌شوند. بیشتر اصول موضوع اقلیدس درواقع بیان چنین‌ترسیمهایی است. ازاین دیدگاه، اصل موضوع فوق صرفاً بیان می‌کندکه اگر شخص پرگار را به‌اندازهٔ $P'Q'$ بازکند و نقطهٔ P را به عنوان مرکز برخط L اختیار کند می‌تواند با چرخاندن پرگار نقطهٔ Q را بیابد و سپس با انتخاب Q به عنوان مرکز، به‌همین روش نقطهٔ دیگری پیدا کند و به‌این ترتیب با جهش، به‌سوی انتهای خط پیش رود.

مسأله‌ها

۹.۲. یك پرگار بدون خط‌کش و دو نقطهٔ P و Q داده شده‌اند. نشان دهیدکه می‌توانید نقطهٔ R را بر خطی که از PQ می‌گذرد بیابید به‌طوری‌که $QR = PQ$. چگونه می‌توان تنها به‌کمك پرگار دنباله‌ای‌از نقاط را بریك خط جدا کرد.

---

1. Euclid



شکل ۷.۲

۱۰.۲. فرض کنید پرگار ندارید، اما خط‌کشی دارید که تنها کمی بزرگتر از PQ است. آیا می‌توانید خط PQ را به‌طور نامحدود درهر جهت امتداد دهید؟

۱۱.۲. توضیح دهید چگونه حفارها جاده‌ای مستقیم را ازوسط کوه عبور می‌دهند.

۸.۲ رهیافت هندسی به‌سریهای نامتناهی

اقلیدس ادعا می‌کرد که هر پاره‌خط را می‌توان نصف کرد (با خط‌کش و پرگار) و یك جفت پاره‌خط (مساوی) به‌دست آورد. چون هر یك از این پاره‌خطها و به‌همین ترتیب هر یك از پاره‌خطهای حاصل از عمل اخیر را می‌توان نصف و این عمل را متوالیاً تکرار کرد، نتیجه می‌شود که هر پاره‌خط شامل بی‌نهایت نقطه است. برای اطمینان نسبت به‌این مطلب، آنچه شخص باید انجام دهد این است که طرحی روشن برای فرایند پایان‌ناپذیر نصف‌سازی ارائه کند.

شکل ۸.۲ یك طرح سادهٔ به‌خصوص را نشان می‌دهد: هر بار از دوپاره‌خط جدیدی که حاصل می‌شود پاره‌خط سمت راست آن نصف می‌شود. البته طی تمام این نصف‌سازیها نمی‌توان به B دست یافت اما درحال حاضر این موضوع (وظیفهٔ

شکل ۸.۲

MATH75.IR

آشیل) مطرح نیست. با این حال، روشن است که هرچه بیشتر و بیشتر نصف‌سازی انجام پذیرد، وسطهای متوالی به B نزدیك می‌شوند؛ جالب توجه است که هر طرح با اسلوب برای به‌دست آوردن مجموعه‌ای نامتناهی توسط تکرار چنین نصف‌سازیهایی، دارای این ویژگی است که وسطهای متوالی عملا به‌نقطه‌ای از پاره‌خط نزدیك می‌شوند.

مسأله‌ها

۱۲.۲. ترسیمی را که در شکل ۹.۲ نموده شده است ادامه دهید و مشخص کنید وسطهای متوالی به‌کدام نقطهٔ پاره‌خط نزدیك می‌شوند.

شکل ۹.۲

۱۳.۲. با استفاده از سه‌پاره‌سازی به‌قسمی که هر بار پارهٔ میانی یك پاره‌خط به سه قسمت تقسیم شود، خود را قانع کنید که دنبالهٔ نقاطی که به‌این روش ساخته می‌شود به‌نقطهٔ وسط پاره‌خط می‌گراید.

اگر پاره‌خط AB درشکل ۸.۲ بازه‌ای به‌طول یك‌را نشان‌دهد، نصف‌سازیهای نموده شده به‌نحوی تقریباً قانع کننده نشان می‌دهد که

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots=۱.$$

تصویری ازتقسیمهای متوالی به‌دهمها به‌طوری‌که همواره آخرین دهم بازهم‌تقسیم شود (شکل ۱۰.۲ را ببینید) نشان می‌دهد که

$$۰٫۹+۰٫۰۹+۰٫۰۰۹+۰٫۰۰۰۹+۰٫۰۰۰۰۹+\cdots=۱,$$

شکل ۱۰.۲

MATH75.IR

یعنی،

$$۱ = ۰٫۹۹۹۹۹۹۹ \ldots$$

این موضوع را بعداً با تفصیل بیشتری شرح خواهیم داد.

مسأله‌ها

رسم‌کنید و فکرکنید:

۱۴.۲. $۰٫۳ + ۰٫۰۳ + ۰٫۰۰۳ + ۰٫۰۰۰۳ + \ldots$

۱۵.۲. $\frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۹} + \frac{۲}{۲۷} + \frac{۲}{۸۱} + \ldots$

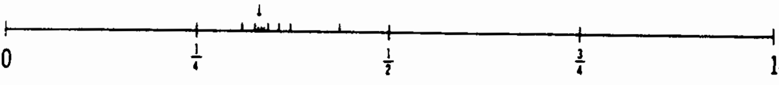
۱۶.۲. $\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۳۲} - \ldots$

۹.۲ روش افنا

ارشمیدس هنگامی که تلاش می‌کرد مساحت قطعه‌ای از سهمی را به‌دست آورد با سری

$$\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۶۴} + \ldots = \frac{۱}{۳} \qquad (۲)$$

مواجه گردید. او روش افنا را که توسط ائودوکسوس (۳۵۰ سال پیش از میلاد) ابداع شده بود کامل کرد و در فرایندی بینهایت به‌کار برد. اثباتی که او برای تساوی (۲) ارائه‌کرد نشان می‌دهد که چگونه موضوعهای معینی که از یك نقطه‌نظر مبهم‌اند، ممکن‌است از دیدگاه دیگری روشن به‌نظر آیند. او می گفت: «پاره‌خطی را به‌چهار قسمت مساوی تقسیم می کنیم، یك قسمت را برای خودمان نگه می‌داریم، دو قسمت



شکل ۱۱.۲

MATH75.IR

را توزیع می‌کنیم یك قسمت هم باقی می‌ماند، که این قسمت برای مرحلهٔ بعد گذاشته شده است و ۱/۳ مقدار توزیع‌شده در اختیار ماست. بعد قسمت باقیمانده را به‌چهار پاره‌خط [مساوی] تقسیم می‌کنیم، یکی را نگه می‌داریم، دو قسمت را توزیع می‌کنیم. بنابراین بازهم یکی می‌ماند. بعد از این مرحله، بازهم روشن است که ۱/۳ تمامی آنچه‌که توزیع شده‌است، دراختیار ماست. بازهم قسمت باقیمانده را به‌چهارقسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، یکی‌را نگه‌می‌داریم، دوتارا توزیع‌می‌کنیم و یکی می‌ماند. مادام‌که این فرایند را ادامه می‌دهیم، دقیقاً ۱/۳ آنچه توزیع‌شده است نزد ما می‌ماند و پاره‌خط کوچك‌وکوچکتری برای توزیع باقی می‌ماند.» این معنای تساوی بالاست. در چنین ساختمانی بهتر است طولهایی را کـه می‌خواهیم اضافه‌کنیم، هرکدام‌کنار دیگری جای داشته باشد.

این روش که در آن همهٔ نظریهٔ نوین حد جای دارد، به‌طور کاملتری در فصل ۳ شرح‌داده خواهدشد. درحال حاضر هرکس قبول داردکه این‌روش نشان‌می‌دهد چگونه جواب ۱/۳ را می‌توان حدس زد. و همین‌طور، اگر جوابی درست‌باشد، آن جواب ۱/۳ است. ثانیاً این استدلال نشان می‌دهدکه با اختیارکردن‌جمله‌های بیشتر وبازهم بیشتر سری، مجموعی که به‌دست‌می‌آید با ۱/۳ اختلاف‌کمترو بازهم کمتری دارد. ثالثاً، ایـن واقعیت، دقیقاً نظیر روش نوین تعریف مجموع یك سری نامتناهی به‌صورت حد است، و بنابراین هنگامی کـه این تعریف را بپذیریم برهان ارشمیدس به‌نظر ما کاملا معتبر خواهد بود.

مسأله

۱۷۰۲. با استفاده از ایـن روش جواب خود را در مـوارد زیـر حدس بزنید و درست‌بودن آن را ثابت‌کنید:

الف) $$\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۱۲۵}+\dots=?$$

ب) $$\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۵۱۲}+\dots=?$$

پ) $$\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\dots=?$$

همین نوع استدلال درمورد سریهایی مانند

$$\frac{2}{5}+\frac{4}{25}+\frac{8}{125}+\cdots$$

به‌کار می‌رود. در اینجا یك پاره‌خط را به‌پنج قسمت [مساوی] تقسیم می کنیم، دوقسمت را نگه می‌داریم، دو قسمت را بـرای عمل بعدی در نظر می‌گیریم و یك قسمت را توزیع می کنیم؛ ۲/۳ آنچه توزیع شده است در اختیار ماست و آسان به حدس جواب پی‌می‌بریم.

مسأله

۱۸۰۲. با روش ارشمیدس، به‌طورکلی، ثابت‌کنید کـه برای هر جفت از اعـداد صحیح m و n که m کوچکتر از $n(1/2)$ است، داریم

$$\frac{m}{n}+\left(\frac{m}{n}\right)^{2}+\left(\frac{m}{n}\right)^{3}+\cdots=\frac{m}{n-m}.$$

با جایگذاری حرف r به‌جای نسبت m/n، سمت چپ دستور مسألهٔ ۱۸۰۲ را می‌توانیم چنین بنویسیم

$$r+r^{2}+r^{3}+\cdots=?$$

آیا می‌بینید که سمت راست برحسب r چگونه به‌دست می‌آید؟ اگر بتوانید و اگر مسألهٔ ۱۸۰۲ را حل‌کرده باشید، برهانی برای دستور معروف مجموع همهٔ‌جمله‌های یك تصاعد هندسی نامتناهی‌که نسبت مشترك آن، r، گویا وکوچکتر از ۱/۲ است، براساس‌روش ائودوکسوس ـ ارشمیدس، خواهیدداشت. به‌هرحال، برهانهای‌متعددی برای این دستور وجود داردکه به‌ازای هر r کوچکتراز ۱ معتبر است.

سرانجام پاسختان را به‌صورت

$$1+r+r^{2}+\cdots=\frac{1}{1-r},$$

ارائه و ملاحظه‌کنیدکه

$$a+ar+ar^{2}+\cdots=\frac{a}{1-r}$$

MATH75.IR

آیا دراین‌دستور می‌تواند $a=0$ باشد؟آیا دراصل روش ۱ $r=$ یا r بیشتر از ۱، یعنی، $m=n$ یـا $m>n$ (علامـت «$>$»، «بزرگتر است از» خوانده می‌شـود) می‌تواند باشد؟

۱۰.۲ ریشهٔ دوم دو

اندکی تأمل نشان می‌دهدکه دستور

$$\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^3+\dots=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

بی‌معنی است. سمت راست منفی است؛ سمت چپ اگر اصولا معنایی داشته باشد، «بینهایت» است. اگرچه ظاهر درست

$$r+r^2+r^3+\dots=\frac{r}{1-r}$$

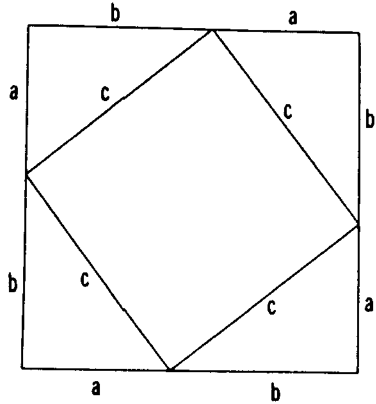
را دارد، اما قید r کوچکتراز ۱ را نقض می‌کند. از طرف دیگر، $\sqrt{2}/2$ کمتراز ۱ است و دستور

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\dots=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}},$$

که برابر با عدد مثبت $\sqrt{2}/(2-\sqrt{2})$ است، برقرار است. اما نوع برهانی کـه در بخش پیش داده شد، آن‌را اثبات نمی‌کند، زیرا آن روش تنها وقتی کاراست که اعداد سازندهٔ تصاعد، نسبتهای اعداد طبیعی باشند.

ابتدا بااثبات اینکه $\sqrt{2}$ طول‌قطرمربع واحد را نمایش‌می‌دهد، نشان‌خواهیم داد که عددی به‌صورت $\sqrt{2}$ وجود دارد. این‌کار را بااثبات قضیهٔ فیثاغورس انجام می‌دهیم. پس‌ازآن نشان خواهیم‌داد که $\sqrt{2}$ نسبت هیچ جفتی‌ازاعداد صحیح نیست.

برهانی از قضیهٔ فیثاغورس کـه در زیر می‌آید از نوع «مشاهده‌ای» است (یعنی، با نگاهی اجمالی به نمودار، بـرای بیننده آشکار می‌شود، شکل ۱۲.۲ را ببینید):



شکل ۱۲۰۲ مربع داخلی و چهار مثلث، مربع بزرگ را می‌سازند.

$$c^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right)=(a+b)^2=a^2+b^2+4\left(\frac{1}{2}ab\right);$$

با حذف $4(\frac{1}{2}ab)$ از طرف اول و آخر این تساوی، به‌دست می‌آوریم

$$c^2=a^2+b^2 .$$

بالاخره اگر $a=b=1$، به‌دست می‌آید

$$c^2=1+1, \qquad c=\sqrt{2};$$

و این طول قطر مربع واحد است.

در زیر برای اینکه $\sqrt{2}$ نسبت دوعدد درست نیست، برهانی می‌آید که برهان «غیرمستقیم»، تحویل به‌امرمحال، نامیده‌می‌شود (برهان توسط تناقض، برهان‌خلف).

اگر می‌توانستیم $\sqrt{2}$ را به صورت نسبت دو عدد صحیح مثلا p/q نمایش دهیم آنگاه امکان داشت p/q را کسری (از میان همهٔ کسرهای هم‌ارز) بگیریم که کوچکترین مخرج ممکن را داشته باشد.

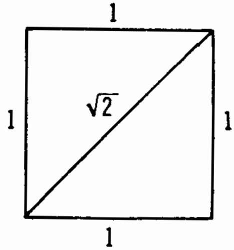
می‌دانیم (شکل ۱۳۰۲ را ببینید) که ۱ کوچکتر از $\sqrt{2}$ است، یعنی،

$$1<\sqrt{2};$$

با ضرب این نابرابری در $\sqrt{2}$، خواهیم دانست

$$\sqrt{2}<2 .$$

MATH75.IR



شکل ۱۳.۲

اکنون اگر $p/q=\sqrt{۲}$ آنگاه $p=\sqrt{۲}\cdot q$. بنابراین p/q بزرگتر از یك و کوچکتر از ۲ است، یعنی p بزرگتر از q و کوچکتر از $۲q$ است، و بنابراین $p-q$ مثبت و کوچکتر از q است.

اینك با مربع کردن $p=\sqrt{۲}\cdot q$، داریم

$$p^{۲}=۲q^{۲},$$

و با کم کردن pq از دوطرف

$$p^{۲}-pq=۲q^{۲}-pq \qquad \text{یا} \qquad p(p-q)=q(۲q-p)$$

که یعنی

$$\frac{p}{q}=\frac{۲q-p}{p-q}$$

اما سمت راست نمایشی از p/q است که مخرجی کوچکتر از q دارد، و این یك تناقض است.

مسأله‌ها

۱۹.۲. برهانی از همین نوع درمورد ادعای گنگ بودن $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۵}$ بیان کنید. آیا اینها گنگ‌اند؟ ثابت کنید (راهنمایی: در بررسی $p=\sqrt{۵}\cdot q$ توجه کنید که چون $\sqrt{۵}$ از ۳ کوچکتر است $p-۲q$ کوچکتر از q می‌شود).

۲۰.۲. $p=\sqrt{۷}\cdot q$ را بررسی کنید، توجه کنید که $p-۲q$ کوچکتر از q است.

۲۱.۲. نشان دهید که گنگ بودن $\sqrt{۸}$ به‌آسانی از گنگ بودن $\sqrt{۲}$ نتیجه می‌شود.

۲۲.۲. به‌فرض آنکه عدد صحیحی مانند k وجود داشته باشد به‌قسمی که

$$k^2 < n < (k+1)^2$$

تساوی $p = \sqrt{n} \cdot q$ را بررسی کنید. نشان دهید که اگر عدد صحیحی مربع یك عدد صحیح نباشد، دراین‌صورت مربع یك کسر هم نیست.

۲۳.۲. نشان دهید که $2\sqrt{s}$ عددی‌صحیح‌است، تنها اگر $\sqrt{s}$ عددی صحیح باشد.

۱۱.۲ محاسبهٔ ریشهٔ دوم دو

بیایید این‌فصل را با دو ساختمان استقرایی برای تقریب $\sqrt{2}$ به‌پایان بریم. درجبر به‌اعدادی از این قبیل برای حل معادلات درجهٔ دوم نیاز داریم. $\sqrt{2}$ برای حل

$$x^2 = 2$$

لازم می‌شود. این‌عدد ممکن است به‌تصورکسی که شم قوی دارد رسیده باشد و آن هنگامی است که به‌دنبالهٔ مربعهایی به‌صورت

۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱، ۱۰۰، ۱۲۱، ۱۴۴، ۱۶۹،

۲۲۵، ۲۵۶، ...

نگاه کرده و متوجه شده است که به‌نظر نمی‌رسد هیچ مربعی وجود داشته باشد که دقیقاً به بزرگی دو برابر مربعی قبل‌از خود باشد. دو عدد ۴۹ و ۲۵ به‌این نظر نزدیك‌اند، اما واقعیت آن است که هیچ عددصحیح مربعی دوبرابر مربع‌عددصحیح دیگری نیست، یعنی

$$m^2 = 2n^2$$

به‌ازای هیچ دو عدد صحیحی نمی‌تواند برقرار باشد. این تساوی می‌تواند توسط اعداد حقیقی برقرار شود.

مسألهٔ یافتن مقدار این عدد یعنی $\sqrt{2}$، تاریخی بسیارکهن دارد. استاد نویگه‌باور[1] یکی‌از پیشروان تاریخ‌ریاضیات می‌گوید که بابلیهای‌باستان، دردستگاه شصتگانی این عدد را به‌صورت (۱۵ ,۵۱ ,۲۴ ;۱) برآوردکرده‌اندکه نظیر

---

1. Neugebauer

MATH75.IR

...۱٫۴۱۴۲۱۳ در دستگاه اعشاری ماست، و ۲۰۰۰ سال بعد بطلمیوس[1] اخترشناس از این برآورد استفاده کرد. او همچنین خاطرنشان می‌کند روشی که هنوزهم برای یافتن تقریبهای $\sqrt{2}$ مورد استفاده است (اولین چیزی که درصدد ارائهٔ آنیم) احتمالاً همان است که بابلیهای باستان به‌کار می‌برده‌اند؛ از اسناد چنین برمی‌آید، اما قطعی نیست.

این روش برملاحظات زیر استواراست. فرض کنیم $a=\sqrt{2}$. دراین‌صورت

$$\frac{2}{a}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=a$$

و بنابراین

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)=a \qquad \text{یا} \qquad a+\frac{2}{a}=2a$$

اگر مقدار واقعی $\sqrt{2}$ را می‌دانستیم دراین‌صورت می‌توانستیم این مقدار رادوباره به‌این ترتیب به‌دست آوریم که ۲ را براین مقدار تقسیم و حاصل را با همین‌مقدار جمع کنیم و سپس نتیجه را در ۱/۲ ضرب نماییم. اکنون روش مورد بحث.

مرحلهٔ ۱. برآورد مثبتی، مثلاً ۱ را به‌عنوان تقریب نخست درنظر بگیرید.

دستورالعملهای متوالی: عدد صحیح ۲ را بر برآورد به‌دست آمده در مرحلهٔ پیشین تقسیم کنید. اکنون یك‌دوم‌مجموع خارج‌قسمت این‌تقسیم‌را، با همان برآورد به‌دست آورید و به‌عنوان برآورد جدید اختیار کنید.

همین دستورالعمل کلی با نماد جبری به‌صورت زیر ارائه می‌شود: گیریم a معرف برآورد $\sqrt{2}$ است که در مرحلهٔ پیشین به‌دست آمده است. دراین‌صورت

$$\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$$

برآورد جدید است.

می‌توانیم این دستورالعملها را به‌صورت یك دستور استقرایی بنویسیم:

مرحلهٔ یکم $\qquad a_1=1,$

مرحلهٔ kام $\qquad a_k=\frac{1}{2}\left(a_{k-1}+\frac{2}{a_{k-1}}\right), \qquad k=2, 3, 4, \ldots$

---

1. Ptolemy

جالب است ببینیم چندتقریب اولیهٔ $\sqrt{2}$ بـه‌چه صورت‌انـد. بـا ۱ شروع مـی‌کنیم، بعد بـه‌دست می‌آوریـم ۳/۲ = (۲ + ۱)(۱/۲) سپس ایـن برآورد، ۱۷/۱۲ = (۱۷/۶)(۱/۲) = ((۴/۳) + (۳/۲))(۱/۲) را بـه ما می‌دهد. در مرحلهٔ چهارم با ۴ = k در دستور دوم، به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲}\left(\frac{۱۷}{۱۲}+\frac{۲۴}{۱۷}\right)=\frac{۵۷۷}{۴۰۸}$$

این برآورد، ... ۱٫۴۱۴۲۱۵ است که انصافاً به‌مقدار واقعی نزدیك است. مقدار نزدیکتر، ... ۱٫۴۱۴۲۱۴۰ می باشد.

روشن‌است که دراین‌روش با دنباله‌ای نامتناهی‌از برآوردها مواجه می‌شویم. اما دست‌کم می‌توان تصور کرد که پس‌از چندمرحله کسری خواهیم یافت که مربعش ۲ باشد. اگر به‌واقع بتواند چنین شود دراین‌صورت این‌فرایند ادامه خواهدیافت، اما بارها و بارها همان جواب را خواهد داد. به‌هرحال، چنین چیزی رخ نمی‌دهد؛ نمی‌تواند رخ دهد زیـرا همچنان‌که در بند پیش دیدیـم، $\sqrt{2}$ یك عددگویا نیست (نسبت دوعدد صحیح نیست). این واقعیت عملا درحدود ۵۰۰ سال قبل‌از میلاد و احتمالا توسط خـود فیثاغورس اثبات شده است. در تـاریخ آمده است کـه او [فیثاغورس] «گنگ بودن» $\sqrt{2}$ را بـه‌عنوان ناخوشایندترین واقعیت در اعتقادات فلسفی‌تلقی‌می کرد،زیرا نشان می‌داد جهان به‌آن‌سادگی وهماهنگی که اومی‌خواست نیست. گمان می‌رود او مقرر کرده بودکه این واقعیت بین اعضای گروه فلسفی وی مخفی بماند و روایت است‌که دست‌کم یکی‌از دانشجویانش به‌علت پخش این خبر ناخوشایند کشته شد.

فیثاغورس هم خـود و هم ما را با پرسشی جدی روبه‌روکرد. گواه هندسی حاکی‌است چنین عددی‌که ریشهٔ دوم ۲ است وجود دارد و حتی درعمل، درنجاری و سایر فنون یکی از مهمترین عددهاست. اما این عدد قطعاً عددی صحیح نیست، و اگر نسبت دوعدد صحیح هم نباشد پس چه‌نوع عددی‌است و چگونه آن‌را می‌توان نوشت؟

امروزه اینها، پرسشهای مشکلی برای پاسخگویی نیستند و این کتاب‌کوچك به‌موقع به‌آنها جواب خواهد داد. هنگامی که بخواهیم دربارهٔ $\sqrt{2}$ صحبت کنیم، به‌طورساده نامی به‌آن‌می‌دهیم که با آن‌نام، دیگران‌آن‌را بشناسند. مثلا می‌توانیم‌آن را «قطرمربع واحد» یا«ریشهٔدوم۲» بنامیم. اگر به‌علت‌وجود ریشهٔ‌منفی بیم‌اشتباه‌می‌رود می‌توانیم صفت «مثبت» را به‌ریشهٔ‌دوم اضافه کنیم. امروزه صرفاً ازنام جاافتادهٔ $\sqrt{2}$

MATH75.IR

استفاده می کنیم (در این‌صورت نیازی به‌اضافه کردن کلمهٔ «مثبت» نیست، زیرا این نماد، خود شامل این‌معنی است و $\sqrt{۲}$ خود بنابر تعریف ریشهٔ مثبت را بیان می کند).

البته اگر عملا نیازمند به‌کار کردن با $\sqrt{۲}$ باشیم ـ مثلا اگر بخواهیم چیز مربع‌شکلی بسازیم ـ در این‌صورت نام تنها کافی نیست. بلکه در آن‌حالت اطلاع داریم کار ما چقدر دقیق باید باشد و بنابراین می‌دانیم در محاسبهٔ $\sqrt{۲}$ به‌چند رقم اعشار نیاز داریم. بنابراین در جدولهای ریشه‌های دوم آن‌را جستجو خواهیم کرد، جدولهایی تا پنج‌رقم و همین‌طور جدولهایی تا پانزده رقم اعشار وجود دارند. امروزه ماشینهای حسابگر تا چندهزار رقم اعشار را در زمانی کوتاه به‌ما می‌دهند. اگر ماشین حسابگر و جدول در اختیار نباشد اما کاغذ فراوانی داشته باشیم روش استقرایی بالا هرچند رقم اعشاری راکه بخواهیم به‌ما می‌دهد، به‌شرطی که مراحل را به‌حدکافی پیش ببریم.

اگر دراین عمل یکی‌ازاعداد a یا $۲/a$ کوچکتراز $\sqrt{۲}$ باشد آنگاه‌دیگری بزرگتراز $\sqrt{۲}$ است. مثلا، $a<\sqrt{۲}$ نتیجه می‌دهد

$$\frac{۲}{a}>\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲} \qquad \text{و} \qquad \frac{۱}{a}>\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

می‌توانید به‌سرعت بررسی کنید که ۱۷/۱۲ برای $\sqrt{۲}$ اندکی بزرگ و ۲۴/۱۷ اندکی کوچك است. ۱۷/۱۲ درحدود ۱٫۴۱۷ و ۲۴/۱۷ درحدود ۱٫۴۱۳ است. اگر یکی‌از این دو عدد، بیش‌از حدکوچك و دیگری بیش‌ازحد بزرگ باشد، در این صورت نصف مجموع آنها (که ۱٫۴۱۵ است) می‌بایستی تا دو واحدآخرین رقم درست باشد. ممکن‌است این‌کار برای منظور خاصی به‌قدر کافی خوب باشد یا نباشد، اما نوعی ازچیزی را نشان‌می‌دهد که ریاضیدانان‌رضایت‌بخش تلقی‌می‌کنند: یك‌برآورد و بعد هم یك وارسی که برد خطای ممکن را معلوم سازد.

روش دیگری برای یافتن تقریبهای $\sqrt{۲}$ ارائه می‌کنیم که چنان ارتباط نزدیکی با عددنویسی اعشاری دارد که بعداً ما را در فهم معنای عدد حقیقی کمك خواهدکرد ($\sqrt{۲}$ عددی حقیقی است، همهٔ اعداد گویا نیز اعداد حقیقی هستند).

مرحلهٔ یك. دو عدد صحیح متوالی ۱ و ۲ را اختیار کنید. آنها را در ۱۰ ضرب کنید (۱۰ و ۲۰ به‌دست می‌آید) و نه‌عدد صحیح متوالی بین آنها جادهید؛ حالا آنچه‌که دارید عبارت است از

$$۱۰,\ ۱۱,\ ۱۲,\ ۱۳,\ ۱۴,\ ۱۵,\ ۱۶,\ ۱۷,\ ۱۸,\ ۱۹,\ ۲۰$$

MATH75.IR

در میان اینها دو عدد متوالی وجود دارد به‌قسمی که مربع اولی دارای اولین رقم [از سمت چپ] ۱ و مربع دومی دارای اولین رقم [از سمت‌چپ] ۲ است. این‌دو عدد صحیح متوالی را بیابید. هریك از این‌دو راکه به ۱۰ تقسیم کنید تقریبی است برای $\sqrt{2}$ (اولی کمی کوچکتر و دومی کمی بزرگتر است).

ادامهٔ مرحله: دو عدد صحیح متوالی به دست آمده در مرحلهٔ قبل را در ۱۰ ضرب کنید و نه‌عددصحیح متوالی بین‌آنها جا دهید. در میان این یازده عددصحیح دو عدد متوالی وجود دارد که مربع اولی دارای اولین رقم [از سمت چپ] ۱ و مربع دومی دارای اولین رقم [از سمت چپ] ۲ است. این دو را بیابید. هرکدام از این‌دو عدد صحیح را کـه به‌توان مناسبی از ۱۰ تقسیم‌کنید، تقریبی برای $\sqrt{2}$ به‌شما می‌دهد (اولی قدری کوچکتر و دیگری قدری بزرگتر است).

برای اینکه ببینید این‌کار چگونه انجام می‌شود، مربعهای نخستین یازده‌عدد صحیح بالا را حساب می‌کنیم:

$$۱۰۰,\ ۱۲۱,\ ۱۴۴,\ ۱۶۹,\ ۱۹۶,\ ۲۲۵,\ ۲۵۶,\ ۲۸۹,\ \ldots,\ ۴۰۰;$$

اکنون واضح است که مطلوب، ریشه‌های دوم ۱۹۶ و ۲۲۵، یعنی دو عدد متوالی (۱۴, ۱۵) است.

در مرحلهٔ بعد ۱۴۰ و ۱۵۰ و از این‌دو:

$$۱۴۰,\ ۱۴۱,\ ۱۴۲,\ ۱۴۳,\ ۱۴۴,\ ۱۴۵,\ ۱۴۶,\ ۱۴۷,\ ۱۴۸,\ ۱۴۹,\ ۱۵۰$$

به دست می‌آیند. با مربع کردن این اعداد در می‌یابیم کـه $(۱۴۱)^۲ = ۱۹۸۸۱$ و $(۱۴۲)^۲ = ۲۰۱۶۴$، بنابراین دو عـدد متوالـی مطلوب، (۱۴۱, ۱۴۲) است و تقریبهای وابسته به‌آنها عبارت‌اند از ۱٫۴۱ و ۱٫۴۲. خواننده اگر مراحل بیشتری را انجام دهـد مهارت خواهد یافت. او درمی‌یابد کـه درهـر مرحله از محاسبات می‌تواند از محاسبات قبلی استفاده‌کند و بنابراین به‌کار خودکه تقریباً دلپذیر هـم هست نظام بخشد. بـه علاوه خواهد دیدکـه هریك‌از مراحل متوالی پاسخ بهتری می‌دهد، یعنی یك رقم اعشار دقیقتر است. بـه‌علاوه، این روش نشان می‌دهد (همین واقعیت درمورد روش قبلی نیز درست است اما نه به‌آن آسانی‌که دیده شود) که اگر n رقم اعشار لازم بـاشد، همواره بـه‌دست می‌آید، به‌شرط آنکه محاسبه در n مرحلهٔ متوالی انجام شود.

MATH75.IR

مسأله‌ها

۲۴۰۲ درستی قاعدهٔ زیر را ثابت‌کنید: برای ضرب‌عددی در ۱۲٫۵، ممیز اعشار را دو رقم به‌سمت راست ببرید، و بعد به۸ تقسیم‌کنید.

۲۵۰۲ عدد ریشهٔ یك‌عدد مفروض به‌طریق زیر به‌دست می‌آید: همهٔ رقمهای آن‌را باهم جمع‌کنید؛ اگر نتیجه بزرگتر از ۹ باشد، همهٔ رقمهای این نتیجه را با هم جمع‌کنید و این کار را ادامه دهید تا نتیجه‌ای کوچکتر از ۱۰ به‌دست‌آید. این‌را، عدد ریشهٔ عدد مفروض می‌نامیم. ثابت کنید یك‌عدد و عدد ریشهٔ آن به‌یك‌ردهٔ‌مانده‌های به پیمانهٔ ۳ تعلق دارند. بنابراین یك عدد بر ۳ بخشپذیر است اگر و تنها اگر عدد ریشهٔ آن بر ۳ بخشپذیر باشد.

۲۶۰۲ تنها با استفاده از ۰ و ۱: (الف) یك بسط اعشاری با دوره‌ای طولانی بسازید؛ (ب) به‌نحوی با اسلوب یك دنباله از بسطهای اعشاری بسازید‌که هرکدام دوره‌ای طولانیتر از ماقبل خود داشته باشد؛ و (پ) یك عدد اعشاری نامختوم بسازید که دوره‌ای نباشد.

MATH75.IR

فصل سه

از $\sqrt{2}$ تا ترامتناهی

۱.۳ اندازه‌های نامتوافق

آن‌طورکه بحث‌زیر نشان می‌دهد گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ برخلاف عقل سلیم به‌نظر می‌آید: فرض‌کنیم دوطول نامساوی‌داریم و از ما بخواهند آن‌دو را به‌پاره‌هایی باطولهای مساوی تقسیم‌کنیم، تعداد پاره‌هامی‌تواند به‌دلخواه اختیارشود به‌شرط‌آنکه طولهای حاصل همه‌باهم برابر باشندا جای شگفتی است که‌گاهی انجام این‌کار ناممکن‌است. اگر طولها مثلا ۲۷ و ۳۳ یا $27\sqrt{2}$ و $33\sqrt{2}$ باشند، کار آسان است. اما اگر طولها ۱ و $\sqrt{2}$ باشند، مسأله حل‌ناپذیر می‌شود.

می‌توان جوابهای تقریبی به‌دست آورد، اما جواب دقیق ممکن نیست. گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ نشان می‌دهد که هر دو طول مفروضی لزوماً متوافق نیستند، یعنی، ممکن‌است هیچ‌واحد طولی وجود نداشته باشد‌که طولهای مفروض، هریك به‌تعداد صحیحی از آن واحد باشد. برای مقایسهٔ دو طول می‌توان با یك خط‌کش آن‌دو را اندازه گرفت. این موضوع «توافق‌ناپذیری» طولها را به «مقایسه‌ناپذیری» آنها منجر می‌کند، و این هم بسیار دردسرزاست. به‌واقع، به‌طور حتم نیاز به یك فرایند بینهایت احساس می‌شود.

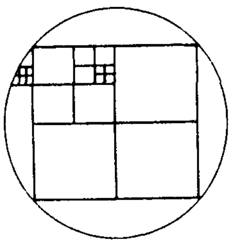
MATH75.IR

ریاضیدانان یونان [باستان] می‌دانستند که مسألهٔ محاسبهٔ محیط و مساحت دایره نیز به‌یك فرایند بینهایت منجر می‌شود، چون با هیچ‌دسته‌ای از مربعها، هرچقدرهم کوچك، نمی‌توان به‌طور یکنواخت و هموار سطح دایره را پر کرد. ماهیت این‌دو شکل چنین چیزی را اجازه نمی‌دهد؛ شکل ۱.۳ را ببینید.

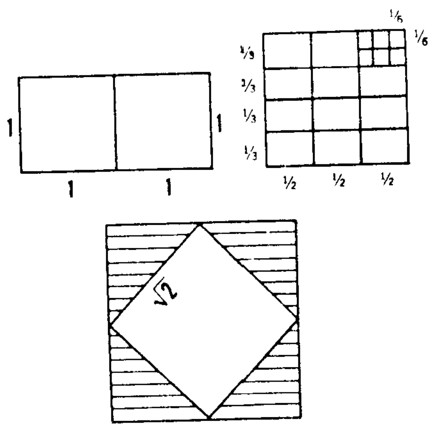
بنابراین ریاضیدانان تفاوت بین توافق‌پذیری و مقایسه‌پذیری را می‌دانستند. اما آنان تعجب می‌کردند که می‌دیدند همین پرسش درارتباط با پاره‌خطهای راست و مساحت مستطیلها نیز مطرح است. در تصویر بعد این موضوع تشریح شده است.

مستطیلهای شکل ۲.۳ دو متر مربع مساحت دارند. اولی ۲ مترطول و ۱ متر عرض، دومی ۳/۲ متر طول و ۴/۳ مترعرض دارد و سومی (شکل درونی) مربعی است به‌ضلع $\sqrt{2}$ متر.

به‌آسانی دیده می‌شود که اولی شامل دومربع واحد و دومی شامل ۷۲ مربع



شکل ۱.۳



شکل ۲.۳

MATH75.IR

کوچك (هر کدام ۱/۶ در ۱/۶) است. همچنین اولی را می‌توان به ۷۲ مربع (۱/۶ در ۱/۶) تقسیم کرد. شکل سوم نشان نمی‌دهد که چرا هیچ مربع کوچکی وجود ندارد که تعدادی از آن بتواند هم مساحت هاشورنخورده و هم مساحت بزرگتر را به‌طور یکنواخت بپوشاند. اما این همان چیزی است که گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ ایجاب می‌کند.

زمانی که گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ محقق شد، ریاضیدانان یونان [باستان] توانستند بدان خو کنند. اما این‌واقعیت بازدارنده باقی‌ماند که چون‌یونانیان در اصل درمورد چنین امکانی قانع نشده بودند، مجاز نبودند آن‌را در برهانهایشان وارد کنند. برهانهای زیادی، خصوصاً در نظریهٔ مساحتها و نسبت وجود داشت که تا آنجا که پیش می‌رفتند درست بود. این برهانها آنچه را که «حالت نامتوافق» نامیده شد، حذف می‌کردند. (همین پنجاه سال پیش، کتابهای درسی هندسهٔ دبیرستانی روشهای دقیق حالت توافق‌ناپذیر را نمایان‌کردند.) مثال بسیار روشنی از یك قضیه که در آن‌حالت توافق‌ناپذیری طرز عملی مجزا را طلب می‌کند درفصل ۶ ارائه می‌شود.

برهانهای اصلاح‌شده به‌نظریهٔ مناسبی‌ازحد نیازدارند. این‌کاررا ائودوکسوس (۳۵۰ سال قبل از میلاد) تدارك دیده بود، او یك اصل کلی را که حالا به‌اصل ائودوکسوس معروف است، فرمولبندی کرد. شکل خاصی از آن، اصل موضوع ارشمیدس است که اکنون می‌دانیم بسیار فراگیر است اما درمورد همهٔ شکلهای هندسی‌که ائودوکسوس می‌شناخت معتبر بود. اصل ائودوکسوس چنین است: اگر A و B دو اندازهٔ مفروض از یك نوع هندسی (طول، مساحت یا حجم) باشند، در این‌صورت همواره عدد درستی مثل m وجود دارد به‌قسمی که m برابر A از B بزرگتر است.

او روشی را برای انجام فرایند حد که اصل وی بر آن دلالت دارد، به‌کمال [illegible] مثالی از این روش در بخش ۹.۲ نشان داده شد.

[illegible] ارشمیدس بود که سده‌ها بعد، با استفاده از کار ائودوکسوس حجمها و مساحتهای گونهٔ وسیعی از شکلهای خمیده را محاسبه‌کرد. کره و استوانهٔ دوار، استوانهٔ سهموی و چند جسم سهموی دیگر؛ مساحتها و طولهای وابسته به‌چند پیچ از جملهٔ آنهاست. حدیث ابداعات او از نسلی به‌نسلی و ازکشوری به‌کشوری منتقل می‌شد (اروپا را حدود ۵۰۰ سال بعداز میلاد ترك‌کرد و چند سده بعد حدود ۱۴۰۰ بعدازمیلاد به‌آنجا بازگشت). فکر دقیقی‌که درپس آن نهفته بود درهیجان ناشی‌ازکلیت تکنیکهای جبری جدید، کم‌وبیش محوشده بود و تنها در سدهٔنوزدهم

بود که بازیافته شد.

ادعای ائودوکسوس معادل این است که: دو شیئی هندسی (از یك نوع) با اندازه‌های A و B مفروض‌اند، در این‌صورت به‌ازای لااقل یك عدد صحیح q،

$$A = qB + R$$

که در آن R اندازه‌ای از همان نوع و کوچکتر از B است. با تصور B به‌عنوان یك متغیر و اختیار واحدهای کـوچك و کوچکتری برای B، باقیمانده‌های کوچك و کوچکتری برای R، و بنابراین تقریبهای بهتر و بهتری برای اندازهٔ A، به‌دست می‌آوریم.

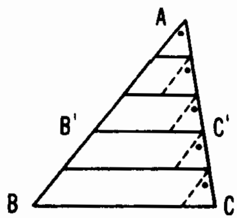
این‌واقعیت که بعضی از اندازه‌های هندسی‌را با استفاده از فرایندهای‌بینهایت باید حساب کرد به‌پرسشی در جهت عکس منجر می‌شود: چگونه می‌توان مطمئن شد که فرایند بینهایت مفروضی عملا به‌یك‌عدد منجرمی‌شود؟ ائودوکسوس درهمان‌زمان که دستگاه اعداد حقیقی را کشف می‌کرد، نظریهٔ مناسبی دربارهٔ حدود ابداع کرد. این نظریه در دههٔ ۱۸۷۰ توسط ددکیند[1] دوباره کشف شد.

مسأله

۳.۱۰ قضیهٔ زیر را بررسی کنید: مثلث ABC و پاره‌خط $B'C'$ موازی قاعدهٔ BC داده شده‌اند. در این‌صورت نسبتهای $AB' : B'B$ و $AC' : C'C$ برابرند. خطهای نقطه‌چین [درشکل ۳.۳] نشان می‌دهند که چگونه می‌توان این‌مسأله‌را درحالت‌خاص

$$AB' : B'B = ۳ : ۲$$

ثابت کرد. زاویه‌های نقطه‌دار برابرند.



شکل ۳.۳

1. Dedekind

MATH75.IR

اثبات را درحالت

$$AB' : B'B = m : n$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبتی هستند، تعمیم دهید. اگر $m=\sqrt{2}$ و $n=1$ چه‌اتفاق می‌افتد؟

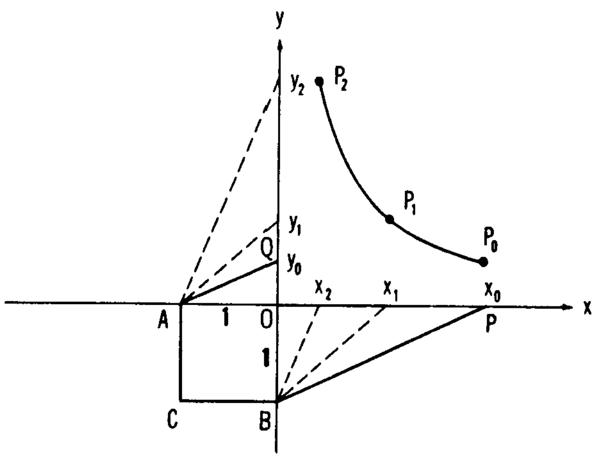
۲.۳ ترسیمهای هندسی عکس اعداد و سایر روابط عددی

هرمستطیلی که دوضلع x و y آن حاصلضربی برابربا ۱ داشته باشد مساحتی برابر ۱ واحد مربع دارد. اگر x طول مفروضی باشد، می‌توانیم y را با ترسیم ساده‌ای که درشکل ۴.۳ نموده شده است به‌دست آوریم: ابتدا می‌نویسیم

$$y=\frac{1}{x} \qquad \text{یا به‌صورت بهتر،} \qquad \frac{y}{1}=\frac{1}{x}$$

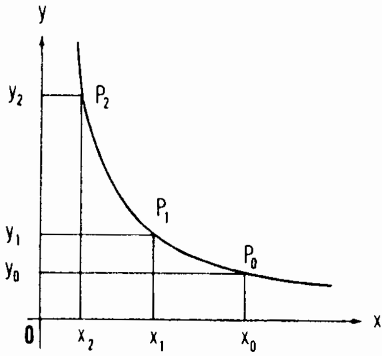
ومعادلهٔ اخیر را به‌عنوان تساوی دونسبت متعلق به‌مثلثهای‌متشابه OPB، با $OP=x$ و $OB=1$؛ و OQA با $AO=1$ و $OQ=y$، تعبیرمی‌کنیم. AQ موازی BP است.

در این ترسیم، $x=OP$ مفروض است، مربع $AOBC$ یك‌بار و برای‌همیشه تثبیت شده است. اکنون BP را رسم یا صرفاً تصور کنید و آنگاه AQ را موازی با آن درنظر بگیرید. دراین‌صورت OQ به‌عنوان y به‌دست‌می‌آید. اگراندازه‌هایی



شکل ۴.۳

MATH75.IR



شکل ۵.۳ $xy = ۱$ یا $y = ۱/x$.

چون $x_۰$، $x_۱$، $x_۲$، ... بەازای اندازەهای مفروض مختلف و متعدد $y_۰$، $y_۱$، $y_۲$، ... ساخته شوند و از جفت عددهای بەدست آمدهٔ (x_k, y_k) بەعنوان مختصات نقاط P_k استفاده کنیم، می‌توان آنها را با نموداری بەهم‌وصل کرد (هنگامی که بەقدر کافی نقطه رسم شود، نسبت بەنتیجه‌ای که در شکل ۵.۳ به دست آمده اطمینان حاصل می‌شود).

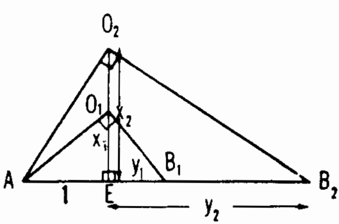
هنگامی که از خط کش استفاده شود، این شکل بەجدول عکس اعداد تبدیل می‌شود و می‌تواند برای تعیین $۱/x$، عکس عدد دلخواه x بەکار رود.

مسأله‌ها

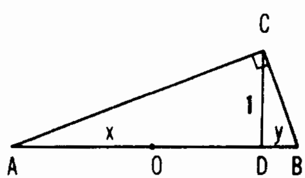
۲.۳. آیا مستطیلی بەمساحت واحد وجود دارد که یك ضلعش بەطول صفر باشد؟

۳.۳. فرایندی راکه شکل ۶.۳ برای یافتن $y = ۱/x$، عکس عدد مفروض x نشان می‌دهد [illegible].

۴.۳. [illegible] $y =$ [illegible] را که [illegible]



شکل ۷.۳



شکل ۶.۳

MATH75.IR

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{1}$$

درآمده است بیان کنید. سپس نمودار خم $y=x^2$ را رسم نمایید. به منظور نقطه‌یابی از شکل ۸.۳ (با زاویهٔ قائمه در O) استفاده کنید.

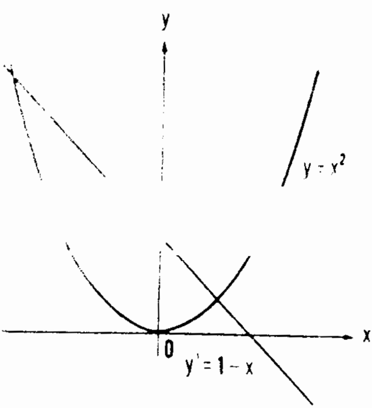
۵.۳. از این ترسیم $y=x^2$ دربارهٔ این سؤال که آیا با داشتن طول x، همیشه می‌توان $\sqrt{x}$ را یافت چه نتیجه‌ای به بار می‌آید؟ این مسأله را با ترسیم قبلی مربوط سازید.

۶.۳. این یك واقعیت است که با ترسیمهایی به تعداد متناهی و تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار نمی‌توان ریشهٔ سوم را درحالت کلی یافت. اما می‌توان با تعداد زیادی «عدد مکعب» خم $y=x^3$ را رسم کرد. چگونه می‌توان با استفاده از این خم، ریشه‌های سوم اعداد را به‌طور تقریبی پیدا کرد؟

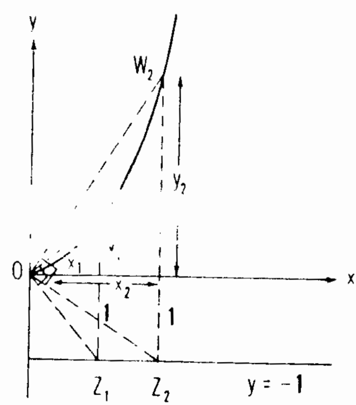
۷.۳. $y=x^2$ را رسم کنید و از روی آن

$$\sqrt{2},\qquad \sqrt{2+\sqrt{2}},\qquad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

را بخوانید. با استفاده از این خم و یك خط‌کش، $x^2+x-1=0$ را حل کنید. ابتدا آن را به‌صورت $x^2=1-x$ یعنی $x^2=y=y'=1-x$ تبدیل کنید.



شکل ۹.۳



شکل ۸.۳

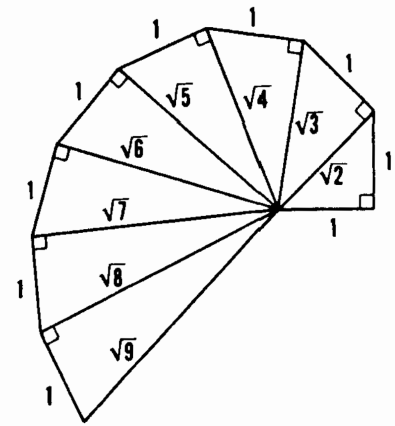
MATH75.IR

۳.۳ پیچاك گنگهای درجهٔ دوم

در دنبالهٔ ۱، $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$، $\sqrt{۴}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt{۶}$، ... بعضی به وضوح عددی درست و بنابراین گویا هستند، مثلا

$$\sqrt{۴}=۲=\frac{۲}{۱}$$

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که تنها این اعداد، «اعداد مربع»، گویا هستند. شکل ۱۰.۳ نشان‌می‌دهد که چگونه می‌توان همهٔ آنها‌را قیاساً باشروع از ۱ و با استفاده از مثلثهای قائم‌الزاویه ترسیم کرد.



شکل ۱۰.۳ پیچاك گنگها.

مسأله‌ها

۸.۳ ترسیم بالا را آن‌قدر تکرار کنید تا احساس کنید می‌توانید حدس بزنید که وقتی n بسیار بزرگ می‌شود چه اتفاقی برای مقدار $\sqrt{n+۱}-\sqrt{n}$ می‌افتد. البته، هر جمله از جملهٔ قبلی بزرگتر و اختلاف هر جمله با جملهٔ قبلی، همواره از صفر بیشتر است.

۹.۳ آیا می‌توانید اتحاد $(a+b)(a-b)=a^{۲}-b^{۲}$ را در مسألهٔ قبل به‌کار برید تا به‌اثبات حدستان کمك کند؟ راهنمایی: اگر از این اتحاد استفاده کنید،

MATH75.IR

سمت راست برابر با ۱ خواهد شد.

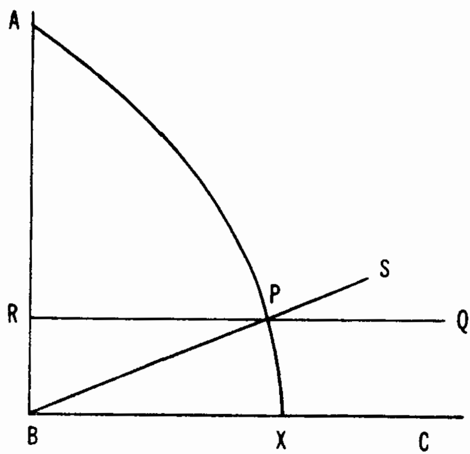
۱۰.۳. وقتی n بسیار بزرگ می‌شود، رفتار $\sqrt{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})$ را پیش بینی کنید.

۴.۳ شرح نقطهٔ حدی

خم شکل ۱۱.۳ اندیشهٔ حد را به‌طریقی متفاوت با مثالهای دیگر این کتاب معرفی می‌کند. این خم توسط هیپیاس[1] معاصر با سقراط[2] (۴۵۰ قبل‌از میلاد) ترسیم و از آن برای حل مسألهٔ اندازه‌گیری مساحت دایره استفاده می‌شد. نام آن، «تربیع‌گر» از این واقعیت ناشی شده است که دایره را «تربیع» می‌کند.

در اینجا از این خم در زمینه‌ای کاملا متفاوت استفاده خواهیم کرد؛ روش ویژه‌ای را می‌آزماییم که در آن یکی‌از نقاط تربیع‌گر به‌سایر نقاط آن وابسته می‌شود. اما نخست توضیح خواهیم داد که این خم را چگونه می‌توان رسم کرد.

تربیع‌گر درشکل ۱۱.۳ به‌صورت کمان AX نشان داده شده است. و آن مکان هندسی نقاط P است که به‌این‌صورت یافته می‌شوند: زاویهٔ قائمهٔ ABC و پاره‌خطی به‌طول AB مفروض‌اند، دراین‌صورت نقطهٔ P، نقطهٔ برخورد خط «شعاعی» BS گذرنده بر B و خط افقی RQ موازی با BC است، به‌طریقی که تناسب



شکل ۱۱.۳ تربیع‌گر هیپیاس.

1. Hippias
2. Socrates

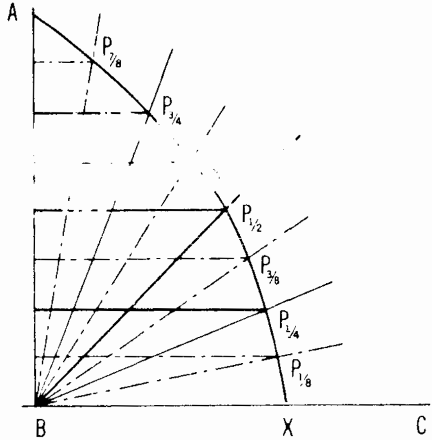
MATH75.IR

$$\measuredangle CBS : \measuredangle CBA = BR : BA$$

برقرار باشد. البته زاویه‌ها باید برحسب یك واحد زاویه و طولها نیز باید برحسب یك واحد طول اندازه‌گیری شوند، به‌طوری‌که هرطرف معادله یك عدد «محض» (بدون واحد) باشد. خوب است‌که BA را واحد طول و زاویهٔ قائمهٔ CBA را واحد زاویه انتخاب‌کنیم. اگر چنین‌کنیم تساوی مذکور به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\text{تعداد قائمه‌ها در } \measuredangle CBS = \text{تعداد واحدهای طول در } BR$$

برای ترسیم ایـن خم ابتدا زاویهٔ ABC و پاره‌خط AB را نصف می‌کنیم. ایـن‌کار نقطه‌ای بر تربیع گر مشخص می‌کند کـه آن‌را $P_{1/2}$ (بخوانید «P اندیس یك‌دوم») می‌نامیم. سپس با نصف‌کردن هریك از دو پاره‌خط به‌دست آمده بر AB وهمین‌طور هر یك‌از زاویه‌های $ABP_{1/2}$ و $P_{1/2}BC$ نقطه‌های $P_{1/4}$ و $P_{3/4}$ مشخص می‌شوند (شکل ۱۲.۳ را ببینید). سپس با نصف‌کردن هریك‌از چهار زاویه وچهار پاره‌خط جدید و درست وابسته‌کردن خطوط افقی وشعاعی به‌آنها، چهارنقطهٔ جدید $P_{1/8}$، $P_{3/8}$، $P_{5/8}$، $P_{7/8}$ مشخص می‌شوند (از پـایینترین نقطه درجهت خـلاف حرکت ساعت فهرست شده‌اند). روشن است کـه چگونه می‌توانیم به‌هر اندازه‌که مایل باشیم نقاط بیشتر وبازهم بیشتری به‌دست آوریم. درمرحلهٔ مشخصی ازاجرای عملی ترسیم، خم کم و بیش شکل واقعی به‌خود می‌گیرد. وقتی‌کـه به اندازهٔ کافی نقطه یافته باشیم، بقیه را می‌توانیم رسم کنیم. حالا خم کامل، رسم شده است.



شکل ۱۲.۳

MATH75.IR

نقطهٔ X بر قاعدهٔ CB رابطه‌ای استثنایی بـا خم دارد. هـم بر خط شعاعی به‌زاویهٔ صفر قراردارد وهم برخط افقی به‌ارتفاع صفر. اما این دوخط که تقاطعشان باید نقطهٔ X را به‌ما بدهد برهم منطبق‌اند! بنابراین نقطهٔ X نمی‌تواند عیناً باروش سایر نقاط خم تعریف شود. ازخم به‌تمامی هنگامی‌که رسم شده باشد دیده می‌شود که تعیین نقطهٔ X بر CB باید آسان باشد. اما تعریف پیشین تربیع گر را در مورد این نقطه نمی‌توان به‌کار برد.

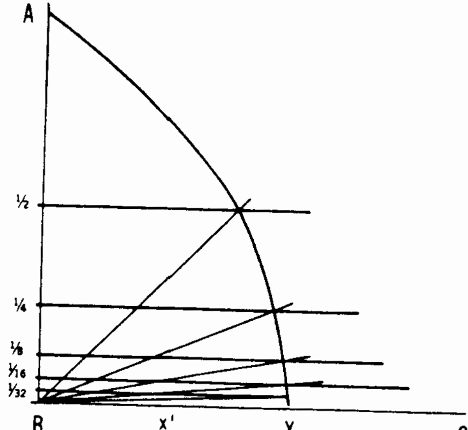
چنانکه در زیـر خواهیم دید وقتی بـه‌سراغ معادلهٔ تحلیلی [خم] می‌رویم همین مشکل پیش می‌آید. دراین میان شکل ۱۳.۳ نشان می‌دهد که چگونه نقطهٔ X را می‌توان به‌عنوان حد سایر نقاط خم محاسبه‌کرد. این موضوع بیان می کند کـه نقطهٔ X برتربیع گر را باید به‌عنوان حد سایرنقاط خم تعریف کرد. این‌کار را عملا می‌توان انجام داد و X را از این تعریف جدید می‌توان به‌دست آورد.

اگرمختصات نقاط تربیع گررا با (x, y) و زاویهٔ CBS را با y^* (زبروند * را «قائمه» بخوانید) نمایش دهیم، می‌توانیم از تعریف تانژانت y^* استفاده‌کنیم و بنویسیم

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg} y^*} \qquad \text{و} \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} y^*$$

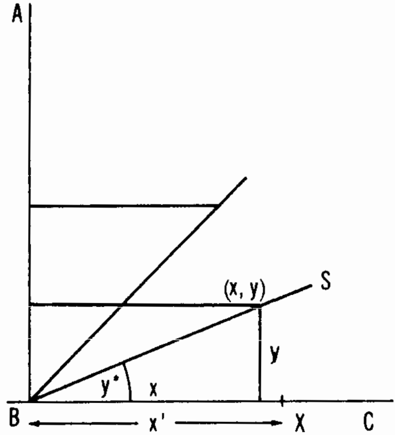
شکل ۱۴.۳ را ببینید.

اکنون نقطهٔ X که مورد توجه ماست، نظیر $y = 0$ است، بیایید فاصلهٔ BX



شکل ۱۳.۳

MATH75.IR



شکل ۱۴۰۳

را x' بنامیم. معادلهٔ

$$y=y^*=\circ \qquad \text{به‌ازای} \qquad x=\frac{y}{\operatorname{tg} y^*}$$

به صورت مبهم $x'=\frac{\circ}{\circ}$ درمی‌آید؛ روشن است که این هم چیزی دربارهٔ x' بیان نمی‌کند.

سعی می‌کنیم x' را به‌صورت حد زیر پیدا کنیم:

$$x'=\text{حد}\ \frac{y}{\operatorname{tg} y^*}$$، وقتی که y به‌صفر می‌گراید.

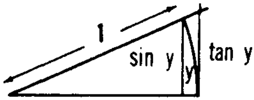
برای محاسبهٔ این حد، دنبالهٔ y_1، y_2، y_3، ... از مقادیر y را که به‌صفر نزدیك می‌شوند، انتخاب‌می‌کنیم (درشکل ۱۳۰۳ از ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ... استفاده کردیم) و سپس دنبالهٔ

$$\frac{y_1}{\operatorname{tg} y_1^*},\quad \frac{y_2}{\operatorname{tg} y_2^*},\quad \frac{y_3}{\operatorname{tg} y_3^*},\ \dots$$

را بررسی می‌کنیم. وقتی واحد قائمه برای اندازه‌گیری زاویه انتخاب شود، این حد مساوی $\pi/2$ و با واحد رادیان این حد مساوی ۱ می‌شود. (دلیل این اختلاف این است که π رادیان مساوی ۲ قائمه است.)

مسأله

۰۱۱.۳ وقتی y برحسب رادیان باشد شکل ۱۵.۳ عملا اندازه‌های y، $\sin y$، $\operatorname{tg} y$ را نسبت به‌هم بیان می‌کند. آیا به‌ازای مقادیر کوچك y می‌توانید رابطهٔ $y/\operatorname{tg} y$ را با ۱ پیدا کنید؟



شکل ۱۵.۳

۵.۳ حدها

دنباله‌ای از اعداد $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... دارای حد x است هرگاه دنبالهٔ اعداد $(x_۱-x)$، $(x_۲-x)$، $(x_۳-x)$، ... به‌صفر میل کند*. مثلا دنبالهٔ

$$۳,\quad \frac{۵}{۲},\quad \frac{۷}{۳},\quad \frac{۹}{۴},\ \ldots \qquad \text{(الف}$$

دارای حد ۲ است. زیرا دنبالهٔ

$$۳-۲=۱,\quad \frac{۵}{۲}-۲=\frac{۱}{۲},\quad \frac{۷}{۳}-۲=\frac{۱}{۳},\quad \frac{۹}{۴}-۲=\frac{۱}{۴},\ \ldots$$

به‌صفر میل می‌کند. به‌طور مشابهی دنبالهٔ

$$\frac{۱}{۳},\quad ۳,\quad \frac{۵}{۷},\quad \frac{۷}{۵},\quad \frac{۹}{۱۱},\quad \frac{۱۱}{۹},\ \ldots \qquad \text{(ب}$$

دارای حد ۱ است زیرا دنبالهٔ

$$\frac{-۲}{۳},\quad ۲,\quad \frac{-۲}{۷},\quad \frac{۲}{۵},\quad \frac{-۲}{۱۱},\quad \frac{۲}{۹},\ \ldots$$

به‌صفر میل می‌کند. مثالی مشکلتر که نیاز به‌بینش در ماهیت دنباله دارد و مستلزم قدری محاسبه است، دنبالهٔ

---

* عبارت «یك دنباله از اعداد به‌صفر میل کند» به‌زودی تعریف خواهد شد.

MATH75.IR

$$\text{پ)}\quad \frac{۳}{۲},\ \frac{۷}{۵},\ \frac{۱۷}{۱۲},\ \frac{۴۱}{۲۹},\ \frac{۹۹}{۷۰},\ \ldots;$$

می‌باشد که حد آن $\sqrt{۲}$ است. درك این واقعیت که دنبالهٔ

$$\text{ت)}\quad ۰٫۱,\quad ۰٫۱۰۲,\quad ۰٫۱۰۲۰۰۱,\quad ۰٫۱۰۲۰۰۱۰۰۰۲,$$

$$۰٫۱۰۲۰۰۱۰۰۰۲۰۰۰۰۱,\ \ldots$$

حد دارد مشکلتر است، اما نیازمند هیچگونه محاسبه‌ای نیست. این حد توسط خود دنباله تعریف می‌شود، وگرنه برایمان ناشناخته است!

برای تکمیل تعریف پیش، به‌عبارتی صوری نیاز داریم تا بگوید منظور از یك دنباله میل می کند به‌صفر چیست یا هم‌ارز آن، یك دنباله دارای حد صفر است، چه‌معنی دارد. در اینجا به‌صراحت استفاده از بینهایت دیده می‌شود.

تعریف. یك دنباله از اعداد مثبت

$$e_{۱},\quad e_{۲},\quad e_{۳},\ \ldots$$

حد صفر دارد (میل می‌کند به‌صفر) اگـر صفر تنها عدد نامنفی باشد که از بی‌نهایت جملهٔ دنباله کوچکتر است.

درحالت کلی یك دنباله بـه صفر میل می کند هر گاه وقتی همهٔ جمله‌های آن مثبت شود میل کند به‌صفر.

معمولا این مطلب به‌صورت زیر بیان می‌شود:

تعریف هم‌ارز. یك دنباله از اعـداد حد صفر دارد هر گـاه بـه‌ازای هر کسر به‌صورت $۱/n$، یعنی

$$۱,\quad \frac{۱}{۲},\quad \frac{۱}{۳},\quad \frac{۱}{۴},\ \ldots,$$

تعداد جمله‌هـایی از دنباله کـه از $۱/n$ بزرگترند حداکثر بـه‌تعداد متناهی باشد (علامت جمله‌ها مهم نیست).

بالاخره سودمندی نظریه‌ای از حدها وابسته به‌سه عامل است، کـه به‌ترتیب منطقی عبارت‌اند از i) تعریف دقیق حد یك‌دنباله؛ ii) درهر کاربرد، برهانی‌برای وجود حد، و iii) روشی برای محاسبهٔ حد؛ این موضوع غالباً شامل طرحی برای تقریبات متوالی است که بـا یك برآورد خطا همراه است. در میان مثالهای پیش،

الف) و ب)، iii) را چنان‌خوب برمی‌آورندکه i) و ii) زایدند، درچنین‌حالتهایی ایدهٔ حد تقریباً خود ـ آشکار است. مثال پ) کمی مشکلتر است؛ در این مورد، تعریف را داریم، $\sqrt{2}$ را می‌شناسیم و دنباله‌ای از تقریبها ارائه شده است اما باید برآوردی از خطا بـه‌دست آوریم. بدون چنین برآوردهـایی نمی‌دانیم منظور از «تقریب کردن» چیست. مشکل مثال ت) از نوع دیگری است. در این مثال، شکل تقریب کردن ماهیت خطا را نشان می‌دهد، اما سؤال بر سر وجود است: آیا عددی که تقریب‌زده شده است وجود دارد؟ بخشهای بعد مفهوم و سودمندی این‌سؤال را نشان خواهند داد.

چند قضیهٔ مهم در یک نظریهٔ حدود را بـه‌دلیل اینکه به زودی بـه‌آنها نیاز خواهیم داشت برگزیده‌ایم که به‌شرح زیرند:

قضیهٔ ۳.۱۰ اگر x_1، x_2، x_3، ... دارای حد L باشد آنگاه هر زیردنبالهٔ آن نیز دارای همین حد است.

مثلاً، x_2، x_5، x_9، x_{14}، ... دارای حد L است.

قضیهٔ ۳.۲۰ اگر x_1، x_2، x_3، ... دارای حد L باشد، دراین‌صورت $a+x_1$، $a+x_2$، $a+x_3$، ... دارای حد $a+L$ است.

مثلاً، $-3+x_1$، $-3+x_2$، $-3+x_3$، ... دارای حد $-3+L$ است.

قضیهٔ ۳.۳۰ اگر x_1، x_2، x_3، ... دارای حد L بـاشد، آنگاه kx_1، kx_2، kx_3، ... دارای حد kL است.

مثلاً، $2x_1$، $2x_2$، $2x_3$، ... دارای حد $2L$ است.

قضیهٔ ۳.۴۰ اگر x_1، x_2، x_3، ... دارای حد L باشد، آنگاه x_1^2، x_2^2، x_3^2، ... دارای حد L^2 است.

مسأله

۳.۱۲۰ قضیه‌های بالا را ثابت کنید. درحالت کلی نشان دهید کـه به‌ازای هر عدد

MATH75.IR

صحیح n، دنبالهٔ x_1^n، x_2^n، x_3^n، ... دارای حد L^n است. [این کار تقریباً مشکل است وبه‌کارگیری مراحل زیر توصیه می‌شود. فرض کنید x_1، x_2، x_3، ... دنباله‌ای است با حد L، و y_1، y_2، y_3،... دنباله‌ای است با حد M. ثابت کنید دنبالهٔ حاصلضر بهای x_1y_1، x_2y_2، x_3y_3،... دارای حد LM است، یعنی حدحاصلضربها برابرحاصلضرب حدهاست. این‌هم مشکل‌است و باید تکنیکی ازنوع زیر را مورد استفاده قرار داد:

$$LM-xy=LM-xM+xM-xy=(L-x)M+x(M-y).]$$

۶.۳ چگونه این واقعیت که حد وجود دارد می‌تواند به تعیین آن کمك کند

روشن نیست که دنبالهٔ اعداد

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2+\sqrt{2}},\quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \dots$$

حد دارد و خواننده ممکن است بخواهد با محاسبهٔ تعدادی از جمله‌ها (می‌توان از خم $y=x^2$ به‌شرط آنکه خوب رسم شده باشد بـه‌عنوان جدول ریشه‌های دوم و از یك خط‌کش برای اندازه‌گیری و انتقال طولها استفاده‌کرد) پیش‌بینی‌کند کـه این حد چه‌می‌تواند باشد.

اکنون صرفاً می‌پذیریم که دنباله دارای حد است، بیایید این‌حد را x^* بنامیم و به جستجوی آن بپردازیم. اگـر هرجمله از دنبالهٔ مفروض را مربع کنیم، دنبالهٔ جدیدی به‌دست خواهیم آورد که بنا بر قضیهٔ ۴.۳، باید حد آن x^{*2} باشد. اما آنچه که عملا به‌دست می‌آوریم دنبالهٔ

$$2,\quad 2+\sqrt{2},\quad 2+\sqrt{2+\sqrt{2}},\quad 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}},\ \dots$$

است، که هریك از جمله‌های آن (بعداز اولی) ۲ واحد بیشتر از جمله‌ای ازدنبالهٔ اصلی‌است. روشن‌است که حد دنبالهٔ جدید x^*+2 است. بنابراین اکنون می‌دانیم

$$x^{*2}=x^*+2$$

و تنها دو عدد ۲ و ۱ـــ وجود دارند که در این معادله صدق می‌کنند. بنابراین x^* برابر۲ یا ۱ــ است. چون‌همهٔ جمله‌های‌دنباله مثبت‌اند، ۱ــ جواب غیرقابل‌قبولی است و درنتیجه $x^*=2$.

۷.۳ حدهایی که وجود ندارند

گرچه می‌دانیم دنبالهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ... حد ندارد با این فرض نامعقول کـه دنباله دارای حد است شروع می کنیم واین «حد» را x می‌نامیم. اگر هریك‌از جمله‌های دنباله‌را دوبرابر کنیم، دنبالهٔ جدیدی به‌دست خواهیم‌آورد که حدش باید $2x$ باشد. اما دنبالهٔ جدید زیردنباله‌ای از دنبالهٔ اصلی است و بنابراین باید حدی برابر بـا حد دنبالهٔ اصلی داشته باشد (قضیهٔ ۱.۳ را ببینید). بنابراین، نتیجه می‌شود که

$$x=2x$$

اما تنها صفر عددی با این ویژگی است. بنابراین $x=0$. می‌بینیم که ثابت‌کرده‌ایم دنبالهٔ اعداد طبیعی میل‌می کند به‌صفر!

البته آنچه که ثابت‌کرده‌ایم (توسط برهان خلف) این است که دنبالهٔ مزبور حد ندارد.

حال فرض‌کنید r یك عدد باشد و دنبالهٔ

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \dots$$

را درنظر بگیرید. بیایید قبول‌کنیم‌که این‌دنباله دارای حد R است. چون دنباله‌ای کـه از مربع کردن هـرجملهٔ دنباله بـه‌دست می‌آید، زیـر دنبالـه‌ای ازآن است، نتیجه می‌شود که

$$R=R^2$$

و بنابراین $R=0$ یا $R=1$. هر دو حالت ممکن هستند. اما امکان مهم دیگری نیز وجود دارد، امکان اینکه مـا اشتباه می کنیم. دنباله ممکن نیست حـد داشته باشد. درواقع اگر r ازلحاظ عددی بزرگتر از ۱ باشد، حد وجود ندارد. همچنین‌است اگر $r=-1$.

مسأله

۰۱۳.۳ (الف) نشان دهید، اگـر $-1<r<1$، حد r، r^2، r^3، ... صفر و اگـر $r=1$، حد ۱ است.

(ب) دربخش ۹.۲ نشان‌دادیم که چگونه ثابت می‌شود $a/(1-r)$ دستوری برای مجموع سری‌هندسی نامتناهی $a+ar+ar^2+\dots$ است، که درآن r، نسبت

MATH75.IR

مشترك گویا و ازلحاظ عددی کوچکتر از ۱/۲ است. آیا حالا می‌توانید ثابت کنید که این دستور وقتی که r، نسبت مشترك گنگ و ازلحاظ عددی کوچکتر از ۱ باشد، بازهم درست است؟ راهنمایی: از اتحاد

$$۱-x^n=(۱-x)(۱+x+x^۲+\cdots+x^{n-۱})$$

استفاده کنید.

۸.۳ دستگاه اعداد حقیقی و قضیهٔ بولتسانو[1] ـ وایرشتراس[2]

در دستگاه اعداد حقیقی که به‌زودی شرح داده‌می‌شود، قضیهٔ بنیادی زیر برموضوع حد نفوذ دارد.

قضیهٔ بولتسانو ـ وایرشتراس. اگر اعداد $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$،... یك دنبالهٔ صعودی تشکیل دهند، و اگرعدد B بزرگتر ازهمهٔ اعداد دنباله وجود داشته‌باشد، دراین‌صورت عدد L وجود دارد به‌قسمی که L حد دنباله است.

مثلا این قضیه ما را مطمئن می‌کند که دنبالهٔ ت)

$$۰٫۱,\ ۰٫۱۰۲,\ ۰٫۱۰۲۰۰۱,\ ۰٫۱۰۲۰۰۱۰۰۰۲,\ \ldots$$

مذکور در بند ۵.۳ دارای حد است. B را می‌توانیم هر عدد بزرگتراز ۰٫۲، یا ۰٫۱۱ یا ۰٫۱۰۳ وغیره اختیار کنیم. این‌قضیه صرفاً می‌خواهد که یك‌عدد بزرگتر از همهٔ اعداد دنباله پیدا کنیم. این‌شرط دنباله‌هایی مانند ۱، ۲، ۳، ۴، ... (که‌البته حد ندارند) را کنار می‌گذارد. این قضیه هیچ‌چیز دربارهٔ عدد L به‌ما نمی‌گوید؛ مثلا ممکن است اعداد x_n همگی گویا باشند ولی L ممکن است گویا یا گنگ باشد.

امروزه ریاضیدانان با روشهای هم‌ارز متعدد و با به‌کاربردن تعریفها واصول موضوع ضروری مختلفی دستگاه اعداد حقیقی‌را می‌سازند. دربعضی از اینها اثبات اصل بولتسانو-وایرشتراس مشکل ودربعضی دیگر آسان است. در واقع برای‌ساختن دستگاه اعداد حقیقی جزئیاتی که باید درنظر گرفته شود آن‌قدر زیاد است که اگر اثبات یك‌قضیهٔ بنیادی دریکی‌آسان باشد اثبات قضیهٔ بنیادی دیگری مشکل‌می‌شود. مثلا می‌توان دستگاه اعداد حقیقی را کوچکترین دستگاه اعدادی تعریف کرد که

---

1. Bolzano   2. Weierstrass

شامل همهٔ اعداد گویاست و قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس نیز در آن درست است. حال بی‌درنگ آشکار می‌شود که در این دستگاه این قضیه نیازی به‌اثبات ندارد. توجه کنید که قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس در دستگاهی که تنها شامل اعداد گویا باشد نادرست است.

طرحی که از دیدگاههای دیگر بیشتر رضایت‌بخش است چنین است: توافق می‌کنیم که همهٔ اعشاریهای مختوم را بایك رشتهٔ نامتناهی از صفرها بنویسیم وسپس دستگاه اعداد حقیقی را به‌عنوان تمامیت همهٔ بسطهای اعشاری نامتناهی تعریف کنیم؛ این دستگاه اصالتاً شامل اعشاریهای نامختوم می‌شود. اگر این کار را انجام دهیم، باید قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس را ثابت کنیم. همین‌طور باید نشان دهیم که یك دستگاه اعداد داریم. یعنی، باید نشان دهیم که چگونه اعشاریهای نامتناهی‌را جمع می‌کنیم، چگونه آنها را درهم ضرب می‌کنیم، و همهٔ قواعد متعارف ناظر بر این اعمال را ثابت کنیم، این‌هم کار زیادی را می‌طلبد.

قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس تا سال ۱۸۶۵، که حسابان بیش‌از دویست سال عمر داشت، ثابت نشده بود؛ ممکن است کسی در شگفت باشد که پیش‌از آن ریاضیدانان دربارهٔ وجود حد چه می‌کردند.

۹.۳ دو عدد اصلی بینهایت مهم

مجموعهٔ اعداد صحیح و مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی، دو عدد اصلی بینهایت با بزرگیهای مختلف را نمایش می‌دهند که به‌ترتیب الف صفر* و توان پیوستار گفته می‌شوند و با $\aleph_0$ و c نشان داده می‌شوند. این دو عدد اصلی بینهایت، مهم هستند. تنها عدهٔ کمی از ریاضیدانان تاکنون به‌نحوی صریح بینهایتهای دیگری را بررسی کرده‌اند. با این‌حال در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات نوین که در سطح دانشگاه مطرح‌اند (جبرمجرد، نظریهٔ گروههای آبلی، جبرهمولوژیك، و همین‌طور توپولوژی عمومی) گرایش به‌طرف قضیه‌ها و برهانهایی است که در دستگاههای بزرگ که عدد اصلی آنها مشخص نیست معتبرند.

برای نسل پیش صحت منطقی چنین قضیه‌هایی موضوعی سخت بحث‌انگیز بود. پیش‌ازکار کانتور در دههٔ ۱۸۷۰، این امکان‌که مجموعه‌ای نامتناهی، بینهایتی بزرگ‌تر از سایر این نوع مجموعه‌ها باشد، جدی گرفته نمی‌شد. با وجود این،

---

* الف ($\aleph$) اولین حرف از الفبای عبری است.

MATH75.IR

تعریفهایی که کانتور پذیرفته و برهانهایی که ابداع کرده است خیلی ساده‌اند و برای درك آنها تقریباً به‌هیچ نوع آموزش خاص ریاضی نیاز نیست.

تعریف. گفته می‌شود دو مجموعه (خواه متناهی یا نامتناهی باشند) یك عدد اصلی را نمایش می‌دهند اگر عضوهای یکی را بتوان با عضوهای مجموعهٔ دیگر، طوری جفت کرد که در هیچ یك از مجموعه‌ها عضوی اضافه نماند.

مثلا اعداد صحیح زوج و اعداد صحیح فرد را به‌روش زیر می‌توان جفت کرد:

$$(۱, ۲), (۳, ۴), (۵, ۶), \ldots, (۲n-۱, ۲n), \ldots$$

و معلوم می‌کند که از هر کدام درست به‌اندازهٔ دیگری عضو وجود دارد. یك چنین جفت‌سازی را یك تناظر یك به‌یك می‌نامند.

مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح را، مثلا با فرمول

$$N = ۲n - ۱$$

می‌توان در یك تناظر یك به‌یك با مجموعهٔ اعداد صحیح فرد قرار داد که در آن n در مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح تغییر می‌کند و عدد فرد نظیر آن، N است. بنا براین مجموعهٔ اعداد فرد (و همین‌طور مجموعهٔ اعداد زوج) توان اصلی مجموعهٔ اعداد صحیح یعنی، $\aleph_0$ را دارد.

بسیاری از مجموعه‌ها مثل مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا که ظاهراً متعددتر از اعداد صحیح هستند، نیز دارای توان $\aleph_0$اند. به‌آسانی دیده می‌شود که اعداد گویا را می‌توان بدون کم‌وکاست و یا تکرار دریك دنبالهٔ ساده مرتب کرد. برای نمونه، ابتدا همهٔ اعداد گویای a/b که درآنها $a+b=۲$ است (یعنی ۱/۱) را در یك گروه قرارمی‌دهیم، سپس این کار را برای همهٔ آنهایی که درمورد آنها $a+b=۳$ است (یعنی ۱/۲، ۲/۱)، انجام می‌دهیم و الی آخر. سپس اعداد را در هر گروه براساس بزرگی صورتشان مرتب می‌کنیم، داریم:

$$\frac{۱}{۱}, \quad \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۱}, \quad \frac{۱}{۳}, \frac{۳}{۱}, \quad \frac{۱}{۴}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۱}, \quad \frac{۱}{۵}, \frac{۵}{۱}, \quad \frac{۱}{۶}, \frac{۲}{۵}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۳}, \frac{۵}{۲}, \frac{۶}{۱},$$ الی آخر.

تنها کار پر دردسر در اینجا این است که بایستی از تکرار کسرهای (هم‌ارز) اجتناب کرد تا با شرط برقراری تناظریك به‌یك وفق دهد مثلا ۲/۲ را ازگروه سوم حذف کرده‌ایم، زیرا هم‌ارز ۱/۱ است که پیشتر درگروه اول ظاهر شده است.

این‌واقعیت که مجموعهٔ اعدادگویا دارای توان‌اصلی $\aleph_0$ است حالت خاصی از قضیهٔ زیر است:

قضیه. گیریم S مجموعه‌ای از مجموعه‌های S_1، S_2، S_3، ... است. اگر S متناهی یا دارای توان $\aleph_0$ باشد و اگر همهٔ مجموعه‌های S_1، S_2، S_3، ... دارای توان $\aleph_0$ باشند دراین‌صورت مجموعهٔ همهٔ اشیاء متعلق به‌این مجموعه‌ها نیز دارای توان $\aleph_0$ است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت معادلات زیر نیز نوشت:

$$1\times\aleph_0=\aleph_0, \qquad 2\times\aleph_0=\aleph_0$$

$$3\times\aleph_0=\aleph_0, \cdots, \ \aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0^2=\aleph_0$$

برهان ساده است. بنابر فرض، هرمجموعهٔ S_1،S_2،S_3،... را می‌توان در یك دنباله مرتب کرد. بیایید iامین شیٔ در S_j را با $x(i, j)$ نشان دهیم. مثلا $x(2, 3)$ دومین شیٔ را در سومین دنباله S_3 نشان می‌دهد. حالا تنها تعدادی متناهی از جمله‌های $x(i, j)$ وجود دارد که درمورد آنها $i+j$ مساوی‌عدد a است. بنابراین می‌توانیم جمله‌هایی راکه درآنها $i+j=2$ دریك دنباله، و درپی آن دنبالهٔ همهٔ جمله‌هایی که در آنها $i+j=3$ و در پی آن دنبالهٔ همهٔ جمله‌هایی که در آنها $i+j=4$ و غیره، مرتب کنیم. در این‌صورت دنباله‌ای به‌دست می‌آوریم که شامل هر کدام از اشیایی‌است که درهر S_j دست‌کم یك‌بار ظاهرشده‌است. باکنارگذاشتن تکراریها دنباله‌ای به‌دست می‌آید که هر یك از اشیاء را دقیقاً یك بار شامل است.

هنگامی که مجموعه‌ای‌از اشیاء به‌این‌طریق درتناظر یك‌به‌یك با اعدادصحیح قرار می‌گیرد، می‌گویند مجموعه شمرده‌شده است. مجموعه‌ای را که بتوان شمرد شمارا می‌نامند. قضیهٔ پیش، بیان می‌کندکه تعدادی متناهی یا نامتناهی شمارا از بینهایتهای‌شمارا نیزشماراست. مجموعه‌ای‌راکه نتوان به‌این‌طریق درتناظریك‌به‌یك با اعداد صحیح قرار داد، ناشمارا می‌نامند.

نشان دادیم که چگونه اعداد گویا را بشماریم، گام بعد شمردن اعدادحقیقی است، که غیرممکن است. کانتور قضیهٔ تحسین‌برانگیز زیر را ثابت‌کرد:

قضیه. دریك تناظر یك‌به‌یك مفروض بین‌اعداد صحیح ومجموعه‌ای ازاعداد حقیقی، همواره‌امکان‌داردعددی حقیقی پیداکنیم‌که‌دراین‌تناظر به‌حساب نیامده‌باشد.

نتیجه. مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی ناشماراست.

برهان ساده است؛ اجازه دهید ابتدا به S، یك زیرمجموعهٔ سادهٔ اعدادحقیقی توجه‌کنیم: S معرف مجموعهٔ همهٔ اعدادحقیقی بین ۰ و ۱ است که دربسط اعشاری

نامختوم آنها فقط از دو رقم، مثلا ۱ و ۲ استفاده شده است.

بیایید فرض کنیم تناظری یك‌به‌یك بین اعداد صحیح و عناصر S برقرار کرده‌ایم؛ به‌این‌معنی که می‌توانیم اعداد موجود در S را بشماریم، یعنی می‌توانیم فهرستی تهیه کنیم و به‌اولین، دومین، ... عدد در این فهرست مراجعه کنیم. یك عدد N متعلق به S خواهیم ساخت ونشان خواهیم داد که N دراین فهرست نیست. این، ثابت می کند که زیرمجموعهٔ S از اعداد حقیقی وبنابراین کل مجموعهٔ اعداد حقیقی شمارا نیست.

برای ساختن N، اولین رقم آن‌را با توجه به‌اولین عدد فهرست انتخاب می کنیم. اگر اولین رقم [اعشار] اولین عدد فهرست ۱ باشد آنگاه اولین رقم N را ۲ قرار می‌دهیم و به‌عکس. به طور مشابه، دومین رقم N را متفاوت با دومین رقم، از دومین عدد فهرست‌انتخاب می کنیم. در ادامهٔ این روش، همواره رقم kام N را متفاوت با رقم kام، از kامین عدد فهرست انتخاب می کنیم. روشن است که عدد N که این‌چنین ساخته می‌شود با اولین عدد فهرست (به‌دلیل اولین رقمشان) با دومین عدد فهرست(به‌دلیل دومین رقمشان)، و به‌طورکلی با kامین عدد فهرست (به‌دلیل kامین رقمشان) فرق می کند، و این‌هم به‌ازای همهٔ kها درست است. بنابراین عدد حقیقی N عضو S است (زیرا تنها شامل ارقام ۱ و ۲ است) اما در تناظر یك‌به‌یك ما به‌حساب نیامده است. این، برهان را تمام می کند.

اگر دنباله‌ای از اعداد حقیقی را در نظر می گرفتیم و با به کاربردن همین روش عددی به‌دست‌می‌آوردیم که در دنباله نبود، این برهان شگفت‌آور واضحتر می‌شد. استفاده از این روش، که اساس برهان کانتور است، شیوهٔ قطری کانتور نامیده می‌شود و روشی متعارف برای ساختن عددی است که با هریك از اعداد موجود دریك دنبالهٔ نامتناهی اعداد متفاوت باشد.

مسأله

۱۴۰۳. در بالا نشان دادیم که چگونه اعدادگویا را می‌شمارند. چون اعدادگویا اعدادی حقیقی نیز هستند، ممکن است در برهان قبلی به‌صورت مجموعهٔ S عمل کنند. دراین‌صورت روش کانتور عددی را به‌دست می‌دهد که گویا نیست. با به‌دست آوردن ده رقم یا بیشتر از ارقام عدد N و استفاده از شق دیگری از آنچه در بالا اشاره شد دراین‌استدلال تأمل کنید. (هرعددگویا در فهرست صفحهٔ ۶۴ را به‌عددی اعشاری نامختوم تبدیل کنید. برای این کار در اعداد اعشاری مختوم یا به‌جای بقیهٔ

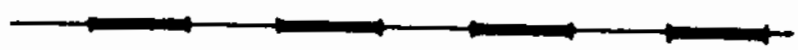
MATH75.IR

ارقام، صفر درنظر بگیرید و یا آنها را به‌اعدادی که به‌رشته‌ای از ۹ ختم می‌شوند تبدیل کنید.)

۱۰.۳ استفاده از ناشماراها

تمایز بین شمارا و ناشمارابودن یکی از سنگ بناهای آنالیز و توپولوژی است. در اینجا حقایقی را بدون برهان می‌آوریم که روشهایی را برای تشخیص شمارا یا ناشمارابودن مجموعه‌ای مفروض نشان می‌دهند.

نخست، می‌توان پاره‌خطهایی هم‌اندازه بـه‌تعداد بینهایتی شمارا بر یك خط درنظر گرفت کـه هیچ دوتایشان یکدیگر را تلاقـی نکنند، شکل ۱۶.۳ را ببینید.



شکل ۱۶.۳

می‌توان دید که بر پاره‌خط مفروضی بـه‌طول L چگونه بینهایت شمارایی پاره‌خط می‌توان ساخت که هیچ دوتایشان یکدیگر را تلاقی نکنند (شکل ۱۷.۳). البته در

شکل ۱۷.۳

این‌حالت اخیر، تنها تعدادی متناهی از آنها می‌توانند ازکسر واحد از پیش‌داده‌شدهٔ $1/n$ بزرگتر باشند. به‌طور دقیقتر تعداد پاره‌خطهایی کـه طول هریك حداقل $1/n$ است باید کمتر از nL باشد.

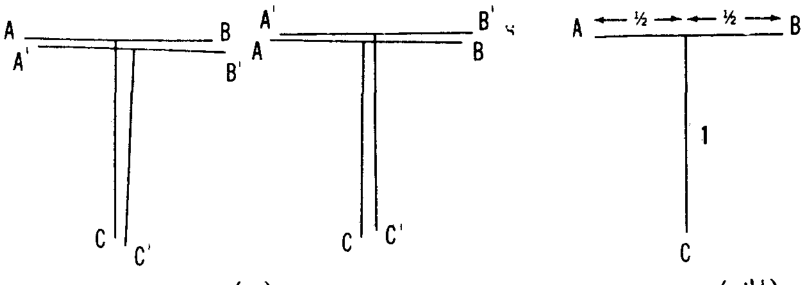
به‌عکس، وقتی تعداد پاره‌خطهای واقع بر یك خط بینهایتی ناشمارا بـاشد، بعضی ازآنها بناچار بریکدیگر می‌افتند. زیرا هرپاره‌خط شامل چند نقطهٔ گویاست. (نقطهٔ گویا نقطه‌ای است که فاصله‌اش از نقطهٔ ثابت ۰ عددی است گویـا.) بعضی‌از این نقاط گویا باید بـه‌بیش‌از یك پاره‌خط متعلق باشند، درغیر این‌صورت مجموعهٔ پاره‌خطها را می‌توان شمرد، که خلاف فرض است. همین استدلال نشان می‌دهد که درهر مجموعهٔ ناشمارایی از پاره‌خطهای واقع بریك‌خط، تعداد ناشمارایی ازآنها باید روی‌هـم بیفتند و تعداد نـاشمارایی باید از یك کسر واحدی بزرگتر بـاشند. استدلالهای بیشتری از این نوع در انتهای فصل ۶ آمده است.

شکل سرگرم‌کننده‌ای ازهمین‌پدیده که عملا دربعضی کاربردهای توپولوژیکی اهمیت دارد، بـه‌قرار زیر است: فرض‌کنیم حروف الفبای انگلیسی را بـا خمهای

ریاضی نمایش دهیم، که هیچ نوع ضخامتی ندارند. همچنین فرض می‌کنیم حروف کاملا ساده‌اند، یعنی خطوط اضافی یا پایه ندارند. در این‌صورت هرکس می‌تواند بینهایت از هریك از حروف را بر ورقهٔ کاغذی به‌هر اندازه بنویسد. هرکس می‌تواند بینهایتی ناشمارا از حروفی مثل L یا C یا I یا M یا N را دریك صفحه کاغذ جا دهد، اما با کمال تعجب ممکن‌نیست که بینهایتی‌ناشمارا از T ها یا A ها یا B ها یا P ها بتواند به‌قسمی بنویسد که هیچ دوحرفی ازآنها بخشی مشترك نداشته باشند.

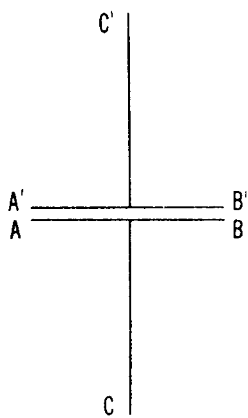
مسأله

۱۵.۳• آیا اکنون می‌توانید حروف الفبا را بر اساس آنچه که گفتیم رده‌بندی کنید وماهیت توپولوژیك این‌واقعیت را به‌دست آورید؟ (شکلهای ۱۸.۳، ۱۹.۳ و ۲۰.۳ را ببینید.)



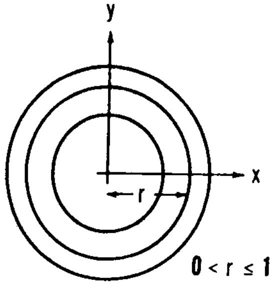
(ب) (الف)

شکل ۱۸.۳

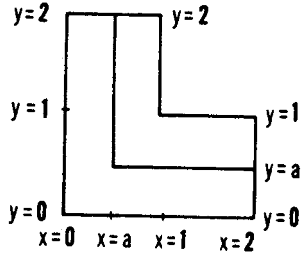


شکل ۱۹.۳

MATH75.IR



(ب) Oهای ناشمارا



(الف) Lهای ناشمارا

شکل ۳.۰۲

MATH75.IR

فصل چهار

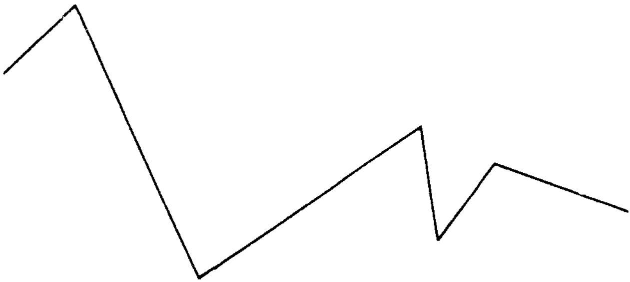
زیگزاگها: به‌سوی حد اگر حد وجود داشته باشد

در این فصل به‌مفهوم حد دنباله‌ای خواهیم پرداخت. این مفهوم بر روی خط، یا در دستگاه اعداد حقیقی و یا در صفحه تقریباً یکسان است. ما حالت صفحه را بررسی خواهیم کرد، زیرا هم شامل گونه‌ای ازوضعیتهای مهیجتر است و هم‌می‌توان تصویرهای روشنگری رسم کرد. ابزار اصلی ما برای کاوش و ارائهٔ مفهوم حد، زیگزاگ (دندانه‌ای) خواهد بود و آن دنباله‌ای نامتناهی از پاره‌خطهاست که مسیر چندضلعی ساده‌ای را تشکیل می‌دهند و همچون نمایش قراردادی آذرخش به‌نظر می‌آید؛ شکل ۱.۴ را ببینید. تصویر یك آذرخش هدف مشخصی را به ذهن القا می‌کند و این رهیافت خوبی برای ایدهٔ حد است. اگر به‌یاد بیاوریم که حد پیش‌بینی‌شده گاهی وجود ندارد و آنگاه تشخیص دهیم که همین موضوع برای هدفهای فرضی نیز درست است، نکتهٔ دیگری برای تشبیه خواهیم یافت.

خواهیم‌دید، هنگامی که هدف یك‌زیگزاگ به‌روشنی نشان شده باشد، همیشه نقطه‌ای از صفحه خواهد بود که نقطهٔ حدی دنبالهٔ رأسها (نقاط گوشه)ی زیگزاگ است.

زیگزاگها مخصوصاً در رابطه با مفهوم طول، شکلهای جالبی هستند.

MATH75.IR



شکل ۱.۴

روشن است که زیگزاگ شکل ۲.۴ هدفی ندارد، به‌علاوه اگر به‌طور نامحدود ادامه یابد، به‌طور نامتناهی طویل است. زیگزاگ شکل ۳.۴ از P_1 شروع می‌شود؛ به‌ازای هر n متناهی، قسمت سمت چپ یعنی $P_1P_2 \dots P_n$ متناهی است (سه نقطهٔ وسط شکل درست مبین آن است که شکل دقیق آن در اینجا مهم نیست). سه‌نقطهٔ سمت راست به‌معنای آن است که زیگزاگ بی‌نهایت رأس دارد. این زیگزاگ ترکیبی نامتناهی است؛ به‌ازای هر $n = 1, 2, 3, \dots$، یك مسیر $P_1P_2 \dots P_n$ وجود دارد که از رأس P_1 شروع و به‌رأس P_n ختم می‌شود و طول این مسیر (که آن‌را L_n می‌نامیم) مجموع طولهای پاره‌خطهای سازندهٔ آن است. پس

$$L_n = P_1P_2 + P_2P_3 + \dots + P_{n-1}P_n$$

اکنون تعریف زیر را ارائه می‌کنیم:

تعریف. طول زیگزاگ $P_1P_2P_3 \dots$ حد طولهای L_n است وقتی n به‌طور نامحدود افزایش یابد، به‌شرطی که این‌حد وجود داشته باشد. به‌طور نمادی،

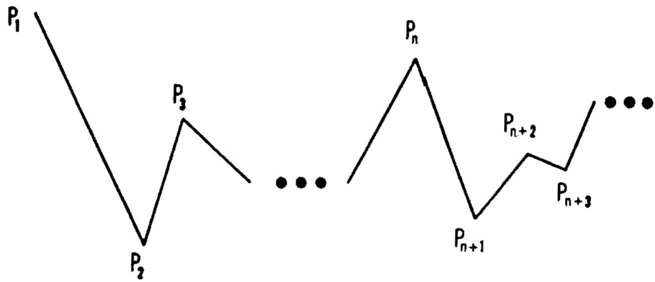
$$L = \text{طول}(P_1P_2P_3 \dots) = \underset{n \to \infty}{\text{حد}} (\text{طول } P_1P_2P_3 \dots P_n);$$

یا به‌صورت بازهم مختصرتر،

$$L = \underset{n \to \infty}{\text{حد}} L_n$$

شکل ۲.۴

MATH75.IR



شکل ۳.۴

مسأله

۴.۱۰ کدام عبارت توصیفی ضروری به نظرمی رسدکه حذف شده باشد؟ و بنابراین، این آخرین عبارت نمادی را چگونه باید خواند؟

در حالت کلی، همچنان که از تعریف این حد دیده می‌شود، برای محاسبهٔ آن باید یك سری نامتناهی را جمع کنیم. پیشتر تمرینهایی در این رابطه داشته‌ایم.

نخستین مثالهایی که به‌دنبال خواهند آمد اساساً در رابطه با طول هستند. نقطهٔ T، مبدأ مختصات وهدف مسلم زیگزاگ، درحال‌حاضر مهم به‌حساب نمی‌آید.

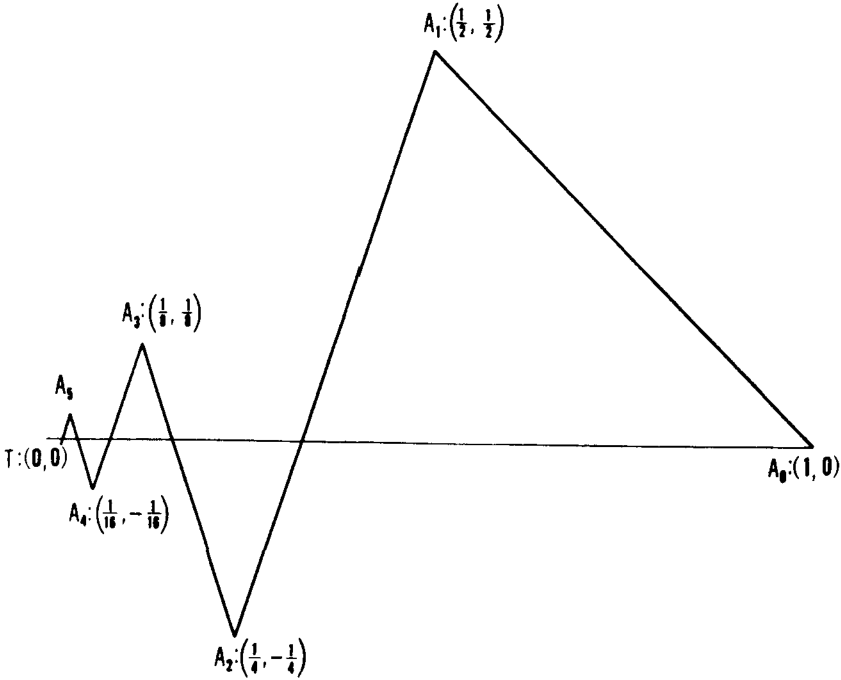
مثال ۱. نخستین زیگزاگ ازپاره‌خطهای A_0A_1، A_1A_2، A_2A_3، ... تشکیل می‌شود. نقاط A_n، ... , ۳ , ۲ , ۱ $= n$ متناوباً بالا و پایین محور xها هستند؛ طول A_n، $1/2^n$ و عرض آن نیز صرف نظر از علامت، همان است. شکل ۴.۴ را ببینید.

$$A_n \text{ نقطهٔ } \left(\frac{1}{2^n}, \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) \text{ است،} \quad n=1, 2, 3, \ldots$$

زیگزاگ ... $A_0A_1A_2$ شبیه یك نیمخط یا یك شعاع و همین‌طور شبیه پاره‌خطی است درست با یك انتها (متناظر با A_0) انتهای دیگرش حذف شده است. چنین پاره‌خطهایی به‌کرات درکارهای‌ریاضی ظاهرمی‌شوند ونیمباز نام دارند؛ پاره‌خطی راکه هردو انتهایش حذف‌شده باشند، باز و پاره‌خطی‌که هردوانتهایش برجا باشند بسته می‌نامند. توجه شود تا هرجا که زیگزاگ ادامه یابد، باز نقطهٔ T را در بر نمی‌گیرد (اگرچه آشکارا به‌آن نزدیك می‌شود).

خواننده ممکن است تعجب کندکه این‌زیگزاگ نامتناهی طولی متناهی‌دارد.

MATH75.IR



شکل ۴.۴

به‌آسانی دیده می‌شودکه طول هرمسیر $A_۰A_۱ \dots A_n$ درامتداد این زیگزاگ کمتر از مجموع زیر است که خود از ۳ کمتر است:

$$۱+۲\times\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+\frac{۱}{۲^n}\right)$$

این مجموع را چنین به‌دست می‌آوریم که هر پاره‌خط زیگزاگ را با مجموع تصاویر افقی و قائم آن تعویض می‌کنیم. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس می‌توانیم به‌آسانی نشان دهیم که

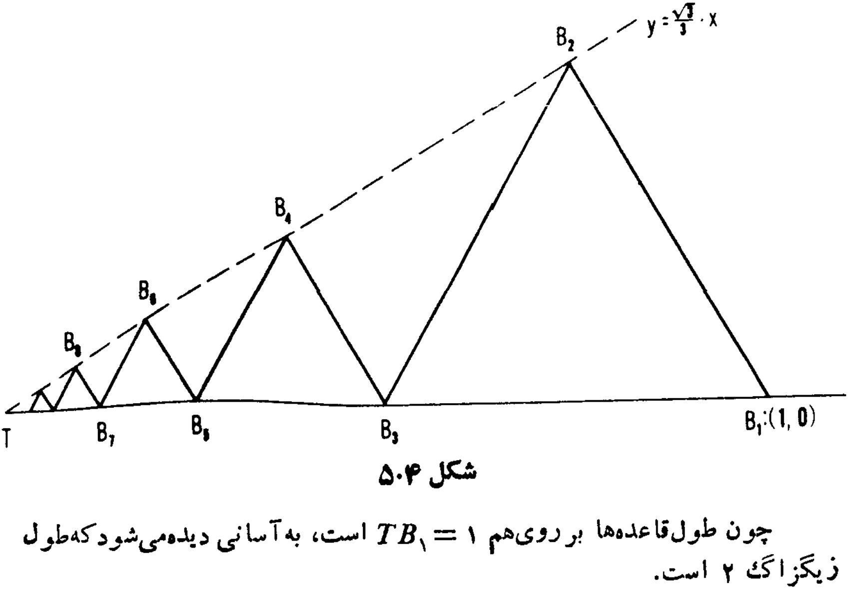
$$A_۰A_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\quad A_۱A_۲=\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰},\quad A_۲A_۳=\frac{۱}{۸}\sqrt{۱۰},$$

$$A_۳A_۴=\frac{۱}{۱۶}\sqrt{۱۰},\ \dots$$

MATH75.IR

و ثابت کنیم کـه L طول زیگـزاگ مساوی $\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}\sqrt{10}$ است. بنابراین $L\sim 2{,}3$ با خطایی به‌بزرگی ۲ر۰، یعنی خطایی که‌از ۱۰ درصد تجاوز نمی‌کند.

مثال ۲. در شکل ۵.۴ محاسبهٔ طول بـازهم آسانتر است. TB_1 واحد طول است و یك دنبالهٔ نامتناهی ازمثلثهای‌متساوی‌الاضلاع با قاعده‌هایی به‌طولهای‌کاهشی: ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ... داده شده است.



شکل ۵.۴

چون طول‌قاعده‌ها بر روی‌هم $TB_1=1$ است، به‌آسانی دیده‌می‌شود که‌طول زیگزاگ ۲ است.

مسأله

۲.۴. توجه‌کنید که‌رأسهای به‌شمارهٔ فرد برمحور xها (که دردستگاه مختصات قائم به‌صورت $y=0$ است) و رأسهای به‌شمارهٔزوج برخط TB_2 جای دارند که‌معادلهٔ آن به‌آسانی به‌صورت

$$y=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot x$$

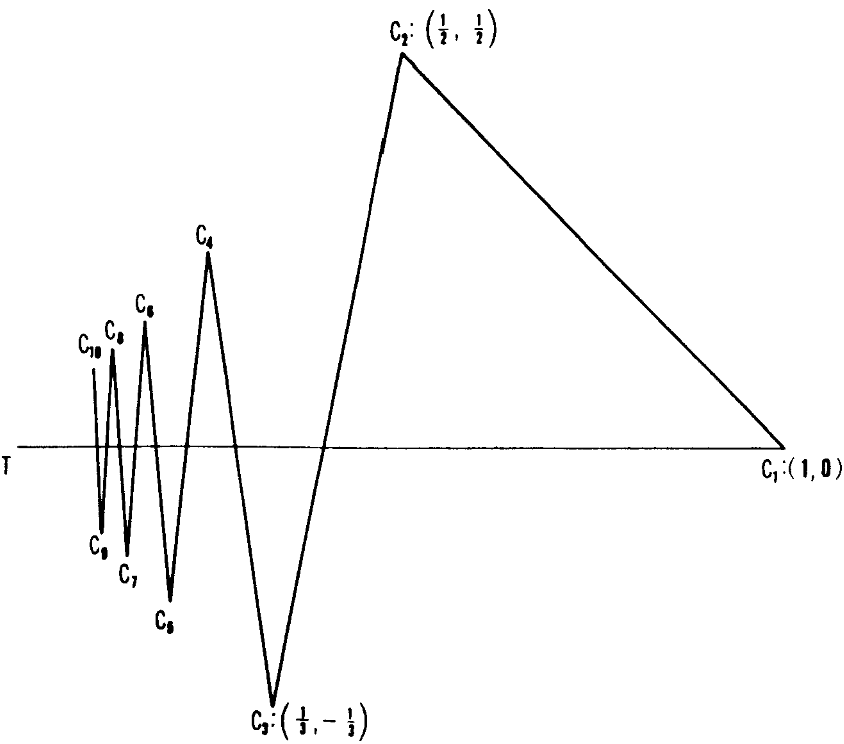
به دست می‌آیـد. زیگزاگ مشابهی (پاره‌خطهایی از مثلثهـای متساوی‌الاضلاع) بسازید کـه رأسهای به شمارهٔ زوج آن بـرخم $y=x^2$ قرار داشته باشند. طول

این زیگزاگ در مقایسه با زیگزاگ قبلی چگونه است؟ (از روی تصویر حدس بزنید.)

مثال ۳. طول زیگزاگ شکل ۶.۴ متناهی نیست، و مطابق با تعریف زیر خواهیم گفت طول آن بینهایت است:

تعریف. اگر طولهای L_n با افزایش n، بدون کران افزایش یابند می گوییم L بینهایت است.

چون اعداد مثبت را به‌یکدیگر اضافه می کنیم، اعداد L_n باید بزرگ و بزرگتر شوند؛ اگر آنها کران بالایی (عدد دلخواهی که از همهٔ آنها بزرگتر باشد) داشته باشند دراین‌صورت بنابر اصل بولتسانو-وایرشتراس، باید دارای حدی (کوچکتر یا مساوی این کران) باشند. ازاین‌رو اگر حد L_n موجود نباشد، کرانی



شکل ۶.۴

MATH75.IR

نیز وجود ندارد وهنگامی که طول L را بینهایت‌می‌نامیم تمام منظورمان گفتن همین است. تقریباً از این لحاظ است کـه می گویند طول خط اقلیدسی بینهایت است. ایـن شکل جدیدی است از الفاظ، بـه‌اقتضای مصلحت؛ این بینهایت، عددی از دستگاه اعدادحقیقی نیست. ریاضیدانان گاهی شیٔ جدیدی با نماد ∞ راکه متناظر با این بینهایت است در دستگاه اعداد حقیقی وارد می کنند، اما دراین‌صورت باید قواعد خاصی را بـرای عمل بـا آن نیز ایجادکنند. مثلا: $\infty+\infty=\infty$ امـا $\infty-\infty$ مبهم است.

زیگزاگ شکل ۶.۴ به‌ظاهر بسیار شبیه نمونه‌ای است‌کـه قبلا ارائه شد، البته مختصات رأسهای آن فرق می کنند.

$$C_n \text{ نقطهٔ } \left(\frac{۱}{n}, \frac{(-۱)^n}{n}\right) \text{ است،} \quad n=۲,۳,۴, \dots$$

روشن است که طول $C_۱C_۲$ از ۱/۲ و طول $C_۱C_۲C_۳$ از ۱ و طول $C_۱C_۲C_۳C_۴$ از ۵ر۱، بیشتر است. از اینجا چنین برداشت می‌شودکه طول $C_۱C_۲ \dots C_n$ درهر مرحله به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد؛ امـا این‌طور نیست. افزایش طول در مراحل آخر بسیار اندك است. بـا این‌حال این طولها با یکدیگر جمع می‌شوند و L_n بدون‌کران افزایش می‌یابد. بیایید آن‌را به‌طور دقیقتری بررسی کنیم.

اگـر چهار پاره‌خط $C_۴C_۵$، $C_۵C_۶$، $C_۶C_۷$، $C_۷C_۸$ را در نظر بگیریـم، می‌بینیم کـه عرض هریك از نقاط انتهایی، از لحاظ عـددی حداقل ۱/۸ است و بنابراین هـر پاره‌خط طولی حداقل مساوی با $۲\times ۱/۸=۱/۴$ دارد. پس چهار پاره‌خط روی‌هم طولی حداقل مساوی با ۱ دارند. دقیقاً به‌همین روش دیده‌می‌شود که هشت پاره‌خط بعدی روی‌هم طولی حداقل مساوی با ۸ برابر ۱/۸، یعنی، ۱ و شانزده پـاره‌خط بعداز آنها نیز روی‌هـم طولی حـداقل مساوی بـا ۱ دارند، و به‌همین ترتیب ۳۲ پاره‌خط بعدی و الی‌آخر.

به‌این طریق می‌توانیم دنباله‌ای از مسیرهای،

$$C_۱C_۲ \dots C_۸,\ C_۱C_۲ \dots C_{۱۶},\ C_۱C_۲ \dots C_{۳۲}, \dots$$

بسازیم‌کـه طولشان مانند اعداد ۳، ۴، ۵، ... افزایش می‌یابـد و چون می‌توانیم این‌کار را به‌طور نامحدود ادامه دهیم، ملاحظه می کنیم کـه طولهای L_n بدون حد اضافه می‌شود. این زیگزاگ طول بینهایت دارد.

این موضوع در ریاضیات دارای چنان اهمیتی است‌که خوب‌است خواننده

یك‌بار دیگر به‌آن فکر کند و برای این منظور بررسی کند که طول

$$C_N C_{N+1} + C_{N+1} C_{N+2} + \cdots + C_{2N-1} C_{2N}$$

وقتی که N به‌صورت ۲* است، از ۱ بیشتر می‌شود. روشی مناسب برای تحلیل این مسأله بررسی مثال زیر است:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

که به‌آن سری همساز می‌گویند و یك‌سری واگراست، یعنی اینکه، مجموعهای جزئی

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

با افزایش n، بدون حد افزایش می‌یابند.

به‌دنباله‌ای از جمله‌ها همراه بـا جمعها (یا تفریقها)ی تعیین‌شده سری گفته می‌شود. بنابر تعریف، بـه‌مجموع n جملهٔ اول سری $(n=1, 2, 3, \ldots)$ مجموع جزئی nام می‌گویند و به‌صورت S_n می‌نویسند و S، مجموع سری عبارت است از $\lim_{n\to\infty} S_n$، اگر این حد وجود داشته باشد. اگر همهٔ این جمله‌ها مثبت باشند و حد وجـود نداشته بـاشد می‌تـوان (گاهی) مجموع را به عنوان بینهایت، بیان کـرد. به‌طورکلی، هنگامی که حد S وجودندارد، سری را «واگرا»، و وقتی حد وجود دارد سری‌را همگرا می‌نامند. هنگامی که‌سری مفروضی حد دارد اما سری دیگری باهمان جمله‌های عددی که همه را مثبت کرده‌ایم حد نداشته باشد، آنگاه سری مفروض را همگرای مشروط می‌نامند. مثلاً، سری

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

همگرای مشروط است؛ یعنی بـه‌همین صورت همگراست، اما وقتی که همهٔ جمله‌ها مثبت شوند همگرا نیست.

اکنون با استفاده از زیگزاگها مفهوم حد را کشف می‌کنیم.

تعریف. نقطهٔ P را حد (کوتاه‌شدهٔ نقطهٔ حدی دنباله‌ای) دنباله‌ای از نقاط P_1، P_2، P_3، ... گوییم، هرگاه دنبالهٔ فاصله‌هـای P_1P، P_2P، P_3P، ... به‌صفر میل کند. (بـا تعریف «دنباله‌ای از اعداد مثبت بـه‌صفر میل می‌کند»، مقایسه کنید،

بخش ۳-۵.)

همچنان که تصویرها نشان‌می‌دهند، درمثالهای‌ما نقطهٔ T حد رأسهای زیگزاگ است. فاصلهٔ T از این رأسها* به‌آسانی محاسبه می‌شود. در مثال اول،

$$TA_n=\sqrt{\left(\frac{۱}{۲^n}\right)^۲+\left(\frac{۱}{۲^n}\right)^۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲^n}$$

درمثال دوم، محاسبهٔ TB_nرا به‌خواننده وامی‌گذاریم(دوحالت باید در نظر گرفت).

مسأله

۴-۳. مثال ۲ را با این روش طولانی بررسی کنید: ابتدا نشان دهید که دنبالهٔ $B_۱$، $B_۳$، $B_۵$، ... حد T دارد. سپس از این موضوع که فاصلهٔ $B_{۲n}B_{۲n-۱}$ به‌صفر میل می‌کند، استفاده کنید.

به‌آسانی از نابرابری مثلثی** نتیجه می‌شود که یك دنباله نمی‌تواند بیش از یك‌حد داشته باشد. زیرا اگر فاصله‌های P_nT و همین‌طور P_nT' به‌صفر میل کنند، دراین‌صورت دستور

$$P_nT+P_nT'\geqslant TT',\qquad n=۱,\ ۲,\ ۳,\ \dots$$

نشان می‌دهد که فاصلهٔ TT' باید صفر باشد. اما در هندسهٔ اقلیدسی این تنها وقتی ممکن است که T و T' یك نقطه باشند. بنابراین اگر بدانیم که حدی وجود دارد، می‌توانیم از حد دنباله که منحصربه‌فرد است صحبت کنیم.

تصویرهای بعد به‌مفهوم نقطهٔ حدی توجه دارند.

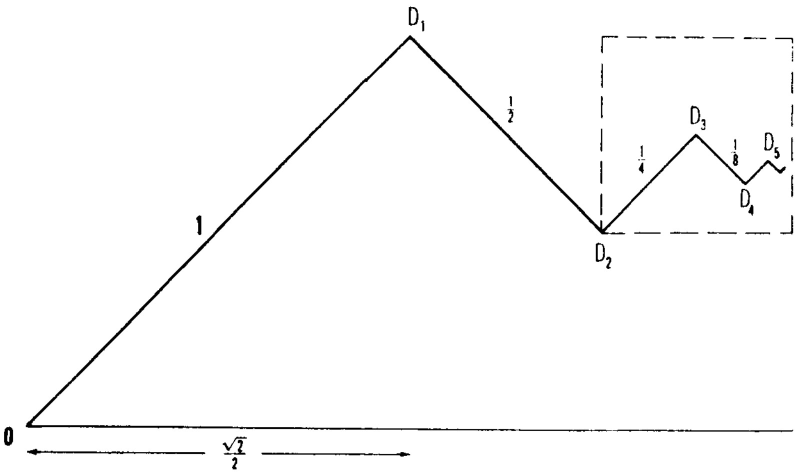
مثال ۴. در زیگزاگ $OD_۱D_۲D_۳\dots$ شکل ۴-۷ از پاره‌خطهایی استفاده شده است که با محورافقی زاویهٔ ۴۵° و بنابراین درهر رأس زاویهٔ قائمه می‌سازند. به‌ازای $m=۱,\ ۲,\ ۳,\ \dots$ طول $D_mD_{m+۱}$ مساوی $۱/۲^m$ است.

زیگزاگ بینهایتی که از $D_۲$ شروع می‌شود، یعنی $D_۲D_۳D_۴D_۵\dots$، تماماً درون مربعی به‌قطر $۱/۲$ (به ضلع $\sqrt{۲}/۴$) جای دارد، $D_۲$ یك سر این زیگزاگ

---

* در اینجا منظور طول پاره‌خط TA_n است، نه فاصله‌ای‌که درامتداد زیگزاگ باشد.

** این نابرابری بیان می‌کند که دریك مثلث، مجموع طولهای دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.



شکل ۷.۴

است و نقاط دیگری که تاکنون رسم کرده‌ایم هیچ یك سر دیگر آن نیست. بااین‌حال نقطه‌ای درصفحه وجود دارد که به‌این زیگزاگ وابستگی نزدیك دارد. بیایید آن را Z بنامیم. شکل ۷.۴ نشان می‌دهد که Z کجا نیست و اگر خواننده این را بپذیرد آنگاه خواهد دانست که چگونه جای آن‌را پیدا کند.

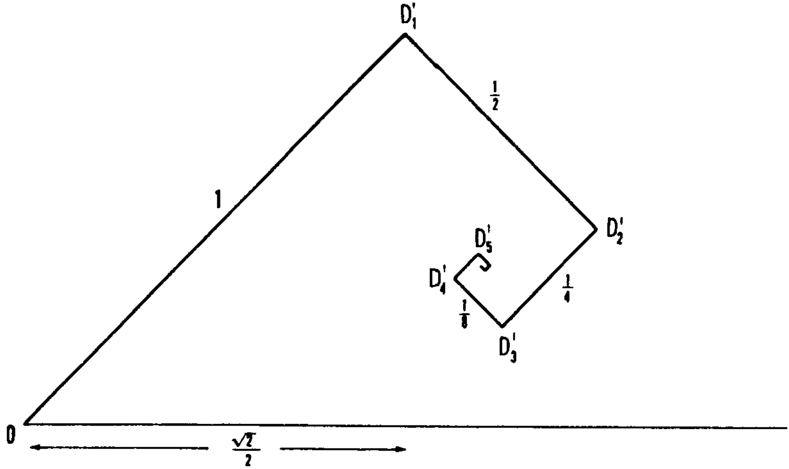
مسأله

۴.۴. فرض کنید نقطهٔ ٥ مبدأ یك دستگاه مختصات است که محور x آن مطابق معمول افقی است. نقطه‌ای را درنظر بگیرید که طول آن $\sqrt{۲}$ و عرض آن

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\dots\right)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{۲}{۳}=\frac{\sqrt{۲}}{۳}$$

است. این نقطه را Z بنامید و در رابطهٔ آن با رأسهای $D_۱$، $D_۲$، $D_۳$، ... ؛ بحث کنید. توضیح دهید که معنی عبارت «طول Z حد دنبالهٔ طولهای بی‌نهایت رأس متوالی است» چیست. ثابت کنید عرض Z حد دنبالهٔ عرضهای رأسهاست (دستور مجموع یك تصاعد هندسی نامتناهی را به‌یاد آورید).

مثال ۴'. زیگزاگ $OD'_۱D'_۲D'_۳$ ... درشکل ۸.۴ نمونهٔ جالب دیگری از



شکل ۸.۴

مثال قبل است. نمودار، همان دنبالهٔ پاره‌خطها را نشان می‌دهد که طوری مرتب شده‌اند که یك پیچ می‌سازند.

مسأله

۵.۴. خواننده ممکن است با یافتن مختصات نقطهٔ حدی T برای رأسهای $D'_۱$، $D'_۲$، ... مثال $'۴$ وجود چنین نقطه‌ای را اثبات کند و از این اثبات لذت ببرد.

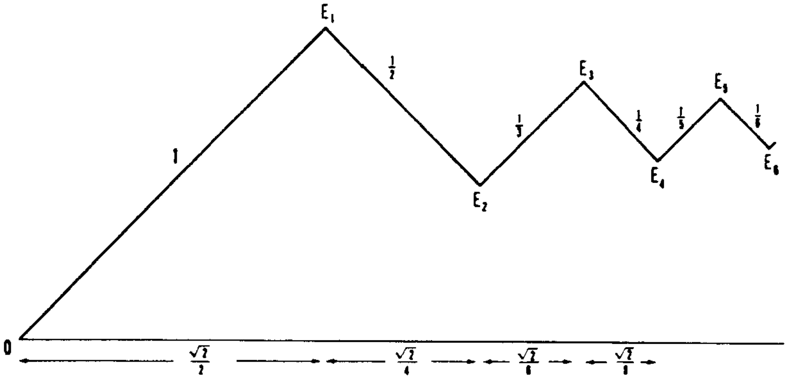
مثال ۵. اکنون بیایید به یك زیگزاگ بینهایت ... $OE_۱E_۲E_۳E_۴$ توجه کنیم که پاره‌خطهای متوالی آن طولهای

$$۱,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ \frac{۱}{۴},\ \frac{۱}{۵},\ \dots$$

دارند. تصویر آن درشکل ۹.۴ همهٔ جزئیات را روشن می‌کند. این مثال دست‌کم در اولین نگاه سطحی، مشابه زیگزاگ ... $OD_۱D_۲D_۳$ مثال ۴ است. در هر حال، ازپیش دربارهٔ جمع دنبالهٔ کسرهای واحد می‌دانیم که آنها مجموعی متناهی ندارند. این مطلب نتایج قابل توجهی خواهد داشت.

ممکن است کسی حدس بزند به‌همان طریقی که نقطهٔ Z درمثال ۴ به‌زیگزاگ

MATH75.IR



شکل ۹۰۴

وابسته بود این تصویرهم یك نقطهٔ Y وابسته به‌خود دارد. ولی چنین حدسی‌درست نیست. این زیگزاگ آرام‌آرام اما بدون توقف بـه‌سمت راست حرکت می کند؛ هیچ نقطه از صفحه، نقطهٔ حدی دنبالهٔ نقاط $E_۱$، $E_۲$، $E_۳$، $E_۴$، ... نیست. ایـن موضوع براساس‌این‌واقعیت‌ثابت‌می‌شود که تصویرافقی مسیر $E_۱E_۲E_۳ \dots E_n$ طول

$$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\dots+\frac{۱}{n}\right)$$

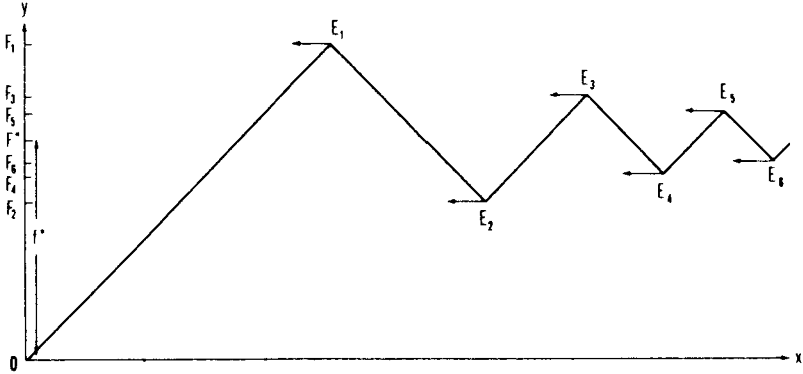
دارد واین‌مجموع با افزایش n بدون‌محدودیت افزایش‌می‌یابد. بنابراین‌صرف‌نظر ازاینکه نقطهٔ Y را چگونه انتخاب کنیم، لااقل یك‌نقطهٔ E_n (برای nهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ) در سمت راست نقطهٔ Y واقع می‌شود؛ همهٔ نقاط بعدی زیگزاگ در سمت راست حتی از این‌هم دورتر می‌شوند و نمی‌توانند به Y نزدیك شوند. حالا جزئیات باید روشن شده باشد.

مسأله‌ها

۶۰۴. در این مثال، اگـرچه طولهای نقاط E_n با افزایش n، بـدون حد افزایش می‌یابند، عرضهای آنها به‌این طریق‌افزایش نمی‌یابند. ثابت‌کنید عرض E_nمساوی است با

$$S_n=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left[۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\dots+\frac{(-۱)^{n+۱}}{n}\right]$$

MATH75.IR



شکل ۱۰.۴

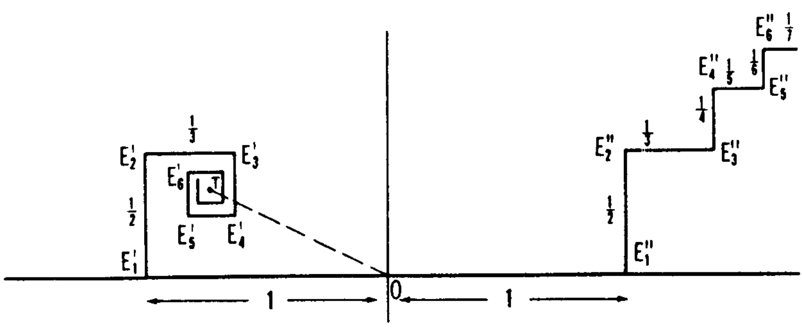
و با مربوط ساختن این مسأله با تصویر شکل ۱۰.۴ خود را متقاعد کنید که دنبالهٔ عرضها حد دارد.

۷.۴. (الف) توضیح دهید چرا ادعای زیر ممکن‌است غلط باشد وعبارت صحیح آن‌را صورت‌بندی کنید: «حد تصاویر (دنباله‌ای‌نامتناهی از نقاط صفحه) بریك‌خط، مساوی تصویر حد آنها برآن خط است.»

(ب) آیا می‌توانید ادعای‌زیر را ثابت‌کنید؟ «تصویرحد (دنباله‌ای ازنقاط) بریك خط مساوی حد تصویرهاست.»

دونمونه از زیگزاگ قبلی درشکل ۱۱.۴ تصویر شده‌اند، که اولی‌همگرایی و دومی واگرایی را نشان می‌دهد.

در نمونهٔ اول، رأسها یك نقطهٔ حدی T و دنبالهٔ پاره‌خطهای OE'_n



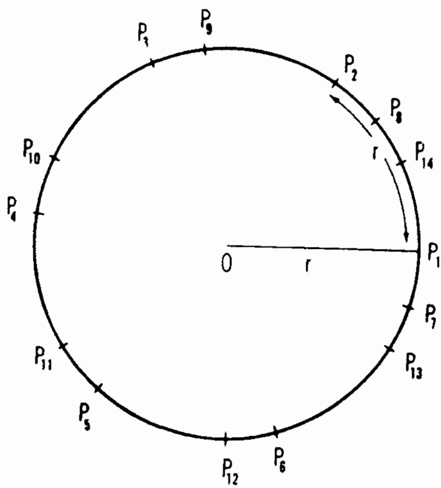
شکل ۱۱.۴

MATH75.IR

$(n=۱, ۲, ۳, \ldots)$ یك وضعیت حدی OT دارد. درنمونهٔ دوم نقطهٔ حدی وجود ندارد، اما دنبالهٔ پاره‌خطهای OE''_n $(n=۱, ۲, ۳, \ldots)$ یك امتداد حدی دارد! از خواننده خواسته می‌شود که ثابت کند حد ضریب زاویه‌های OE''_n وجود دارد.

گنگ بودن π بدین‌معنی است که شعاع و محیط دایره طولهای نامتوافق‌هستند. این‌موضوع بنا بر شرحی که هم‌اکنون می‌آید دارای نتیجهٔ جالب‌توجهی است. اگر نقطه‌ای که آن‌را $P_۱$ می‌نامیم بردایره‌ای انتخاب کنیم ودایره‌را به‌اندازهٔ یك‌رادیان بچرخانیم نقطهٔ جدیدی به‌دست‌می‌آوریم که آن‌را $P_۲$ می‌نامیم (کمان $P_۱P_۲$ طولی مساوی با شعاع دایره دارد) و اگر بازهم به‌اندازهٔ یك رادیان دایره را بچرخانیم نقطهٔ دیگر $P_۳$ را بـه دست می‌آوریم و الی آخر. بیایید به‌این روش دنباله‌ای از نقاط P_n $(n=۱, ۲, ۳, \ldots)$ بسازیم؛ شکل ۱۲۰۴ را ببینید. نقاط این‌دنباله به‌دلیل توافق‌نـاپذیری شعاع و محیط هرگز تکرار نمی‌شـوند. (ایـن موضوع آشکار و پیش پا افتاده نیست و ارزش فکرکردن دارد.) دنبالهٔ پاره‌خطهای شعاعی OP_n یك وضعیت حدی به خود نمی‌گیرد، زیرا وضعیت آنها را دائماً بـا یك رادیان تمام تغییر می‌دهیم. از این حقایق نتیجه می‌شود کـه نقاط $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ... متمایز از یکدیگرند، و این دنباله نقطهٔ حدی ندارد.

رفتار نقطهٔ P_n وقتی که n افزایش می‌یابد مسألهٔ بسیار مهمی درحساب عالی است. به‌آسانی می‌توان حدس زد که P_n به‌دور دایره می‌چرخد به‌قسمی که در هر



شکل ۱۲۰۴

قسمت ازمحیط دایره به‌دفعاتی کم‌وبیش یکسان حضوردارد، این موضوع مادهٔ‌اصلی قضیهٔ برجسته و مشکل کرونکر[1] است. قسمت آسانتر این‌قضیه می گوید که مجموعهٔ نقاط P_n، $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، برمحیط دایره همه‌جا متراکم‌اند. منظورد این‌است که اگر نقطه‌ای مثل P بر محیط دایره انتخاب کنیم، همواره می‌توانیم تکراری از $P_۱$ (یعنی نقطه‌ای که از $P_۱$ با دورانهایی به‌اندازهٔ یك‌رادیان به‌دست آمده است) پیدا کنیم که نزدیك به‌آن باشد. به‌طور دقیقتر، اگر عدد صحیح (بزرگی) مثل K انتخاب کنیم، می‌توانیم نقطهٔ P_N (برای عدد مناسبی مثل N) را طوری پیدا کنیم که فاصلهٔ PP_N از $۱/K$ کوچکتر باشد. البته این‌بدان معنی نیست که P نقطهٔ‌حدی دنبالهٔ کامل $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ... است، ابتدا چنین نیست؛ مثلا $P_{N+۱}$ نقطهٔ بعدی در فاصلهٔ قابل‌توجهی از P است، و ممکن است چندین بار، مثلا M بار، به‌دور دایره بچرخد تا نقطهٔ‌مناسب P_{N+M} به‌اندازهٔ ازپیش‌تعیین‌شده یعنی $۱/K$ به P نزدیك‌شود.

این مبحث از شرح مفهوم حد را با توضیحی دربارهٔ قضیهٔ کرونکر به‌پایان خواهیم برد. اگر زاویهٔ دورانی مساوی k رادیان انتخاب کنیم و دنبالهٔ حاصل از نقاط

$$P'_۱, P'_۲, P'_۳, \cdots$$

را درنظر بگیریم، دوحالت ممکن است رخ‌دهد. اگر k با π نامتوافق باشد درست مثل حالت قبل که $k = ۱$، یك مجموعهٔ همه‌جا متراکم به‌دست می‌آوریم. اگر k مضرب گویایی از ۲π باشد، یعنی، $k = ۲m\pi/n$ که در آن m و n اعداد صحیحی هستند، دراین‌صورت دنباله دوره‌ای و به‌صورت زیر است

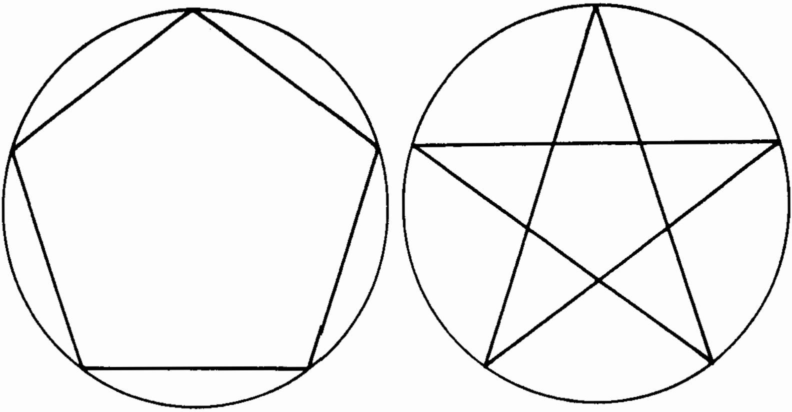
$$P'_۱,\ P'_۲, \cdots,\quad P'_N,\ P'_۱,\ P'_۲, \cdots$$

N، تعداد نقاط متمایز، حداکثر n تاست (به‌خاطر بیاورید که ۲π رادیان یك دور کامل است) و همیشه عاملی از n است (اثبات این مطلب با اینکه طولانی نیست، ساده هم نیست و نتیجهٔ یکی‌از قضایای بنیادی در مقدمات نظریهٔ گروههاست). این حالت منجر به‌ارائهٔ همهٔ چندضلعیهای‌منتظم و گونه‌هایی از تصویرهای زیبامی‌شود. در اینجا حالت $n = ۵$ را درنظر می گیریم، به‌ازای $k = ۲\pi/۵$ نخستین و به‌ازای $k = ۴\pi/۵$ دومین چندضلعی به‌دست می آید که درشکل ۱۳.۴ نشان داده‌ایم.

درتمام حالات، جز یك‌مورد، یك‌مجموعهٔ دوره‌ای دارای نقطهٔ حدی‌دنباله‌ای نیست. این حالت استثنایی را با دنبالهٔ Q، Q، Q، ... بیان می کنیم که دارای حد

---

1. Kronecker



شکل ۴-۱۳

Q است. یك نمونهٔ عددی آن دنبالهٔ ۲، ۲، ۲، ... است که حد ۲ دارد. ایده‌ای را که در پس این موضوع نهفته است می‌توان در نمایش ۲ به‌صورت یك اعشاری نامختوم ملاحظه کرد:

۲٫۰۰۰۰۰ ...;

هنگامی که این نمایش ۲ را در nامین اعشار «گرد» می‌کنیم nامین تقریب آن‌راکه البته باز هم ۲ است به‌دست می‌آوریم اما دراین‌حالت آن‌را به‌چشم تقریب ۲ نگاه می‌کنیم (و درست همان نمایش اولیه را دارد) واین‌هم کاملا با تعریف فوق ازحد مطابقت دارد.

نکتهٔ آخر دربارهٔ استفاده از حدها درحسابان است. مفاهیم مماس بریك خم، طول یك کمان، مساحت محصور به‌یك خم، مساحت قطعه‌ای از یك رویه، خمیدگی یك رویه، حجم محصور به یك‌رویه، گرانیگاه یك جسم، و مفاهیم فیزیکی سرعت، شتاب، کار انجام شده، جاذبهٔ گرانشی کلی یك‌جسم برجسم دیگر، همهٔ اینها و صدها نمونهٔ دیگر درهرشاخه از علوم ریاضی، با تعریفهایی آغاز می‌شوند که شامل مفهوم حد هستند. سروکار حسابان با همهٔ این موضوعات است.

در این فصل یك کاربـرد مفهوم حد، یعنی محاسبهٔ طول زیگزاگها را ارائه کردیم. این‌موضوع رابطهٔ تنگاتنگی با مسألهٔ ریاضی جمع‌کردن سریهای نامتناهی دارد کـه یکی از دو کاربرد بسیار مهم مفهوم حد در حسابان است (دیگری مفهوم مشتق در ارتباط با ضریب زاویهٔ خط مماس بریك خم است). سری نامتناهی تعمیم

MATH75.IR

مفهوم یك عدد اعشاری نامختوم است از نوع

$$\frac{۱}{۳} = ۰٫۳ + ۰٫۰۳ + ۰٫۰۰۳ + \cdots$$

و

$$\pi = ۳ + ۰٫۱ + ۰٫۰۴ + ۰٫۰۰۱ + \cdots .$$

(در مثال دوم، سه نقطه صرفاً به‌معنای این است که بسط نامختوم است و قاعدهٔ ساده‌ای را برای محاسبهٔ رقم بعد ارائه نمی‌کند.)

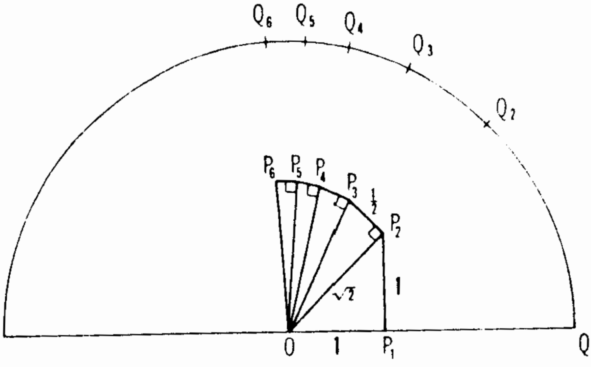
مسأله‌ها

۸.۴ مسألهٔ زیر سری مشهور

$$۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۳^۲} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} + \cdots$$

را معرفی می‌کند که همگراست، درحالی‌که سری همساز همگرا نیست. درحسابان ثابت می‌شود که مجموع آن $\pi^۲/۶$ است. آنچه که ازخواننده می‌خواهیم این‌است که نشان‌دهددنبالهٔ nامین مجموعهای جزئی دارای کران ۲ است. این، ثابت خواهد کرد که نقاطی با دنبالهٔ مجموعهای جزئی سریهایی متناهی درصفحه می‌توان تعریف کرد که «به‌طرف بینهایت» نمی‌روند.

۹.۴ شکل ۱۴.۴ مشابه «پیچاك گنگها»ست (شکل ۱۰.۳ را ببینید)؛ اما در اینجا



شکل ۱۴.۴

ساقهای مثلث nام به‌صورت زیر به‌سری‌همساز ۱، ۱/۲، ۱/۳، ... مربوط شده‌اند: پاره خط P_nP_{n+1} $(n = ۱, ۲, ۳, \dots)$ به طول $۱/n$ است و برخط شعاعی OP_n عمود است. حالا ثابت کنید به‌ازای هر n، OP_n از $\sqrt{۳}$ کمتر است. سپس تحقیق کنید که طول زیگزاگ $P_۱P_۲P_۳\dots$ بینهایت است. تصور کنید که نقاط P_n به‌طور شعاعی بر دایرهٔ مناسبی مثلاً به‌شعاع ۳ تصویر شده‌اند وتصویر P_k را با Q_k نشان دهید. آیا می‌توانید ثابت کنید کـه این نقاط $Q_۱$، $Q_۲$، $Q_۳$، ... تعداد نامعینی پیچ می‌خورند؟ آیا می‌توانید نتیجه بگیرید که دنبالهٔ اصلی حد ندارد؟

۱۰.۴. تعیین کنید که آیا سریهای زیر همگرایند یا نه:

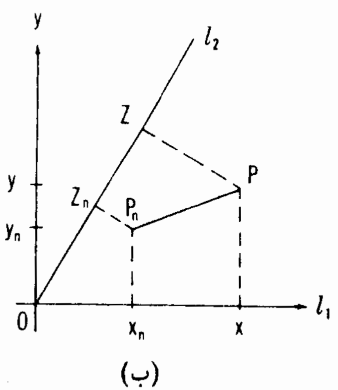
(الف) $$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۸}+\dots$$

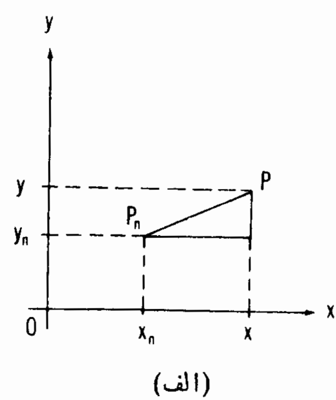
(ب) $$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۱}+\frac{۱}{۱۵}+\dots$$

(پ) $$\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\dots$$

(ت) $$\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt[۳]{۳}}+\frac{۱}{\sqrt[۴]{۴}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt[n]{n}}+\dots$$

۱۱.۴. فرض کنید P یک نقطه و P_n $(n = ۱, ۲, ۳, \dots)$ دنباله‌ای از نقاط درصفحه





شکل ۱۵.۴

MATH75.IR

باشد. فرض کنید به ازای هر خط l، تصویر P بر l حد تصویرهای P_n $(n=۱, ۲, ۳, \cdots)$ بر l است.

(الف) ثابت کنید P حد دنباله است.

(ب) اگر فرضهای مسأله تنها برای یك خط مفروض درست باشند آیا می‌توان این نتیجه را به‌دست آورد؟

(پ) برای دوخط چطور؟ بیان دقیق موضوع چیست؟

MATH75.IR

فصل پنج

مستطیل زرین جاودان

در این فصل بعضی ویژگیهای مستطیلی را مطالعه خواهیم کرد که یونانیان حدود ۵۰۰ سال قبل‌از میلاد، یعنی هنگامی کشف کردند که گنگ‌بودن ریشهٔ دوم بعضی اعداد معلوم شده بود. درترسیم این‌مستطیل $\sqrt{5}$ دخالت دارد، عددی‌که کلید ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با خط‌کش و پرگار است. این چندضلعی جالب وجهی از دوازده وجهی منتظم است و درساختمان بیست وجهی منتظم که شگفت‌آورترین‌جسم در اجسام منتظم پنجگانه است به‌کار می‌رود. از این‌رو مستطیل زرین، هم به‌جهت زیبایی‌خود وهم به‌جهت‌زیبایی‌شکلهایی‌که بدان‌ارتباط دارد نزد یونانیان[باستان] ارزش والایی داشته است.

توجهی دقیق به‌این مستطیل، تقریباً بی‌درنگ دنبالهٔ زیر را به‌دست می‌دهد:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

این سلسلهٔ اعداد توسط لئوناردوی پیزایی کمی پس‌از سال ۱۲۰۰ در مسأله‌ای از حساب پیرامون زاد و ولد خرگوشها ابداع‌شد (۱ و ۱ دراین‌دنباله معرف یك‌جفت خرگوش اولیه‌اند) و به‌سری فیبوناتچی* موسوم است. تاکنون ارتباط بین‌مستطیل

---

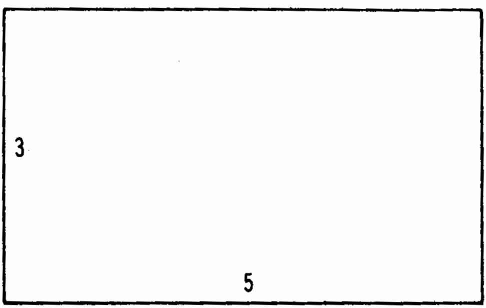
* پاورقی صفحهٔ ۲۱ را ببینید.

MATH75.IR

مذکور و این سری منشأ کشفیاتی در ریاضیات بوده است که برخی از آنها را در این فصل نشان خواهیم داد. تا سدهٔ هجدهم معلوم شده بود که این مستطیل به‌طورطبیعی به‌پیچی لگاریتمی وابسته‌است، پیچی که با رشد بسیاری‌از موجودات طبیعی از قبیل نرم‌تنان و حلزونها ارتباط دارد. فشنر[1] روانشناس بزرگ با بیان قانون مشهورش: «شدت واکنش در مقابل یك محرك به صورت لگاریتم شدت آن محرك تغییر می‌کند» بسیاری را که لزوماً ریاضیدان نبودند به‌تحسین از این مستطیل و پیچ‌مربوط بدان واداشت. اهمیت لگاریتم در پدیده‌های روانشناسی باواقعیتهایی چند تصدیق می‌شود؛ از آن جمله است استفاده از دسی‌بل در اندازه‌گیری شدت. پدیده‌ای از زیست شناسی به‌نام «آرایش برگها» نیز اعداد فیبوناتچی را به‌نمایش می‌گذارد.*

۱.۵ مستطیل زرین

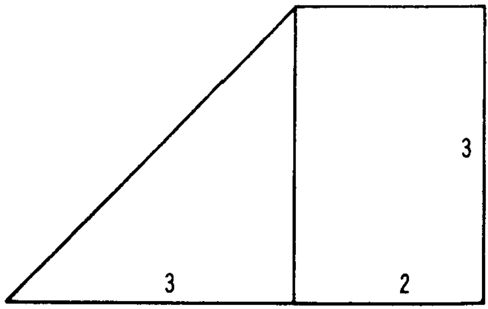
شکل ۱.۵ مستطیلی را نشان می‌دهد که شبیه کارتهای ۵ × ۳ کتابخانه است. اگر چنین کارتی را مطابق شکل ۲.۵ تا کنیم مستطیلی باقی می‌ماند که اضلاع آن به‌نسبت ۲ به ۳، یعنی حدوداً ۶۷ر۰ به ۱ هستند. اضلاع کارت اصلی نسبت ۳ به۵ که ۶ر۰ به ۱ است، دارند. بنابراین هرگاه مربعی را از چنین کارتی ببریم، شکلی



شکل ۱.۵

1. Fechner

* برای ملاحظهٔ شرحی از این پدیده‌ها بررسی زیبایی را ببینید که در *«Introduction to Geometry»* تألیف H. S. M. Coxeter آمده است. همچنین نگاه کنید به مقالهٔ «Mathematical Games» نوشتهٔ Martin Gardner در *Scientific American*، اوت ۱۹۵۹.



شکل ۲۰۵

به‌دست‌می‌آید که تقریباً مثل شکل‌اصلی است. اکنون شکل مستطیل‌زرین رامی‌توان به‌این‌روش تعریف کرد: اگرمربعی از آن بریده‌شود مستطیل باقیمانده دقیقاً همشکل مستطیل اصلی باشد. منظور از «همشکلی» این‌است که نسبت ضلع کوچکتر به‌ضلع بزرگتر در هردو یکی است، یعنی، دو مستطیل مشابه‌اند.

اکنون به‌وضوح بینهایت آشکار می‌شود، چون با بریدن مربعی از مستطیل جدید، مستطیل دیگری مشابه با آن نتیجه می‌شود و اگر باز مربعی از این مستطیل بریده شود، مستطیل دیگری از این نوع به‌دست می‌آید، و این عمل بی‌نهایت‌بار می‌تواند ادامه یابد.

بیایید طول اضلاع مستطیل اولیه را به ترتیب با $a+b$ و a نمایش دهیم. دراین‌صورت طول اضلاع مستطیلهای‌متوالی دنبالهٔ جفتهای زیر را به‌دست‌می‌دهد:

$$\begin{cases}a+b\\a\end{cases},\quad \begin{cases}a\\b\end{cases},\quad \begin{cases}b\\a-b\end{cases},\quad \begin{cases}a-b\\۲b-a\end{cases},\quad \begin{cases}۲b-a\\۲a-۳b\end{cases},$$

$$\begin{cases}۲a-۳b\\۵b-۳a\end{cases},\quad \begin{cases}۵b-۳a\\۵a-۸b\end{cases},\ \ldots,$$

که ابتدا ضلع بزرگتر هرجفت را نوشته‌ایم. الگویی که ظاهر می‌شود چنین است: ضلع بزرگتر هرمستطیل مجموع دو ضلع مستطیلی است که پس‌از آن قرار دارد. ضرایب a و b در این عبارتها مربوط می‌شوند به‌اعداد فیبوناتچی که قبلا فهرست شده‌اند. قانون‌تشکیل‌اعداد فیبوناتچی چنین‌است: هرعدد مجموع دوعدد پیش‌ازآن است (به‌استثنای دو عدد اولیه: ۱ و ۱). قوانین تشکیل طولهای فوق و اعداد

MATH75.IR

فیبوناتچی آن‌چنان به‌هم شبیه‌اند که هیچکس نمی‌تواند در ارتباط محکم بین آنها شك کند. بعداً به‌این موضوع بازخواهیم گشت.

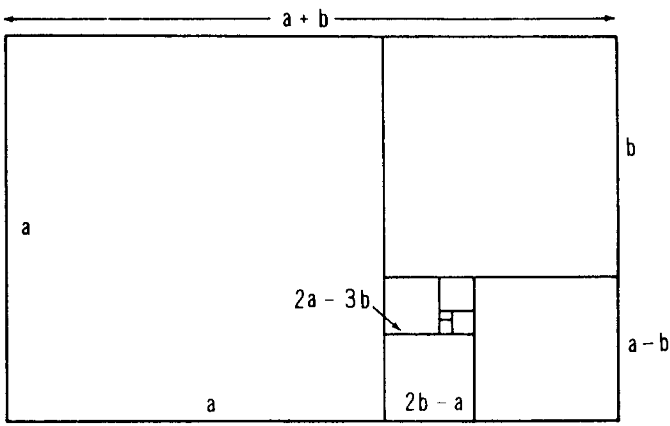
۲.۵ نسبت زرین عددی گنگ است

فرایند تشکیل مستطیلهای متوالی نمی‌تواند پایان پذیرد و این به ما گوشزد می‌کند که a و b متوافق نیستند (فصل ۳ را ببینید) و بنابراین $m=b/a$ گنگ است. کجوری[1] تاریخ‌نگار ریاضیات، اولین برهان گنگ‌بودن m، نسبت یامیانگین‌زرین (یعنی، نسبت ضلع کوچکتر به‌ضلع بزرگترمستطیل‌زرین) را به‌کامپانوس[2] در ۱۲۶۰ «با روشی مرکب از برهان خلف و اصل نزول نـامتناهی» نسبت می‌دهد. بیایید ببینیم که این برهان چگونه است.

برای استدلال فرض می‌کنیم m گویاست، یعنی m نسبت یك‌جفت از اعداد صحیح است. دراین‌صورت می‌توانیم فرض‌کنیم که a و b همین اعداد صحیح‌اند و از شکل ۳.۵ استفاده کنیم. می‌بینیم که

$$a-b,\ ۲b-a,\ ۲a-۳b,\ ۳a-۵b,\ ۵a-۸b,\ \dots$$

همه اعداد صحیح‌اند و ایـن طرز تشکیل نشان می‌دهد که همه مثبت نیز هستند! پس این‌فرض‌که m گویاست ما را به یك دنبالهٔ نزولی نامتناهی از اعداد صحیح مثبت



شکل ۳.۵

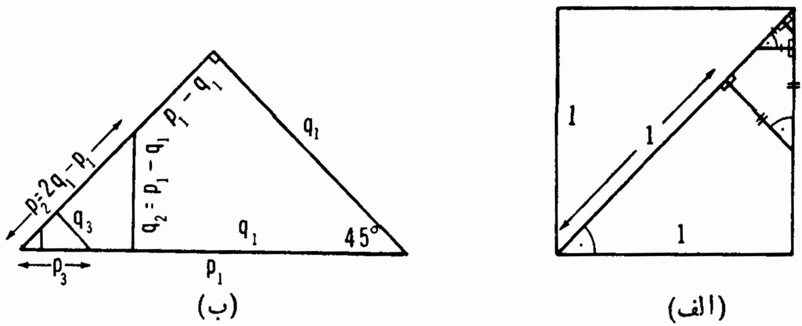
1. Cajori
2. Campanus

می‌رساند. اما این تناقض است زیرا چنین دنباله‌ای وجود ندارد. درنتیجه این‌فرض که m گویاست ناموجه است و این، برهان گنگ‌بودن m را تمام می‌کند.

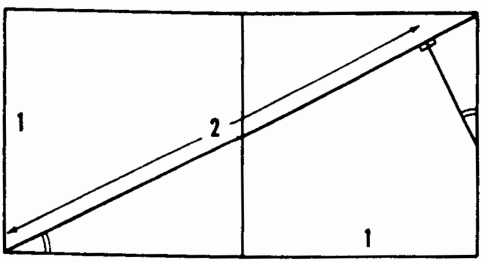
عکس m، یعنی a/b را اغلب با حرف یونانی τ (تاو) نشان می‌دهند که حرف اول $\tau o\mu\eta$، به‌معنای «قطع» است.

مسأله

۱۰.۵ از شکل ۴.۵ برای اثبات گنگ‌بودن $\sqrt{2}$ و از شکل ۵.۵ به‌طور مشابهی برای گنگ‌بودن $\sqrt{5}$ استفاده کنید. آیا می‌توانید این‌کار را با سایر حالتهای $\sqrt{n}$ تطبیق دهید؟



شکل ۴.۵



شکل ۵.۵

۳.۵ برآورد نسبت زرین

پذیرفته‌ایم که مستطیل زرین وجود دارد. به‌آسانی‌هم ثابت می‌شود، اما ابتدا بیایید

MATH75.IR

نسبت زرین را بـا «آزمون و خطا» برآورد کنیم. می‌خواهیم نسبت $m=b/a$ را به‌قسمی تعیین کنیم که

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b};$$

زیرا اگر a و b در این رابطه صدق کنند مستطیل شکل ۳.۵، بـه‌واقع یك مستطیل زرین‌است. اگر a و b را چنان بگیریم که $a+b=1$ محاسبات‌ما ساده‌تر می‌شوند، چون دراین‌صورت

$$m=\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}=a$$

یعنی a و b را باید چنان برگزید که $m=a$ و $a+b=1$. براین اساس جدولی از اضلاع a و b بـه‌طور آزمایشی تشکیل مـی‌دهیم و نسبت $b/a=m$ را ثبت می‌کنیم. نخستین جدول نشان می‌دهد که m بین ۰٫۶ و ۰٫۸ نزدیك به ۰٫۶ است ودومی برآورد بهتری برای m می‌دهد که بین ۰٫۶۱ و ۰٫۶۲ است. بنابرین ۰٫۶۱۵ با نسبت زرین بیش‌از ۰٫۰۰۵ اختلاف ندارد، خطایی احتمالی که از ۵ در ۶۰۰ تجاوز نمی‌کند، یعنی خطا از یك درصد کمتر است. این‌کار بـرای تولید کارتهای مستطیل توسط روشهای ماشینی بسیار مطلوب است.

a	۰٫۲	۰٫۴	۰٫۶	۰٫۸
b	۰٫۸	۰٫۶	۰٫۴	۰٫۲
m	۴	۱٫۵	۰٫۶۷	۰٫۲۵

a	۰٫۶	۰٫۶۱	۰٫۶۲
b	۰٫۴	۰٫۳۹	۰٫۳۸
m	۰٫۶۷	۰٫۶۵	۰٫۶۱

مسأله

۲.۵. m به ۰٫۶۲ نزدیکتر است تا به ۰٫۶۱. با استفاده از «اجزاء متناسب» یـا یك طرح نموداری ساده برآورد بهتری برای m به‌دست آورید. مقدار m با ۹رقم اعشارمساوی ۰٫۶۱۸۰۳۳۹۸۹ است و یك نمودار خوب باید مقدار ۰٫۶۱۸ را به‌دست دهد.

۴.۵ روشهای یافتن نسبت زرین

الف) به‌نظرمی‌رسد نسبت زرین را ازمسألهٔ زیر کشف کرده باشند: «پاره‌خط مفروضی را به‌دو قسمت چنان تقسیم کنید که نسبت قسمت کوچکتر به‌قسمت بزرگتر مثل نسبت قسمت بزرگتر به‌کل پاره‌خط باشد»؛ شکل ۶.۵(الف) را ببینید.

شرایط مسأله به‌صورت نمادی چنین بیان می‌شود:

$$\frac{b}{a}=\frac{a}{a+b}$$

با تقسیم صورت و مخرج کسر سمت راست به a، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{b}{a}=\frac{۱}{۱+\frac{b}{a}}$$

با جایگذاری m به‌جای b/a و نمایش $۱/m$ توسط τ، به‌دست می‌آوریم

$$m+۱=\tau \quad \text{یا} \quad m(m+۱)=۱ \quad \text{یا} \quad m=\frac{۱}{۱+m}$$

این بیان می‌کند که عکس m مساوی $m+۱$ است. همچنین معادله‌ای درجهٔ دوم و عبارتی دقیق برای m بـه‌دست می‌آید (دنبالهٔ مطلب را ببینید). اما پیش‌از استخراج دستوری برای m، بیایید رابطهٔ بین این تعریف m را با تعریف قبلی ببینیم. بیایید تصور کنیم که طولهای واقعی a و b را یافته‌ایم و تساوی نسبتها را با یك جفت از مثلثهای متشابـه بیان کنیم. ایـن کار را می‌توانیم مستقیماً روی پاره‌خط داده شده به‌صورت زیر انجام دهیم:

شکل ۶.۵(ب) مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابهی‌را نشان می‌دهد. دو زاویهٔ حاده مساوی، با x مشخص شده‌اند. خط نقطه‌چین شکل را به صورت دو مستطیل مشابه و یك مربع درمی‌آورد. روشن است کـه به‌این ترتیب بـه‌تعریف قبلی شکل زرین رسیده‌ایم.

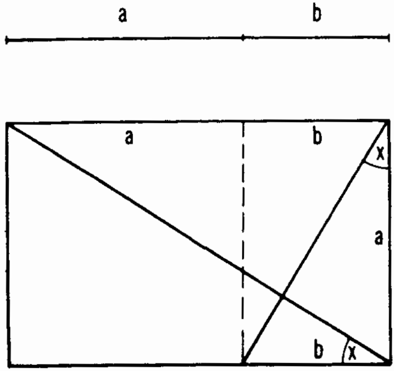
اکنون کار را با محاسبهٔ m ادامه می‌دهیم. دیدیم از تعریف نسبت زرین نتیجه می‌شد که m در معادلهٔ

$$m^{۲}+m=۱$$

MATH75.IR

(الف)

(ب)



شکل ۶.۵

صدق می‌کند. با تبدیل به‌مربع کامل:

$$m^{2}+m+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$$

درمی‌یابیم که

$$m+\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{یا} \quad m+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

و چون a و b معرف طول هستند، m باید مثبت باشد، بنابراین

$$m=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

و این دستوری برای m است.

به‌آسانی بررسی می‌شود که این m شرایط اصلی را می‌پذیرد زیرا

$$m+1=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\tau$$

و از اینجا

$$m(m+1)=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\frac{5-1}{4}=1 \cdot$$

با جستجوی $\sqrt{5}$ در جدول یا محاسبهٔ آن بـه‌هر طریق، می توانیم تقریبات به‌دلخواه نزدیکی برای m به‌دست آوریم؛ مثلا تا نه رقم اعشار،

$$m \approx ۰٫۶۱۸\ ۰۳۳\ ۹۸۹$$

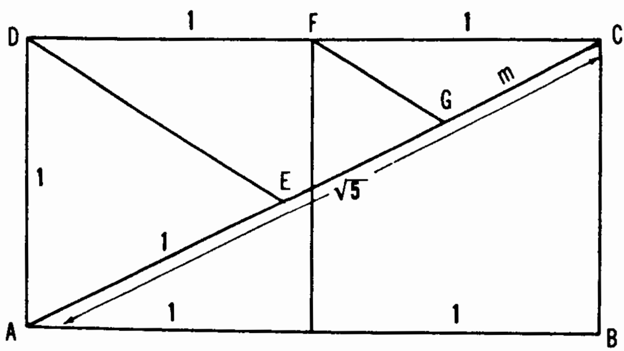
شکل ۷.۵ ترسیمی‌را با خط‌کش و پرگار نشان می‌دهد که خواننده می‌تواند بـررسی کند. طـول پاره‌خط AE برابر بـا ۱ است، DE و FG متوازی‌انـد و پاره‌خطهای EG و GC به‌طول موردنظر m هستند. این، یکی‌از روشهایی است که هندسه‌دانان یونان [باستان] با آن معادله حل می‌کردند. ریاضیدانان بابلی نظریهٔ چنین معادلات درجهٔ دومی را برای حالتهای خاص بیشماری (با اجتناب از اعداد منفی و موهومی) در ۱۸۰۰ سال قبل‌از میلاد به‌دست آورده بودند.

ب) ژیرار[1] ریاضیدان سدهٔ هفدهم برای حل معادلهٔ

$$m = \frac{۱}{۱+m} \qquad (۱.۵)$$

روش دیگری که به‌نظرعجیب‌می آید ابداع کرده است. این‌روش مبتنی برجایگذاری مقدار m از معادلهٔ (۱.۵) در مخرج کسر سمت راست است، بنابراین

$$m = \cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+m}} \qquad (۲.۵)$$



شکل ۷.۵

1. Girard

و این جایگذاری بـرای m در هر یك از معادلات بـه‌دست آمده تکرار می‌شود. معمولا کوشش می‌شود m از سمت راست معادلهٔ (۱۰۵) برداشته شود، اما با این روش m در مخرج کسر به تدریج دور می‌شود. اگر این جایگذاری ساده چندبار تکرار شود می‌بینیم که

$$m=\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cdots}}}}$$

این‌دستور بیان بسیار مهیج چیزی‌است،اما چیزی‌که بیان دقیقش‌مشکل‌است.* یك‌راه معنی‌دادن به‌عبارت طرف دوم این فرمول این است‌که دنبالهٔ‌کسرهای‌مرکب

$$\frac{۱}{۱},\quad \cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}},\quad \cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}},\quad \cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱+\cfrac{۱}{۱}}}},\ \ldots$$

راکه درعبارت بالا وجود دارند درنظربگیریم و آن‌را حد این دنباله تعریف‌کنیم. نخستین پنج عدد از این اعداد عبارت‌اند از ۱، ۱/۲، ۲/۳، ۳/۵، ۵/۸، و بـاکمی تأمل خواننده به‌عدد بعدی نیز پی می‌برد. از این پس به‌آسانی می‌توان حدس زد و حتی نشان دادکه اعداد صحیحی کـه در مخرج هرکسر (و در صورت کسر بعد) ظاهر می‌شونـد اعداد فیبوناتچی‌اند! بنابراین حالا m بـه‌عنوان یك‌حد به‌ما داده می‌شود.

مسأله

۳۰۵. نشان دهید هرگاه یکی از کسرهـای بالا مساوی p/q باشدکسر بعد مساوی $q/(p+q)$ است.

---

* برای درك دقیق آنچه‌که توسط چنین عبارتی تعریف می‌شود کتاب کسرهای مسلسل تألیف الدز (C. D. Olds) را بخوانیدکه از همین مجموعه کتابهاست.

صد سال بعداز کشف ژیرار، سیمسون[1] (۱۷۳۴) این واقعیت را ثابت کردکه این کسرها آن‌طور که مورد انتظار است واقعاً به‌عدد m همگرا هستند. او نشان داد که این کسرهای متوالی متناوباً فراتر و فروتر از مقدار نهایی خود تغییر می‌کنند، کسرهای به‌شمارهٔ زوج یک‌دنبالهٔ نزولی وکسرهای به‌شمارهٔ فرد یک‌دنبالهٔ صعودی تشکیل می‌دهندکه حد هریک از آنها m است.

در بخش بعد خواهیم دیدکه چگونه می‌توان این موضوع را ثابت‌کرد.

مسأله

۵.۴۰ (الف) با نشان‌دادن اینکه دنبالهٔ بخشهای متناهی

$$\sqrt{1},\quad \sqrt{1-\sqrt{1}},\quad \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1}}},\ \ldots$$

دارای حد m نیست، نشان دهید کـه روش زیر بـرای حل معادلهٔ $m^2=1-m$ معقول نیست:

$$m=\sqrt{1-m}=\sqrt{1-\sqrt{1-m}}=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-m}}}$$
$$=\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\ldots}}}$$

(ب) نشان دهید τ، عکس m، در معادلهٔ $\tau^2=1+\tau$ صدق می‌کند و روش حل

$$\tau=\sqrt{1+\tau}=\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}}=\ldots$$

معقول است به‌این دلیل که دنبالهٔ متشکل از بخشهای متناهی آن حد دارد.

۵.۵ دنبالهٔ دیگری که به m می‌گراید

در طرح فعلی برای تقریب m، ساده‌تر آن است که a را واحد طول بگیریم، یعنی $a=1$؛ دراین‌صورت

$$\frac{b}{a}=\frac{b}{1}=m$$

---

1. Simson

MATH75.IR

و اضلاع بزرگتر (همین‌طور کوچکتر) مستطیلهای زرین متوالی به‌طولهای

$$۱+m,\ ۱,\ m,\ ۱-m,\ ۲m-۱,\ ۲-۳m,\ ۵m-۳,\ ۵-۸m,$$
$$۱۳m-۸,\ ۱۳-۲۱m,\ \ldots$$

هستند. از نظر هندسی روشن است که این اعداد به‌صفر نزدیك می‌شوند. امـا مثلا اگر $۵-۸m$ کوچك باشد، یعنی اگر

$$۵-۸m\approx ۰$$

دراین‌صورت m تقریباً $۵/۸$ است، یعنی $m\approx ۵/۸\approx ۰٫۶۱۸$. این‌استدلال کاملا کلی است؛ هرجمله را که «تقریباً مساوی» صفر بگیریم، تقریبی بـرای m به‌دست می‌دهد. به‌این طریق وقتی از پنجمین جمله شروع کنیم به‌دست می‌آوریم

$$\frac{۱}{۲},\ \frac{۲}{۳},\ \frac{۳}{۵},\ \frac{۵}{۸},\ \frac{۸}{۱۳},\ \frac{۱۳}{۲۱},\ \frac{۲۱}{۳۴},\ \frac{۳۴}{۵۵},\ \frac{۵۵}{۸۹},\ \ldots$$

مسأله

۵۰۵. هم‌ارز اعشاری تعدادی از این جمله‌ها را پیدا کنید. نسبتهای ۶۱۰/۳۷۷ و ۹۸۷/۶۱۰ را بررسی کنید، این دو نسبت در کجای این دنباله جای دارند؟

قاعدهٔ تشکیل این کسرها روشن‌است: مخرج یك کسر صورت کسر بعدی‌است و مجموع صورت و مخرج آن، مخرج کسر جدید است، یعنی

$$\text{از}\ \frac{p}{q}\ \text{کسر}\ \frac{q}{p+q}\ \text{نتیجه می‌شود.}$$

ازاینجا بی‌درنگ معلوم می‌شود که دنبالهٔ مخرج کسرها دقیقاً سری فیبوناتچی است؛ والبته‌دنبالهٔ صورت کسرها نیز چنین است؛ تنها یك‌مورد جزئی دربارهٔ اعداد اولیه ۱ و ۱ وجود دارد آن‌هم یادآور می‌شویم که بدون آنها شروع کردیم.

مسأله

۶۰۵. آیاهرکدام‌ازکسرهای‌بالا به‌طورعددی ازکسر قبلی خود به‌m نزدیکتراست؟

قرینه‌ای که جواب شما را تأییدکنند ارائه دهید.

نشان خواهیم‌دادکه تقریبات متوالی m حول آن نوسان‌می‌کنند. مثلاً ۳۴/۵۵ و ۵۵/۸۹ را درنظر بگیرید. این‌دو در رابطهٔ سادهٔ

$$\frac{۳۴}{۵۵}\times\frac{۵۵}{۸۹}+\frac{۵۵}{۸۹}=۱ \tag{۳.۵}$$

صدق می‌کنند. لازم نیست با مخرج مشترك گرفتن این رابطه را تحقیق‌کنید؛ راه‌کار حذف ۵۵ از صورت و مخرج کسرهای موجود دراولین جمله است. اگر معادله‌ای را که m در آن صدق می‌کرد به‌صورت

$$m\cdot m+m=۱ \tag{۴.۵}$$

بنویسیم با تساوی بالا شباهتی دارد. به‌این شباهت توجه‌کنید.

اکنون بیایید فرض‌کنیم‌که ۳۴/۵۵ بزرگتر از ۵۵/۸۹ است (که هست)، اگر ۳۴/۵۵ را با ۵۵/۸۹ در (۳.۵) عوض‌کنیم، معادله برقرار نمی‌شود زیرا سمت چپ آن کوچکتر می‌شود. بنابراین $(۵۵/۸۹)^۲+۵۵/۸۹$ کوچکتر از ۱ است. این نشان می‌دهدکه ۵۵/۸۹ از m کوچکتر است. به‌طور مشابهی این‌بار فرض می‌کنیم که ۵۵/۸۹ کوچکتر از ۳۴/۵۵ است و ۵۵/۸۹ را در (۳.۵) با عدد بزرگتر عوض می‌کنیم، درمی‌یابیم که ۳۴/۵۵ از m بزرگتر است. اتفاقاً ۳۴/۵۵ از ۵۵/۸۹ بزرگتر است، اما حتی اگر چنین‌هم نبود آنچه‌که استدلال ما نشان می‌دهد این‌است: کوچکترین این‌دو عدد از m کوچکتر است و بزرگترین این‌دو از m بزرگتر است. همان‌گونه که حالا نشان خواهیم داد براساس معادلهٔ (۴.۵) این‌دو عدد نمی‌توانند مساوی باشند.

استدلال کاملا کلی است: هرجفت تقریبات متوالی به‌صورت p/q و $q/(p+q)$ (که درآن p و q اعداد صحیح‌اند) هستند و در معادلهٔ

$$\frac{p}{q}\cdot\frac{q}{p+q}+\frac{q}{p+q}=۱ \tag{۵.۵}$$

صدق می‌کنند. مقایسه با معادلهٔ (۴.۵) نشان می‌دهدکه اگر این دوکسر می‌توانستند مساوی باشند هریك مساوی m می‌شد، اما m گنگ است (بخش ۲.۵ را ببینید). از این‌رو این‌کسرها مساوی نیستند. برای دیدن اینکه m بین آنهاست، ملاحظه

می‌کنیم که اگر کسر بزرگتر را با کسر دیگر در معادلهٔ (۵.۵) عوض کنیم، سمت چپ کوچکتر از ۱ می‌شود؛ این نشان می‌دهد [مقایسهٔ با (۴.۵)] که کسر کوچکتر، از m کوچکتر و به‌طور مشابه کسر بزرگتر، از m بزرگتر است.

خواننده بدون هیچ دردسر اکنون دریافته است که نظرات سیمسون محقق شده‌اند. پیش‌از آنکه به‌پیچ لگاریتمی وابسته به‌مستطیل زرین بپردازیم دو مسألهٔ جالب‌توجه‌را ذکر می‌کنیم: یکی‌مربوط به توانهای m و دیگری مسألهٔ شگفت‌انگیز لاگرانژ[1] دربارهٔ مانده‌های اعداد فیبوناتچی به پیمانهٔ هر عدد صحیح است. مسألهٔ دوم مشکل است. برای حل آن فصل بعد را ملاحظه کنید.

مسأله‌ها

۷.۵ روابط زیر را ادامه دهید: $m^۲ = ۱ - m$؛ $m^۳ = m - m^۲ = ۲m - ۱$؛ $m^۴ = ۲m^۲ - m = ۲ - ۳m$؛ ... . آیا می‌توانید یک دستور کلی بنویسید؟ همین کار را برای $\tau = ۱ + m$؛ $\tau^۲ = \tau + ۱$؛ $\tau^۳ = \tau^۲ + \tau = ۲\tau + ۱$؛ ... انجام دهید.

۸.۵ (الف) اعداد فیبوناتچی به پیمانهٔ ۲ عبارت‌اند از ۱، ۱، ۰، ۱، ۱، ۰، ... ؛ به پیمانهٔ ۳، عبارت‌اند از ۱، ۱، ۲، ۰، ۲، ۲، ۱، ۰، ۱، ۱، ۲، ... ؛ هر دو دنباله دوره‌ای هستند. نشان دهید که دنبالهٔ اعداد فیبوناتچی به‌پیمانهٔ ۴ نیز دوره‌ای است. به‌طور مشابهی دوره‌ای‌بودن آن‌را به پیمانهٔ ۵ و ۶ نشان دهید. (این سری به‌پیمانهٔ ۱۰ دورهٔ ۶۰ دارد.)

(ب) آیامی‌دانید که‌چگونه‌می‌توانیدمانده‌های به‌پیمانهٔ۳،۴،۵،۶ رابدون آنکه عملا اعدادبزرگ فیبوناتچی‌را محاسبه کنید، به‌دست آورید؟ با استفاده ازاین‌مطلب، و این قاعده که هرعدد مجموع دوعدد قبلی است، آیا می‌توانید ادعای لاگرانژ را ثابت کنید: مانده‌های اعداد فیبوناتچی به‌پیمانهٔ هرعدد صحیح به‌هرحال دوره‌ای است؟ راهنمایی: اگر n، پیمانه باشد، دوره از $n^۲ + ۱$ بیشتر نیست.

۶.۵ زیگزاگ مارپیچی

کمی بعد زیگزاگ مارپیچی شکلی خواهیم ساخت که رأسهای آن برمارپیچ بسیار زیبایی جای دارند. این زیگزاگ ما را به منشأ این مارپیچ هدایت می‌کند و همین‌طور سیمایی اساسی را که ترسیم مارپیچ بر آن متکی است، آشکار می‌سازد.

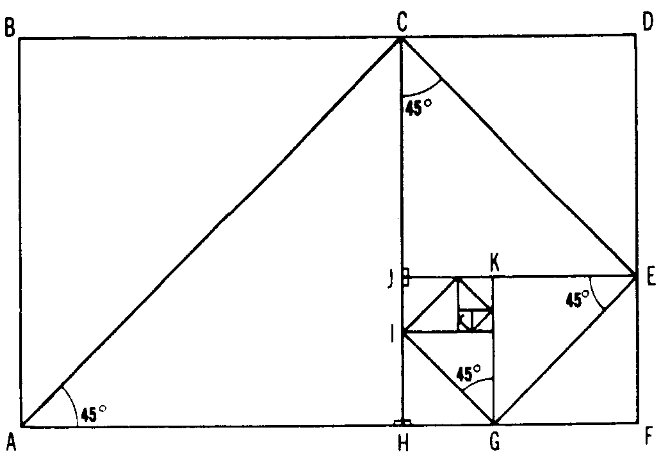
---

1. Lagrange

MATH75.IR

همزمان پیچاکـی از مربعهای متوالی کوچك‌شونـده و نیز پیچاکی از مستطیلها را خواهیم‌ساخت، و قطعه‌ای از پیچاك خودمان را هم رسم می کنیم. از A، گوشهٔ سمت چپ‌پایین مستطیل زرین $ABDF$ شروع می کنیم، شکل ۸.۵ را ببینید، خط AC را با زاویهٔ °۴۵ رسم می کنیم تـا ضلع بالا را در C قطع کند و عمود CH را فرود می‌آوریم تا مربعی از مستطیل جدا کند. سپس بـا استفاده از مستطیل زرین جدید $CDFH$ که به‌قاعدهٔ CH است همین ترسیم را تکرار می کنیم، یعنی خط CE را که زاویهٔ °۴۵ با CH می‌سازد رسم می کنیم و عمود EJ را فرود می‌آوریم تـا مربعی از آن جدا کند و مستطیل $EFHJ$ و به‌قاعدهٔ EJ را در اختیارما بگذارد. سپس خط EG را رسم می کنیم به‌قسمی که با EJ زاویهٔ °۴۵ بسازد و عمود GK را فرود می‌آوریم و از نقطهٔ G در مستطیل جدید $GHJK$ ترسیم را ادامه‌می‌دهیم. به‌دیگر سخن، درهر مرحله خطی از رأس سمت چپ پایینی مستطیل زرین که زاویهٔ °۴۵ با قاعدهٔ آن می‌سازد رسم می کنیم، این‌خط ضلع بالایی مستطیل را درنقطه‌ای قطع می کندکه ترسیم مشابه بعدی ازآن شروع می‌شود. هر رأس جدید به‌مستطیلی تعلق دارد کـه از مستطیل قبلی بـا یك چرخش ۹۰ درجه‌ای به‌دست آمده است و اضلاع آن m برابر اضلاع مستطیل قبلی‌اند. هر مستطیل به اندازهٔ °۹۰ حول خود می‌چرخد و به‌نسبت m کوچك می‌شود.

تا آنجاکـه مربعها و مستطیلهای متوالی را درنظر می‌گیریم وضعیتی همانند قبل وهمان طول‌اضلاع داریم: $m+1$، ۱، m، $1-m$، $2m-1$، ...، والی آخر.



شکل ۸.۵

MATH75.IR

به‌دیگر سخن دنبالهٔ m^{-1}، ۱، m، m^2، m^3، ... را به‌دست می‌آوریم که خواننده یا قبلا ثابت کرده است یا اکنون می‌تواند ثابت کند و این اثبات می‌تواند صرفاً با مشاهدهٔ شکل (یا از برقراری معادلهٔ $m^2 = 1 - m$) و این واقعیت باشد که هر طول از طول قبلی با کاهش آن به‌نسبت ۱ به m به‌دست می‌آید.

مسأله‌ها

۹.۵ پیچاك مستطیلها را می‌توان چنین بیان کرد: $ABDF$، $CDFH$، $EFHJ$، $GHJK$، ... . آیا می‌توانید روش ترتیب رأسهای مستطیلهای متوالی را بیان کنید؟

۱۰.۵ اگرضلع AB به‌طول ۱ باشد، AC به‌طول $\sqrt{2}$ است. با استفاده از دستور یك تصاعد هندسی نامتناهی نشان دهید که طول زیگزاگ $ACEGI\ldots$ برابر با $\sqrt{2}/m^2$ است. آیا برقراری این دستور را حتی در موردی که نسبت مشترك گنگ است ثابت کرده‌ایم؟

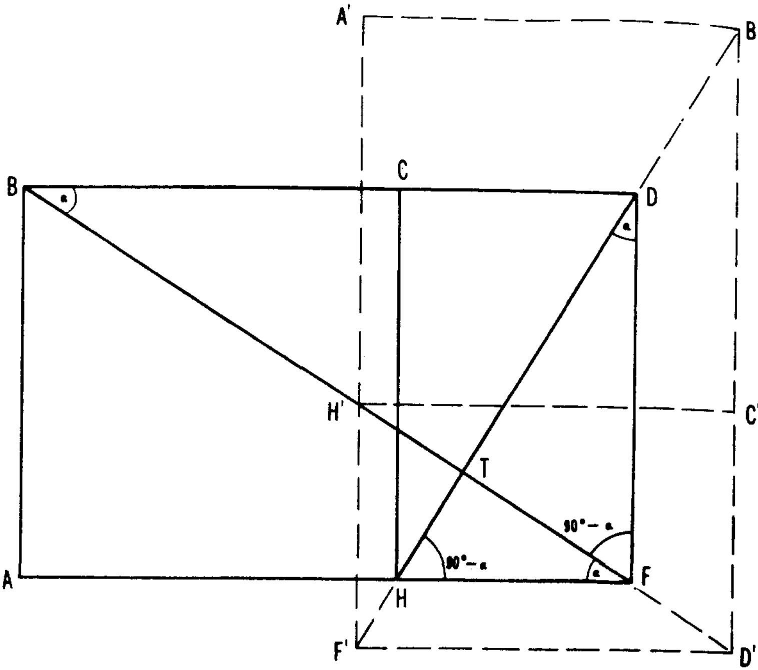
۷.۵ استفاده از تبدیلات تشابه

از شکل ۸.۵ معلوم است که زیگزاگ به‌یك نقطهٔ نهایی T نزدیك می‌شود. ثابت خواهیم کرد که T نقطهٔ تقاطع قطر BF ازمستطیل $ABDF$ و قطر DH از $CDFH$ است (قطر دوم تالی قطر اول تحت اثر حرکت پیچاکی بالاست). برهان آن از حیث تکنیك بسیار ساده است. در شرحی که گذشت چنین تصور می‌کردیم که خودمان با هرخط جدید زیگزاگ $90°$ می‌چرخیم. در اینجا می‌خواهیم بگذاریم که مستطیلها بچرخند. هدفمان این است که با ترکیب دو حرکت، یکی دوران به‌اندازهٔ $90°$ ودیگری انقباض به‌نسبت ۱ به m جای‌مستطیل $ABDF$ را به $CDFH$ بدهیم به‌طوری که A به C، B به D، D به F و F به H برود. با گرفتن T به‌عنوان مرکز هردو حرکت، می‌توانیم حرکت مزبور را خیلی ساده تشریح کنیم. ابتدا کل صفحه‌را حول T به‌اندازهٔ زاویهٔ $90°$ درجهت‌حرکت عقربه‌های‌ساعت می‌چرخانیم، تا مستطیل $ABDF$ به وضعیت جدید $A'B'D'F'$ درآید؛ شکل ۹.۵ را ببینید. سپس همهٔ نقاط صفحه را به‌نسبت ۱ به m به طرف T در راستای خطوط شعاعی منقبض می‌کنیم تا $A'B'D'F'$ بر $CDFH$ جای بگیرد. این جفت حرکتها که بدانها تبدیلات صفحه* می‌گویند، عملا نقاط A، B، D، F را به‌ترتیب برنقاط C،

---

* برای یافتن اطلاعات بیشتر درباب تبدیلات نگاه کنید به تبدیلات هندسی تألیف یاگلوم (I. M. Yaglom) از همین سری کتابها.

MATH75.IR



شکل ۹.۵

D، F، H می‌نگارند. تکرار این تبدیل مرکب به دفعات نامحدود، کل زیگزاگ را پدید می‌آورد.

مرحلهٔ نخست برهانمان شامل این‌است که نشان دهیم قطر BF ازمستطیل‌اول قطر DH از مستطیل دوم را درنقطهٔ T به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. چون $ABDF$ و $CDFH$ مستطیلهای متشابه‌اند، همهٔ زاویه‌هایی که در شکل ۹.۵ با α مشخص شده‌اند مساوی‌اند. به‌علاوه در مثلثهای قائم‌الزاویه و متشابه BFD و DHFداریم

$$\measuredangle BFD = ۹۰^\circ - \alpha = \measuredangle DHF$$

و بنابراین

$$\measuredangle HTF = ۱۸۰^\circ - [\alpha + (۹۰^\circ - \alpha)] = ۹۰^\circ$$

و درواقع BF و DH یکدیگر را در T به‌زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. بنابراین‌اگر $ABDF$ به‌اندازهٔ ۹۰° حول نقطهٔ T دوران کند، BF به‌وضعیت جدید $B'F'$ درمی‌آیدکه برخط اولیهٔ BF عمود است (شکل ۹.۵ را ببینید) و $B'F'$ شامل‌خط

MATH75.IR

DH است. بـه‌طور مشابهی، DH به $D'H'$ تبدیل می‌شود و $D'H'$ بر راستای BF جای خواهد گرفت.

سپس ملاحظه کنید که

$$\frac{B'D'}{DF}=\frac{۱+m}{۱}=\frac{۱}{m}=\frac{B'T}{DT}=\frac{D'T}{FT}$$

به‌علاوه، چون

$$\frac{A'B'}{CD}=\frac{AB}{CD}=\frac{B'T}{DT}=\frac{۱}{m}$$

و چون CD و $A'B'$ موازی‌اند، واضح است که C بر $A'T$ جای دارد و

$$\frac{A'T}{CT}=\frac{۱}{m}$$

به‌طور مشابهی، H بر $F'T$ جای دارد و

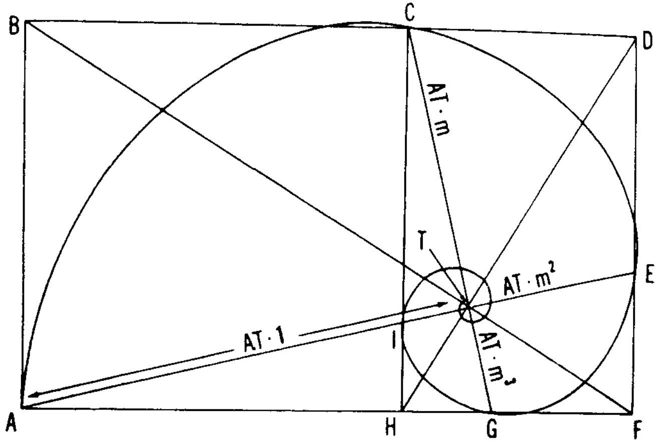
$$\frac{F'T}{HT}=\frac{۱}{m}$$

بنابراین، همچنان که نشان دادیم وقتی همهٔ فاصله‌های تـا نقطهٔ T، به‌اندازهٔ ضریب m منقبض شوند مستطیل $A'B'D'F'$ به‌مستطیل $CDFH$ تبدیل می‌شود.

استدلال ما تنها به‌نسبت زرین m یعنی نسبت ضلع کوچکتر به‌ضلع بزرگتر مستطیل مفروض بستگی دارد و نه به‌ابعاد واقعی آن. چون ایـن نسبت زرین برای همهٔ مستطیلهای حاصل از این ترسیم حفظ می‌شود، برهان بالا برای همهٔ آنها معتبر است. این‌موضوع نشان می‌دهد که در تمام مراحل این‌استدلال از T به‌عنوان مرکز دوران وانقباض استفاده می‌شود ونیز این‌نقطه درون همهٔ مستطیلهای منقبض‌شونده‌ای است که توسط طرح ما ترسیم می‌شوند. و بنابراین نقطهٔ هدف زیگزاگ است.

۸.۵ مارپیچ لگاریتمی

اگرمحورها و واحدهای زیر را برگزینیم، می‌توانیم دستور ساده‌ای برای رأسهای A، C، E، G، I، ... از زیگزاگ شکل ۸.۵ بیابیم. T را به‌عنوان مبدأ مختصات می‌گیریم، وفرض‌می‌کنیم r نمایش فاصله‌از T باشد. خط AT را جهت اولیه‌انتخاب



شکل ۱۰.۵

می‌کنیم (شکل ۱۰.۵ را ببینید). یك قائمه (یك‌چهارم‌دور $= \pi/2$رادیان $= 90°$) راکه از AT اندازه‌گرفته می‌شود به‌عنوان واحد زاویه و جهت حرکت عقربه‌های ساعت را جهت مثبت می‌گیریم. فرض‌کنیم t تعداد قائمه‌ها را نشان دهد. رأسهای A، C، E، G، ... به‌ترتیب از دوران AT حول T به‌تعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ... قائمه و انقباض فاصلهٔ AT توسط m^0، m^1، m^2، m^3، ... به‌دست می‌آیند. بنابراین r، فاصلهٔ هریك از این رأسهای زیگزاگ مارپیچی تا T چنین نوشته می‌شود

$$r = AT \cdot m^t \qquad (۶.۵)$$

این دستور جدول زیر را به‌ما می‌دهد:

رأس	A	C	E	G	I	...
t	۰	۱	۲	۳	۴	...
r	AT	$AT \cdot m$	$AT \cdot m^2$	$AT \cdot m^3$	$AT \cdot m^4$	...
$R = \frac{r}{AT}$	۱	m	m^2	m^3	m^4	...

MATH75.IR

اگر AT را واحد فاصله بگیریم، دستور باز هم ساده‌تری خواهیم داشت. این کار را می‌توانیم بـا قراردادن $R=r/AT$ انجام دهیم. در این‌صورت معادلهٔ (۶.۵) برحسب R چنین می‌شود

$$R=m^t$$

اگر برای t، متوالیاً جمله‌های تصاعد حسابی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ... را جانشین کنیم، درایـن‌صورت، تصاعد هندسی ۱، m، m^2، m^3، ... را بـرای R بـه‌دست می‌آوریم. اکنون موقعیت همهٔ این رأسها مشخص است، زیرا t تعداد قائمه‌هاست و R ضریبی است که AT در آن ضرب می‌شود.

اکنون می‌توان نشان داد که اگر بگذاریم t همهٔ مقادیر حقیقی مثبت (به‌جای صرفاً اعداد صحیح) را اختیار کند، مارپیچ همواری به‌دست می‌آوریم که درشکل ۱۰.۵ ترسیم شده است.

مسأله‌ها

۰۱۱.۵ با استفاده از مقادیر $t=۱/۲, ۳/۲, ۵/۲, ...$ نقاط دیگری از مارپیچ را به‌دست آورید. نقاط بیشتری را به‌ازای سایر مقادیر گویای t پیدا کنید.

۰۱۲.۵ هرگاه t مقادیر منفی راهم اختیار کند چه‌می‌شود؟ R چقدر بزرگ می‌شود؟

یک‌بار که خم رسم شود همهٔ توانهای m را به‌ما می‌دهد، مثلا

$m^{۱/۲}=\sqrt{m}$ نظیر $t=\frac{۱}{۲}$ است یعنی، $\frac{۱}{۲}=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$ قائمه؛

$m^{۱/۳}=\sqrt[۳]{m}$ نظیر $t=\frac{۱}{۳}$ است، یعنی $\frac{۱}{۳}=\frac{۹۰^\circ}{۳}=۳۰^\circ$ قائمه؛

$m^{۵/۶}=\sqrt[۶]{m^۵}$ نظیر $t=\frac{۵}{۶}$ است، یعنی $\frac{۵}{۶}=\frac{۵}{۶}\times ۹۰^\circ=۷۵^\circ$ قائمه

خم

$$R=m^t$$

را مارپیچ همزاویه و یـا مارپیچ لگاریتمی (در ایـن‌حالت لگاریتمهایی در پـایهٔ

غیرمعمول m مطرح است) می‌نامند. با انتخاب مناسب ثابتهای c، k، h این معادله را می‌توان به‌صورتهای متعارف دیگری نیز بیان کرد:

$$R=10^{ct}, \qquad R=2^{kt}, \qquad R=e^{ht}$$

مزیت صورتهای بالا این‌است‌که ۱۰، ۲ و $e(\approx 2.718)$ پایه‌های مناسبتری برای لگاریتمها هستند.

مارپیچ لگاریتمی دو ویژگی عمده دارد:

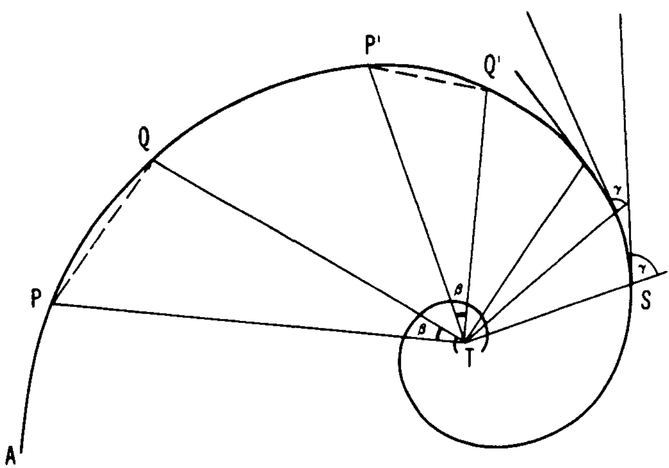
i) اگر P، Q و P'، Q' متعلق به‌خم چنان باشندکه

$$\measuredangle PTQ=\measuredangle P'TQ'=\beta,$$

دراین‌صورت مثلثهای PTQ و $P'TQ'$ متشابه‌اند، شکل ۱۱.۵ را ببینید.

ii) درهر نقطهٔ (S) از مارپیچ لگاریتمی، خط‌مماسی وجود داردکه با بردار شعاعی TS زاویهٔ ثابت (γ) می‌سازد.

اثبات ویژگی i) آسان است و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شود. ویژگی ii) مشکلتر است؛ تعریف مماس برخم نیازمند به‌حسابان است، باید نشان دادکه این خم درهر نقطه مماس دارد (این‌کار در این‌حالت آسان است به‌شرط آنکه نخست نشان داده شودکه خم دست‌کم دریك نقطه مماس دارد) و سپس ویژگی ii) را ثابت‌کرد.



شکل ۱۱.۵

MATH75.IR

مسأله‌ها

۱۳۰۵ · توضیح دهید چگونه خم شکل ۱۱۰۵ را می‌توانیم (معادل با جدول لگاریتمها) برای ضرب اعداد به‌کار بریم به‌شرط آنکه هر عدد را با یك طول بر یك خط کش نمایش دهیم که در T لولا شده است و با فرض اینکه بتوانیم زاویه‌های مربوطه‌را اندازه‌گیری و جمع کنیم.

۱۴۰۵ · کدام ویژگی این خم با کاربرد مفسر و مانتیس لگاریتمها متناظر است؟

۱۵۰۵ · با رسم این خم و استفاده از نقاله، بررسی کنید که مماس برخم در هر نقطهٔ (S) با بردارشعاعی TS زاویه‌ای حدود $۷۳°$ [به‌طورواقعی $\operatorname{arc\,tg}(\pi/۲\log\tau)$] می‌سازد.

۹۰۵ پنج‌ضلعی

شاید به‌این دلیل که ریاضیدانان با شدت و حدت کار می کنند، موضوع ریاضیات پاداش ومنفعت‌مکرر به‌آنها می‌رساند. مارپیچ لگاریتمی که توسط مستطیلهای متوالی پدید می‌آید و ظهور اعداد فیبوناتچی در دنباله‌ای از تقریبات برای نسبت زرین

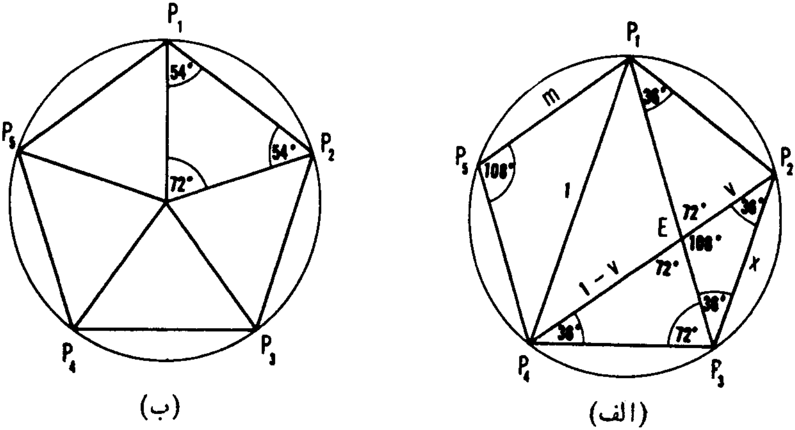
$$m=\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$$

رخدادهای مطبوع و غیرمنتظره‌ای هستند.

پاداش دیگری از این نوع، این واقعیت است که m نسبت ضلع یك پنج‌ضلعی منتظم به‌قطر آن نیز هست. درشکل ۱۲۰۵ (الف) فرض کنیم قطرهای برابر $P_۱P_۳$، $P_۲P_۴$، $P_۳P_۵$، $P_۴P_۱$، $P_۵P_۲$ به‌طول یك باشند، دراین‌صورت هرضلع مساوی با m است. برهانی درپی می‌آید.

پنج‌ضلعی منتظم را به‌این‌صورت تعریف می کنیم که کمانهای $P_۱P_۲$، $P_۲P_۳$، ...، $P_۵P_۱$ از دایرهٔ محیطی آن برابرند. این‌هم نتیجه می‌دهد که وترهای $P_۱P_۲$، $P_۲P_۳$،...، $P_۵P_۱$ برابرند. هریك‌از این‌وترها یك‌پنجم محیط‌دایره‌را در برمی گیرد و روبه‌رو به‌زاویهٔ مرکزی معادل $۲\pi/۵$ رادیان یا $۷۲°$ است، شکل ۱۲۰۵ (ب) را ببینید. پنج مثلث متساوی‌الساقین مرکزی قابل انطباق و با زاویه‌های $۵۴°$، $۵۴°$ و $۷۲°$ وجود دارد، بنابراین هر زاویهٔ رأس پنج‌ضلعی $۱۰۸°$ است. چون مثلثهای $P_۱P_۲P_۳$، ... [شکل ۱۲۰۵ (الف) را ببینید] متساوی‌الساقین هستند، زاویه‌های مجاور به‌قاعدهٔ آنها عبارت است از

MATH75.IR



شکل ۱۲۰۵

$$\measuredangle P_2EP_3 = 180^\circ - 2\times 36^\circ = 108^\circ \qquad \frac{1}{2}(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ;$$

و

$$\measuredangle P_1EP_2 = 72^\circ$$

قسمت اصلی برهـان از اینجا شروع می‌شود. نخست می‌بینیم کـه مثلثهای EP_2P_3 و $P_3P_4P_2$ در شکـل ۱۲۰۵ (الف) زاویه‌هـای °۳۶، °۳۶ و °۱۰۸ دارند، این دو مثلث متساوی‌الساقین و متشابه‌اند. EP_2 را بـا v، P_2P_3 را با x نشان می‌دهیم و خاطرنشان می‌کنیم که $P_2P_4 = 1$، و می‌نویسیم

$$\frac{v}{x} = \frac{x}{1} \text{؛ و بنابراین } v = x^2\text{،}$$

سپس به‌آسانی می‌بینیم که زاویه‌هـای مثلث EP_4P_3، °۷۲، °۷۲ و °۳۶ هستند و بنابراین مثلث متساوی‌الساقین است و

$$EP_4 = 1 - v = x \quad \text{یا} \quad v = 1 - x$$

بنابراین

$$x^2 = 1 - x$$

MATH75.IR

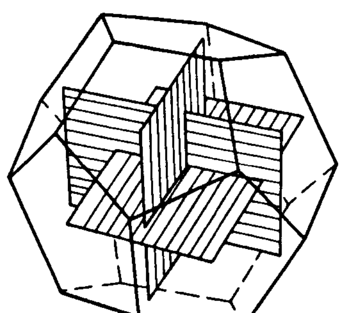
m ریشهٔ مثبت این‌معادله است، بنا براین نشان‌داده‌ایم که نسبت ضلع پنج‌ضلعی‌منتظم به‌قطر آن m است.

۱۰.۵ وابستگان به‌پنج‌ضلعی

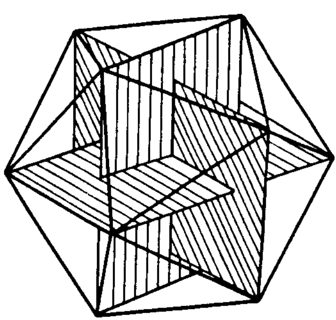
یونانیان [باستان] از مطالعهٔ پنج‌ضلعی دو پاداش گرفتند. نخست در دوازده‌وجهی‌و (تا اندازه‌ای با دقت بیشتر) در بیست‌وجهی از پنج‌ضلعی و نیز از مستطیل زرین استفاده می‌شود. این موضوع را در شکلهای ۱۳.۵ و ۱۴.۵ می‌توان دید. اما توضیحات بیشتری ارائه نمی‌شود چون ما را به‌هندسهٔ فضایی می‌کشاند. (جزئیات آن مشکل نیست و خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند به مقاله‌های کاکستر و گاردنر که پیشتر ذکرشان رفت مراجعه کند.)

دوم اینکه یونانیان ستارهٔ پنج‌پر را کشف کردند و آن‌را بسیار جالب توجه دیدند. شکل ۱۵.۵ را ببینید. فیثاغورسیان از آن به‌عنوان نوعی آرم عضویت استفاده می‌کردند و به آن ارزشی‌سمبولیك نسبت‌می‌دادند. به‌آسانی درآن نشانه‌ای از یك‌حرکت همیشگی می‌توان دید. از دیدگاه ریاضی بسیار جالب‌توجه است که به‌عنوان تجسمی‌از دوران‌صفحه با دورهٔ پنج (به‌طورنامحدود خودرا تکرارمی‌کند) درنظر گرفته شود، البته با دوران وابسته به‌پنج‌ضلعی معمولی فرق می‌کند.

خواننده توجه خواهدکرد که گذرهای زیر و رو در شکل یادآور منظرهٔ

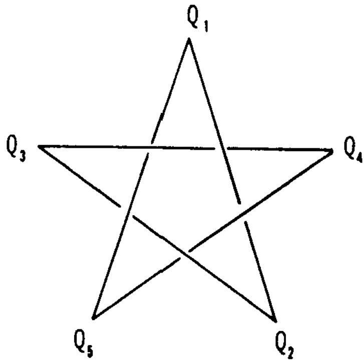


شکل ۱۳.۵ دوازده وجهی منتظم (۱۲ وجه، ۳۰ یال، ۲۰ رأس).

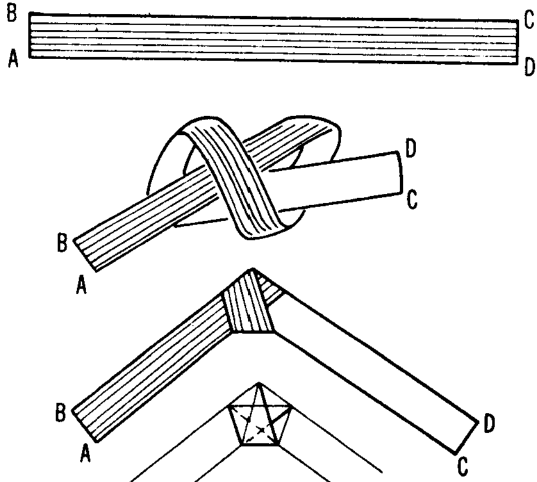


شکل ۱۴.۵ گوشه‌های سه مستطیل‌زرین، بر گوشه‌های یك بیست‌وجهی منتظم منطبق‌اند (۲۰ وجه، ۳۰یال، ۱۲رأس).

MATH75.IR



شکل ۵-۱۵



شکل ۵-۱۶

MATH75.IR

تقاطعهایی است کــه در بزرگراههای جدید برای سرعت بالا ساخته می‌شود. این ترسیمات زیر و رو روش جدیدی در ریاضیات برای نمایش گره‌هاست. اگرستارهٔ پنج‌پر عملا از نخ درست شود معلوم خواهد شد که این نخ گره‌خورده است. مسلماً اگر پنج‌ضلعی بسیار خوبی (به‌طور نظری یك پنج‌ضلعی دقیق) با گره‌زدن یك نوار کاغذی ساخته شود کاملترین انطباق صورت گرفته است. شکل ۱۶.۵ چگــونگی آن‌را نشان می‌دهد. اگر چنین کنیم و آن را مقابل نور بگیریم، نشانه‌ای از ستارهٔ پنج‌پر در آن می بینیم.

MATH75.IR

فصل شش

ترسیمها و برهانها

این آخرین فصل بیشتر به‌همان مطالب صفحات پیش کتاب می‌پردازد، که البته با روشهایی متفاوت سازمان داده شده است. در این فصل تأکید بر ترسیم و برهان است؛ لغت «ترسیم» به‌مفهومی کلی که شامل تعریف فرایندهای بینهایت باشد، به‌کار می‌رود. درهمان‌حال گزاره‌هایی دراین‌فصل ارائه می‌شوند که به‌بعضی ازمسأله‌های مطرح‌شدهٔ قبلی پاسخ می‌دهند.

۱.۶ برهان غیرمستقیم

مثالهای متعددی از برهان غیرمستقیم که برهان با استفاده از تناقض نیز نامیده‌می‌شود، در این‌کتاب داشته‌ایم. با همین روش نشان دادیم که $\sqrt{۲}$ و نسبت زرین گنگ‌اند. در اینجا الگوی ساده‌تری از این تکنیك بسیار مهم ارائه می‌کنیم.

ادعا. هیچ جفتی از اعداد صحیح (مثبت یا منفی) وجود نداردکه درمعادلهٔ

$$۲x+۶y=۱۵$$

صدق کند.

MATH75.IR

برهان. برای استدلال فرض کنیم که چنین جفتی از اعداد صحیح که آنها را m و n می‌نامیم وجود دارد. دراین‌صورت

$$۱۵ = ۴m + ۶n = ۲(۲m + ۳n)$$

این رابطه بیان می‌کند کـه ۱۵ عددی زوج است ($۲m + ۳n$ خارج‌قسمت تقسیم بر ۲ است) که نادرست است. و همین برهان را تمام می‌کند.

مسأله‌ها

۱.۶. این حقیقت را که $\sqrt{۲}$ گنگ است بپذیرید و به‌کمك آن ثابت کنید که عکس $(۱+\sqrt{۲})$ نیز گنگ است.

۲.۶. ثابت کنید عبارت $ax+by$ کـه درآن a و b دو عدد صحیح‌اند، به‌ازای انتخاب مقادیر صحیحی از x و y نمایش عدد صحیح c است اگـر و تنها اگر c بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b بخشپذیر باشد. بنابراین، مثلا معادلهٔ

$$۱۲x + ۱۸y = c$$

با اعداد صحیح x و y تنها وقتی برقرار می‌شود که c بر ۶ بخشپذیر باشد.

۲.۶ قضیه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی دربارهٔ خطوط متوازی به‌عنوان تقسیمگرهای تناسبی

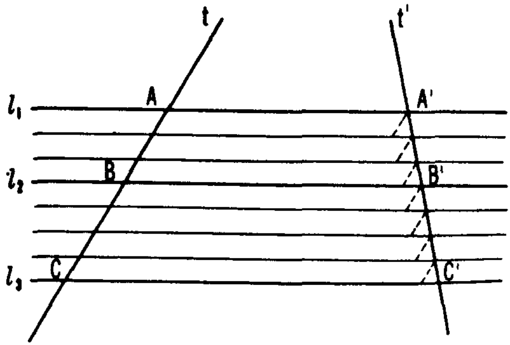
فرض: t و t' دوخطاند (به‌نام قاطع) که هریك از سه خط موازی $l_۱$، $l_۲$، $l_۳$ را آن طور که در شکل ۱.۶ نشان داده شده است، قطع می‌کنند.

حکم. طولهای پاره‌خطهایی کـه بر t و t' توسط ایـن سه خط موازی جدا می‌شوند متناسب‌اند، یعنی،

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

مثال. بررسی خط کشیهای شکل ۱.۶ نشان می‌دهد

$$\frac{AB}{BC} = \frac{۳}{۴} \quad \text{و به طور مشابهی} \quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{۳}{۴}$$



شکل ۱.۶

که قضیه را تأیید می‌کند.

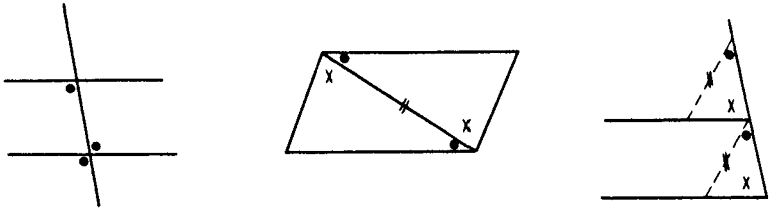
برهان. این مثال برهان قضیه را برای نسبتهای گویا درحالت کلی نیز شرح می‌دهد که AB/BC نسبت دو عدد صحیح مثلا m/n است.

الف) حالت گویا یا متوافق. درحالتی که نسبت گویا باشد l_1، l_2، l_3 بخشی از یك دستگاه خط‌کشی را تشکیل می‌دهند که نسبت m/n را نشان می‌دهد. AB را به m فاصلهٔ مساوی و BC را به n فاصلهٔ مساوی که همه به‌یك طول هستند تقسیم و از نقاط تقسیم خطوطی موازی رسم می‌کنیم.

حال برای اثبات اینکه نسبت m/n به t' منتقل می‌شود کافی است نشان‌دهیم که پاره‌خطهای سمت راست همه باهم برابرند.

برای این منظور پاره‌خطهایی کمکی رسم می‌کنیم که همه با t موازی باشند و هرکدام را هنگامی که با پاره‌خط نظیرشان بر t درنظر بگیریم ضلعی از یك متوازی‌الاضلاع را تشکیل‌دهند، وهنگامی که با پاره‌خط‌نظیرشان بر t' درنظر بگیریم ضلعی از یك مثلث را بسازند. اکنون به‌آسانی ثابت می‌شود که همهٔ این مثلثها قابل انطباق‌اند؛ این اثبات بر سه‌گزارهٔ مقدماتی متکی است: (یك) دو مثلث قابل‌انطباق‌اند اگر یك ضلع وهمهٔ زاویه‌های یکی بر اجزاء نظیر دیگری قابل‌انطباق باشند. (دو) ضلعهای مقابل در متوازی‌الاضلاع برابرند. (سه) زاویه‌های متناظر که ازبرخورد یك‌قاطع با دوخط متوازی پدید می‌آیند برابرند. شکل ۲.۶ را ببینید.

ب) حالت نامتوافق: برهان از راه پیوستگی. وقتی AB/BC گویا نباشد، روشی که درحالت قبل نشان داده شد، معتبر نیست. حالا بیایید فرض کنیم AB/BC مثلا همان‌نسبت‌زرین $(\sqrt{5}-1)/2$ باشد. دنبالهٔ نسبتهای فیبوناتچی u_n را اختیار می‌کنیم که با



(الف) (ب) (ج)

شکل ۲.۶

$$u_n = \frac{f_{n-1}}{f_n} \qquad n = ۱،\ ۲،\ ۳، \ldots$$

تعریف می‌شود و در آن $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ وجمله‌های اول دنبالهٔ f_i عبارت‌اند از $f_1 = ۱$، $f_2 = ۱$، $f_3 = ۲$، $f_4 = ۳$، $f_5 = ۵$، ... . می‌توان نشان داد که با بزرگ و بزرگترشدن n، نسبتهای فیبوناتچی u_n به‌نسبت زرین m می گرایند.* به‌طور نمادی،

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}}\, u_n = m.$$

اکنون فرض‌کنیم نقاط انتهایی A و C از پاره‌خط AC تثبیت شده باشند، دنباله‌ای از نقاط B_n براین پاره‌خط به‌قسمی می‌سازیم که به‌ازای هر n،

$$\frac{AB_n}{B_nC} = u_n$$

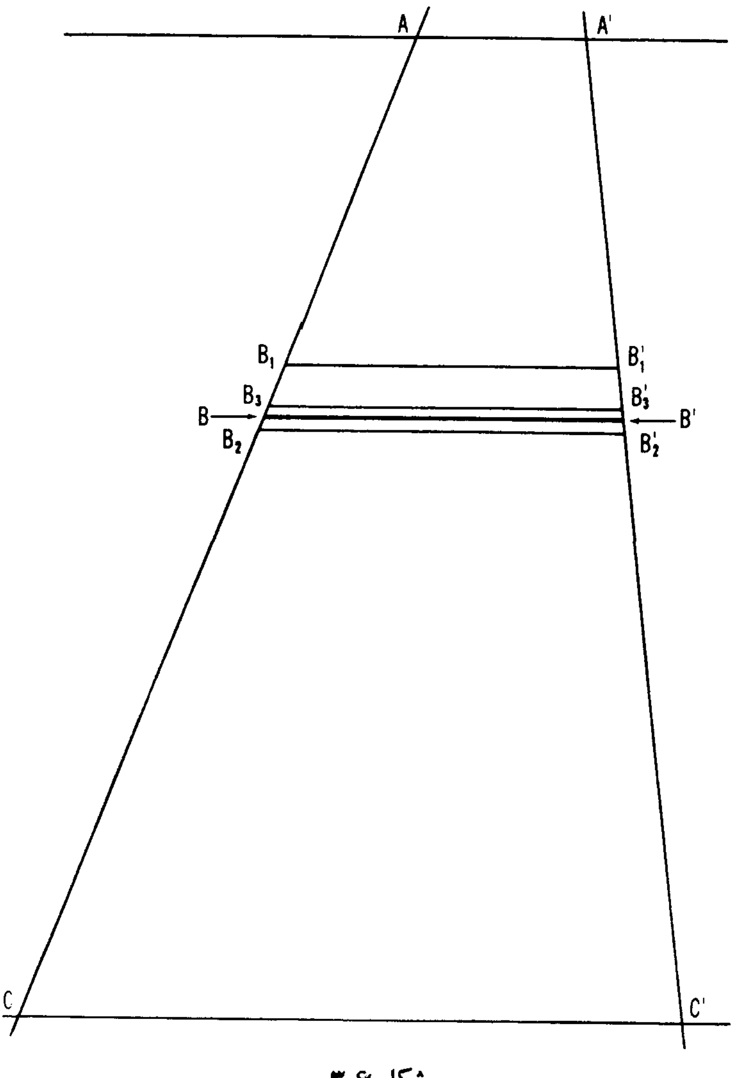
دراین‌صورت B_n به B و این نسبتها به m می گرایند. از هر B_n خطی موازی با BB' رسم می‌کنیم (شکل ۳.۶ را ببینید)، در نتیجه نقطهٔ B'_n را بر $A'C'$ به‌دست می‌آوریم.

از حالت گویا نتیجه می‌شود که

$$\frac{A'B'_n}{B'_nC'} = u_n$$

---

* برهانی برای این‌ادعا را در کسرهای مسلسل تألیف الدز (C. D. Olds) ازهمین مجموعه کتابها ببینید.



شکل ۶ـ۳۰

و بنابراین با افزایش n، این‌نسبتها به m می‌گرایند. آنچه برای اثبات باقی‌می‌ماند این واقعیت شهوداً بدیهی است که نقطهٔ B' حد دنبالهٔ B'_1، B'_2، B'_3، ... است که با این ترسیم حاصل می‌شود.

MATH75.IR

علت اینکه این‌مطلب را یك «واقعیت شهودی» درنظرمی گیریم (درریاضیات همواره شهود مدنظر است اما اطمینان چندانی به آن نیست) تأثیر درستی است که از شکل ۳.۶ ناشی می‌شود، یعنی نقطهٔ متغیر B'_n با نقطهٔ B_n به‌طریقی تغییر می کند که‌پاره‌خطهای $A'B'_n$ به‌پاره‌خط $A'B'$ می گرایند، زیرا پاره‌خطهای AB_n به‌پاره‌خط AB می گرایند. روش دیگر برای بیان این عبارت این‌است که نقاط B'_n با نقاط B_n به طور پیوسته تغییرمی کنند. نشان خواهیم دادکه اگر نقاط B'_n به‌حدی میل کنند، این حد باید B' باشد. اما برای اثبات پیوستگی، به‌اصلی هندسی نیازمندیم (که در هندسهٔ فیثاغورسیان نیامده است) که به کمك آن بتوانیم وجود حد را نتیجه بگیریم. این اصل، نمونهٔ هندسی اصل بولتسانو-وایرشتراس است که شرحش قبلا در این‌کتاب آمده است.

با استفادهٔ از این اصل درمی‌یابیم که دنبالهٔ B'_1، B'_2، B'_3، ... نقطه‌ای حدی داردکه فعلا آن‌را B'' می‌نامیم. B'' نقطهٔ حدی دو دنبالهٔ B'_1، B'_3، B'_5، ... واقع بر $A'B'$ و B'_2، B'_4، B'_6، ... واقع بر $B'C'$ است. از اینجا نتیجه می‌شود که B'' بر هر دو پاره‌خط $A'B'$ و $B'C'$ قرار دارد؛ اما تنها نقطهٔ مشترك این دو پاره‌خط B' است، پس $B''=B'$. این، اثبات قضیه را برای حالتی که نسبت مساوی m است، تمام می کند. اما ما از هیچ ویژگی خاص m استفاده نکردیم جز اینکه m حد یك دنباله از اعداد گویاست که از بالا و پایین به‌آن می گراید، و این‌هم برای همهٔ اعداد حقیقی درست است. بنابراین برهان کاملا کلی است.

پ) حالت نامتوافق: برهان از راه تناقض. هندسه‌دانان یونان [باستان] از برهان متکی برپیوستگی که اینك توضیح دادیم استفاده نمی کردند بلکه به‌استدلال غیرمستقیم تکیه داشتند. فرض‌کنید ادعا درست نباشد، یعنی

$$\frac{AB}{BC}>\frac{A'B'}{B'C'} \quad \text{یا} \quad \frac{A'B'}{B'C'}>\frac{AB}{BC} \quad \text{یا}$$

نشان خواهیم دادکه این فرض به‌یك تناقض منجر می‌شود.

نخست بیایید فرض‌کنیم که

$$\frac{AB}{BC}>\frac{A'B'}{B'C'}$$

در این‌صورت عددگویای $r=m/n$ (m و n اعداد صحیح‌اند) وجود دارد به‌قسمی که

$$\frac{AB}{BC}>r>\frac{A'B'}{B'C'} \tag{۱۰۶}$$

گیریم D نقطه‌ای بر t بین A و C است به‌قسمی که

$$\frac{AD}{DC}=\frac{m}{n}$$

(شکل ۴.۶ را ببینید). در این‌صورت D بین A و B است زیرا درغیر این‌صورت AB/BC نابزرگتر از r خواهد بود. از D خط l_4 را موازی l_2 رسم می‌کنیم تا t' را در D' قطع کند. باید D' بین A' و B' باشد زیرا درغیر این‌صورت پاره‌خطهای موازی BB' و DD' یکدیگر را قطع می‌کنند. بنابراین

$$\frac{A'B'}{B'C'}>\frac{A'D'}{D'C'}$$

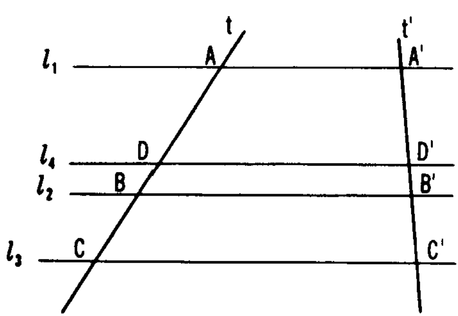
اما بنابر آنچه‌که دربارهٔ حالت گویا می‌دانیم،

$$\frac{A'D'}{D'C'}=\frac{AD}{DC}=r \text{، و بنابراین } \frac{A'B'}{B'C'}>r$$

که نابرابری (۱۰۶) را نقض می‌کند. پس فرض

$$\frac{AB}{BC}>\frac{A'B'}{B'C'}$$

منجر به‌یك تناقض می‌شود و بنابراین نادرست است.



شکل ۴.۶

MATH75.IR

به‌طور مشابهی می‌توانیم نشان دهیم که فرض

$$\frac{A'B'}{B'C'} > \frac{AB}{BC}$$

به‌تناقض می‌رسد. بنابراین

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

۳.۶ تعریف از راه بازگشت

می‌گوییم یك دنباله از اشیای ریاضی

شیء اول، شیء دوم، شیء سوم، ...

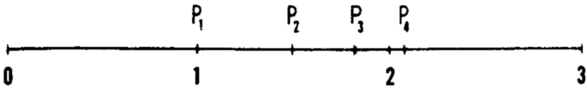
به طور بازگشتی ساخته می‌شود هرگاه دربیان هرشیء جدید از این‌واقعیت استفاده شود که شیء پیش‌از آن قبلا تعریف شده است. مثلا دنبالهٔ نقاط

$$P_{۱},\ P_{۲},\ P_{۳},\ \cdots \qquad (۲.۶)$$

را برمحور xها درنظر بگیرید که S_n طولهای آنها شرایط زیر را می‌پذیرد:

$$S_{۱} = ۱$$

$$S_n = S_{n-۱} + \frac{۱}{n}, \qquad n = ۲,\ ۳,\ ۴,\ \cdots \qquad (۳.۶)$$



شکل ۵.۶

به‌منظور مقایسه و تشخیص تفاوت توجه‌کنیدکه دنبالهٔ نقاط

$$Q_{۱},\ Q_{۲},\ Q_{۳},\ \cdots \qquad (۴.۶)$$

واقع برمحور xها که با a_n طولهایشان به‌صورت

$$a_n = n^{۲} \qquad (۵.۶)$$

تعریف‌می‌شود، هرجمله ازدیگری مستقل‌است؛ یعنی مثلا می‌توانیم Q_5 را ازدستور (۵.۶) پیدا کنیم بدون اینکه Q_4 را پیدا کرده باشیم. درحالی‌که برای یافتن P_5، دستور (۳.۶) ابتدا ما را ناگزیر به‌یافتن P_4 می‌کند.

فرض‌کنید در زمرهٔ آشنایان، شخصی چون زنون باشد که اعتراض‌کند مگر (۳.۶) یك دنبالهٔ نامتناهی را تعریف می‌کند؟ او ممکن است بگوید: «قبول دارم که P_1 تعریف شده است، و P_2 و P_3 و هر تعداد نقطه‌که حوصله داشته باشید می‌توانید بسازید، اما نه بیشتر. بنابراین (۳.۶) تنها نشان می‌دهد که چگونه دنبالهٔ متناهی بزرگی را می‌توان ساخت.» ریاضیدانان درست به‌همان‌گونه که (۵.۶) را به‌ازای همهٔ‌مقادیر $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ به‌عنوان‌تعریف دنبالهٔ(۴.۶) می‌پذیرند(۳.۶) را به‌عنوان تعریف دنبالهٔ (۲.۶) به‌ازای همهٔ مقادیر n می‌پذیرند. خواننده به‌یاد خواهد آوردکه از این نحو تشکیل بازگشتی درمورد بعضی ازآخرین زیگزاگهای فصل چهار و همین‌طور در مستطیلهای پیچنده و زیگزاگ فصل پنج استفاده شد، که امید است آنها را به‌عنوان فرایندهای کاملا طبیعی پذیرفته باشد.

برای بحث بیشتری پیرامون این موضوع، می‌توان (۳.۶) را به‌صورت زیر در قالب کلمات بیان‌کرد، که از دو مرحله تشکیل می‌شود. مرحلهٔ اول، یعنی‌اینکه نخستین عدد ۱ است. دیگری، مرحلهٔ تداوم، که اصل مطلب است: در مرحلهٔ معینی هستید و عدد معینی‌را حساب‌کرده‌اید. برای محاسبهٔ عدد بعدی، کافی‌است به‌این‌عدد، عکس عدد صحیحی را اضافه کنیدکه مبین شمارهٔ مرحله است.

توجه‌کنیدکه این دستور تداوم بعداز استفاده‌کنار گذاشته نمی‌شود؛ به‌عکس چنان بیان شده است‌که همواره برای مرحلهٔ بعد قابل استفاده است. سرانجام توجه کنید که این دستور تداوم نظیر روشی است‌که اعداد طبیعی را به‌ما ارائه می‌کند: مرحلهٔ اول ــ اولین عدد ۱ است. مرحلهٔ بعدی ــ عدد بعد یکی بیشترازعددی است که هم‌اکنون دارید.

بنابراین (۳.۶) تناظری یك‌به‌یك بین‌نقاط دنبالهٔ (۲.۶) واعداد طبیعی‌برقرار می‌کند. این‌درست همان چیزی‌است‌که دستور (۵.۶) درمورد دنبالهٔ (۴.۶) انجام می‌دهد؛ (۳.۶) و (۵.۶) روشهایی برای ساختن دنباله هستندکه به‌یك اندازه اعتبار دارند.

این بخش را با ذکر بعضی‌از بازگشتهای جالب توجه، به‌پایان می‌بریم. یکی‌از مهمترین دنباله‌هایی‌که در ریاضیات به‌طوربازگشتی تعریف می‌شود عبارت است از

$$۱, ۲, ۶, ۲۴, ۱۲۰, ۷۲۰, ۵۰۴۰, ۴۰۳۲۰, ۳۶۲۸۸۰, ۳۶۲۸۸۰۰, \ldots$$

MATH75.IR

این‌دنباله را با «$n!$» (بخوانید «n فاکتوریل») نمایش‌می‌دهند و چنین تعریف‌می‌شود:

$$1! = 1$$
$$(n+1)! = n! \times (n+1) \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

مفهوم تعریف بازگشتی متضمن وضعیت کلیتری است. مثلا سری فیبوناتچی به‌طور بازگشتی براساس شرایط زیر تعریف می‌شود

$$f_1 = 1,$$
$$f_2 = 1;$$
$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \qquad n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

به طور مشابهی، می‌توان دنباله‌ای را به طور بازگشتی بـا شرایطی این‌چنین تعریف کرد

$$b_1 = 1,$$
$$b_2 = 1 + 1 = 2,$$
$$b_3 = 1 + 1 + 2 = 4,$$
$$b_4 = 1 + 1 + 2 + 4 = 8,$$
$$b_n = 1 + b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}, \qquad n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

مسأله

۶.۳۰ آیا می‌توانید دنبالهٔ اخیر را مشخص‌کنید؟

۶.۴ استقرا

یك برهان صوری از راه استقرای ریاضی دو مرحلهٔ مشخص دارد، یکی مرحلهٔ اول ودیگری مرحلهٔ استقرایی. ازاین‌رو درست همانند یك‌ساختمان بازگشتی بنا می‌شود و به‌همین دلیل: یك دنبالهٔ نامتناهی از عبارتهایی است‌کـه ظاهراً در هیأتی متناهی مرتب شده‌اند. بیایید چندمثال را درنظربگیریم و بعداً به‌شرح اصلی‌کلی بپردازیم.

مثال ۱. حکم: عدد صحیح $۴^n+۱$ به‌ازای هیچ یک از مقادیر $n=۱,۲,۳,\dots$ بر ۳ بخشپذیر نیست.

برهان از راه استقرای ریاضی. مرحلهٔ اول: حکم به‌ازای $n=۱$ درست است، زیرا $۵=۴+۱$ بر ۳ بخشپذیر نیست. مرحلهٔ اول ثابت شد.

مرحلهٔ استقرایی: **اگر** حکم برای عدد صحیح k درست باشد (یعنی **اگر** $۴^k+۱$ بر ۳ بخشپذیر نباشد) **دراین‌صورت** حکم برای عدد صحیح $k+۱$ نیز درست است (یعنی $۴^{k+۱}+۱$ بر ۳ بخشپذیر نیست). ذیلا برهان مرحلهٔ استقرایی را می‌آوریم. توجه‌کنید چون $۴^{k+۱}=۴\times ۴^k$؛

$$(۱+۴^{k+۱})-(۱+۴^k)=۴^{k+۱}-۴^k=۴^k\times(۴-۱)=۳\times ۴^k$$

این رابطه نشان می‌دهد که تفاضل بین $(۴^{k+۱}+۱)$ و $(۴^k+۱)$ بر ۳ بخشپذیر است؛ بنابراین یکی‌ از آنها بر۳ بخشپذیراست اگر و تنها اگر دیگری چنین باشد.* اما چون $۴^k+۱$ بر ۳ بخشپذیر نیست (بنابر فرض مرحلهٔ استقرایی) نتیجه‌می‌شود که $۴^{k+۱}+۱$ بر ۳ بخشپذیر نیست. این نتیجهٔ مرحلهٔ استقرایی است که دراینجا تمام می‌شود.

مسأله‌ها

۴.۶. این تعریف را به‌یاد بیاورید: عدد صحیح m دارای ماندهٔ r به‌پیمانهٔ عدد صحیح q است اگر r باقیماندهٔ تقسیم m بر q باشد. «قاعدهٔ بخشپذیری بر ۳» را ثابت‌کنید: عدد صحیح N و مجموع رقمهای آن ماندهٔ یکسانی به‌پیمانهٔ ۳ دارند؛ مثلا ۴۷۱۵۸ و $۲۵=۴+۷+۱+۵+۸$ هردو ماندهٔ ۱ به‌پیمانهٔ ۳ دارند.

۵.۶. با استقرا ثابت‌کنید:

$$۱+۲+\dots+n=\frac{۱}{۲}n(n+۱),\qquad n=۱,\ ۲,\ ۳,\ \dots$$

مثال ۲. حکم (که براساس ملاحظهٔ جدول‌ضرب پیشنهاد شده است):

---

* اگر $a-b=۳s$ (s عدد صحیح ماست)، دراین‌صورت $a=b+۳s$ و $b=a-۳s$. درنتیجه a بر ۳ بخشپذیر است اگر و تنها اگر b چنین باشد، و b بر ۳ بخشپذیراست اگر و تنها اگر a چنین باشد.

$$(۱+۲+\cdots+n)^۲=۱^۳+۲^۳+\cdots+n^۳,\qquad n=۱,\ ۲,\ ۳,\ \ldots$$

برهان. مرحلهٔ اول: وقتی $n=۱$، سمت چپ $۱^۲=۱$ و سمت راست $۱^۳=۱$ است.

مرحلهٔ استقرایی: فرض کنید k چنان است که

$$(۱+\cdots+k)^۲=۱^۳+\cdots+k^۳ \tag{۶.۶}$$

و بیایید

$$(۱+\cdots+k+k+۱)^۲ \tag{۷.۶}$$

را بررسی کنیم. این عبارت به‌صورت $(A+B)^۲$ است که $A=۱+۲+\ldots+k$ و $B=k+۱$. با استفاده از $(A+B)^۲=A^۲+۲AB+B^۲$، از (۷.۶) به‌دست می‌آوریم:

$$(۱+\cdots+k)^۲+۲(۱+\cdots+k)(k+۱)+(k+۱)^۲$$

اگر به‌جای جملهٔ میانی این‌عبارت، از دستوری که در مسألهٔ ۵.۶ (به‌ازای $n=k$) ثابت می‌شود استفاده کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$(۱+\cdots+k)^۲+[k\cdot(k+۱)](k+۱)+(k+۱)^۲$$

اکنون توجه کنید که دو جملهٔ آخر این‌عبارت، عامل مشترکی به‌صورت $(k+۱)^۲$ دارند. اگر جمله‌ها را مرتب کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$(۱+\cdots+k)^۲+(k+۱)^۳ \tag{۸.۶}$$

اکنون فرض (۶.۶) را که تاکنون از آن استفاده نکرده‌ایم در (۸.۶) به‌کار می‌بریم، نتیجه می‌شود

$$۱+۲^۳+\cdots+k^۳+(k+۱)^۳ \tag{۹.۶}$$

به‌دیگر سخن، عبارت (۷.۶) به (۹.۶) تبدیل شده است، که برهان مرحلهٔ استقرایی را تمام می‌کند، یعنی **اگر** حکم برای عددصحیح k درست باشد **آنگاه** برای $k+۱$ درست است؛ حالا برهان توسط استقرا کامل است.

منطق این برهانها روشن است. ثابت می‌کنیم که می‌توانیم بدون محدودیت

از هر حکمی به‌حکم بعدی برسیم و در این عمل هرگز به‌حکم نادرستی برنخوریم. به‌این ترتیب نشان می‌دهیم که هر حکمی از یك دنبالهٔ نامتناهی احکام، درست‌است. با شروع از نخستین حکم، مطمئن هستیم که هیچ کدام را از نظر دور نداشته‌ایم.

شگفت آنکه عملی که انجام می‌گیرد کلا شبیه یك‌مرحلهٔ (استقرایی) تنهاست، اما به‌واقع این یك‌مرحلهٔ تداوم است که دائماً با مکانیسم برهان «**اگر ... آنگاه ...**» پی‌درپی به‌کار می‌رود، درحقیقت بینهایت استدلال وجود دارد، یك استدلال برای هر یك حالت.

اصل کوچکترین عدد صحیح که درمورد گنگ‌بودن $\sqrt{۲}$ ازآن استفاده کردیم و اصل نزول نامتناهی که در نشان‌دادن گنگ‌بودن m، قطع زرین به‌کار برده شد، با برهان از راه استقرای ریاضی رابطهٔ بسیار نزدیکی دارند. تنها با دستکاری مختصری در بیان مجدد برهانها، یکی به صورت دیگری تبدیل می‌شود. به‌هرحال، این بررسیها را به‌خوانندهٔ علاقه‌مند واگذار خواهیم کرد.*

۵.۶ کاربردی در یك برهان

آنچه که درپی می‌آید برهان معتبری از این حقیقت است که به‌ازای هر n، مجموع نخستین n عدد صحیح مثبت متوالی مساوی با $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است. این‌را درمسألهٔ ۵.۶ بیان کردیم. از خواننده خواسته می‌شود تا برهان زیر را به‌عنوان یك نمونه از تعریف بازگشتی و برهان از راه استقرا تعبیر کند.

می‌نهیم

$$S=۱+۲+۳+\dots+n$$

S را به‌صورت

$$S=n+n-۱+n-۲+\dots+۱$$

نیز می‌توان نوشت. با افزودن این دو عبارت، به‌دست می‌آید

$$۲S=n+۱+n+۱+n+۱+\dots+n+۱=n(n+۱)$$

و بنابراین

---

* شرحی از استقرای ریاضی را در فصل یکم کتاب، ریاضیات چیست؟ تألیف ریچارد- کورانت و هربرت‌رابینز، ترجمهٔ حسن‌صفاری، انتشارات‌خوارزمی، تهران، ۱۳۴۸ ببینید.

$$S=\frac{۱}{۲}n\cdot(n+۱)$$

و این تساوی به‌ازای هر $n=۱,۲,۳,\ldots$ درست است. می گویند این استدلال را گاوس[1] به‌هنگامی که نه سال داشت کشف کرد.

۶.۶ دنباله‌های با رشد سریع

داستان زیر که با تغییراتی جزئی به‌صورت امروزی درآمده است مربوط به‌محاسبه‌ای است که ارشمیدس انجام داده و با یك قصهٔ چندهزار سالهٔ کودکان آمیخته شده‌است.

فرض کنید در سال ۱۷۵۰ یك جفت پشه در ایالت نیوجرسی [امریکا] جفت‌گیری کرده باشند و فرض کنید‌که از آن‌پس به‌تولیدمثل جمعیتی پرداخته‌اندکه درهرسال متوالی دوبرابر شده است. در ۱۷۶۰ باید $۲^{۱۰}$ پشه از اخلاف این‌جفت وجود داشته باشندکه چیزی حدود $۱۰^۳$ پشه است و چندان زیاد نیست. در ۱۷۷۰ آنها باید دودمانی مرکب از $۲^{۲۰}$ پشه باشندکه حدود $۱۰^۶$ یا یك‌میلیون پشه‌است. در ۱۸۰۰ تعداد آنها $۲^{۵۰}$ می‌شودکه بیشتر از ده کادریلیون $(۱۰^{۱۶})$ است. درحال‌حاضر [هنگام تألیف‌کتاب] این جمعیت باید مساوی $۲^{۲۱۰}$ باشدکه بیشتراز $۱۰^{۶۳}$ است.

برای داشتن تصوری از این عدد (گفتن ۱ با ۶۳ صفر جلو آن آسانتر از درك آن است) بیایید فرض کنیم که یك میلیون پشهٔ کوچك را بتوانیم در جعبه‌ای به‌ضلع یك اینچ جا دهیم. دراین‌صورت $۱۰^{۵۷}$ جعبه لازم داریم. از این جعبه‌ها با انباشتن دقیقی می‌توانیم مکعب غول‌آسایی از جعبه‌ها که بر هر ضلعش $۱۰^{۱۹}$ جعبه است بسازیم، البته هر ضلع $۱۰^{۱۹}$ اینچ طول خواهد داشت، یعنی طولی بیشتر از $۱۰^{۱۴}$ میل. فاصلهٔ خورشید از زمین تنها در حدود ۹۰۰۰۰۰۰۰ میل یا کمتر از $۱۰^۸$ میل است و پلوتون در فاصله‌ای کمتراز ۴×۱۰^{۱۰} میل از زمین قرار دارد. بنا بر این اگر خورشید را در وسط چنین جعبه‌ای قرار دهیم پلوتون نیز درعمق آن گم می‌شود. در واقع در این جعبه برای بیش‌از

$$\text{یك بیلیون منظومه شمسی}=۱۰^۹=(۱۰^۳)^۳$$

جا وجود دارد.

---

1. C. F. Gauss (1771–1855)

بیایید به‌اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... و همین‌طور بـه اعداد ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ... بـه‌عنوان یادداشتهای حاصل از سرشماریهای متوالی جمعیتی درحال رشد فکر کنیم. در این‌صورت دنبالهٔ اول بدون محدودیت بزرگ و بزرگتر می‌شود اما دنبالهٔ دوم «فراتر از جهان» سریعتر از اولی رشد می‌کند.

بیایید شکلی ریاضی بـه این ایده بدهیم و بعد ببینیم چه مطلبی را می‌توانیم ثابت کنیم. جدول ۱.۶ این دو دنباله و نیز نسبت جمله‌های نظیر را (این نسبتها با حذف قسمتهای کسری به‌اعداد صحیح گرد شده‌اند) نشان می‌دهد.

جدول ۲.۶ نشان می‌دهد کـه ۲^n همواره از n بزرگتر است، و بعد از جملهٔ چهارم ۲^n از $n^۲$ و بعد از جملهٔ نهم ۲^n از $n^۳$ بزرگتر است.

جدول ۱.۶

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۲^n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	۲۰۴۸
$\frac{۲^n}{n}$	۲	۲	۲	۴	۶	۱۰	۱۸	۳۲	۵۶	۱۰۲	۱۸۶

جدول ۲.۶

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۲^n	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸	۲۵۶	۵۱۲	۱۰۲۴	۲۰۴۸
$n^۲$	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰	۱۲۱
$n^۳$	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶	۳۴۳	۵۱۲	۷۲۹	۱۰۰۰	۱۳۳۱

MATH75.IR

دراینجا استقرای ریاضی وضعیت تازه‌ای به‌خودمی‌گیرد. ما می‌توانیم بگوییم به‌ازای هر n (بزرگتر از صفر کـه چنین نیز هست)، 2^n از n بیشتر است، امـا نمی‌توانیم بگوییم به‌ازای هر n، 2^n از n^2 بیشتر است. می‌توانیم قضیه‌های زیر را حدس بزنیم.

قضیهٔ ۱: به‌ازای هر n بزرگتر از صفر، 2^n از n بیشتر است.

قضیهٔ ۲: به‌ازای هر n بزرگتر از ۴، 2^n از n^2 بیشتر است.

قضیهٔ ۳: به‌ازای هر n بزرگتر از ۹، 2^n از n^3 بیشتر است.

پیش‌از آنکه بـه‌حدس و گمانهای بیشتری بپردازیـم، اجازه دهید دربارهٔ برهانها صحبت‌کنیم. مسأله‌ای کـه پیش روی ماست چنین است: آیا در استفاده از استقرای ریاضی، به‌جای شروع از $n=1$، اگر بخواهیم می‌توانیم از $n=4$ یـا $n=10$ یا حتی جایی بعداز این اعداد شروع‌کنیم؟

جواب بلی است و دلیلش ساده. هر حکمی دربارهٔ دنبالهٔ $N+1$، $N+2$، $N+3$، ... را بی‌درنگ می‌توان به‌حکمی دربارهٔ $N+n$ به‌ازای هرعدد صحیح n، برگرداند. و این استدلال را تمام می‌کند.

برای تشریح این استدلال، قضیهٔ ۲ را درنظر بگیرید و آن‌را به‌صورت زیر بازنویسی‌کنید: به‌ازای هر عدد صحیح n، 2^{n+4} از $(n+4)^2$ بیشتر است. آیا قبول داریدکه اگر قضیهٔ ۲ درست باشد، این حکم جدید نیز به‌ازای هر n درست‌است؟

مسأله

۶.۰۶ قضیهٔ ۳ را مطابق این دستورالعمل صورتبندی کنید.

برهان قضیهٔ ۱ بسیار ساده است. مرحلهٔ‌اول شامل وارسی‌حکم به‌ازای $k=1$ است، که درست است.

اکنون برای مرحلهٔ استقرایی: گیریم k عدد صحیحی باشدکه به‌ازای‌آن 2^k از k بیشتر است. در ایـن‌صورت 2^{k+1} از $2k$ بیشتر است و چون $2k$ دست‌کم به‌بزرگی $k+1$ است نتیجه می‌شود که 2^{k+1} از $k+1$ بیشتر است، که دراینجا برهان تمام می‌شود.

برهان قضیهٔ ۲، تنها کمی مشکلتر است، و از این واقعیت استفاده می‌کند که $(n+۱)^۲=n^۲+۲n+۱$. همچنان که خواهید دید، برهان جالب است زیرا مرحلهٔ استقرایی و مرحلهٔ اول آن با مسائل استقرایی دیگر متفاوت است.

مرحلهٔ اول در ازای $k=۵$ است و این‌هم حرف درستی است که $۲^۵$ از $۵^۲$ بیشتر است.

برای مرحلهٔ استقرایی، فرض‌کنید k عدد صحیحی است که به‌ازای آن ۲^k از $k^۲$ بیشتراست. دراین‌صورت $۲^{k+۱}$ از $۲k^۲$ بیشتراست. اما وقتی که k از ۴ بیشتر باشد، $k^۲$ بیشتراز $۴k$ و $۲k^۲$ بیشتر از $k^۲+۴k$ است که خود از $k^۲+۲k+۲$ و بنابراین از $(k+۱)^۲$ بیشتر است و برهان تمام است.

مسأله

۷.۶ نشان دهید مرحلهٔ استقرایی در قضیهٔ ۲، وقتی k از ۲ بیشتر باشد معتبراست. توضیح دهید چرا این واقعیت شما را قادر نمی‌سازد که ثابت‌کنید به‌ازای هرعدد صحیح n بزرگتر از ۲، ۲^n از $n^۲$ بیشتر است.

برهان قضیهٔ ۳ قدری مشکلتر است، زیرا به‌حالت زیر از قضیهٔ دوجمله‌ای نیاز داریم:

$$(n+۱)^۳=n^۳+۳n^۲+۳n+۱$$

ازاین‌اتحاد به‌آسانی نتیجه می‌شود که $۲n^۳$ از $(n+۱)^۳$ بیشتراست مشروط براینکه n بیشتر از ۳ باشد. حال مرحلهٔ استقرایی قضیهٔ ۳ را وقتی که n بیشتر از ۳ است می‌توانیم ثابت‌کنیم **اما** مرحلهٔ اول به‌ازای $n=۴$ غلط است، و باید از حالتی که n بیشتراز ۹ است شروع‌کنیم.

اگرچه نشان داده‌ایم که قضیهٔ ۳ چگونه ثابت می‌شود، مجدداً با استفاده از نمادهای جبری متعارف به‌کار رفته در این برهان اثبات را کامل می‌کنیم. نماد $>$ را به‌جای اصطلاح «بیشتر است از» قرار داده‌ایم.

مرحلهٔ اول قضیهٔ ۳: به‌ازای $k=۱۰$، $۲^{۱۰}>۱۰^۳$.

مرحلهٔ استقرایی: اگر $۲^k>k^۳$ و $k>۹$ آنگاه

MATH75.IR

$$۲^{k+۱}>۲k^۳=k^۳+k^۳>k^۳+۹k^۲>k^۳+۳k^۲+۶k$$
$$>k^۳+۳k^۲+۳k+۲>k^۳+۳k^۲+۳k+۱$$
$$=(k+۱)^۳$$

که این برهان مرحلهٔ استقرایی و بنابراین برهان قضیه را تمام می‌کند.

قضیه‌های ۴، ۵، ۶،... را هم می‌توان مطرح کرد اما اثباتشان مشکلتر است زیرا بـه‌شناخت بیشتری از قضیهٔ دو جمله‌ای نیاز دارند. بـا این حال باید حداقل به‌طریقی کلی دربارهٔ آنها سخن بگوییم، زیرا اگر خواسته باشیم دنباله‌ای‌نامتناهی از قضیه‌ها را کـه وابسته به‌یك عدد صحیح‌اند، ثابت کنیم ناچاریم آن‌را به‌کمك استقرای ریاضی انجام دهیم. این موضوع، حالتی از استقرا را پیش‌پای ما می‌نهد که مرحلهٔ اولش قضیه‌ای است (۲^n بیشتر از n است) که خود توسط استقرا ثابت می‌شود.

قضیهٔ زیر درست است:

قضیهٔ N: به‌ازای هـر عدد صحیح N یك کوچکترین عدد صحیح K (وابسته به N) وجود دارد به‌قسمی که به‌ازای هرعدد صحیح n بزرگتر از K

۲^n بیشتر از n^N است.

به‌ازای $N=۱$، به‌همان قضیهٔ ۱ خودمان می‌رسیم و K عدد صحیح صفراست؛ بـه‌ازای $N=۲$، قضیهٔ ۲ را بـه‌دست می‌آوریم و K برابر بـا ۴ است؛ به‌ازای $N=۳$ بـه‌قضیهٔ ۳ بـا $K=۹$ می‌رسیم. ایـن حدس معقول است کـه بـه‌ازای $N=۴, ۵, ۶, ..., ۱۰$، $K=۱۶, ۲۵, ۳۶, ..., ۱۰۰$ ودرحالت کلی $K=N^۲$.

از خواننده خواسته می‌شود که مجموعهٔ مسأله‌های زیر را تـا خواندن کامل این بخش نادیده بگیرد، زیرا قضیهٔ N را برای دو منظور مختلف ارائه کرده‌ایم. نخست اینکه می‌گویـد چگونه یك فرایند بینهایت (در اینجا استقرای ریاضی) را می‌توان «مرحله به‌مرحله کرد» به‌طوری کـه هرمرحله خود فرایندی بینهایت باشد؛ دوم اینکه، مقدمه‌ای بـرای بعضی‌از استدلالهای کانتور، یکـی از استادان بزرگ «دانش بینهایتها»، را فراهم می‌کند، این هدف دوم مهمتر از اولی است.

MATH75.IR

مسأله‌ها

۶.۸. مطابق مرحلهٔ تعیین K در قضیهٔ N به‌ازای هرعدد صحیح N:
الف) ثابت کنید کـه ۲ به‌توان N وقتی به‌توان N برسد، برابر می‌شود با ۲ به‌توان $N^۲$، یعنی،

$$(۲^N)^N = ۲^{N^۲}$$

ب) هنگامی که N بیشتراز ۴ است، ۲^N بیشتراز $N^۲$ است. درایـن‌صورت ثابت کنید

$$۲^{N^۲} \text{ بیشتر از } (N^۲)^N \text{ است.}$$

و بنابراین اگر $n = N^۲$ آنگاه $۲^n > n^N$.

۶.۹. متناظر با مرحلهٔ استقرایی در قضیهٔ N: ثابت‌کنید ۲^n بیشتراز n^N است، تنها به‌این شرط که n بیشتراز $N^۲$ باشد.

۶.۱۰. به‌کمك مسأله‌های پیش، با استقرای روی N و با شروع از $N = ۱$، نشان دهید قضیهٔ N درست است.

قضیهٔ N بسیار مهم است و مایلم تا با نمونه‌های عددی توجه به‌آن‌را جلب نمایم. قضیه می‌گویدکـه ۲^n سریعتراز $n^{۱۰}$ افزایش می‌یابد (گرچه تقریباً تا جملهٔ صدم از آن پیش نمی‌افتد) و ۲^n سریعتر از $n^{۱۰۰۰}$ افزایش می‌یابد، هرچندکه تـا جملهٔ میلیونم به‌آن دنباله نمی‌رسد. روشن است که توانهای n، $n^۲$، $n^۳$، $n^۴$، ... با افزایش n سریعتر از n افزایش می‌یابند. اما چون ۲^n سریعترازهرتوان n افزایش می‌یابد، گفته می‌شود که به‌طور متعالی سریعتراز n افزایش می‌یابد. بیایید به‌بعضی دیگر از «دنباله‌های با رشد سریع» نگاه کنیم.

دنباله‌ای که توسط ۴^n ارائه می‌شود (بـا افزایش n) سریعتراز ۲^n افزایش می‌یابد، اما نه به‌طور متعالی. زیرا به‌ازای هر n،

$$۴^n = (۲^۲)^n = ۲^{۲n} = (۲^n)^۲ .$$

به‌طورمشابهی دیده می‌شودکه به‌ازای هرعددصحیح N دنباله‌های ۵^n،۶^n،...،N^n، شبیه توانهای دنبالهٔ سریع ۲^n افزایش می‌یابند. با وجود این همچنان‌که می‌توانید پیش‌بینی کنید، دنباله‌ای وجود داردکه به‌طور متعالی سریعتراز ۲^n افزایش‌می‌یابد.

قضیه. به‌ازای هر دنبالهٔ داده شده (از اعداد صحیح مثبت صعودی) a، b، c،

d، ...، دنبالهٔ $۲^{(۲^a)}$، $۲^{(۲^b)}$، $۲^{(۲^c)}$، ... بـه طور متعالی سریعتر از دنبالهٔ ۲^n افـزایش می‌یابد.

بنابراین دنبالهٔ $۲^۲$، $۲^{(۲^۲)}$، $۲^{(۲^{۲^۲})}$، ... به‌طور متعالی سریعتر از دنبالهٔ ۲، $۲^۲$، $۲^۳$، ... افزایش می‌یابد.

این قضیه (با اندکی تأمل) به‌عنوان کاربرد قضیهٔ N وقتی به‌ازای همهٔ Nها به‌کار گرفته شود، ناشی می‌شود.

این‌واقعیت که همواه برای هردنبالهٔ مفروضی، دنباله‌ای به‌طور متعالی سریعتر از آن وجود دارد، ساختمان استقرایی‌زیررا مطرح‌می‌کند. فرض کنید دنبالهٔ‌سریعی، مثل ۲^n دارید، دراین‌صورت دنباله‌ای به‌طور متعالی سریعتر از آن وسپس دنباله‌ای به‌طور متعالی سریعتراز این یکی، و به‌همین ترتیب تا الی غیرالنهایه، وجود دارد. حالا ماکجا هستیم؟ آیا سریعترین «چیز»ی راکه می‌توان ساخت به‌دست آورده‌ایم؟

قضیهٔ زیر می‌گوید نه. در برهان آن از استدلال قطری‌کانتور استفاده‌می‌شود این استدلال را کانتور در سال ۱۸۷۰ ابداع کرده است و یکی‌از مهمترین‌ایده‌های مبانی ریاضیات است که کاربردهـای زیادی در تمامی شاخه‌هـای ریاضی دارد. پیش‌از این‌هم در فصل سه از آن استفاده‌کردیم.

قضیه. فرض کنید یك دنبالهٔ $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$، ... از دنباله‌ها داریم کـه هر کدام (بعد از اولی) سریعتر از دنبالهٔ ماقبل خود افزایش می‌یابد. بیایید کل دستگاه‌اعداد را در یك آرایهٔ مستطیلی مرتب کنیم‌که اعداد S_k سطر kام را اشغال کنند و nامین جملهٔ S_k در ستون nام ایـن آرایه جای گیرد. درایـن‌صورت دنبالهٔ قطری، یعنی، اولین جمله از اولین دنباله، به‌دنبال آن دومین جمله از دومین دنباله، به‌دنبال آن سومین جمله از سومین دنباله و الـی آخر، سریعتر از هریك از دنباله‌هـای مفروض افزایش می‌یابد.

برای روشن‌شدن قضیه، فـرض کنید S_k دنبالهٔ تـوانهای kام n یعنی n^k را بـه‌ازای $n = ۱, ۲, ...$ نشان دهـد. نخستین چندجمله از نخستین چندسطر آرایهٔ مستطیلی در جدول ۳.۶ آمده‌اند.

دنبالهٔ قطری عبارت می‌شود از:

$$۱, ۴, ۲۷, ۲۵۶, ۳۱۲۵, \cdots;$$

بـه‌آسانی دیده می‌شود کـه جملهٔ عمومی آن، n^n است. ایـن دنباله به‌طور متعالی

جدول ۶.۳

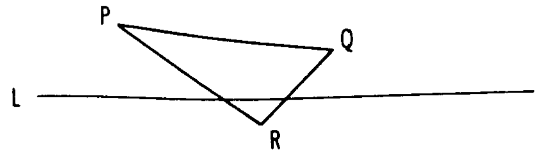
S_1	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	.
S_2	۱	۴	۹	۱۶	۲۵	۳۶	۴۹	۶۴	۸۱	۱۰۰	.
S_3	۱	۸	۲۷	۶۴	۱۲۵	۲۱۶	۳۴۳	.	.	.	.
S_4	۱	۱۶	۸۱	۲۵۶	۶۲۵	۱۲۹۶	.	.	.	.	.
S_5	۱	۳۲	۲۴۳	۱۰۲۴	۳۱۲۵	.	.	.	.	.	.
S_6	۱	۶۴	۷۲۹	.	.	.	.	.	.	.	.
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

سریعتر از n افزایش می‌یابد، همچنین درحقیقت به‌طورمتعالی سریعتر از 2^n افزایش می‌یابد.

۷.۶ اصل جعبه‌های دیریکله یا اصل حجره‌ها

تکنیک مهمی در برهانها وجود دارد که به‌نام اصل جعبه‌های دیریکله معروف است. این اصل می‌گوید که اگر تعدادی شیء و تعدادی جعبه داشته باشیم به‌قسمی که تعداد اشیا از تعداد جعبه‌ها بیشتر باشد و اگر همهٔ اشیا را در جعبه‌ها جای دهیم دست‌کم در یکی‌از جعبه‌ها بیش‌از یك شیء قرار خواهد گرفت. کاربرد معمولی‌این اصل درمسألهٔ خبرنگاران جراید واطاقهای‌هتل به‌هنگام برگزاری مجامع بین‌المللی مهم رخ می‌دهد.

الف) حالت متناهی. کاربردی ساده از این‌اصل به‌صورت‌زیر است: گیریم L خطی در صفحه است و P، Q و R سه‌نقطهٔ متمایزند که هیچ‌کدام بر این خط



شکل ۶.۶

نیستند؛ دراین‌صورت دست‌کم یکی‌از پاره‌خطهای PQ، QR یـا RP خط را قطع نمی‌کند. زیرا یك خط، صفحه را تنها به‌دو «طرف» تقسیم می‌کند و دو نقطه از این سه‌نقطه باید دریك‌طرف‌قرار گیرند که می‌توان آنها را با پاره‌خطی که خط را قطع نمی‌کند، به‌هم وصل کرد. حکم به‌دست آمد.

ب) بینهایت شمارایی شیء، تعدادی متناهی جعبه. دنبالهٔ فیبوناتچی. اینك اصل جعبه‌های دیریکله‌را دریك‌قضیهٔ جالب پیرامون دنبالهٔ فیبوناتچی به‌کارخواهیم برد. امـا ابتدا مطالبی را دربارهٔ ویژگیهای بخشپذیـری و دربارهٔ مانده‌هـا باید یادآوری کنیم.

گیریم N عدد صحیح مفروضی است. اگر عدد صحیح دیگری بر N تقسیم شود، باقیمانده‌های زیر امکان‌پذیر است: ۰ (اگر آن عدد صحیح بـر N بخشپذیر باشد)، ۱، ۲، ۳، ...، $N-1$. به‌دیگر سخن، باقیمانده (که مانده به‌پیمانهٔ N نیز گفته می‌شود) همواره یکی‌از این N عدد است. بـه‌خصوص اگر بیشتر از N عدد داشته باشیم، مثلا

$$b_1,\ b_2, \ldots,\ b_N,\ b_{N+1}, \ldots,\ b_m$$

و همه را به N تقسیم‌کنیم، ازاصل جعبه‌ها می‌دانیم که حداقل دوتا از bها باید یك مانده داشته باشند.

اکنون سؤال زیر را مطرح می‌کنیم: فرض‌کنید دنبالهٔ

$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots$$

از اعداد صحیح را داریم. دنبالهٔ مانده‌های آنها را به‌پیمانهٔ N می‌نویسیم

$$r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots$$

آیا دو باقیماندهٔ متوالی در این دنباله هرگز تکرار می‌شود؟ به عبارت دیگر، آیا یك جفت r_i، r_{i+1} و جفت دیگر r_j، r_{j+1} وجود دارد به‌قسمی که

$$r_{i+۱}=r_{j+۱} \quad و \quad r_i=r_j$$

برای پاسخ گفتن به‌این سؤال، اجازه دهید ابتدا مشخص کنیم چند جفت متفاوت از اعداد، می‌توان با باقیمانده‌های ممکن

$$۰,\ ۱,\ ۲,\ \ldots,\ N-۱$$

تشکیل داد. چون اولین عدد هرجفت می‌تواند یکی‌از این N مقدار باشد، ودومین عدد نیز یکی‌از این N مقدار است، $N^۲$ جفت مرتب متمایز ممکن وجود دارد. اما دنباله‌ای با $t+۱$ جملهٔ

$$b_۱,\ b_۲,\ b_۳,\ \ldots,\ b_t,\ b_{t+۱}$$

t جفت متوالی

$$(b_۱, b_۲),\ (b_۲, b_۳),\ \ldots,\ (b_{t-۱}, b_t),\ (b_t, b_{t+۱})$$

دارد. بنابر اصل جعبه‌ها، مانده‌های (به‌پیمانهٔ N) در دنباله‌هایی‌که بیش‌از $N^۲+۱$ عدد دارند حداقل دو جفت یکسان از جمله‌های متوالی یافت می‌شود.

مثال. اگر $N=۳$، مقادیر ممکن برای مانده‌ها عبارت‌اند از ۰، ۱، ۲. در این‌صورت همهٔ $۹=۳^۲$ جفت ممکن عبارت‌اند از

$$۰,۰;\quad ۰,۱;\quad ۰,۲;\quad ۱,۰;\quad ۱,۱;\quad ۱,۲;\quad ۲,۰;\quad ۲,۱;\quad ۲,۲$$

فرض‌کنیم درخیابان مفروضی $۱۱=N^۲+۲>N^۲+۱$ ایستگاه اتوبوس وجود داشته باشدکه به‌ترتیب در تقاطع این خیابان با خیابانهای فرعی

$$۴,\ ۱۴,\ ۲۳,\ ۳۴,\ ۴۲,\ ۵۰,\ ۵۹,\ ۷۲,\ ۸۱,\ ۸۶,\ ۹۶$$

واقع‌اند. دنبالهٔ مانده‌های (به‌پیمانهٔ ۳) عبارت است از

$$۱,\ ۲,\ ۲,\ ۱,\ ۰,\ ۲,\ ۲,\ ۰,\ ۰,\ ۲,\ ۰$$

چون $۱۱=۲+۳^۲$ ایستگاه را نوشته‌ایم، می‌دانیم که در دنبالهٔ مانده‌ها لااقل یك جفت تکرار می‌شود. به‌واقع، دومین و سومین جمله و ششمین و هفتمین جمله جفتهای یکسان را تشکیل می‌دهند. پنجمین‌وششمین، ونهمین ودهمین جمله نیز همین کاررا انجام می‌دهند.

MATH75.IR

اکنون می‌توانیم بپرسیم: بعداز چندجمله از یك دنباله می‌توانیم یك سه‌تایی متوالی تکراری از مانده‌ها (به‌پیمانهٔ N) یا یك چهارتایی متوالی تکراری به‌دست آوریم؟ به این پرسشها می‌توان بـا همین استدلال پاسخ داد، ولی ما فقط به‌جفتها خواهیم پرداخت و دانسته‌هایمان را درمورد خاص دنبالهٔ فیبوناتچی

$$\begin{gathered}۱،\ ۱،\ ۲،\ ۳،\ ۵،\ ۸،\ ۱۳،\ ۲۱،\ ۳۴،\ ۵۵،\ ۸۹،\\ ۱۴۴،\ ۲۳۳،\ ۳۷۷،\ ۶۱۰،\ ۹۸۷،\ ۱۵۹۷،\ ۲۵۸۴، \qquad (۱۰.۶)\\ ۴۱۸۱،\ ۶۷۶۵،\ ۱۰۹۴۶،\ ۱۷۷۱۱،\ \ldots\end{gathered}$$

که با رابطهٔ بازگشتی

$$\begin{aligned} &f_۱=f_۲=۱ \\ &f_{n+۱}=f_n+f_{n-۱} \qquad n\geqslant ۲ \end{aligned} \qquad (۱۱.۶)$$

تعریف می‌شود، به‌کار می‌بریم.

حکم زیر راکه از لاگرانژ[1] است، ثابت خواهیم کرد:*

قضیه. گیریم N، عدد صحیح دلخواهی ناکوچکتر از ۲ باشد. در ایـن‌صورت مانده‌های (بـه پیمانهٔ N) دنبالهٔ فیبوناتچی حداکثر بعد از $N^۲+۱$ جمله، تکرار می‌شوند. بـه طور دقیقتر، اولین جفت مانده‌هـا، یعنی، ۱ و ۱ طی $N^۲+۲$ جمله ظاهر می‌شوند و از آن به‌بعد کل دنباله تکرار می‌شود.

پیش‌از ارائهٔ برهان، بیایید ایـن ادعا را در چندحالت ساده آزمایش کنیم. به‌ازای $N=۲$، مانده‌های (۱۰.۶) عبارت‌اند از

$$۱،\ ۱،\ ۰،\ ۱،\ ۱،\ ۰،\ ۱،\ ۱،\ ۰،\ ۱،\ ۱،\ ۰،\ \ldots$$

جمله‌های چهارم و پنجم با جمله‌های اول و دوم برابرند و به نظر می‌آید سه جملهٔ

---

1. Lagrange

* این حکم را در کتاب اویلر (Euler) در باب جبر مقدماتی (کـه در سال ۱۷۶۶ کمی پس‌از نابینا شدن دیکته‌کرد) می‌توان یافت. این کتاب بـه‌بسیاری زبانها ترجمه شده، و ترجمهٔ فرانسوی آن را خود لاگرانژ انجام داد.

۱، ۱، ۰، بارها و بارها تکرار می‌شوند. توجه کنید که $N^۲+۱=۵$ و طی پنج جمله است که یك جفت تکرار می‌شود.

به‌ازای $N=۳$، مانده‌های (۱۰.۶) عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۰, ۲, ۲, ۱, ۰, ۱, ۱, ۲, ۰, ۲, ۲, ۱, ۰, \ldots$$

نهمین و دهمین جمله همانند یکمین و دومین جمله‌اند. در اینجا

$$N^۲+۱=۱۰$$

به‌ازای $N=۴$، مانده‌های (۱۰.۶) عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۱, ۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۱, ۰, \ldots$$

از هفتمین و هشتمین جمله تکرار شروع می‌شود. توجه کنید که $N^۲+۱=۱۷$؛ از اصل جعبه‌ها می‌دانیم که جفت تکراری طی ۱۸ جمله باید ظاهر شود، اما عملا خیلی زودتر ظاهر می‌شود.

به‌ازای $N=۵$، مانده‌های (۱۰.۶) عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۳, ۰, ۳, ۱, ۴, ۰, ۴, ۴,$$

$$۳, ۲, ۰, ۲, ۲, ۴, ۱, ۰, ۱, ۱, ۲, \ldots$$

در اینجا $N^۲+۱=۲۶$، اما اولین جفت طی بیست‌ویك جمله ظاهر شده است و به‌نظر می‌آید که همین دور تکرار می‌شود.

برهان قضیهٔ لاگرانژ. علاوه بر اصل جعبه‌ها (که نشان داد طی $N^۲+۲$ جملهٔ دنبالهٔ مانده‌های هر دنباله، یك جفت متوالی تکراری وجود دارد)، باید از جنبهٔ به‌خصوصی از دنبالهٔ فیبوناتچی

$$f_۱, f_۲, \ldots,$$

که با دستور بازگشتی (۱۱.۶) تعریف می‌شود استفاده کنیم. این رابطه به‌ما می‌گوید، همین که جفتی از مانده‌ها تکرار شود، یعنی همین که مانده‌های جفت f_k، $f_{k+۱}$ با مانده‌های جفت قبلیتر f_i، $f_{i+۱}$ برابر شود، باید انتظار داشته باشیم که $f_{k+۲}$ و $f_{i+۲}$ دارای مانده‌های یکسانی باشند. همین‌طور است برای $f_{k+۳}$ و $f_{i+۳}$، و الی آخر.

MATH75.IR

برای تحقیق این موضوع، یادآوری می‌کنیم که «f_i و f_k دارای ماندهٔ یکسانی (به‌پیمانهٔ N) هستند» یعنی در تقسیم بر N باقیماندهٔ مساوی دارند، یعنی

$$f_i=q_iN+r_i, \qquad f_k=q_kN+r_k, \qquad r_i=r_k$$

یا به‌صورت دیگر،

$$f_i\equiv r_i\ (\text{به‌پیمانهٔ } N), \qquad f_k\equiv r_k\ (\text{به‌پیمانهٔ } N), \qquad r_i=r_k$$

بنابراین

$$f_i\equiv f_k\ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

نماد $u\equiv v$ (به پیمانهٔ N) «بخوانید u همنهشت با v به پیمانهٔ N است»، به‌طورساده این منظور را می‌رساندکه $u-v$ بر N بخشپذیراست. توجه کنید که اگر

$$x\equiv y\ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{و} \qquad u\equiv v\ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

دراین‌صورت

$$u-x\equiv v-y\ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{و} \qquad u+x\equiv v+y\ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

زیرا اگر $u-v$ و $x-y$ بر N بخشپذیر باشند، دراین‌صورت مجموع آنها $(u-v)+(x-y)=(u+x)-(v+y)$ و تفاضل آنها

$$(u-v)-(x-y)=(u-x)-(v-y)$$

نیز چنین‌اند.

با این علامتگذاری نتیجهٔ حاصل از اصل جعبه‌ها می‌گوید که در این دنباله جمله‌هایی وجود داردکه به‌ازای آنها

$$f_{i+1}\equiv f_{k+1}\ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{و} \qquad f_i\equiv f_k\ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

که نتیجه می‌دهد

$$f_i+f_{i+1}\equiv f_k+f_{k+1}\ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

اما از رابطهٔ بازگشتی (۱۱.۶) می‌بینیم که عضو سمت‌چپ این‌همنهشتی دقیقاً f_{i+2} و عضو سمت راست f_{k+2} است. از این‌رو

$$f_{i+2}\equiv f_{k+2}\ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

MATH75.IR

همین استدلال نشان می‌دهد که

$$f_{i+3} \equiv f_{k+3} \ (\text{به پیمانهٔ } N),$$
$$f_{i+4} \equiv f_{k+4} \ (\text{به پیمانهٔ } N),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

تا اینجا نشان داده‌ایم که دنبالهٔ مانده‌های (به‌پیمانهٔ N) دنبالهٔ فیبوناتچی دوره‌ای است، باقی‌مانده است نشان دهیم که دور در ابتدا با جفت ۱ و ۱ شروع می‌شود.

این‌هم آسان است. فرض کنید دورهٔ دنباله p است. بنابراین از j معینی مثلا $j=s$ به‌بعد، به‌ازای هر j،

$$f_j \equiv f_{j+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad (j \geqslant s) \qquad (۱۲.۶)$$

می‌خواهیم نشان دهیم که در واقع f_s اولین جملهٔ دنباله است.

اگر $s>1$، دراین‌صورت f_s اولین جملهٔ دنباله نیست، پس می‌توانیم جملهٔ ماقبل آن، f_{s-1} را از دستور بازگشتی به‌دست آوریم و چنین استدلال کنیم

$$f_{s-1} = f_{s+1} - f_s$$

$$\equiv f_{s+1+p} - f_{s+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{بنابر } (۱۲.۶)$$

$$\equiv f_{s+p-1} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{بنابر دستور بازگشتی}$$

داریم

$$f_{s-1} \equiv f_{s-1+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

اگر $s-1=1$، دور تکرار با f_1 شروع می‌شود و برهان کامل است.

اگر $s-1>1$، با همان استدلال بالا نشان می‌دهیم که

$$f_{s-2} \equiv f_{s-2+p} \ (\text{به پیمانهٔ } N)$$

چون s عدد صحیح متناهی است، با به‌کارگرفتن متوالی این فرایند به $s-1$، $s-2$، $s-3$، ... نهایتاً درمورد ۱ به‌کار می‌رود و

$$f_1 \equiv f_{1+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

و این برهان قضیهٔ لاگرانژ را کامل می‌کند.

ملاحظه می‌کنید که این برهان تنها از دستور بازگشتی

$$f_{n+1}=f_n+f_{n-1}, \qquad n\geqslant 2$$

استفاده می‌کند و نه از شرایط اولیهٔ $f_1=f_2=1$. منظور این است که قضیهٔ لاگرانژ درمورد هر دنباله که به‌ازای مقادیر $n\geqslant 2$ رابطهٔ $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ را بپذیرد معتبر است، مقادیری که برای a_1 و a_2 اختیار می‌شود در برهان تأثیری ندارد.

مسأله‌ها

۱۱.۶. دنبالهٔ ۱، ۱، ۵، ۱۳، ۴۱، ... را درنظر بگیرید که براساس این قاعده ساخته می‌شود که به‌ازای هر $n>2$، $a_{n+1}=2a_n+3a_{n-1}$. حکمی مشابه با حکم لاگرانژ ثابت کنید، اما توجه کنید که پیمانهٔ ۶ دنباله‌را به ۱، ۱، ۵، ۱، ۵، ... برمی‌گرداند.

۱۲.۶. حکم لاگرانژ را به‌همهٔ دنباله‌هایی که به‌صورت زیر ساخته می‌شوند تعمیم دهید: به‌ازای $n>2$، $a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}$، که در آن α و β اعداد صحیح داده شدهٔ دلخواهی هستند.

۱۳.۶. حکم را به‌حالتی که از جملهٔ سوم به‌بعد داشته باشیم

$$a_{n+1}=\alpha a_n+\beta a_{n-1}+\gamma a_{n-2}$$

تعمیم دهید.

۱۴.۶. بازهم حکم را بیشتر تعمیم دهید.

پ) بینهایت ناشمارای اشیاء، بینهایت شمارای جعبه‌ها. شرح زیر کاربردی از جعبه‌های دیریکله را درمورد مجموعه‌های بینهایت نشان می‌دهد. فرض کنید به‌طریقی در صفحه بینهایت ناشمارایی مستطیل را برای ما انتخاب کرده باشند. نکتهٔ قابل توجه دربارهٔ قضیه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم این است که مهم نیست این مستطیلها چگونه انتخاب شده‌اند ــ آنچه مهم است این است که بینهایت ناشمارایی مستطیل داریم.

ادعا این است که یک دایره و مجموعهٔ ناشمارایی مستطیل داده شده وجود دارند به‌طوری که این دایره درون هریک از این مستطیلهاست. یعنی این دایره‌درون مستطیلهاست و با محیط آنها نقطهٔ مشترک ندارد. برهانی که می‌آید، از نظر فنی کاملا

MATH75.IR

آسان است، اما در اولین برخورد ممکن است کاملا مشکل تجلی کند.

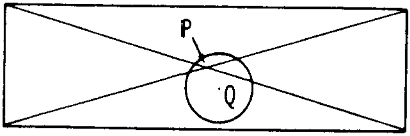
ثابت می‌کنیم که می‌توانیم این دایره را از میان «دایره‌های گویا» یعنی، دایره‌هایی که شعاعشان طول گویا و مرکزشان مختصات گویا دارند، انتخاب کنیم. مجموعهٔ این دایره‌ها شماراست زیرا

$$\aleph_0^3 = \aleph_0$$

به‌بخش ۹.۳ رجوع کنید. برهان مبتنی برتناقض است. به‌این ترتیب که اگرهیچ‌یك از دایره‌های گویا درون بینهایت ناشمارایی مستطیل از مستطیلهایی که به‌طریقی‌داده شده‌اند نباشد، دراین‌صورت هـرکدام از آنها درون حداکثر بینهایت شمارایی از این مستطیلهاست (امکان دارد درون تعدادی متناهی مستطیل قرار گیرد یا درون هیچ مستطیلی قرارنگیرد). اما چون $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (بخش ۹.۳ را ببینید) نتیجه‌می‌شود که همهٔ مستطیلهای مجموعهٔ ما، که هرکدام درون خود یك‌دایرهٔ‌گویا دارد، حداکثر مجموعهٔ شمارایی از مستطیلهاست. اما چون مجموعهٔ داده شده ناشماراست، بایستی مستطیلهایی باقی بمانـنـد، یعنی، باید در مجموعهٔ مفروض ما مستطیلهایی باشند که درونشان هیچ دایرهٔ گویایی قرار نگیرد!

این‌نکتهٔ اخیر مورد تأکید قرار گرفته است چـون چنین چیزی محال است. هرمستطیل حداقل یك‌دایرهٔ‌گویا درون‌خود دارد (به‌آسانی دیده‌می‌شود که بی‌نهایت دایرهٔ‌گویا درون مستطیل وجود دارد). با رسیدن به‌این‌تناقض، برهان کامل‌می‌شود. حکمی‌که دربالا به‌آن استناد شد، دایر براینکه هرمستطیل درون خود دایره‌ای‌گویا دارد، درست است. اینکه گفتیم این موضوع به‌آسانی دیده می‌شود مطابق بـا این سنت ریاضی‌است‌که درهرزمان تنها با یك‌مشکل می‌ستیزد ونسبت به‌مشکلات بعدی خوش‌بین است. برهان این حکم را می‌آوریم.

گیریم مستطیلی درصفحه داده شده و P مرکز آن باشد؛ شکل ۷.۶ را ببینید. اگر هردو مختصات P گویا باشند، P را بـه‌عنوان مرکز دایره انتخاب می‌کنیم و عدد گویای دلخواهی را که از نصف کوتاهترین ضلع کوچکتر باشد به‌عنوان شعاع انتخاب می‌کنیم. اما اگرمختصات P هردوگویا نباشند دراین‌صورت نقطهٔ Q را با



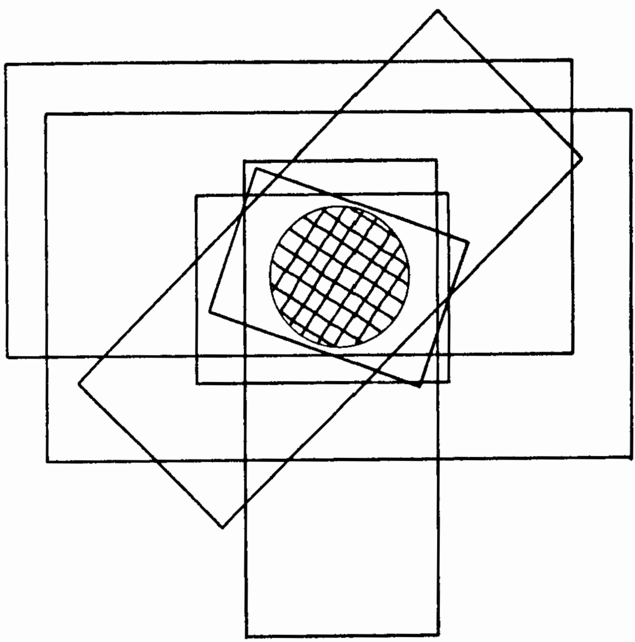
شکل ۷.۶

MATH75.IR

هـردو مختصات گویا انتخاب می‌کنیم (کـه به‌آسانی صورت می‌گیرد) که درون مستطیل باشد (P یك نقطهٔ حدی یك دنباله از چنین نقاطی است). اکنون فاصلهٔ Q را ازهریك‌ازاضلاع مستطیل پیدا می‌کنیم و عددگویایی راکه از هریك ازاین‌چهار فاصله کوچکتر باشد به‌عنوان شعاع و Q را به عنوان مرکز انتخاب می‌کنیم. به این‌ترتیب این‌برهان‌کامل می‌شودکه هرمستطیل دایره‌های گویایی درون خود دارد.

آنچه را کـه ثابت‌کردیم، تمایز مهم در تحلیل بین مجموعه‌هـای شمارا و ناشمارا را بیان می‌کند. توجه دارید که چقدر آسان می‌شود مجموعه‌ای شمارا از مستطیلها ساخت که هیچ‌کدام با دیگری روی‌هم‌افتادگی نداشته باشد، ما نشان‌دادیم که هر مجموعهٔ ناشمارای مستطیلها باید اساساً روی‌هم‌افتادگی داشته باشند.

مسأله‌های زیر براساس روشهایی‌که شرحش گذشت ثابت می‌شوند خواننده آنهارا برای فکرکردن با ارزش خواهد یافت، اما آسان نیستند. مسألهٔ دوم مطرح شده است تا ازآن به‌صورت یکی‌از جزئیات مسألهٔ سوم استفاده شود.



شکل ۸.۶ یك‌نمونه ازمستطیلهای روی‌هم‌افتاده که درآن روی‌هم‌افتادگی اساسی‌مستطیلها با دایره‌ای‌که داخل هریك از آنها قرار دارد سنجیده می‌شود.

 MATH75.IR

مسأله‌ها

۶.۱۵. اکنون بیایید یک مستطیل را مخصوص بنامیم هرگاه اضلاعش در دستگاه مختصات برخطهای

$$x=a, \quad y=b, \qquad x=c, \quad y=d$$

قرار گرفته باشند به‌قسمی که $a\neq c$ و $b\neq d$ و a، b، c، d گویا باشند. ثابت کنید مجموعهٔ این مستطیلها بینهایتی شماراست.

۶.۱۶. گیریم P نقطه‌ای درون یک مستطیل مفروض است. نشان‌دهید که دراین‌صورت P درون مستطیل مخصوصی است که درون مستطیل اول قرار دارد.

۶.۱۷. فرض کنید مجموعه‌ای ناشمارا ازنقاط صفحه به‌نام X دارید. ثابت کنید یک نقطهٔ P در X وجود دارد به‌طوری که هرمستطیل شامل P، شامل تعداد ناشمارا از نقاط X است. (نقطهٔ P را یک نقطهٔ انباشتگی مجموعهٔ X نامند.)

۶.۱۸. فرض کنید به‌نحوی یک مجموعهٔ ناشمارای X از نقاط واقع بر یک خط (یا یک صفحه) دراختیار دارید. ثابت کنید یک دنباله از نقاط P_1، P_2، P_3، ... در X و یک نقطهٔ P آن هم در X وجود دارند به طوری‌که P نقطهٔ حدی دنباله‌ای دنبالهٔ P_1، P_2، P_3، ... است.

نشان دادن این موضوع دشوار است زیرا شناخت اندکی دربارهٔ X دارید. آن‌را بدین علت در اینجا آوردیم که همانند اصل بولتسانو-وایرشتراس دربارهٔ کوچکترین کران بالا، ابزاری توانمند برای یافتن حدود است. این مسأله یکی‌از مهمترین کاربردهای یک بینهایت ناشمارا را به‌نمایش می‌گذارد.

MATH75.IR

حل مسأله‌ها

فصل دو

۱۰۲ در اینجا فهرستی از نام روزهای هفته داریم. در این حالت نقاط تکرار علامتی اختصاری برای روزهای پنجشنبه و جمعه‌اند.

۲۰۲ دنباله‌ای دوره‌ای است که جمله‌های آن اولین حرفهای نام روزهای هفته‌است که به‌ترتیب روزها با حرف ش نظیر شنبه آغاز می‌شوند. اولین جمله پس از شش جملهٔ دیگر مجدداً تکرار می‌شود و از آن به بعد تمام دوره بارها و بارها تکرار می‌شود.

۳۰۲ اولین این سه مجموعه، گردایه‌ای از همهٔ اعداد صحیح n به‌صورت $n=۳q$ است که در آن q عدد صحیحی است. به‌آسانی دیده می‌شود که این مجموعه شامل اعداد ۰، ۳، ۶، ۹، ... است.

دومین مجموعه مرکب ازهمهٔ اعداد صحیح n به‌صورت $n=۱+۳q$ است. چون در تقسیم بر ۳ باقیماندهٔ هریك از این اعداد ۱ است، اعداد دنبالهٔ نامتناهی ۱، ۴، ۷، ۱۰، ... به دومین مجموعه تعلق دارند.

اعداد مجموعهٔ سوم هرکدام به‌صورت $۳q+۲$ است که در آن q یك عدد صحیح است و بنابراین هریك در تقسیم بر۳ باقیماندهٔ ۲ دارد. پس مجموعهٔ سوم دارای عضوهای ۲، ۵، ۸، ۱۱، ... است.

چون هر عدد صحیح در تقسیم بر ۳ باقیمانده‌ای مساوی یکی و فقط یکی‌از اعداد ۰، ۱، ۲ دارد، درمی‌یابیم که این سه مجموعهٔ نامتناهی دوبه‌دو جدا ازهم

شامل کل مجموعهٔ اعداد صحیح‌اند.

۴۰۲ اگر q عدد n را عاد کند، آنگاه $n=qb$ و $n+1=qb+1$ که در آن b عدد صحیحی است. به‌دیگر سخن اگر n بر q بخشپذیر باشد، $n+1$ در تقسیم بر q دارای باقیماندهٔ ۱ است و بنابراین n و $n+1$ هیچ عامل مشترکی ندارند.

۵۰۲ قاعدهٔ کلی که از بررسی این جدولها به‌ذهن می‌رسد این است که برای هر جدول‌ضرب k در k که k عدد درست مثبتی است، مجموع اعداد جدول مساوی است با مربع مجموع اولین k عددصحیح‌مثبت. مجموع اعدادصحیح درهرشاخص پایینی با مکعب کوچکترین عدد صحیح موجود در آن شاخص مساوی است.

۶۰۲
$$\frac{۱}{۷}=۱\times ۱۰^{-۱}+۴\times ۱۰^{-۲}+۲\times ۱۰^{-۳}+۸\times ۱۰^{-۴}$$

$$+۵\times ۱۰^{-۵}+۷\times ۱۰^{-۶}+\frac{۱}{۷}\times ۱۰^{-۷}$$

$$=۰/۱۴۲۸۵۷+۰/۰۰۰۰۰۰۱۴۲۸۵۷+\frac{۱}{۷}\times ۱۰^{-۱۴}$$

$$=۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\ldots$$

به‌طور مشابه،
$$\frac{۱}{۹}=۱\times ۱۰^{-۱}+\frac{۱}{۹}\times ۱۰^{-۲}=۰/۱۱۱۱۱۱\ldots$$

$$\frac{۱}{۱۱}=۰\times ۱۰^{-۱}+۹\times ۱۰^{-۲}+\frac{۱}{۱۱}\times ۱۰^{-۳}=۰/۰۹۰۹۰۹\ldots .$$

$$\frac{۱}{۹۹}=۰\times ۱۰^{-۱}+۱\times ۱۰^{-۲}+\frac{۱}{۹۹}\times ۱۰^{-۳}=۰/۰۱۰۱۰۱\ldots .$$

هر اعشاری مختوم را می‌توان به‌صورت $a/۱۰^k$ نوشت که در آن a عددی صحیح است، مثلاً،

$$۳/۵۷۲=\frac{۳۵۷۲}{۱۰^۳}$$

اگر a شامل عاملهای ۲^s و یا ۵^t، $k\leqslant t$ و $s>۰$، باشد دراین‌صورت $a/۱۰^k$ به‌ساده‌ترین صورت خود نیست و می‌توان آن‌را به‌صورت زیر تحویل کرد:

$$\frac{a}{10^k}=\frac{2^s\times 5^t\times b}{2^k\times 5^k}=\frac{b}{2^{k-s}\times 5^{k-t}}=\frac{b}{2^n\times 5^m}$$

۷۰۲ نمادهای ...۰۹۰۹۰۹۰۹۰۹۰ر۰ و ...۰۹۰۹۰۹۰۹۰۹ر۰ اعشاریهای نامختومی هستند که به‌ترتیب ۱۰/۱۱ و ۱/۱۱ را نمایش می‌دهند. هنگامی که این عبارتها را به‌هم «اضافه» می‌کنیم نماد ... ۹۹۹۹۹۹۹۹۹ر۰ به‌دست می‌آید که نمایش مجموع ۱۰/۱۱ و ۱/۱۱ یعنی ۱ = ۱۱/۱۱ است.

۸۰۲ چون

$$n\div m=n\times\frac{1}{m}$$

روش موردنظر واضح‌است. مثلا برای تقسیم ۷ بر ۹ عکس ۹ را در جدول شکل ۴.۲ پیدا می‌کنیم و می‌نویسیم

$$7\div 9=7\times\frac{1}{9}=7\times 0/111\ldots=0/777\ldots$$

۹۰۲ دایرهٔ به‌شعاع PQ و مرکز Q را رسم‌می‌کنیم، شکل ۷.۲ را ببینید. با استفاده از P به‌عنوان مرکز و با همان‌شعاع، با حرکت پرگار دو نقطهٔ P_1 و Q_1، نقطه‌های تقاطع این دایره با دایرهٔ اول را پیدا می‌کنیم.

سپس پرگار را به‌اندازهٔ P_1Q_1 بازمی‌کنیم و به‌مرکزهای P_1 و Q_1 دایره‌هایی رسم می‌کنیم. یکی‌ازنقطه‌های تقاطع آنها (آن یکی که سمت راست P و Q است) R نقطهٔ موردنظر است.

برای دیدن اینکه P، Q، R همخط‌اند و $PQ=QR=d$، ملاحظه کنید که P_1PQ و Q_1PQ دو مثلث متساوی‌الاضلاع با قاعدهٔ مشترك PQ هستند که توسط پاره‌خط P_1Q_1 در نقطهٔ M نصف شده است (شکل ۷.۲ را ببینید) و P_1Q_1R یك مثلث متساوی‌الاضلاع با قاعدهٔ P_1Q_1 است که ارتفاع MR آن برخط گذرندهٔ بر P و Q قرار دارد.

علاوه‌براین اگر $PQ=d$ دراین‌صورت

$$P_1Q_1=2P_1M=d\sqrt{3}\qquad,\qquad MR=\frac{1}{2}P_1Q_1\sqrt{3}=\frac{3d}{2}$$

$$QR=MR-MQ=\frac{3d}{2}-\frac{d}{2}=d$$

این روش به‌ما نشان می‌دهد که چگونه یك دنبالهٔ نامتناهی از نقاط واقع

بریك خط را بسازیم. به‌طور ساده دو نقطه می‌گیریم و آنها را P و Q می‌نامیم R را به‌دست می‌آوریم و ترسیم فوق را برای Q و R تکرار می‌کنیم، R' به‌دست می‌آید و الی آخر.

۱۰.۲ فرض‌کنید P سمت چپ Q است. خط‌کش را بر P و Q چنان قرارمی‌دهیم که Q درست انتهای خط‌کش قرار گیرد و درجایی بر خط‌کش که نقطهٔ P واقع می‌شود علامتی می‌گذاریم، این علامت خط‌کش را به‌دو قسمت تقسیم می‌کند، یکی به‌اندازهٔ طول $PQ=d$ در راست و یکی طول‌کوچکتر d' در چپ. بعداز رسم پاره‌خط PQ، خط‌کش را روی PQ طوری جابه‌جا می‌کنیم که علامت تقسیم برخط‌کش روی Q قرار گیرد. دراین‌صورت انتهای راست خط‌کش به‌فاصلهٔ d از Q برامتداد PQ خواهد بود. نقطهٔ انتهایی این امتداد را با Q_1 نمایش می‌دهیم. بعد خط‌کش را در راستای این‌خط درجهت از Q به Q_1 حرکت‌می‌دهیم تاعلامت تقسیم برنقطهٔ جدید Q_1 قرارگیرد. نقطهٔ انتهای سمت راست خط‌کش در نقطهٔ Q_2 برخط‌گذرنده از P و Q به‌فاصلهٔ $2d$ از Q قرار می‌گیرد. ادامهٔ این فرایند به‌طور نامحدود خط‌گذرنده بر P و Q را به‌طور نامحدود به‌سمت راست امتدادمی‌دهد.

به همین ترتیب برای امتداد خط‌گذرنده بر P و Q از سمت چپ، روش مذکور را به‌قرینه تکرار می‌کنیم.

اگر d' طولانیتر از d باشد، همین روش قابل اجراست، اما باصرفه‌تر خواهد بود که نقشهای d و d' را عوض‌کنیم.

۱۱.۲ یك‌بار که جهت جاده و نقطهٔ ورود به‌کوه تعیین شد، تنها لازم است‌که هرسه میلهٔ راهنمای متوالی ردیف شود. این‌را، می‌توان در هر مرحله از پیشروی وارسی کرد.

۱۲.۲ نقطه‌های وسط متوالی به‌نقطه‌ای‌که به‌فاصلهٔ ۲/۳ طول AB از A قراردارد، می‌گرایند.

۱۷.۲ (الف) پاره‌خط را به پنج‌قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، یك قسمت را نگه می‌داریم، سه‌قسمت را توزیع می‌کنیم، دراین‌صورت یك قسمت باقی می‌ماند و ما ۱/۴ مقدار توزیع‌شده را در دست داریم. اگر همین فرایند را بارها و بارها تکرارکنیم، هربار یك‌قسمت باقیمانده به‌پنج‌قسمت مساوی تقسیم‌می‌شود، نگه‌داشتن ۱/۴ کل مقدار توزیع‌شده را ادامه خواهیم داد و مقدارکمتر وکمتری ازپاره‌خط اولیه برای توزیع‌شدن باقی می‌ماند. بنابراین

$$\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۲۵}+\frac{۱}{۱۲۵}+\cdots=\frac{۱}{۴}$$

MATH75.IR

به‌طور مشابهی،

$$\text{(ب)}\quad \frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۶۴}+\frac{۱}{۵۱۲}+\cdots=\frac{۱}{۷}$$

$$\text{(پ)}\quad \frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\cdots=\frac{۱}{۹}$$

۱۸۰۲ پاره‌خط را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، mتای آنها را نگه می‌داریم، mتا را برای ادامه دادن باقی می‌گذاریم و $n-۲m$ قسمت باقیمانده را توزیع می‌کنیم، پس کلا $m+(n-۲m)=n-m$ قسمت توزیع شده‌اند و m قسمت را نگه‌داشته‌ایم، بنابراین $m/(n-m)$ مقدار توزیع‌شده را نگه‌داشته‌ایم.

با قسمت باقیمانده همین عمل را انجام می‌دهیم، آن‌را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، m قسمت را نگاه می‌داریم $n-۲m$ قسمت را توزیع می‌کنیم و m قسمت را برای ادامهٔ کار با آنها، حفظ می‌کنیم. با ادامهٔ این روش، همواره $m/(n-m)$ مقدار از قسمت توزیع‌شده را خواهیم داشت در حالی که قسمتی که برای ادامهٔ کار می‌ماند کوچکتر و کوچکتر می‌شود.

۱۹۰۲ از $۲\times۲=۴$ نتیجه می‌شود که $\sqrt{۴}=۲$ و بنابراین $\sqrt{۴}$ گویاست. برای اثبات اینکه $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ گنگ هستند، تنها لازم است که درنظر بگیرید:

(الف) اگر بپذیریم که $\sqrt{۳}=p/q$ که در آن p/q کسری است (از میان همهٔ کسرهای هم‌ارز) که کوچکترین مخرج را دارد، آنگاه داریم

$$۱<\frac{p}{q}<۲,$$

$$q<p<۲q,$$

$$۰<p-q<q,$$

و

$$۳q^۲=p^۲,$$

$$۳q^۲-pq=p^۲-pq,$$

$$q(۳q-p)=p(p-q),$$

و نتیجه می‌دهد

$$\frac{p}{q}=\frac{۳q-p}{p-q}$$

که متناقض با فرض اولیهٔ ماست.

(ب) فرض کنیم $p/q=\sqrt{۵}$، که p/q کسری با کوچکترین مخرج است
دراین‌صورت $p=\sqrt{۵}\,q$ و $۲<p/q<۳$ نتیجه می‌دهند

$$۲q< \quad p \quad <۳q,$$
$$۰<p-۲q<q,$$

و

$$p^{۲}=۵q^{۲},$$
$$p^{۲}-۲pq=۵q^{۲}-۲pq,$$
$$p(p-۲q)=q(۵q-۲p),$$

بنابراین

$$\frac{p}{q}=\frac{۵q-۲p}{p-۲q}$$

که در آن $p-۲q<q$.

۲۰.۲ از $p=\sqrt{۷}\,q$ و $۲<p/q<۳$ به‌دست می‌آوریم

$$۲q< \quad p \quad <۳q,$$
$$۰<p-۲q<q,$$
$$p^{۲}=۷q^{۲},$$
$$p^{۲}-۲pq=۷q^{۲}-۲pq,$$
$$p(p-۲q)=q(۷q-۲p).$$

پس

MATH75.IR

$$\frac{p}{q}=\frac{7q-2p}{p-2q}$$

که متناقض با این فرض است که $\sqrt{7}$ را می‌توان به‌صورت نسبت دوعدد صحیح p و q نشان داد که در آن q کوچکترین مخرج ممکن است.

۲۱۰۲ چون $\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=\sqrt{4}\times\sqrt{2}=2\sqrt{2}$. اگر $\sqrt{8}=p/q$ در این صورت $2\sqrt{2}=p/q$ یا $\sqrt{2}=p/2q$ (که یك تناقض است چون $\sqrt{2}$ گنگ است).

۲۲۰۲ $p=\sqrt{n}\,q$ و $k^2<n<(k+1)^2$ نتیجه می‌دهند که

$$k^2<\left(\frac{p}{q}\right)^2<(k+1)^2,$$

$$k<\frac{p}{q}<k+1,$$

$$kq<p<(k+1)q,$$

$$0<p-kq<q$$

چون $p^2=nq^2$،

$$p^2-kpq=nq^2-kpq,$$

$$p(p-kq)=q(nq-kp),$$

$$\frac{p}{q}=\frac{nq-kp}{p-kq}$$ که در آن $p-kq<q$.

اگر کسری که مربعش مساوی عددصحیح N است موجود بود، دراین‌صورت آن‌را با کوچکترین مخرج ممکن مثلا $p/q=\sqrt{N}$ می‌نوشتیم. بنا برفرض $q\neq 1$، پس $q^2\neq 1$. بنا براین کسر p^2/q^2 بایــد بین دو عدد صحیح متوالی k و $k+1$ قرار گیرد، که دراین‌صورت تناقض فوق به‌دست می‌آید.

۲۳۰۲ اگر $\sqrt{s}$ عدد صحیح نباشد درایــن‌صورت بنا بر مسألهٔ ۲۲۰۲، s مربع یك کسر نیست. اما اگر $2\sqrt{s}=n$، که در آن n عدد صحیح است، آنگاه s برابر با

کسر $(n/۲)^۲$ می‌شود. بنابراین جز اینکه $\sqrt{s}$ عددی صحیح باشد، گرفتار تناقض هستیم.

۲۴۰۲ برای اثبات اینکه $۱۲{,}۵\times a=۱۰۰a/۸$ تنها کافی است توجه کنیم که

$$۱۲{,}۵=۱۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۲۴+۱}{۲}=\frac{۲۵}{۲}=\frac{۱۰۰}{۸}$$

۲۵۰۲ گیریم a عددصحیحی با ارقام $a_ka_{k-۱}\dots a_۰$ است. دراین‌صورت می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}a&=a_k\times ۱۰^k+a_{k-۱}\times ۱۰^{k-۱}+\dots+a_۱\times ۱۰+a_۰\\&=a_k(۱۰^k-۱+۱)+a_{k-۱}(۱۰^{k-۱}-۱+۱)\\&\quad+\dots+a_۱(۱۰-۱+۱)+a_۰\\&=a_k\times ۹۹\dots۹+a_k+a_{k-۱}\times ۹۹\dots۹+a_{k-۱}\\&\quad+\dots+a_۱\times ۹+a_۱+a_۰\\&=۳[a_k\times(۳۳\dots۳)+a_{k-۱}\times(۳۳\dots۳)+\dots+a_۱\times ۳]\\&\quad+a_k+a_{k-۱}+a_{k-۲}+\dots+a_۱+a_۰\end{aligned}$$

چون اولین‌عبارت سمت‌راست مضرب ۳ است، a درتقسیم بر ۳ همان باقیمانده‌ای را داردکه دومین جملهٔ سمت راست دارد، یعنی مجموع ارقام a. روش دیگر بیان این مطلب آن است که a و مجموع ارقام آن به‌یك ردهٔ مانده‌ها (به‌پیمانهٔ ۳) تعلق دارند.

اگر $a_k+a_{k-۱}+\dots+a_۰<۱۰$، برهان تمام است. اگر نه، می‌نهیم

$$a_k+a_{k-۱}+\dots+a_۰=b=b_j\times ۱۰^j+b_{j-۱}\times ۱۰^{j-۱}+\dots+b_۱\times ۱۰+b_۰,$$

و به‌روشی همانند بالا، عمل می‌کنیم؛ سرانجام مجموع ارقام کمتراز ۱۰ می‌شود، و ما به‌عدد ریشه یعنی $r(a)$ خواهیم رسید. این، نشان‌می‌دهد که a و مجموع ارقام آن یعنی b و مجموع ارقام b یعنی c وغیره، تا برسد به $r(a)$، همه در یك ردهٔ مانده‌های به‌پیمانهٔ ۳ قرار دارند.

MATH75.IR

۲۶۰۲ (الف) و (ب). بیایید دنبالهٔ نامتناهی اعشاریهای

$$a_۱ = ۰/۱۱۱۱\ldots,$$

$$a_۲ = ۰/۱۰۱۰۱۰\ldots,$$

$$a_۳ = ۰/۱۰۰۱۰۰۱۰۰\ldots,$$

$$a_۴ = ۰/۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$a_k = ۰/۱۰۰۰\ldots۱۰۰۰\ldots۱۰۰۰\ldots$$

را درنظر بگیریم و توجه کنیم که دورهٔ a_k، k است.

(پ) $۰/۱۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۱\ldots$

فصل سه

۱۰۳ برهان این قضیه برای حالتی‌که $AB' : B'B = m : n$ و m و n اعدادصحیح مثبتی هستند، اساساً همان برهانی است که در فصل شش، بخش ۲.۶ (الف) آمده است. به‌ازای $m=\sqrt{۲}$، $n=۱$، قضیه را می‌توان با روشهایی ثابت کرد که در بخشهای ۲.۶(ب) و ۲.۶(پ) درحالت توافق‌ناپذیری به‌کار رفته‌اند.

۲۰۳ چنین مستطیلی وجود ندارد، زیرا به‌حل معادلهٔ $۰ \times x = ۱$ منجر می‌شود که درآن x طول ضلع دیگر است. اما این‌هم با این‌قاعدهٔ حساب در تناقض است که: به‌ازای هر x، $x \times ۰ = ۰$.

۳۰۳ مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC را با ساقهایی به‌طول x و ۱ رسم کنید (شکل ۶.۳ را ببینید) و از C عمودی بر وتر AC رسم کنید. خط AD را امتداد دهید تا این‌عمود را در B قطع کند. دراین‌صورت پاره‌خط DB دارای طول موردنظر $y=۱/x$ است. زیرا طول‌ارتفاع CD ازمثلث قائم‌الزاویهٔ ACB واسطهٔ‌هندسی بین‌طولهای $AD=x$ و $DB=y$ است:

$$\frac{y}{۱}=\frac{۱}{x}$$

۴۰۳ سهمی $y=x^۲$ مکان هندسی نقاط (x, y) است به‌قسمی که طول و عرض هر نقطهٔ آن در رابطهٔ

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{۱}$$

صدق کند.

این رابطه بازهم ترسیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای‌را پیش می‌کشد که ارتفاع نظیر وتر دارای طول x است و وتر را به‌دو پاره‌خط به‌طولهای ۱ و y تقسیم‌می‌کند. در شکل ۷.۳ این‌ترسیم برای دو مقدار داده شدهٔ x یعنی $x_۱$ و $x_۲$، انجام شده است و مقادیــر نظیر y یعنی $y_۱$ و $y_۲$ به دست آمده‌اند. (جزئیات این ترسیم به خواننده واگذار می‌شود.)

اکنون از مقادیر (x, y) که از ترسیم شکل ۷.۳ به‌دست آمده‌اند می‌توان بــه‌عنوان مختصات نقاط نمــودار سهمی شکل ۸.۳ استفاده و آن‌را رسم‌کرد یــا ممکن‌است این‌کار را مستقیماً باانجام ترسیمی درصفحهٔ مختصات به‌صورت‌زیرانجام داد: برای هر طول x، نقطهٔ $Z:(x, -۱)$ را بیابید و آن‌را به‌مبدأ O وصل‌کنید، در O خطی بر پاره‌خط به‌دست آمده عمود کنید و نقطهٔ $W:(x, y)$ را درمحل تلاقی این عمود باخط قائمی کــه x واحد از محور yهــا فاصله دارد، مشخص‌کنید. در مثلث قــائم‌الزاویهٔ OWZ ارتفاع نظیر وتــر به طول x است و ZW را بــه دو پاره‌خط به طولهای ۱ و y تقسیم می‌کند، بنابراین به‌ازای هر W که به‌این طریق ساخته شود رابطهٔ

$$\frac{۱}{x}=\frac{x}{y} \qquad \text{یا} \qquad y=x^{۲}$$

برقرار است.

۵.۳ اگر x طول داده شده‌ای باشد دراین‌صورت $\sqrt{x}$ را همیشه می‌توان براساس رابطهٔ

$$\frac{۱}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}$$

رسم‌کرد.

مثلا در شکل ۷.۳، همچون گذشته قــرار دهید $AE=۱$ و AE را تــا B امتداد دهید، به‌طوری‌که EB دارای طول داده شدهٔ x باشد، و نیمدایره‌ای به‌قطر AB رسم‌کنید. عمود بر AB در E، این نیمدایره را درنقطهٔ O قطع‌می‌کند، و EO،

MATH75.IR

ارتفاع مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB طول $\sqrt{x}$ خواهد داشت.

طول $\sqrt{x}$ را می‌توان به‌کمك سهمی شکل ۸.۳ نیز به‌دست آورد: کافی‌است نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از محور افقی مساوی x باشد، فاصلهٔ این نقطه از محور قائم، $\sqrt{x}$ است.

۶.۳ برای یافتن مقدار تقریبی $\sqrt[3]{a}$، ریشه‌سوم عدد a، نقطهٔ P محل تلاقی نمودار $y=x^{3}$ را با خط‌افقی $y=a$ به‌دست‌آورید وطول Pرا اندازه بگیرید. مختصات P می‌شود $(\sqrt[3]{a}, a)$.

۸.۳ یك‌ترسیم دقیق نشان خواهد دادکه اگر n بزرگتر وبازهم بزرگترشود، مقدار $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ کوچکتر و بازهم کوچکتر می‌شود.

۹.۳ گیریم $a=\sqrt{n+1}$ و $b=\sqrt{n}$. دراین‌صورت

$$(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=1,$$

یا

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

روشن است که با بزرگتر و بازهم بزرگترشدن n، مخرج یعنی $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ افزایش می‌یابد و از اتحاد بالا نتیجه می‌شود که مقدار $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ کوچکتر و بازهم کوچکتر می‌شود، یعنی تفاضل بین $\sqrt{n+1}$ و $\sqrt{n}$ را می‌توان هرچقدرکه بخواهیم کوچك کنیم (البته این تفاضل همیشه بزرگتر از صفر است) به‌این‌صورت که n را به‌قدرکافی بزرگ بگیریم.

۱۰.۳ عبارت را در

$$\frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

ضرب می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$\sqrt{n}\times\frac{2n+1-2n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}$$

MATH75.IR

که اگر n بزرگتر و بازهم بزرگتر شود، $\frac{۱}{n}$ کوچکتر و بازهم کوچکتر می‌شود و بنابراین، این عبارت به

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

می گراید.

۱۱۰۳ اگر $۰<y<\pi/۲$، در این‌صورت (شکل ۱۵۰۳ را ببینید)، $\sin y<y<\operatorname{tg} y$، که با تقسیم بر $\operatorname{tg} y$ به‌دست می‌آوریم

$$\cos y<\frac{y}{\operatorname{tg} y}<۱$$

که با کاهش y، $\cos y$ به ۱ می‌گراید، بنابراین $y/\operatorname{tg} y$ بین ۱ و عددی نزدیک به ۱ فشرده می‌شود.

۱۲۰۳ (الف) **برهان قضیهٔ ۱۰۳.** گیریم S دنبالهٔ $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... است که حد L دارد، و فرض کنیم $y_۱$، $y_۲$، $y_۳$، ... زیردنبالهٔ دلخواه S' از S است (یعنی، S' دنباله‌ای نامتناهی است که جمله‌های آن بعضی یا همهٔ جمله‌های S هستند که با همان ترتیبی که در S ظاهر می‌شوند، مرتب شده‌اند).

S دارای حد L است به‌این معنی است که دنبالهٔ $(x_۱-L)$، $(x_۲-L)$، $(x_۳-L)$، ... به صفر می گراید، یعنی به‌ازای هر عدد صحیح n، حداکثر تعدادی متناهی (وابسته به n) از جمله‌های x_k-L، ...، $k=۱, ۲, ۳, ...$ وجود دارند که به‌طورعددی‌از $۱/n$ بزرگترند. اما اگر S' زیردنباله‌ای‌از S باشد، دراین‌صورت هر جمله از دنبالهٔ $(y_۱-L)$، $(y_۲-L)$، ... با یك جملهٔ x_k-L مساوی است،و بنابراین به‌ازای هر عدد صحیح n حداکثر تعدادی متناهی از جمله‌های $y_{k'}-L$، $k'=۱, ۲, ۳, ...$ می‌تواند وجود داشته باشد که به‌طور عددی از $۱/n$ بزرگتر باشند.

بنابراین هر زیردنباله از یك دنبالهٔ نامتناهی با حد L، نیز حد L دارد.

(ب) **برهان قضیهٔ ۲۰۳.** $a+x-(a+L)=x-L$، بنابراین اگر $(x_۱-L)$، $(x_۲-L)$، $(x_۳-L)$، ... به صفر بگراید، دراین‌صورت $[a+x_۱-(a+L)]$، $[a+x_۲-(a+L)]$، ... نیز به‌صفر می گراید. بنابراین $a+x_۱$، $a+x_۲$، $a+x_۳$، ... حد $a+L$ دارد.

(پ) **برهان قضیهٔ ۳۰۳.** می‌خواهیم نشان دهیم که اگر دنبالهٔ x_i دارای حد L باشد به‌ازای هرعددصحیح m، همهٔ‌جمله‌های kx_i، مگر تعدادی‌متناهی از آنها،در

MATH75.IR

$$|kx_i - kL| < \frac{1}{m}$$

صدق می‌کنند. به‌عبارت دیگر می‌دانیم که به‌ازای هر n، همه مگر تعدادی متناهی از x_iها در

$$|x_i - L| < \frac{1}{n}$$

صدق می‌کنند. مخصوصاً اگر n را نزدیکترین عددصحیحی که ناکوچکتراز $|k|m$ است بگیریم آنگاه به‌ازای همه، مگر تعدادی متناهی از جمله‌ها داریم:

$$|kx_i - kL| = |k|\,|x_i - L| < |k|\frac{1}{n} \leqslant |k|\,\frac{1}{|k|m} = \frac{1}{m}$$

این استدلال به‌ازای هر عدد صحیح m درست است.

(ت) ابتدا ثابت می‌کنیم: اگر x_1، x_2، x_3، ... دارای حد L و y_1، y_2، y_3، ... دارای حد M باشند آنگاه x_1y_1، x_2y_2، x_3y_3، ... دارای حد LM است.

با توجه به‌راهنمایی داده شده، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} x_iy_i - LM &= x_iy_i - x_iM + x_iM - LM \\ &= x_i(y_i - M) + M(x_i - L) \end{aligned}$$

بنابر فرض به‌ازای هر عدد صحیح n، و به‌ازای همه مگر تعدادی متناهی از x_iها و y_iها داریم

$$|y_i - M| < \frac{1}{n} \qquad \text{و} \qquad |x_i - L| < \frac{1}{n}$$

به علاوه، چون x_i حد دارد، همه مگر تعدادی متناهی از آنها به‌طور یقین از ثابتی مثل C کوچکترند، پس

$$\begin{aligned} |x_iy_i - LM| &\leqslant |x_i|\,|y_i - M| + M|x_i - L| \\ &\leqslant C \times \frac{1}{n} + M \times \frac{1}{n} = (C + M) \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

حالا به‌ازای هر عدد صحیح داده شدهٔ m، می‌توانیم به

$$|x_i y_i - LM| < \frac{۱}{m}$$

برسیم، به‌شرطی‌که عدد صحیح n را طوری انتخاب کنیم که

$$\frac{C+M}{n} < \frac{۱}{m}$$

بنابراین ثابت شد به‌ازای هر عدد صحیح m، و به‌ازای همه مگر تعدادی متناهی از جمله‌های $x_i y_i$ داریم

$$|x_i y_i - LM| < \frac{۱}{m}$$

برای اثبات قضیهٔ ۴.۳، که حد $x_۱^۲$، $x_۲^۲$، ... مساوی $L^۲$ است، از نتیجهٔ فوق به‌ازای $x_i = y_i$ و $L = M$ استفاده کنید. برای اثبات اینکه $x_۱^k$، $x_۲^k$، ... دارای حد L^k است، به‌سادگی همین استدلال را $k-۱$ بار تکرار می‌کنیم.

۱۳.۳ (الف) این‌مسأله به‌هیچ‌وجه آسان نیست. حالت $۰ < r < ۱$ را اختیار کنید. یک برهان متعارف برای آن به‌صورت زیر است:

چون $۱/r > ۱$ پس $۱/r = ۱ + h$، $h > ۰$. اکنون به‌ازای هر n،

$$\left(\frac{۱}{r}\right)^n = (۱+h)^n > ۱ + nh$$

و بنابراین $(۱+h)^n$ با افزایش n بدون محدودیت، افزایش می‌یابد، درنتیجه عکس آن، r^n، به‌صفر می‌گراید.

به‌کمک اصل بولتسانو-وایرشتراس که در بخش بعد شرح داده می‌شود می‌توان این‌ادعا را ثابت کرد که وقتی $n \to \infty$ عبارت $(۱+h)^n$ بدون‌محدودیت افزایش می‌یابد. زیرا اگر L عدد دلخواهی باشد که به‌ازای هر n،

$$(۱+h)^n \leqslant L$$

آنگاه به‌ازای هر n،

$$(۱+h)^{n-۱} \leqslant \frac{L}{۱+h} = L' < L$$

MATH75.IR

و بنابراین بــه‌ازای هر کران بالای L از ایــن دنباله، یک کران بالای کوچکتر L' وجود خواهد داشت و یک‌چنین دنباله‌ای با اصل بولتسانو-وایرشتراس سازگاری ندارد.

اکنون فرض کنید $r=1$، در ایــن‌صورت $r^2=1$، $r^3=1$، $r^4=1$، ... و هر عدد از دنبالهٔ $(r-1)$، (r^2-1)، ... مساوی صفر است. چون هیچ جمله‌ای از این دنباله بیشتر از $1/n$، $n>0$، نیست پس این دنباله به‌صفر می‌گراید و وقتی‌که $r=1$ دنبالهٔ r، r^2، r^3، ... حد ۱ دارد.

(ب) از اتحاد

$$a(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=a(1-x^n)$$

نتیجه می‌گیریم

$$a\times 1+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

دراین‌صورت چون اگر $|r|<1$، r^n به‌صفر می‌گراید داریم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1-r}=\frac{1}{1-r},\qquad -1<r<1$$

بنابراین مجموع هر سری هندسی نامتناهی به‌صورت $a+ar+ar^2+\cdots$ با نسبت مشترک r که به‌طور عددی از ۱ کوچکتر باشد، مساوی $a/(1-r)$ است.

۱۴۰۳ دنبالهٔ اعداد گویایی که در متن ساخته‌شده‌است، به‌صورت اعشاری چنین است

$$\begin{aligned}
&1{,}0\ 000000000\ldots,\\
&0{,}50\ 00000000\ldots,\\
&2{,}000\ 0000000\ldots,\\
&0{,}3333\ 333333\ldots,\\
&3{,}00000\ 00000\ldots,\\
&0{,}250000\ 0000\ldots,\\
&0{,}6666666\ 666\ldots,\\
&1{,}50000000\ 00\ldots,\\
&4{,}000000000\ 0\ldots,\\
&0{,}2000000000\ldots.
\end{aligned}$$

اکنون عددی خواهیم ساخت که kامین رقم اعشار آن همواره یکی از دو رقم ۲ یا ۳ است اما با kامین رقم اعشار عدد kام این فهرست فرق می‌کند.
۳ را به‌عنوان نخستین رقم اعشار انتخاب می‌کنیم زیرا ۳ با نخستین رقم اعشار اولین عدد فرق می‌کند. باز ۳ را به‌عنوان دومین رقم اعشار عددی که می‌سازیم انتخاب می‌کنیم زیرا ۳ با دومین رقم اعشار عدد دوم فهرست فرق می‌کند. به‌طورمشابهی، ۳(≠۰) را برای سومین رقم اعشار، ۲(≠۳) را برای چهارمین رقم اعشار، ۳(≠۰) را برای پنجمین، ۳(≠۰) را برای ششمین، ۳(≠۶) را برای هفتمین وغیره، انتخاب می کنیم، تا به‌عدد kامی برسیم که ۳ در مکان kامین اعشار آن نشسته است دراین‌صورت ۲ را انتخاب می کنیم.

۱۵.۳ پیش‌از رده‌بندی حروف الفبا به‌خاطر قطعیت، حرف T را درنظر می گیریم. وضعیت را با درنظر گرفتن یك مجموعهٔ ناشمارا از حرفهای یك اندازهٔ (یعنی قابل‌انطباق) T ساده می کنیم (مثلا با T هایی که پایه و خط‌بالای هر کدام به‌اندازهٔ یك‌اینچ باشد) که رأسهایش با A، B و C مشخص شده‌اند، شکل ۱۸.۳(الف) را ببینید.

بر هر تکه کاغذ به‌ابعاد متناهی، یك مجموعهٔ ناشمارا از چنین T هایی باید شامل یك زیرمجموعهٔ ناشمارا از T هایی باشد که رأسهای Aی آنها مثلا به‌فاصلهٔ ۱/۸ اینچ از یکدیگر باشند. در این مجموعه یك زیرمجموعهٔ ناشمارا وجود دارد به‌قسمی که رأسهایی که با B مشخص شده‌اند به فاصلهٔ ۱/۸ اینچ از یکدیگر قرار دارند. و دراین‌مجموعه نیز یك‌زیرمجموعهٔ‌ناشمارا به‌قسمی وجود دارد که رأسهایی از آن که با C مشخص شده‌اند به‌فاصلهٔ ۱/۸ اینچ از یکدیگر قرار دارند.

اکنون فرض کنید ABC و $A'B'C'$ [شکل ۱۸.۳(ب) را ببینید] دو T از نوعی که گفتیم باشند. آنها متقاطع‌اند، این را می‌توان به‌کمك هندسهٔ مقدماتی با استناد به‌این واقعیت ثابت کرد که هر خط‌راست صفحه را به‌دو ناحیه (که دو طرف خط نام دارند) تقسیم می کند و پاره‌خطهایی که دو نقطه از طرفهای مقابل خط را به هم می‌پیوندند باید خط را قطع کنند. این خود ثابت می کند که غیرممکن است تعداد ناشمارایی از T های همنهشت نامتقاطع بریك صفحه نوشت. توجه‌کنید اگر صرفاً می‌خواستیم که فاصله‌های AA' و BB' کوچك باشند، دراین‌صورت T ها احتمالا می‌توانستند مثل شکل ۱۹.۳ قرار بگیرند، که متقاطع نیستند. در اینجا ما حالتی از T ها راکه اندازه‌های مختلفی دارند بررسی نمی‌کنیم اما نتیجهٔ یکسانی را می‌توان ثابت کرد.

همهٔ حرفهایی از الفبا که دارای شکل و قواره‌ای همانندآنچه که در برخورد

MATH75.IR

با T دیدیم، هستند (یعنی یک تقاطع از دو پاره‌خط یا دو خم که حداقل یکی از پاره‌خطها فراتر از نقطهٔ تقاطع امتداد داشته باشد) درهمان ردهٔ T قرار دارند. آنها عبارت‌اند از A، B، E، F، H، K، P، Q، R، T، X، و Y.

بریك صفحهٔ کاغذ می‌توان یك مجموعهٔ ناشمارا از سایر حرفها را توی‌هم نوشت. شکلهای ۲۰.۳(الف)، (ب) این‌واقعیت را به‌ترتیب برای حرفهای L و O شرح می‌دهند. درهر حالت، این واقعیت که یك پاره‌خط شامل تعداد ناشمارایی از نقاط است سر نخ را به‌دست می‌دهد.

فصل چهار

۱.۴ عبارت «اگر این حد وجود داشته باشد» حذف شده است. گزارهٔ $\lim\limits_{n\to\infty} L_n = L$ تنها وقتی معنی پیدا می‌کند که L_n دارای حد باشد و دراین‌حالت بیان می‌کند که L مقدار این حد است.

۲.۴ محاسبهٔ مستقیم طولهای S_1، S_2، ... اضلاع مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که قاعده‌هایشان بر محور xهاست ورأسهایشان برخم $y=x^2$ جای دارد، قدری‌مشکل است؛ خوشبختانه پرسش مسأله را می‌توان به‌آسانی بدون چنین محاسباتی پاسخ گفت: طول زیگزاگ به‌دست آمده بازهم ۲ است، زیرا همچون مثال ۲، دو برابر فاصلهٔ بین (۰ , ۱) و مبدأ است.

۳.۴ فاصله‌های

$$B_1T=1, \quad B_3T=\frac{1}{2}, \quad B_5T=\frac{1}{4}, \cdots, \quad B_{2n+1}T=\frac{1}{2^n}, \cdots$$

را که به‌صفر می‌گرایند، محاسبه می‌کنیم. بنابراین T حد دنبالهٔ

$$B_1, \quad B_3, \cdots \quad B_{2n+1}, \cdots$$

است.

فاصله‌های $B_{2n}B_{2n-1}$ رامی‌توان به‌صورت اضلاع‌مثلثهای متساوی‌الاضلاع به‌طولهای $1/2^{n-1}$ نمایش داد و بنابراین، این فاصله‌ها نیز به‌صفر می‌گرایند.

بنابر ویژگی نابرابری مثلثی رابطهٔ زیر را بین طولها داریم:

$$B_{2n}T \leqslant B_{2n}B_{2n-1}+B_{2n-1}T$$

همین‌که n افزایش یابد هر جملهٔ طرف راست به‌صفر می‌گراید (بنابر آنچه دربالا نشان دادیم) و از اینجا مجموع آنها بـه‌صفر می‌گراید. بنابراین T حد نقاط بـا

اندیس زوج نیز هست.

۴۰۴ نقطهٔ $(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}/۳)$: Z حد دنبالهٔ نقاط $D_۱$، $D_۲$، ... است. طولهای $D_۱$، $D_۲$، ... عبارت‌اند از

$$x_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\quad x_۲=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴},\quad x_۳=\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۴}+\frac{\sqrt{۲}}{۸},\ \dots,$$

$$x_n=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\dots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}\right),\ \dots$$

این تصاعدهای هندسی متناهی را که جمع کنیم، به‌صورت زیر درمی‌آیند

$$x_۱=\sqrt{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}\right),\quad x_۲=\sqrt{۲}\left(۱-\frac{۱}{۴}\right),$$

$$x_۳=\sqrt{۲}\left(۱-\frac{۱}{۸}\right),\ \dots,\quad x_n=\sqrt{۲}\left[۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\right],\ \dots;$$

این اعداد به‌طور دلخواه به $\sqrt{۲}$ نزدیك می‌شوند زیرا دنبالهٔ ۱/۲، ۱/۴، ۱/۸، ... به‌صفر می‌گراید. این، نشان می‌دهد که $\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{۲}$ و این‌هم به‌معنای این‌عبارت است که «طول Z حد طولهای $D_۱$، $D_۲$، ... است».

برای اینکه ثابت کنیم عرضهای $D_۱$، $D_۲$، ... یعنی

$$y_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\quad y_۲=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}\right),\quad y_۳=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\right),\ \dots,$$

$$y_n=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left[۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}-\dots+\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{n-۱}\right],\ \dots$$

دارای حد $\sqrt{۲}/۳$ اند، این‌سریهای هندسی متناهی‌را جمع می‌کنیم و درمی‌یابیم که

$$y_n=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left[\frac{۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n}{۱+\frac{۱}{۲}}\right]=\frac{\sqrt{۲}}{۳}\left[۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n\right].$$

اگر $n\to\infty$، $\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n$ به‌صفر می‌گراید، بنابراین y_n حد $\sqrt{۲}/۳$ دارد.

ازاین‌واقعیت که حدطولها $\sqrt{۲}$ و حدعرضها $\sqrt{۲}/۳$ است، می‌توانیم به کمک قضیهٔ فیثاغورس ثابت‌کنیم که دنبالهٔ $D_۱$، $D_۲$، ... دارای حد $Z:(\sqrt{۲}, \sqrt{۲}/۳)$ است. فاصلهٔ D_nZ را با

$$(D_nZ)^۲=(\sqrt{۲}-x_n)^۲+\left(\frac{\sqrt{۲}}{۳}-y_n\right)^۲$$

بیان می‌کنیم. وقتی $n\to\infty$ جمله‌های سمت راست به‌صفر می‌گرایند، بنابراین مربعهای آنها و درنتیجه مجموع مربعهای آنها به‌صفرمی‌گرایند. بنابراین فاصله‌های D_nZ به‌صفر می‌گرایند و درواقع Z حد دنبالهٔ $D_۱$، $D_۲$، ... است.

۵.۴ طولها و عرضهای $D'_۱$، $D'_۲$، ... را به‌ترتیب با $x_۱$، $x_۲$، ... و $y_۱$، $y_۲$، ... نمایش می‌دهیم. از ترسیم مثال ′۴ و شناختی که از مثال ۴ داریم روشن است که

$$x_۱=\frac{\sqrt{۲}}{۲},\quad x_۲=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}\right),\quad x_۳=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\right),\ \dots$$

$$x_n=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۸}+\dots\pm\frac{۱}{۲^{n-۱}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left[\left(۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۶۴}+\dots\pm\frac{۱}{۲^{n-۲}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{۱}{۲}\left(۱-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۶۴}+\dots\pm\frac{۱}{۲^{n-۲}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left[\frac{۱-\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{n/۲}}{\frac{۵}{۴}}+\frac{۱-\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{n/۲}}{۲\times\left(\frac{۵}{۴}\right)}\right]$$

$$=\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}\left[۱-\left(-\frac{۱}{۴}\right)^{n/۲}\right],$$ به‌ازای nهای زوج و ناکوچکتراز ۲

و

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{۳\sqrt{۲}}{۵}$$ و چون $$x_{n+۱}=x_n\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{۱}{۴}\right)^{n/۲}$$

پس
$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty} x_n\pm\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n/2}=\frac{3\sqrt{2}}{5}$$

درمورد عرضها داریم

$$y_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y_2=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right),\quad y_3=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right),\ \ldots,$$

$$y_n=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots\pm\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots\pm\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\cdots\pm\frac{1}{2^{n-2}}\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}}{\frac{5}{4}}-\frac{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}}{2\times\frac{5}{4}}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{5}\left[1-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n/2}\right]$$ ، به‌ازای nهای زوج و ناکوچکتر از ۲

و

$$y_{n+1}=y_n\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n/2}$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{\sqrt{2}}{5}=\lim_{n\to\infty} y_{n+1}$$

و همچنان‌که در حل مسألهٔ ۴.۴ دیدیم، این محاسبات نتیجه می‌دهد که نقطهٔ $(3\sqrt{2}/5,\ \sqrt{2}/5)$ نقطهٔ حدی دنبالهٔ D'_1، D'_2، ... است.

۶.۴ تصویر قائم هریك ازنقاط E_1، E_2، E_3 وغیره را برمحور yها به‌دست آورید (همان کاری که هنگام محاسبهٔ عرض یك نقطه انجام می‌دهیم). این نقاط [تصویر]

MATH75.IR

را F_1، F_2، F_3، وغیره بنامید. اکنون اگر f_n را عرض E_n بگیریم، f_n طول OF_n نیزهست. توجه کنید که دنبالهٔ اعداد f_2، f_4، f_6، ... پیوسته‌افزایش می‌یابد و از بالاکراندار است. بنابر اصل بولتسانو-وایرشتراس این دنباله دارای حد f^* است. ثابت می‌شود که f^* حد دنبالهٔ fهای به‌شمارهٔ فرد یعنی f_1، f_3، f_5، ... نیز هست که از بالا به‌آن می گراید. اگرچه ممکن است خواننده ترجیح دهد خود، این مطلب را ثابت کند ولی به‌زودی درستی آن‌را نشان خواهیم داد. بنابراین کل دنباله دارای حد f^* است، البته گرایش به‌این حد دو سویه است. به f^* یك نقطهٔ F^* (برمحور yها) نظیر می‌شود که باید تصویر حد نقاط E_1، E_2، E_3، ... باشد، اما همچنان که دیدیم نقاط E_1، E_2، ... حد ندارند.

یك برهان برای‌اینکه دنبالهٔ fهای به‌شمارهٔ فرد حد f^* دارد در زیرمی آید. به‌ازای هر n داریم،

$$f_{2n-1}-f^*=(f_{2n-1}-f_{2n})+(f_{2n}-f^*)$$

پرانتز دوم سمت راست منفی است (شکل ۱۰.۴ را ببینید). مقدار پرانتز اول سمت‌راست دقیقاً $\sqrt{2}/(2n)$است. درمورد پرانتز دوم دستوری نداریم. اما چون دنبالهٔ f_{2n} $(n=1, 2, 3, \dots)$ به f^* همگراست، از تعریف حد می‌دانیم که‌وقتی n به‌اندازهٔ کافی بزرگ است همهٔ این جمله‌ها کوچك‌اند. بنابراین می‌توانیم مطمئن باشیم هنگامی که n به‌قدر کافی بزرگ است، طرف راست، تفاضل دو عدد کوچك است و بنابراین خود این‌تفاضل کوچك است. این نشان می‌دهد که f_{2n-1} به f^* (به‌ازای nهای بزرگ) نزدیك است و برهان تمام می‌شود.

۷.۴ مثال ۵ نشان داد (حل مسألهٔ قبل را ببینید) که یك دنباله از نقاط صفحه ممکن است حد نداشته باشد اگرچه دنبالهٔ تصویرهای آنها یك نقطهٔ حدی دارد. ادعای (الف) درست خواهد بود اگر به‌آن اضافه‌کنیم «اگر دنبالهٔ نقاط داده شده دارای حد باشد»؛ به‌این موضوع به‌زودی اشاره خواهیم‌کرد.

ادعای (ب) درست است. گیریم Q_n نقطه‌های دنبالهٔ مفروض، Q نقطهٔ حدی آن، P_n تصویر Q_n و P تصویر Q است. دراین‌صورت $P_nP=Q_nQ\cos\alpha_n$ که درآن α_n زاویهٔ بین پاره‌خط Q_nQ و خطی است که تصویرها برآن قرار دارند. چون $|\cos\alpha_n|\leqslant 1$ نتیجه‌می‌شود که $|P_nP|\leqslant|Q_nQ|$ وچون $\lim\limits_{n\to\infty} Q_nQ=0$، پس $\lim\limits_{n\to\infty}|P_nP|=0$. بنابراین P، تصویرQ، به‌واقع نقطهٔ‌حدی‌دنبالهٔ P_n است.

این‌مطلب همچنین ثابت می کند که حد تصویرها عبارت از تصویر حد دنبالهٔ

 MATH75.IR

نقاط است، مشروط بر آنکه حد داشته باشند. اگر P^* حد تصویرها و P تصویر حد یعنی تصویر Q باشد، $\lim_{n\to\infty} P_nP^* = 0$ و $\lim_{n\to\infty} P_nP = 0$ نتیجه‌می‌دهند که P و P^* منطبق‌اند.

۸۰۴ گیریم

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

می‌دانیم $k > k-1$ در نتیجه

$$\text{به‌ازای هر } k>1 \qquad \frac{1}{k} < \frac{1}{k-1} \quad \text{و} \quad \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$$

بنابراین

$$S_n < 1 + \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \tag{1}$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم که

$$\text{به‌ازای } k = 2, 3, \dots \qquad \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

و عبارت سمت راست (۱) را به‌صورت

$$S_n < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{n}$$

بازنویسی می‌کنیم. این، ثابت می‌کند که به‌ازای $n = 1, 2, \dots$، $S_n < 2$.

۹۰۴ بنا بر قضیهٔ فیثاغورس، می‌توانیم هر پاره‌خط OP_k را برحسب جملهٔ قبلی بنویسیم:

$$OP_k^2 = OP_{k-1}^2 + \frac{1}{(k-1)^2} \tag{1}$$

سپس، OP_{k-1} را برحسب جملهٔ قبلی آن می‌نویسیم و در (۱) جایگذاری می‌کنیم:

MATH75.IR

$$OP_k^2 = OP_{k-2}^2 + \frac{1}{(k-2)^2} + \frac{1}{(k-1)^2}.$$

با ادامهٔ این روش به‌دست می‌آوریم

$$OP_k^2 = OP_1^2 + 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k-1)^2}$$

و چون $OP_1 = 1$، (مطابق علامتگذاریی که در حل مسألهٔ قبل استفاده شد) داریم

$$OP_k^2 = 1 + S_{k-1}$$

دیدیم که به‌ازای هر n، $S_n < 2$. بنابراین $OP_n^2 < 1 + 2 = 3$ و

$$OP_n < \sqrt{3} \qquad \text{به‌ازای همهٔ } n \text{ها،} \qquad (2)$$

طول زیگزاگ $P_1P_2 \ldots P_n$ مساوی است با

$$L_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

و قبلا دیدیم (صفحهٔ ۷۷) که سری همساز $\ldots + 1/3 + 1/2 + 1$ حد ندارد.

برای اثبات اینکه Q_k تصویرهای نقاط P_k (بر دایره‌ای به‌شعاع ۳ و مرکز O) بـه طور نامحدودی بـه‌دور خود می‌پیچند، کافی است نشان دهیم کـه مجموع زاویه‌های α_n، بین OP_n و OP_{n+1}، به‌طور دلخواه بزرگ می‌شوند. برای دیدن این‌هم ملاحظه کنید که

$$\sin \alpha_n = \frac{\frac{1}{n}}{OP_{n+1}} = \frac{1}{n\,OP_{n+1}}$$

بنابر نتیجهٔ (۲)، می‌بینیم که

$$\frac{1}{n\,OP_{n+1}} > \frac{1}{n\sqrt{3}} \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

به‌علاوه، در مورد هـر زاویهٔ حادهٔ α، داریم $\sin \alpha < \alpha$ (شکل ۱۵.۳ را ببینید).
بنابراین

$$\alpha_۱+\alpha_۲+\cdots>\sin\alpha_۱+\sin\alpha_۲+\cdots>\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}+\cdots$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۳}}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots\right),$$

بنابراین مجموع زاویه‌ها از سری همساز (که در یك عامل ثابت $۱/\sqrt{۳}$ ضرب شده است) فراتر می‌رود و بنابراین بینهایت است.

دنبالهٔ $P_۱$، $P_۲$، ... به‌وضوح نقطهٔ حدی ندارد زیرا، اگر چنین‌بود، همهٔ‌نقاط از نقطه‌ای معین (مثلا P_N) بـه‌بعد در قطاع کوچکی از دایره قرار می‌گرفتند ولی آشکار است که چنین چیزی پیش نمی‌آید.

۱۰۰۴ (الف)

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۶}+\cdots=\frac{۱}{۲}\left[۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots\right]$$

داخل کروشه سری همساز است کـه پیشتر موردبحث قرارگرفت، و معلوم شدکـه بینهایت است. حاصلضرب یك‌عدد ثابت درسری همساز هم بینهایت است پس‌سری (الف) واگراست.

(ب)

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۱۱}+\cdots=\frac{۱}{۴\times ۱-۱}+\frac{۱}{۴\times ۲-۱}+\frac{۱}{۴\times ۳-۱}$$

$$+\cdots+\frac{۱}{۴n-۱}+\cdots$$

چون

$$\frac{۱}{۴n-۱}>\frac{۱}{۴n}\qquad n=۱,\ ۲,\ \cdots,$$

هر جمله از سری (ب) از جملهٔ نظیرش در سری واگرای

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۲}+\cdots+\frac{۱}{۴n}+\cdots=\frac{۱}{۴}\left[۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots\right],$$

بزرگتر است و بنابراین سری (ب) واگراست.

(پ) چون به‌ازای $n>۱$، $n>\sqrt{n}$ داریم

$$\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$$

و

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\cdots > \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

بنابراین سری (پ) واگراست.

(ت) جمله‌های این سری حتی از جمله‌های نظیرشان در (پ) بزرگترند و بنابراین (ت) به‌طور مشخص واگراست.

۱۱۰۴ (الف) اگر به‌ازای هر خط در صفحه، تصویر P حد تصویرهای P_n برآن باشد در این‌صورت این موضوع مخصوصاً درمورد دو محور عمود برهم دستگاه مختصات درست است. تصویرهای P_n را بر محور xها و محور yها به‌ترتیب با x_n و y_n و ازآن P را با x و y نمایش می‌دهیم. دراین‌صورت با توجه به‌شکل ۱۵۰۴ (الف)

$$(P_nP)^2=(x_n-x)^2+(y_n-y)^2$$

و چون x_n به x و y_n به y می‌گرایند،

$$\lim_{n\to\infty}(P_nP)^2=0$$

و P_n به P می‌گراید.

(ب) همان‌طور که مثال ۵ (صفحهٔ ۸۰) نشان می‌دهد روشن است که این نتیجه را نمی‌توان از این واقعیت که مفروضات مسأله فقط برای یك خط درست باشند، به‌دست آورد.

(پ) اگر مفروضات مسأله برای هر دوخط ناموازی مثلاً l_1 و l_2 درست باشند، یکی (مثلاً l_1) را محور xها می‌گیریم. می‌توان نشان داد (با روشهای هندسهٔ تحلیلی یا جبر خطی) که هرخطی درصفحه، مثلا محور yها، را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی ازاین دو خط ناموازی بیان کرد. به‌علاوه y_n تصویر P_n بر محور yها را می‌توان برحسب x_n و z_n که تصویر P_n برخط l_2 است بیان کرد [شکل ۱۵۰۴ (ب) را ببینید]، و اگر x_n و z_n دارای حد باشند y_n هم حد دارد که آن‌را y می‌نامیم. پس مسألهٔ P حد P_n است، را می‌توان به‌مسأله‌ای تحویل کرد که در (الف) حل شد.

MATH75.IR

فصل پنج

۱.۵ فرض کنید $\sqrt{۲}$ گویاست، یعنی قطر مربع واحد، طول $p_۱/q_۱$ دارد که در آن $p_۱$ و $q_۱$ دو عدد صحیح‌اند. در این‌صورت مربعی که اضلاعش به‌طول $q_۱$ واحد باشند قطری به‌طول $p_۱$ دارد.

اکنون دنبالهٔ زیر ازمثلثهای متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه را می‌سازیم: اولی ساقهایی به‌طول $q_۱$ و وتری به‌طول $p_۱$ دارد، شکل ۴.۵(ب) را ببینید. در نقطه‌ای که وتررا به دو پاره‌خط به‌طولهای $q_۱$ و $p_۱-q_۱$ تقسیم می‌کند خطی بر آن عمود کنید. این عمود گوشه‌ای از اولین مثلث جدا می‌کند، و همین گوشه دومین مثلث ماست، که به‌وضوح مشابه به اولی و با ساقی به‌طول $q_۲$ و وتری به طول $p_۲$ است. ملاحظه می‌کنیم [شکل ۴.۵(ب) را ببینید] که

$$q_۲=p_۱-q_۱،\qquad p_۲=q_۱-q_۲=q_۱-(p_۱-q_۱)=۲q_۱-p_۱$$

اکنون همین ترسیم را تکرار می‌کنیم و مثلث گوشه‌ای بعدی را جدا می‌کنیم. ساقهای آن به‌طول

$$q_۳=p_۲-q_۲=۲q_۱-p_۱-(p_۱-q_۱)=۳q_۱-۲p_۱$$

و وتر آن به‌طول

$$p_۳=q_۲-q_۳=p_۱-q_۱-(۳q_۱-۲p_۱)=۳p_۱-۴q_۱$$

است. بـا ادامهٔ جداکردن گوشه‌ها، همواره یك مثلث قـائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به‌دست می‌آوریم که بـا همهٔ مثلثهای قبلی مشابه است. ساق nامین مثلث به‌طول q_n و وترش به‌طول p_n است و این طولها در روابط

$$q_n=p_{n-۱}-q_{n-۱}،\qquad p_n=q_{n-۱}-q_n$$

صدق می‌کنند. چون $p_{n-۱}=q_{n-۲}-q_{n-۱}$، می‌توانیم q_n، طول nامین ساق‌را با

$$q_n=q_{n-۲}-۲q_{n-۱},\qquad n>۲$$

که برحسب طولهای ساقهای دو مثلث قبلی است، بیان کنیم.

اکنون‌دنبالهٔ $q_۱$،$q_۲$،$q_۳$، ... را در نظر بگیرید. چون $p_۱$و$q_۱$ دوعددصحیح‌اند، $q_۲=p_۱-q_۱$ و $q_۳=q_۱-۲q_۲$ و درحالت کلی $q_n=q_{n-۲}-۲q_{n-۱}$ به‌ازای هر $n>۲$ عدد صحیح است. از ترسیم ما روشن است کـه ساقهای مثلثهای متوالی برحسب طول کاهشی هستند، یعنی

MATH75.IR

$$q_1>q_2>q_3>\cdots$$

به‌این ترتیب، فرض اینکه $\sqrt{2}=p_1/q_1$ گویاست به‌یك دنبالهٔ کاهشی نامتناهی‌از اعداد صحیح مثبت منجرمی‌شود وچنین دنباله‌ای وجود ندارد. پس نتیجه می گیریم که $\sqrt{2}$ گنگ است.

به‌همین ترتیب برای به‌کارگیری این روش دربارهٔ $\sqrt{5}$، فرض‌کنید که $\sqrt{5}=r_1/s_1$ که درآن r_1 و s_1 دو عدد صحیح‌اند. اگر مستطیل شکل ۵.۵ را بزرگ‌کنیم به‌قسمی که اضلاع آن s_1 و $2s_1$ باشند، آنگاه قطر آن r_1 می‌شود. ترسیم ما به‌مثلثهای‌قائم‌الزاویهٔ متشابهی با ساقهای s_n، $2s_n$ و وتر r_n منتهی‌می‌شود. روابط بازگشتی بین آنها چنین است

$$s_n=r_{n-1}-2s_{n-1}, \qquad r_n=s_{n-1}-2s_n$$

بنا براین

$$s_n=s_{n-2}-2s_{n-1}-2s_{n-1}=s_{n-2}-4s_{n-1}$$

و دنبالهٔ s_1، s_2، s_3، ... ازطولهای ساقهای کوچکتر مثلثهای متشابه بازهم یك‌دنبالهٔ نامتناهی نزولی از اعداد صحیح است.

این مثالها نشان می‌دهند در حالاتی که k مجموع مربعهای دو عدد صحیح دلخواه باشد، $k=a^2+b^2$، چگونه از این روش می‌توان برای اثبات گنگ‌بودن $\sqrt{k}$ (اگر k مربع کامل نباشد) استفاده کرد. ما از آن برای $k=1^2+1^2$ و $k=2^2+1^2$ استفاده‌کردیم. تفصیل این تعمیم را به‌خواننده واگذار می‌کنیم.

۳۰۵ kامین کسر، F_k، ازکسر قبلی، F_{k-1}، به‌صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$F_k=\frac{1}{1+F_{k-1}}$$

اگر $F_{k-1}=\frac{p}{q}$ آنگاه $F_k=\frac{1}{1+\frac{p}{q}}=\frac{q}{p+q}$

۴۰۵ (الف) یك‌دنباله از بخشهای متناهی عبارت $\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1-\cdots}}}$ به‌روش زیر تشکیل می‌شود:

$$\sqrt{1}, \quad \sqrt{1-\sqrt{1}}, \quad \sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{1}}}, \ldots$$

هنگامی که این اعداد را محاسبه کنیم می‌بینیم که دنبالهٔ ۱، ۰، ۱، ۰، ... به‌دست می‌آید که حد ندارد.

(ب) چون m در $m^2+m=1$ صدق می‌کند، عکس آن در

$$1+\tau=\tau^2 \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau}=1$$

صدق می‌کند. جمله‌های a_i از دنبالهٔ بخشهای متناهی

$$\sqrt{1},\quad \sqrt{1+\sqrt{1}},\quad \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}},\ \ldots$$

از دستور بازگشتی

$$a_1=\sqrt{1},\quad a_n=\sqrt{1+a_{n-1}},\quad n=2,3,\ldots \qquad (1)$$

پیروی می‌کنند.

با به‌کار بردن قضیهٔ بولتسانو-وایرشتراس نشان‌خواهیم داد که دنبالهٔ صعودی a_1، a_2، ... حد دارد، بخش ۸.۳ را ببینید. برای انجام این منظور باید یك کران B پیدا کنیم به‌قسمی که $a_1<a_2<\ldots<B$.

از این‌واقعیت که a_i افزایش می‌یابد نتیجه‌می‌شود که به‌ازای $n=1,2,\ldots$، $a_{n+1}-a_n>0$. از (۱) داریم

$$a_{n+1}-a_n=[\sqrt{1+a_n}-\sqrt{1+a_{n-1}}]\,\frac{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}$$

$$=\frac{(1+a_n)-(1+a_{n-1})}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}=\frac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{1+a_n}+\sqrt{1+a_{n-1}}}$$

چون برای هر i، $a_i>0$، مخرج عبارت آخر بزرگتر از ۲ است. بنابراین

$$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1}) \qquad \text{به‌ازای همهٔ } n \text{ها}$$

و

$$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})<\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(a_{n-1}-a_{n-2})\right]$$

$$<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}(a_2-a_1) \qquad (2)$$

MATH75.IR

سپس a_{n+1} را به‌صورت

$$a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

می‌نویسیم ونابرابری (۲) را برای هریك ازعبارتهای داخل پرانتز به‌کارمی‌گیریم:

$$a_{n+1}<\frac{1}{2^{n-1}}(a_2-a_1)+\frac{1}{2^{n-2}}(a_2-a_1)+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=(a_2-a_1)\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right]+a_1$$

عبارت داخل کروشه هرگز بیشتراز ۲ نیست، بنابراین

$$a_{n+1}<2(a_2-a_1)+a_1=2(\sqrt{2}-1)+1=2\sqrt{2}-1$$

و این عدد یك کران این دنباله است.

ملاحظه می‌کنید که از این واقعیت که حد این دنباله $\tau=1/m=1+m=1{,}618\ldots$ است استفاده نکردیم. کران

$$B=2\sqrt{2}-1=1{,}828$$

را که به‌دست آوردیم قدری از این حد بزرگتر است.

۵۰۵ مقادیر این نسبتها که تا شش رقم اعشار محاسبه شده‌اند، عبارت‌اند از

$$\frac{5}{8}\approx 0{,}625000,\qquad \frac{8}{13}\approx 0{,}615385,\qquad \frac{13}{21}\approx 0{,}619048,$$

$$\frac{21}{34}\approx 0{,}617647,\qquad \frac{34}{55}\approx 0{,}618182,\qquad \frac{55}{89}\approx 0{,}617978.$$

کسرهای

$$\frac{610}{987}\approx 0{,}618034 \qquad \text{و} \qquad \frac{377}{610}\approx 0{,}618033$$

هفدهمین و هجدهمین جمله‌های دنباله‌اند.

۶۰۵ کسرهای متوالی در دنباله به طور عددی به m نزدیك می‌شوند. تفاضلهای تقریبی بین m و کسرهای ۱/۲، ۲/۳، ۳/۵، ۵/۸، ۸/۱۳ به‌ترتیب عبارت‌انداز ۰٫۱۱۸۰۳۴، ۰٫۰۴۸۶۳۳، ۰٫۰۱۸۰۳۴، ۰٫۰۰۶۹۶۶ و ۰٫۰۰۲۶۴۹. برای

MATH75.IR

برهانی کلی از این واقعیت که هر همگرا که به یک کسر مسلسل نامتناهی از همگرای قبلی به m نزدیکتر است، مثلا فصل سه (مخصوصاً قضیهٔ ۷.۳) از کتاب کسرهای مسلسل را ببینید که از همین سری کتابهاست.

۷.۵ $m^{۵}=۲m-۳m^{۲}=۵m-۳,\quad m^{۶}=۵m^{۲}-۳m=۵-۸m,$

$$m^{۷}=۵m-۸m^{۲}=۱۳m-۸,\quad m^{۸}=۱۳m^{۲}-۸m=۱۳-۲۱m,\ldots$$

اگر f_n، nامین جمله‌ازدنبالهٔ فیبوناتچی باشد، دستور توان nام m می‌شود

$$m^{n}=(-۱)^{n}(f_{n-۱}-f_{n}\cdot m)$$

و دستور نظیر τ می‌شود

$$\tau^{۴}=۳\tau+۲,\quad \tau^{۵}=۵\tau+۳,\quad \tau^{۶}=۸\tau+۵,\ \ldots,\quad \tau^{n}=f_{n}\tau+f_{n-۱}$$

۸.۵ حل کامل ۸.۵ در فصل شش صفحه‌های ۱۳۷ تا ۱۴۲ آمده است.

۹.۵ طریقی که رأسها در مستطیلهای متوالی مرتب شده‌اند، این واقعیت را نشان می‌دهد که ضلع کوچکتر هر مستطیل (منظور خطی است که دو رأسی را به‌هم وصل می‌کند که در این ترتیب در ردیف سوم و چهارم آمده است) ضلع بزرگترمستطیل بعدی است (یعنی خط واصل بین دو رأسی که در ردیف دوم و سوم آمده است). درهر حالت رأسی اول نامیده می‌شود که از آن خط ۴۵°ای به‌نقطه‌ای که اولین رأس مستطیل بعدی است رسم می‌شود.

۱۰.۵ طول پاره‌خطهای متوالی این زیگزاگ همان طول پاره‌خط قبلی است که در عامل $m<۱$ ضرب شده است. بنابراین طول زیگزاگ مجموع سری هندسی نامتناهی

$$\sqrt{۲}+\sqrt{۲}m+\sqrt{۲}m^{۲}+\sqrt{۲}m^{۳}+\ldots=\frac{\sqrt{۲}}{۱-m}=\frac{\sqrt{۲}}{m^{۲}}$$

است. حل مسألهٔ ۱۳.۳ (صفحهٔ ۶۱) ثابت می‌کند که دستور مجموع هر سری هندسی نامتناهی که اولین جملهٔ آن a و نسبت مشترکش $r<۱$ باشد $a/(۱-r)$ است.

MATH75.IR

۱۱۰۵

فاصلهٔ T تا نقطه‌ای بر مارپیچ	تعداد قائمه‌های (درجه‌های) حول T	
$AT \cdot m^{۱/۶}$	(۱۵°)	$\frac{۱}{۶}$
$AT \cdot m^{۱/۳}$	(۳۰°)	$\frac{۱}{۳}$
$AT \cdot m^{۱/۲}$	(۴۵°)	$\frac{۱}{۲}$
$AT \cdot m^{۵/۶}$	(۷۵°)	$\frac{۵}{۶}$
$AT \cdot m^{۴/۳}$	(۱۲۰°)	$\frac{۴}{۳}$
$AT \cdot m^{۳/۲}$	(۱۳۵°)	$\frac{۳}{۲}$
$AT \cdot m^{۵/۳}$	(۱۵۰°)	$\frac{۵}{۳}$
$AT \cdot m^{۵/۲}$	(۲۲۵°)	$\frac{۵}{۲}$
...	...	...
$AT \cdot m^{(۲n+۱)/۲}$	$\left(\frac{۲n+۱}{۲} \times ۹۰^\circ\right)$	$\frac{۲n+۱}{۲}$

۱۲۰۵ اگر t مقادیر منفی بگیرد، مارپیچ از AT در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ادامه می‌یابد. اگر مقادیر t کوچکتر و کوچکتر شوند (یعنی t به $-\infty$ میل کند)، R بدون محدودیت افزایش می‌یابد.

۱۳۰۵ برای ضرب عدد $R_۱$ در عدد $R_۲$ به کمک مارپیچ شکل ۱۱۰۵ (که در آن فاصلهٔ AT را واحد اندازه‌گیری گرفته‌ایم) از خط‌کش برای نشان‌کردن دو نقطهٔ $P_۱$ و $P_۲$ که روی مارپیچ و به‌فاصلهٔ $R_۱$ و $R_۲$ از T قرار دارند استفاده می‌کنیم:

$$P_۱T = R_۱, \qquad P_۲T = R_۲$$

اکنون روی مارپیچ از نقطهٔ A تا نقطهٔ $P_۱$ حرکت می‌کنیم و زاویه‌ای را در نظر می‌گیریم که بردارشعاعی مارپیچ باید به‌اندازهٔ آن بچرخد تا از TA به $TP_۱$ برسد این زاویه را با $\alpha_۱$ نمایش می‌دهیم (ملاحظه می‌کنید که اگر $R_۱ < ۱$، آنگاه با حرکت درجهت عقربه‌های ساعت به $P_۱$ می‌رسیم و $\alpha_۱$ مثبت است، اگر $R_۱ > ۱$ دراین‌صورت با حرکت در خلاف عقربه‌های ساعت به $P_۱$ می‌رسیم و $\alpha_۱$ منفی است.) سپس روی‌مارپیچ از A به $P_۲$ حرکت‌می‌کنیم. زاویه‌ای را که بردارشعاعی باید به‌اندازهٔ آن دوران کند تا از TA به $TP_۲$ برسد $\alpha_۲$ می‌نامیم. این زاویه را اندازه می‌گیریم. اکنون زاویه‌های $\alpha_۱$ و $\alpha_۲$ را باهم جمع می‌کنیم و خط AT را به‌اندازهٔ $\alpha_۱ + \alpha_۲$ دوران می‌دهیم به‌قسمی‌که همواره مارپیچ از نقطهٔ A طی شود. درنتیجه به‌نقطهٔ $P_۳$ روی مارپیچ می‌رسیم‌که فاصله‌اش تا T عبارت است از

$$P_۳T = R_۱ \times R_۲.$$

این روش دقیقاً تعبیری هندسی از قانون نماهاست: برای

$$R_۱ = m^{\alpha_۱}, \qquad R_۲ = m^{\alpha_۲},$$

دریافتیم که

$$R_۱ \times R_۲ = m^{\alpha_۱ + \alpha_۲}.$$

۱۴۰۵ اگر بردارهای شعاعی $TP_۱$، $TP_۲$، ...، TP_n دارای یک راستا اما با اندازه‌های متفاوت $R_۱$، $R_۲$، ...، R_n باشند، در این‌صورت زاویه‌های دوران $\alpha_۱$، $\alpha_۲$، ...، α_n از خط TA وقتی این خط از هر نقطهٔ خم از A تا $P_۱$، تا $P_۲$، ...، تا P_n بگذرد تنها به‌اندازهٔ مضاربی از ۲π رادیان (یك دور کامل حول T، یعنی ۴ قائمه) با یکدیگر اختلاف دارند. این ویژگی نظیر این واقعیت است‌که لگاریتم اعدادی‌که با طولهای $R_۱$، $R_۲$، ...، R_n نموده می‌شوند تنها درمفسر، یعنی در جزء صحیح لگاریتم اختلاف‌دارند (اگر α برحسب‌قائمه اندازه‌گیری‌شود، این‌لگاریتمها در مضارب ۴ باهم اختلاف دارند.) اگر α بین $۴k$ و $۴(k+۱)$ قائمه باشد، $\alpha - ۴k$ نظیر مانتیس خواهد بود و جهت خط TP را معین می‌کند. درحالی‌که مفسر $۴k$ «حلقه»ای از مارپیچ را تعیین خواهدکردکه نقطهٔ P برآن جای دارد.

فصل شش

۱۰۶ به‌عکس فرض‌کنیدکه اعداد صحیح a و b به‌قسمی وجود دارندکه

MATH75.IR

$$\frac{a}{b}\cdot(۱+\sqrt{۲})=۱$$

دراین‌صورت

$$۱+\sqrt{۲}=\frac{b}{a}$$

یا

$$\sqrt{۲}=\frac{b}{a}-۱=\frac{b-a}{a}$$

اما اگر a و b دو عدد صحیح باشند، $b-a$ نیز عددی صحیح است و تساوی‌اخیر بیان می‌کند $\sqrt{۲}$ گویاست که درست نیست. بنابراین عکس $۱+\sqrt{۲}$ گویا نیست.

۲۰۶ گیریم d بزرگترین مقسوم‌علیه‌مشترك a و b است و x و y دوعدد صحیح‌اند. دراین‌صورت عدد صحیح

$$ax+by=c=a'dx+b'dy=d(a'x+b'y)$$

به‌روشنی بر d بخشپذیر است.

به عکس اگر c بر d، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك a و b بخشپذیر باشد دراین‌صورت اعداد صحیح x و y را به‌روش زیر می‌توان به‌قسمی یافت که

$$ax+by=c$$

با تقسیم این معادله بر d به‌دست می‌آوریم

$$a'x+b'y=c'$$

که درآن a' و b' نسبت به‌هم اول‌اند. در این‌حالت می‌دانیم (مثلا شرح الگوریتم اقلیدس را در کسرهای مسلسل، تألیف اولدز از همین سری کتابها ببینید) که اعداد صحیح $x_۱$ و $y_۱$ به‌قسمی وجود دارند که

$$a'x_۱+b'y_۱=۱$$

در این‌صورت اعداد صحیح $x=c'x_۱$ و $y=c'y_۱$ در

$$a'x+b'y=c'$$

 MATH75.IR

و همین‌طور در $ax+by=c$ صدق خواهند کرد.

۳.۶ $۲^{n-۱}$؛ $n=۱, ۲, ۳, \dots$.

۴.۶ وقتی $N=۱$، N و مجموع ارقامش به‌وضوح یك مانده به‌پیمانهٔ ۳ دارند، که این، مرحلهٔ اول استقرا را ثابت می‌کند.

فرض‌کنید k عدد صحیحی است که با مجموع رقمهایش یك مانده به‌پیمانهٔ ۳ دارند، یعنی به قسمی که

$$k=۳q+r, \qquad ۰\leqslant r<۳$$

و مجموع رقمهای k توسط

$$۳s+r, \qquad ۰\leqslant r<۳$$

به‌دست آید.

برای اثبات مرحلهٔ استقرایی، باید نشان دهیم که $k+۱$ و مجموع رقمهای آن وقتی بر ۳ تقسیم شوند، یك باقیمانده دارند. هنگامی که $۰<r+۱<۳$، داریم

$$k+۱=۳q+(r+۱)$$

درغیر این‌صورت

$$k+۱=۳(q+۱)$$

اگر m $(m\geqslant ۰)$ رقم آخر عدد k همه ۹ باشند، این ۹ها وقتی ۱ به k اضافه شود، به ۰ تبدیل می‌شوند، اما به‌اولین رقمی که ۹ نیست، ۱ اضافه می‌شود. چون مجموع رقمهای k برابر با $۳s+r$ است، می‌توانیم مجموع رقمهای $k+۱$ را به‌صورت

$$(۳s+r)+۱-۹m$$

که هم‌ارز

$$۳(s-۳m)+(r+۱)$$

است، بنویسیم. بنابراین $k+۱$ و مجموع رقمهای $k+۱$ یك مانده به پیمانهٔ ۳ دارند.

۵.۶ به‌ازای $n=۱$ ادعا درست است. فرض‌کنید به‌ازای $n=k$،

$$۱+۲+\dots+k=\frac{۱}{۲}k(k+۱)$$

MATH75.IR

وحالت $n=k+۱$ را درنظربگیرید. با استفاده از فرض استقرا به‌دست می‌آوریم

$$۱+۲+\dots+k+k+۱=\frac{۱}{۲}k(k+۱)+k+۱$$

که می‌توان آن‌را به‌صورت

$$\frac{۱}{۲}k^۲+\frac{۳}{۲}k+۱=\frac{۱}{۲}(k^۲+۳k+۲)=\frac{۱}{۲}(k+۱)(k+۲)$$

نوشت که چون این هم به‌صورت $\frac{۱}{۲}n(n+۱)$ است، برهان کامل می‌شود.

۶.۶ به‌ازای همهٔ اعداد صحیح [مثبت] n، $۲^{n+۹}$ از $(n+۹)^۳$ بیشتر است.

۷.۶ وقتی k یك عدد صحیح بزرگتراز ۲ است آنگاه

$$۲k^۲>k^۲+۲k+۲>(k+۱)^۲$$

برای نشان‌دادن آن، توجه‌کنید که وقتی $k>۲$ آنگاه $k-۲>۰$، و چون k یك عددصحیح‌است، $k-۲\geqslant ۱$، $k\geqslant ۳$ بنابراین $k(k-۲)>۲$ یا $k^۲>۲k+۲$. بنابراین

$$۲k^۲=k^۲+k^۲>k^۲+۲k+۲$$

یعنی $۲k^۲>(k+۱)^۲$.

با وجود این واقعیت نمی‌توانیم نتیجه بگیریم به‌ازای همهٔ nهای بزرگتراز ۲، ۲^n از $n^۲$ بزرگتر است، زیرا به‌هنگام استفاده از $۲^{k+۱}>۲k^۲$، باید پذیرفته باشیم که $۲^k>k^۲$، و این‌هم درست نیست که $۲^۳$ از $۳^۲$ بزرگتر است.

۸.۶ (الف) به‌ازای $N=۱$ داریم $۲^{(۱^۲)}=۲=(۲^۱)^۱$. اگر به‌ازای $N=k$،

$$(۲^k)^k=۲^{(k^۲)}$$

دراین‌صورت

$$(۲^{k+۱})^{k+۱}=(۲^k\times ۲)^{k+۱}=(۲^k\times ۲)^k(۲^k\times ۲)$$

$$=(۲^k)^k\times ۲^{۲k}\times ۲$$

$$=۲^{k^۲}\times ۲^{۲k}\times ۲=۲^{[(k+۱)^۲]}$$

(ب) از اینکه وقتی N بزرگتراز ۴ باشد $۲^N>N^۲$ به‌دست می‌آوریم

MATH75.IR

$$(۲^N)^N > (N^۲)^N \qquad \text{یا} \qquad ۲^{(N^۲)} > (N^۲)^N$$

بنابراین اگر $n = N^۲$ اختیار شود به‌ازای $N > ۴$ داریم $۲^n > n^N$ اما از برهانهای قضیه‌های ۲ و ۳ می‌دانیم که به‌ازای $N = ۲$ و $N = ۳$، تنها اگر n بزرگتر از $N^۲$ باشد $۲^n > n^N$. این موضوع گوشزد می‌کند که می‌توانیم مرحلهٔ استقرایی قضیهٔ N را با نشان دادن اینکه به‌ازای هر $n > N^۲$، $۲^n > n^N$ ثابت کنیم.

۹.۶ اگر $۲^k > k^N$ و $k > N^۲$ دراین‌صورت

$$۲^{k+۱} = ۲ \times ۲^k > ۲k^N = k^N + k^N > k^N + N^۲ k^{N-۱}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
۲^{k+۱} &> k^N + Nk^{N-۱} + N(N-۱)k^{N-۱} \\
&\geqslant k^N + Nk^{N-۱} + N(N-۱)k^{N-۲} \\
&= k^N + Nk^{N-۱} + \frac{N(N-۱)}{۲} k^{N-۲} + \frac{N(N-۱)}{۲} k^{N-۲} \\
&\geqslant k^N + Nk^{N-۱} + \frac{N(N-۱)}{۲} k^{N-۲} + \frac{N(N-۱)(N-۲)}{۳} k^{N-۳} \\
&= k^N + Nk^{N-۱} + \frac{N(N-۱)}{۲} k^{N-۲} + \frac{N(N-۱)(N-۲)}{۲ \times ۳} k^{N-۳} \\
&\qquad + \frac{N(N-۱)(N-۲)}{۲ \times ۳} k^{N-۳} \\
&\geqslant \cdots \\
&\geqslant k^N + Nk^{N-۱} + \frac{N(N-۱)}{۲!} k^{N-۲} + \frac{N(N-۱)(N-۲)}{۳!} k^{N-۳} \\
&\qquad + \cdots + \frac{N(N-۱)\cdots[N-(N-۲)]}{(N-۱)!} k^{N-(N-۱)} + ۱ \\
&= (k+۱)^N .
\end{aligned}$$

۱۰.۶ ثابت کردیم (قضیهٔ ۱) که وقتی $N = ۱$،

MATH75.IR

$$۲^n > n^N = n \qquad \text{برای همهٔ اعداد صحیح } n$$

می‌پذیریم که وقتی $N = k$ و n بزرگتر از $k^۲$ است آنگاه $۲^n > n^k$ درست است. از مسألهٔ ۹.۶ بـه‌شرط $n > (k+۱)^۲$ نتیجه می‌شود $۲^n > n^{k+۱}$، که برای کامل کردن برهان اینکه برای همهٔ اعدادصحیح N و n به‌قسمی که $n > N^۲$، آنگاه $۲^n > n^N$ به‌آن نیاز داشتیم.

۱۱.۶ بیایید سعی کنیم از برهان قضیهٔلاگرانژ (صفحه‌های ۱۳۹ تا ۱۴۱) در حالت فعلی پیروی کنیم و ملاحظه کنیم که چه‌اصلاحاتی ضروری خواهد بود.

اصل جعبه‌هـا حاکی است کـه هر دنباله از مانده‌هـای (به‌پیمانهٔ N) طی $N^۲ + ۲$ جمله، یك‌جفت جملهٔ متوالی تکراری دارد. اگر جفتهای a_i، $a_{i+۱}$ و a_k، $a_{k+۱}$ دارای یك مانده باشند، دراین‌صورت از

$$a_i \equiv a_k \ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{و} \qquad a_{i+۱} \equiv a_{k+۱} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

نتیجه می گیریم

$$۳a_i \equiv ۳a_k \ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad \text{و} \qquad ۲a_{i+۱} \equiv ۲a_{k+۱} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

و از اینها نتیجه می‌شود

$$۲a_{i+۱} + ۳a_i \equiv ۲a_{k+۱} + ۳a_k \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

یا

$$a_{i+۲} \equiv a_{k+۲} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

با همین استدلال

$$a_{i+۳} \equiv a_{k+۳} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N),$$
$$a_{i+۴} \equiv a_{k+۴} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

که نشان‌می‌دهد دنبالهٔمانده‌های (به‌پیمانهٔ N) دنباله‌ای که با $a_{n+۱} = ۲a_n + ۳a_{n-۱}$ داده می‌شود، دوره‌ای است.

فرض کنید دورهٔ دنباله p است. دراین‌صورت از یك j به‌بعد مثلا $j = T$،

$$a_j \equiv a_{j+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N) \qquad (j \geqslant T)$$

فرض‌کنید a_T اولین جملهٔ دنباله نیست. از دستور بازگشتی داریم

$$۳a_{T-۱} = a_{T+۱} - ۲a_T$$
$$\equiv a_{T+۱+p} - ۲a_{T+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$
$$= ۳a_{T+p-۱}$$

بنابراین

$$۳a_{T-۱} \equiv ۳a_{T-۱+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

یا

$$۳(a_{T-۱} - a_{T-۱+p}) \equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

به‌وضوح تنها اگر بپذیریم ۳ و N نسبت به‌هم اول‌اند،

$$a_{T-۱} \equiv a_{T-۱+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N);$$

درغیر این‌صورت لزوماً نتیجه نمی‌شودکه N عاملی از $a_{T-۱} - a_{T-۱+p}$ است. چون T یك‌عدد صحیح متناهی است، با به‌کارگیری پی‌درپی این‌فرایند به $T-۱$، $T-۲$، $T-۳$، ... سرانجام باید به

$$a_۱ \equiv a_{۱+p} \ (\text{به‌پیمانهٔ } N)$$

برسیم.

بنابراین اگر n ناکوچکتر از ۲ باشد، دنبالهٔ مانده‌های (به پیمانهٔ N) دنباله‌ای که با $a_{n+۱} = ۲a_n + ۳a_{n-۱}$ ،$n \geqslant ۲$ (که‌در آن مقادیراولیهٔ $a_۱$ و $a_۲$ ممکن‌است هر عدد صحیحی باشند) تعریف می‌شود دوره‌ای است. اگر ۳ و N نسبت به‌هم‌اول باشند جزء تکراری با ماندهٔ $a_۱$ شروع می‌شود.

۱۲۰۶ مانده‌های (به‌پیمانهٔ N)، $N \geqslant ۲$، هر دنباله‌که با

$$a_{n+۱} = \alpha a_n + \beta a_{n-۱}$$

تعریف‌شود با اعدادصحیح اولیهٔ دلخواه $a_۱$ و $a_۲$، دوره‌ای است؛ تکرار یك‌جفت حداکثر طی $N^۲ + ۲$ جمله ظاهرمی‌شود. اگر N و β نسبت به‌هم اول باشند، جزء تکراری با ماندهٔ $a_۱$ شروع می‌شود.

۱۳۰۶ دنبالهٔ مانده‌های (به‌پیمانهٔ N) هر دنباله‌که با

$$a_{n+۱} = \alpha a_n + \beta a_{n-۱} + \gamma a_{n-۲}, \qquad n \geqslant ۳$$

تعریف شود، طیN^3+3، جمله دارای یك سه‌تایی متوالی تکراری است. اگر N و ۷ نسبت به هم اول باشند، دنبالهٔ مانده‌ها (به پیمانهٔ N) از ابتدا دوره‌ای است.

۱۴.۶ درحالت کلی دنبالهٔ مانده‌های (به‌پیمانهٔ N) یك‌دنبالهٔ a_1، a_2، …، a_n، … که (بعداز nامین جمله) براساس قاعدهٔ بیان جملهٔ $(n+1)$ام به صورت ترکیبی خطی از n جملهٔ پیشین ساخته می‌شود، از ابتدا دوره‌ای است و هرگاه N باضریب آخرین جملهٔ دستور بازگشتی عامل مشترك بزرگتر از ۱ نداشته باشد طیN^n+n جمله تکرار خواهد شد.

۱۵.۶ چون مجموعهٔ همهٔ اعداد گویا شماراست، خطوط $x=a$ به‌ازای همهٔ اعداد گویای a، بینهایت شمارایی از خطوط را تشکیل می‌دهند. همین موضوع بـه‌ازای اعداد گویای b، c، d درمورد مجموعه‌های $y=b$، $x=c$، $y=d$ درست است. چـون‌همهٔ مستطیلهای مخصوص از ترکیب چهار ضلع کـه هرکدام از یکی‌از این مجموعه‌هاست، شکل می‌گیرند، $\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ مستطیل مخصوص ممکن به‌دست‌می‌آوریم (این‌تعداد حتی شامل‌مستطیلهای تباه شده‌ای‌که یك‌جفت ازاضلاع مقابلشان برهم منطبق شده است، نیز می‌شود. بنابراین، مستطیلهای‌مخصوص تباه نشده یقیناً یك مجموعهٔ شمارا تشکیل می‌دهند.)

۱۶.۶ گیریم P نقطهٔ (x_0, y_0) و d مینیمم فاصلهٔ P تـا نقاطی باشدکه برمستطیل مفروض قـرار دارند. در این صورت دو عدد گـویای $\delta_1 < \frac{1}{4}d$ و $\delta_2 < \frac{1}{4}d$ وجود دارند به‌قسمی‌که

$$x = x_0 + \delta_1 = a \qquad \text{و} \qquad x = x_0 - \delta_2 = a'$$

گویا باشند، ونیز دو عدد $\varepsilon_1 < \frac{1}{4}d$ و $\varepsilon_2 < \frac{1}{4}d$ وجود دارند به قسمی‌که

$$y = y_0 + \varepsilon_1 = b \qquad \text{و} \qquad y = y_0 - \varepsilon_2 = b'$$

گویا باشند. در نتیجه اضلاع یك مستطیل مخصوص R بر خطوط $x=a$، $x=a'$، $y=b$، $y=b'$ قرار دارند و نقطهٔ P درون این مستطیل است. به‌علاوه چون‌طول قطر R از این مستطیل برابر است با

$$\sqrt{(\delta_1+\delta_2)^2+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2} < d$$

فاصلهٔ P تا دورترین نقطهٔ واقع بر R کمتراز مینیمم فاصلهٔ P تـا مستطیل مفروض است. پس این مستطیل مخصوص، تماماً در آن مستطیل داده شده جای دارد.

۱۷.۶ اگر بپذیریم که هیچ نقطهٔ P ای در مجموعهٔ X وجود ندارد به‌طوری‌که هر مستطیل شامل P، شامل تعداد ناشمارایی از نقاط X باشد، در این‌صورت هر نقطه در مجموعهٔ X باید درون حداقل یك مستطیل باشد‌که شامل یك مجموعهٔ شمارا از نقاط X است. در این‌حالت، حل مسألهٔ ۱۶.۶ نشان می‌دهد‌که هر نقطهٔ X درون مستطیل مخصوصی است‌که به‌تمامی درون مستطیل شامل یك مجموعهٔ شمارا ازنقاط X است، و بنابراین شامل حداکثر یك‌بینهایت شمارا ازنقاط X است. ثابت کردیم (مسألهٔ ۱۵.۶) که مجموعهٔ همهٔ مستطیلهای مخصوص از توان $\aleph_0$ است؛ از این‌رو مجموعهٔ مستطیلهای مخصوصی را که درنظر گرفته‌ایم، مشخصاً شمارااست. به‌علاوه چون هرکدام از این مستطیلهای مخصوص شامل یك مجموعهٔ شمارا از نقاط X است، از $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ نتیجه می‌شود‌که مجموعهٔ X شمارااست. اما این، متناقض با این فرض است‌که مجموعهٔ داده شده ناشمارااست، بنابراین نقطهٔ P در X باید وجود داشته باشد به‌قسمی‌که هر مستطیل شامل P، شامل تعداد ناشمارایی نقطهٔ‌متعلق به‌مجموعهٔ X باشد.

۱۸.۶ نقطهٔ P که در حل مسألهٔ ۱۷.۶ به‌دست آمد و یك دنباله از بازه‌های نزولی (مستطیلها در حالت صفحه) که به P نزدیك می‌شوند اختیار کنید. در هرکدام از این بازه‌ها یك نقطه از X از میان تعداد ناشمارایی‌که در دسترس‌اند بردارید. این کار یك‌دنبالهٔ P_1، P_2، P_3، ... ازنقاط X را می‌دهد‌که دنبالهٔ همگرای‌موردنظر را تشکیل می‌دهد. برهانی از این قبیل را «ناسازنده» می‌نامند، زیرا هیچ‌مکانیسمی راکه عملا هرکدام ازنقاط P_n را تعریف کند، ارائه نمی‌کند. چون هیچ‌چیزدربارهٔ X جزاینکه ناشمارااست، نمی‌دانیم هیچ روشی برای انتخاب در دسترسمان نیست.

MATH75.IR

کتابنامه

Cajori, Florian, *A History of Mathematics*, New York and London: The Macmillan Company, 1919.

Courant, Richard, *Differential and Integral Calculus*, Vol. 1, New York: Nordemann, 1940.

Courant, Richard and Robbins, Herbert, *What is Mathematics?*, London and New York: Oxford University Press, 1941.[1]

Coxeter, H. S. M., *Introduction to Geometry*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1961.

Davis, Philip J., *The Lore of Large Numbers*, Vol. 6, *New Mathematical Library*, New York and New Haven: Random House, Inc. and Yale University, 1961.[2]

Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, New York: Rhinehart and Company, 1958.[3]

---

۱. این کتاب با مشخصات زیر به‌فارسی ترجمه شده است.

ریچارد کورانت و هربرت رابینز، ریاضیات چیست؟ ترجمهٔ حسن صفاری، انتشارات خوارزمی، تهران، ۱۳۴۸.

۲. این کتاب با عنوان دانستنیهای اعداد بزرگ ازسری ریاضیات پیش‌دانشگاهی است که مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است.

۳. این کتاب با مشخصات زیر به‌فارسی ترجمه شده است.

هاوردو. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.

MATH75.IR

Frankel, Abraham A., *Abstract Set Theory*, Amsterdam, Holland: North-Holland Publishing Company, 1953.

Hardy, Godfrey H., *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge: Cambridge University Press, 1938.

Heath, Thomas L., *Manual of Greek Mathematics*, London and New York: Oxford University Press, 1931.

Hilbert, David and Cohn-Vossen, Stephan, *Geometry and the Imagination*, New York: Chelsea, 1952.

Neugebauer, Otto, *The Exact Sciences in Antiquity*, Copenhagen, Denmark and Princeton, New Jersey: E. Munksgaard and Princeton University Press, 1951.

Niven, Ivan, *Numbers: Rational and Irrational*, Vol. 1, *New Mathematical Library*, New York and New Haven: Random House, Inc. and Yale University, 1961.[1]

Olds, C. D., *Continued Fractions*, to be published for the *New Mathematical Library*, approximately 1962.[2]

Rademacher, Hans and Toeplitz, Otto, *The Enjoyment of Mathematics*, Princeton: Princeton University Press, 1957.

Steinhaus, Hugo, *Mathematical Snapshots*, New York: G. E. Stechert and Company, 1938 (2nd ed., London and New York: Oxford University Press, 1960).

Wilder, Raymond L., *Introduction to the Foundations of Mathematics*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1952.

Yaglom, I. M., *Geometric Transformations*, translated from the Russian by Allen Shields, to be published for the *New Mathematical Library*, approximately 1962.[3]

، ۲، ۳. این کتابها به‌ترتیب با عنوانهای اعداد: گویا و گنگ، کسرهای مسلسل،
دیلات هندسی از سری ریاضیات پیش دانشگاهی است که مرکز نشر دانشگاهی منتشر
ده است.