درسی در نظریهٔ گروهها

جان اس. رز

ترجمهٔ دکتر علیرضا مقدم فر، دکتر اکبر حسنی،
دکتر علیرضا زکایی

مرکز نشر دانشگاهی
www.iup.ir

این کتاب برای دانشجویان کارشناسی و کارشناسی‌ارشد که یک دورهٔ مقدماتی را در نظریهٔ گروهها گذرانده‌اند تدوین شده و پایهٔ مناسبی برای مطالعهٔ بیشتر این موضوع است. توجه اصلی کتاب به گروههای متناهی است، با تأکید بر عمل گروهها.

در فصلهای اولیه خلاصه‌ای از مطالب اساسی عرضه می‌شوند، موضوعات مهم، مشخص و نمادهای به‌کار رفته در سرتاسر کتاب معرفی می‌شوند. فصلهای ۳، ۷، ۸ و ۹ به‌طور کلی، با ساختار طبیعی گروهها سروکار پیدا می‌کنند. در این فصلها مطالبی نظیر زیرگروههای نرمال، همریختیها و گروههای خارج‌قسمتی، حاصلضربهای مستقیم و ساختار گروههای آبلی متناهی‌مولد و عمل گروه بر گروهها مطرح می‌شوند.

فصلهای ۴، ۵ و ۶ عموماً بر ساختار حسابی گروهها، بررسی عملهای گروهی بر مجموعه‌ها، p- گروههای متناهی و قضیهٔ سیلو (سولوو) و گروههای زوج‌مرتبه متمرکز شده‌اند. حقایق بنیادی در مورد عمل گروهها در فصلهای ۴ و ۹، وکاربردهای آن در فصلهای ۵ و ۱۰ ارائه شده‌اند. به‌علاوه، در فصل ۱۰ مفاهیم کلاسیک انتقال و شکافندگی از راه بحثهای عمل گروه ارائه می‌شود، که قدرت تکنیکهای عمل گروه را در داخل نظریهٔ گروهها به‌درستی روشن می‌سازد. در سرتاسر کتاب، استاد فقید، رُز، که قبلاً مدرس باسابقه‌ای در ریاضیات محض در دانشگاه نیوکاسل انگلستان بوده، بیش از ۶۷۵ مسأله را گنجانده است که در ضمن آنها بعضی از مطالب متن شرح و بسط می‌یابند. بسیاری از مسائل دشوارتر با راهنماییهای پیشنهادی برای حل آنها همراه‌اند.

درسی در نظریهٔ گروهها

جان اس. رز

ترجمهٔ

دکتر علیرضا مقدم‌فر، دکتر اکبر حسنی، دکتر علیرضا زکایی

مرکز نشر دانشگاهی

مرکز نشر دانشگاهی
۱۲۶۲

ریاضی، آمار، و رایانه
۱۵۲

A Course on Group Theory
John S. Rose
Cambridge University Press, 1994

درسی در نظریهٔ گروهها
تألیف جان اس. رز
ترجمهٔ دکتر علیرضا مقدم‌فر، دکتر اکبر حسنی، دکتر علیرضا زکایی
ویراستهٔ دکتر محمدهادی شفیعیها
طراح جلد: سمیه عابدینی
نسخه‌پرداز: احمد میهن‌جامه
حروفچین: صدیقه مسعودی، مینا مهرابی‌فرد
ناظر چاپ: جواد خسروی
مرکز نشر دانشگاهی
چاپ اول ۱۳۸۵
تعداد ۱۵۰۰
لیتوگرافی: عابد
چاپ: نماد

فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: رز، جان، ۱۹۳۸ـ م. Rose, John S
عنوان و پدیدآور: درسی در نظریهٔ گروهها/جان اس. رز؛ ترجمهٔ علیرضا مقدم‌فر، اکبر حسنی، علیرضا زکایی.
مشخصات نشر: تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۵.
مشخصات ظاهری: ۴۷۲ ص.
فروست: مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۲۶۲. ریاضی، آمار، و رایانه؛ ۱۵۲
شابک: 964-01-1262-3
یادداشت: فیپا
یادداشت: عنوان اصلی: A course on group theory, 1994
یادداشت: کتاب حاضر اولین‌بار تحت عنوان «مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروه» در سال ۱۳۸۰ با ترجمهٔ فرهاد محمدی، حسین شمسعلی، علیرضا خاکباز» توسط انتشارات دانشجو منتشر شده است.
یادداشت: کتابنامه ص. ۴۵۶ـ ۴۶۱.
یادداشت: نمایه.
عنوان دیگر: مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروه.
موضوع: نظریهٔ گروهها.
شناسه افزوده: مقدم‌فر، علیرضا ، مترجم.
شناسه افزوده: حسنی، اکبر ، مترجم.
شناسه افزوده: زکایی، علیرضا ، مترجم.
شناسه افزوده: مرکز نشر دانشگاهی.
رده‌بندی کنگره: ۱۳۸۵ ۷م۴ر/۲/QA۱۷۴
رده‌بندی دیویی: ۵۱۲/۲
شماره کتابخانه ملی: ۴۲۲۸۵ـ ۸۵م

بسم‌الله‌الرحمن‌الرحیم

فهرست

فهرست نمادها

همواره معرف گروهها	G, H, J, K, L
عضو همانی یک گروه	۱
زیرگروه بدیهی یک گروه	
مرتبهٔ عضو g از یک گروه	$o(g)$
گروه دوری که عضو g تولید می‌کند	$\langle g \rangle$
تعداد اعضای مجموعهٔ X اگر X متناهی باشد؛ یا ∞ اگر X نامتناهی باشد.	$\lvert X \rvert$
X یک مجموعهٔ متناهی است	$\lvert X \rvert \langle \infty$
Y یک زیرمجموعهٔ X است	$Y \subseteq X$
Y یک زیرمجموعهٔ حقیقی X است	$Y \subset X$
مجموعهٔ اعضای X که در Y نیست	$X \backslash Y$
مجموعهٔ تهی	$\varnothing$
H یک زیرگروه G است	$H \leqslant G$
H یک زیرگروه حقیقی G است	$H < G$
هم مجموعهٔ راست H در G شامل g (که $H \leqslant G$ و $g \in G$)	Hg
هم مجموعهٔ چپ H در G شامل g (که $H \leqslant G$ و $g \in G$)	gH
شاخص H در G (که $H \leqslant G$)	$\lvert G : H \rvert$

φ یک نگاشت از مجموعهٔ X به مجموعهٔ Y است	$\varphi : X \to Y$
نگارهٔ عضو x تحت نگاشت φ	$x\varphi, x^{\varphi}, \varphi(x)$
نگاشت φ که عضو x را به عضو $x\varphi$ می‌فرستد	$\varphi : x \mapsto x\varphi$
گروههای G_1، G_2 یکریخت‌اند	$G_1 \cong G_2$
گروههای G_1، G_2 یکریخت نیستند	$G_1 \not\cong G_2$
تحدید نگاشت $\varphi : X \to Y$ به زیرمجموعهٔ S از X	$\varphi\|_S$
یک عدد اول	p
مجموعه‌ای از اعداد اول	ϖ
میدان اعداد مختلط	$\mathbf{C}$
میدان اعداد حقیقی	$\mathbf{R}$
میدان اعداد گویا	$\mathbf{Q}$
حلقهٔ اعداد صحیح	$\mathbf{Z}$
حلقهٔ اعداد صحیح به پیمانه n	$\mathbf{Z}_n$
n، $a-b$ را می‌شمارد (که $a, b, n \in \mathbf{Z}$ با $n > 0$)	$a \equiv b$ (n پیمانه)
بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک اعداد صحیح a، b	(a, b)
تعداد اعداد صحیح و مثبت m به‌طوری‌که $m \leqslant n$ و $(m, n) = 1$	$\varphi(n)$
تعداد انواع گروههای مرتبهٔ n	$\nu(n)$
تعداد انواع گروههای آبلیِ مرتبه n	$\nu_a(n)$
K یک زیرگروه نرمال G است	$K \trianglelefteq G$
K یک زیرگروه نرمال G نیست	$K \ntrianglelefteq G$
گروه خارج‌قسمت G بر K (که $K \trianglelefteq G$)	G/K
K یک زیرگروه نرمال حقیقی در G است	$K \triangleleft G$
مرکز ساز x در G (که $x \in G$)	$C_G(x)$
مرکز G	$Z(G)$
نیم‌گروه نگاشتهای مجموعهٔ X به خودش	M_X
گروه متقارن (نامحدود) بر مجموعهٔ X	Σ_X

جایگشت مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, n\} = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ که به‌ازای $j = 1, \cdots, n$، j را بر a_j می‌نگارد	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$
گروه متقارن از درجهٔ n	Σ_n
نگارهٔ همریختی φ	$\mathrm{Im}\,\varphi$
$\mathrm{Im}\,\varphi\|_K$ (که $K \leqslant G$ و φ یک همریختی از G به یک گروه است)	$K\varphi$
گروه جمعی حلقه R	R^+
گروه همریختیهای G به گروه آبلی A	$\mathrm{Hom}(G, A)$
گروه یکه‌های حلقه R	$R^{\times}$
گروه ضربی اعداد حقیقی مثبت	$\mathbf{R}^{\times}_{\mathrm{pos}}$
گروه دوری مرتبهٔ n	C_n
گروه دوری نامتناهی	C_∞
گروه ضربی اعداد گویای مثبت	$\mathbf{Q}^{\times}_{\mathrm{pos}}$
گروه جمعی فضای برداری V	V^+
حلقهٔ نگاشتهای خطی از فضای برداری V به توی خودش	$\mathscr{L}(V)$
گروه خطی عمومی فضای برداری V	$\mathrm{GL}(V)$
گروه خطی عمومی از درجهٔ n در میدان F	$\mathrm{GL}_n(F)$
گروه خودریختیهای G	$\mathrm{Aut}\,G$
ترویج K به‌وسیلهٔ g (که $K \leqslant G$، $g \in G$) همچنین نماد K^g مترادف به‌کار می‌رود	$g^{-1}Kg$
گروه خودریختیهای داخلی G	$\mathrm{I_{nn}}\,G$
گروه طولپاییهای فضای متری X	$\mathrm{Isom}\,X$
گروه تقارن زیرفضای Y نسبت به فضای متری X	$S_X(Y)$
فضای اقلیدسی	E^2
گروه انتقالهای E^2	$\mathrm{Tr}E^2$
گروه دورانهای E^2 حول نقطهٔ s	$\mathrm{Rot}(E^2; s)$
گروه دو وجهی از مرتبهٔ $2n$ ($n \geqslant 3$)	D_{2n}
گروه دو وجهی نامتناهی	D_∞
زیرگروه G که توسط $X (\subseteq G)$ تولید می‌شود	$\langle X \rangle$

$\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$	$\langle\{x_1,\cdots,x_n\}\rangle$
$\langle H,K\rangle$	الحاق زیرگروههای H، K از G به هم
$X\times Y$	حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های X و Y
$H\times K$	حاصلضرب مستقیم H و K
$G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$	حاصلضرب مستقیم G_1، G_2، $\cdots$، و G_n
H_G	مغز H در G $(H\leqslant G)$
$\ker\varphi$	هستهٔ همریختی φ
XY	حاصلضرب مجموعه‌یی زیرمجموعه‌های X، Y از G
$2(G)$	نیم‌گروه زیرمجموعه‌های نابدیهی G
$\Sigma_{(X)}$	تحدید گروه‌متقارن روی مجموعهٔ X
$n\mathbf{Z}^+$	گروه (جمعی) مضارب صحیح n
$\mathrm{SL}_n(F)$	گروه خطی خاص از درجهٔ n روی میدان F
$C_G(H)$	مرکز ساز H در G $(H\leqslant G)$
C_p^∞	گروه شبه ـ دوری برای عدد اول p
$O_\omega(G)$	ω رادیکال G
$G/O^\omega(G)$	ω مانده‌یی G
$[g_1,g_2]$	جابه‌جاگر اعضای g_1 و g_2 از G
$[H,K]$	زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با زیرگروههای H و K از G
G'	گروه مشتق G
$N_G(H)$	نرمال‌ساز H در G $(H\leqslant G)$
H^G	بستار نرمال H در G $(H\leqslant G)$
Q_8	گروه چهارتاییها
A_n	گروه متناوب درجهٔ n
$\mathrm{PSL}_n(F)$	گروه خطی خاص تصویری از درجهٔ n روی میدان F
$\mathrm{S}_{p_{2m}}(F)$	گروه الصاقی از درجهٔ $2m$ روی میدان F
$\mathrm{PS}_{p_{2m}}(F)$	گروه الصاقی تصویری از درجهٔ $2m$ روی میدان F
$\mathrm{Stab}_G(x)$	پایدارساز x در G (که در آن G بر X عمل می‌کند و $x\in X$)
ρ^H	نمایش جایگشتی G متناظر با عمل G توسط ضرب از راست بر مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G (که در آن $H\leqslant G$)

x^g	$g^{-1}xg$ (که در آن $x,g\in G$)
$k(G)$	عدد رده‌ای G
U^g	تزویج U توسط g $(g\in G,\varnothing\subset U\subseteq G)$
$N_G(U)$	نرمال‌ساز U در G $(\varnothing\subset U\subseteq G)$
$C_G(U)$	مرکزساز U در G $(\varnothing\subset U\subseteq G)$
$C_G^*(x)$	مرکزساز تعمیم‌یافتهٔ x در G $(x\in G)$
$\mathrm{Fix}_X(G)$	زیرمجموعهٔ نقاط ثابت X (در عمل G روی مجموعهٔ X)
$G\geqslant H$	H زیرگروهی از G است
$G>H$	H یک زیرگروه حقیقی G است
$G\trianglerighteq H$	H یک زیرگروه نرمال G است
$j(G:H)$	تعداد عاملهای ترکیبی G بالای H در یک سری ترکیبی G
$\kappa(G,H)$	مجموعهٔ عاملهای ترکیبی G بالای H
$G^{(0)},G',G'',G''',\cdots,G^{(n)},\cdots$	جملات سری مشتق G
$\Gamma_1(G),\Gamma_2(G),\cdots,\Gamma_n(G),\cdots$	جملات سری مرکزی پایین‌رونده G
$Z_0(G),Z_1(G),\cdots,Z_n(G),\cdots$	جملات سری مرکزی بالارونده G
$C_G(H/K)$	مرکزساز H/K در G (که $K\trianglelefteq G$ و $K\leqslant H\leqslant G$)
$[G_1,G_2,\cdots,G_n]$	زیرگروه جابه‌جاگر زیرگروههای $G_1,\cdots,G_n$
$F(G)$	زیرگروه فیتینگ G
$S(G)$	سکّوی G
$\prod_{i=1}^{n} G_i$	حاصلضرب زیرگروههای نرمال $G_1,\cdots,G_n$ در G
$\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i$	$G_1\times G_2\times\cdots\times G_n$
$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i$	مجموعهٔ همریختیهای $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$
G^X	مجموعه نگاشتها از مجموعهٔ X به گروه G
$\mathrm{Dr}\,G^X$	توان مستقیم G با مجموعه اندیس‌گذار X
$\mathrm{Cr}\,G^X$	توان دکارتی G با مجموعهٔ اندیس‌گذار X
$T(G)$	زیرگروه تابدار G (G آبلی)
G^n	زیرگروه توانهای nام عناصر G (G آبلی)
$H_\varphi\times K$	حاصلضرب نیم‌مستقیم K در H با عمل φ

تمام‌ریخت K	$\mathrm{Hol}\ K$
گروه دو وجهی تعمیم‌یافته متناظر با گروه آبلی A	$\mathrm{Dih}\ A$
گروه آفین فضای برداری V	$\mathscr{A}(V)$
حاصلضرب حلقوی G توسط H	$G \wr H$
مجموعهٔ اعداد اول که به مجموعه ϖ تعلق ندارند	ϖ'
عضو خاصی از بخش آبلی H/J از G متناظر با تراگردهای T، U به H در G	T/U
زیرگروه کانونی H در G $(H \leqslant G)$	$\mathrm{Foc}_G(H)$
x و y در G مزدوج‌اند $(x, y \in G)$	$x \underset{G}{=} y$
زیرگروه فراتینی G	$\Phi(G)$
نرمال‌ساز دستگاهی از G که با دستگاه مکمل y از G متناظر است (G است.)	$N_G(y)$

پیشگفتار

ویلیام برنساید[1] در انجمن ریاضی لندن در سال ۱۹۰۸، در سخنرانی خود به مناسبت عضویت در انجمن پادشاهی لندن [آکادمی علوم]، چنین اظهار می‌دارد که:

'بدون تردید باید این واقعیت را پذیرفت که تاکنون نظریهٔ گروههای متناهی در برانگیختن علاقهٔ کسی جز تعداد قلیلی از ریاضیدانان انگلیسی موفق نبوده است ... ' (عین سخنرانی در گزارش جلسات انجمن ریاضی لندن [a۱۲] چاپ شده است). و در خاتمه سخنانش را با این گفته‌ها به پایان می‌برد: 'دست آخر می‌خواهم از کسانی که تعلیم ریاضیدانان جوان ما را در شاخهٔ ریاضیات محض به عهده دارند خواهش کنم کاری کنند تا مطالعه و تحصیل نظریهٔ گروهها (که به‌طورکلی در همه جا به رسمیت شناخته شده است) در این کشور شکوفا شود. اگر گنجاندن این درس در برنامهٔ درسی توصیه شود و از اهمیتِ دارا بودن دانشی از نظریهٔ گروهها برای ریاضیدانانِ ریاضیاتِ محض پافشاری شود یقین دارم که طولی نخواهد کشید که تقاضای تدریس جدی این درس پدید خواهد آمد.'

در هفتاد سال قبل چنین تقاضایی بندرت ضرورت پیدا می‌کرد: اکنون اهمیت همه جانبهٔ نظریهٔ گروهها به‌طورکامل شناخته شده و اثرات مثبت آن در تدریس ریاضیِ دانشگاهها و کالجها منعکس شده است. بدون شک این موضوع نه در مقیاس کم، بلکه به‌طور وسیع از اثرات عمیق کتاب خود برنساید در موضوع نظریهٔ گروهها بوده که با چیره‌دستی نوشته شده است ([b۳]). امروزه در دانشگاههای انگلیس وجود درسهای مقدماتی دربارهٔ گروهها و دیگر ساختارهای جبری برای سال اول دوره‌های کارشناسی امری عادی شده است. اثر حاضر مطالبی را برای درسهای پیشرفته در نظریهٔ گروهها در اختیار ما می‌گذارد. مطالب گردآوری‌شده در این کتاب بر اساس درسهایی بوده که مؤلف در دانشگاه نیوکاسل (در ساحل رود تاین) برای دانشجویان ممتاز سال سوم کارشناسی و دوره‌های کارشناسی ارشد تدریس کرده است.

1. William Burnside

فرض بر این است که خواننده با محتویات دوره‌های مقدماتی درس که در بالا بدان اشاره شد آشنایی دارد. بخصوص اطلاعاتی در مورد مفاهیم رده‌های یکریختی گروهها، گروههای دوری و گروههای آبلی، زیرگروهها و هم مجموعه‌ها؛ قضیهٔ لاگرانژ[1]؛ مرتبهٔ اعضا؛ گروههای متقارن و تجزیهٔ یک جایگشت به حاصلضرب دورههای مجزا و همچنین ویژگیهای بسیار مقدماتی از فضاهای برداری؛ نگاشتهای خطی و ماتریسها، میدانها و حلقه‌ها برای خوانندگان این کتاب دانسته فرض شده است. خلاصه‌ای از ویژگیهای مقدماتیِ مسلّم گروهها در فصل ۰ این کتاب به منظور تثبیت نمادهایی که در سرتاسر این کتاب به‌کار رفته گنجانده شده است.

پس از فصل ۰ فصل کوتاهی، که فصل ۱ است، آمده است. این فصل پیشگفتاری است برای تمامی کتاب و سعی دارد که موضوعات مهم و متنوع کتاب را بر حسب مفاهیم قابل درک برای خواننده بیان و آنها را بر اساس دانسته‌های قبلی وی دنبال کند. هدف فراهم‌کردن انگیزه‌ای برای برخی از تعاریف فنی و شیوه‌هایی است که در قسمتهای بعدی کتاب با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل ۱ تأکید کامل بر گروههای متناهی است که فی‌الواقع اشیای اولیهٔ مطالعه در تمامی این کتاب است. با این همه تلاشی صورت گرفته که از محدودیتهای متناهی، تا جایی که افزودن آنها سهولتی در بحث ایجاد نمی‌کند، اجتناب شود و ضمناً بعضی از قضایای مهم مربوط به گروههای نامتناهی که به‌طور طبیعی پدید می‌آیند در فصولی از این کتاب، به‌ویژه در فصلهای ۷ و ۸، گنجانده شوند.

بررسی نظاممند در فصل ۲ آغاز می‌شود که در آن بسیاری از مثالهای پایه معرفی می‌شوند، مثالهایی که به دفعات در سرتاسر کتاب تکرار می‌شوند. فصول بعدی با تأمل و تأنی با اتخاذ مهمترین خط‌مشیهایی دنبال می‌شود که به توسعهٔ موضوع می‌پردازد و سعی بر آن دارد که به جای یک برداشت تدریجی به روش وحدت‌بخشی ادامه یابد. عناوین انتخاب‌شده برای هر فصل موضوعات آن فصل را معرفی می‌کنند. به‌طور خلاصه می‌توان گفت که فصلهای ۳، ۷، ۸ و ۹ با ساختار طبیعی، گروهها سروکار دارند و فصلهای ۴، ۵ و ۶ با ساختارهای حسابی. درحالی‌که فصلهای ۱۰ و ۱۱ به مباحثی مربوط‌اند که به کنش متقابل بین ساختارهای طبیعی و حسابی اختصاص داده شده است.

بر مفهوم عمل گروهها تأکید ویژه‌ای شده است. این موضوعی است که از لحاظ درک، اهمیت زیادی دارد، زیرا معرف روشی است که توسط آن گروهها در ریاضیات ظاهر می‌شوند و در ضمن به عنوان یک روش پرقدرت در خودِ نظریهٔ گروهها مطرح می‌شود. اطلاعات اساسی در مورد عمل گروهها در فصلهای ۴ و ۹ داده شده‌اند؛ و کاربردهایشان در فصول ۵ و ۱۰.

فصل ۱۰ توضیح ویژه‌ای را طلب می‌کند. این فصل به شرحی از یک برداشت زیبا از

1. Lagrange

مفاهیم کلاسیک انتقال و شکافتگی، با اتکا به دلایل عمل گروه، تخصیص داده شده که منتج از بحثهای پروفسور هلموت ویلانت[1] در مورد عمل گروههاست که در یکی از سخنرانیهایش در مؤسسهٔ پژوهشهای ریاضی در بخش اوبرولِ[2] در ماه مه ۱۹۷۲ ایراد نموده است. این سخنرانی مهم و بسیار اثربخش قدرت تکنیهای عمل گروه را در درون نظریهٔ گروهها بدیهی ساخته است. این موضوع قبلاً در جایی چاپ نشده و من بی‌اندازه مدیون پرفسور ویلانت هستم که اجازه دادند این مطلب را در اینجا درج نمایم.

هر کتابی که سعی در ارائهٔ یک شرح کلی از نظریه گروهها داشته باشد، بناچار باید مطالب را گزینشی اختیار کند. برای کارآموزان این رشته که این کتاب را بررسی می‌کنند، احتمالاً مطالب محذوف بیشتر قابل توجهند تا موضوعاتی که برای درج انتخاب شده‌اند. در عرصهٔ اثر حاضر، خود من با یک بررسی دقیق، از دو موضوع مهم محذوف در این کتاب آگاهی یافته‌ام که یکی نظریهٔ نمایش گروههای متناهی (و موضوع مربوط به سرشتهای گروه) است و دیگری موضوع روابط تعریف‌کنندهٔ گروههاست. از بین این دو موضوع مهم حذف‌شده به نظر می‌رسد که موضوع اول موجب تعجب باشد، چرا که در موضوع اول تأکید بر عمل گروه است زیرا نظریهٔ نمایش را می‌توان از منظر عمل گروه بر فضاهای برداری (همچنانکه در ابتدای فصل ۹ توضیح داده شده) مورد بررسی قرار داد. ولی احساس من این است که یک بررسی رضایتبخش در هر یک از این دو موضوع، محتوای کتاب را به نحو غیرقابل قبولی به درازا می‌کشاند. به‌علاوه یک بررسیِ جامع از روابط تعریف‌کنندهٔ گروه ما را با نظریهٔ گروههای آزاد درگیر می‌کند، که درعین‌حال یک موضوع اساسی است، اما طبعاً با مباحث مورد مطالعهٔ این کتاب مغایرت دارد. بررسیهای خوبی از هر دو موضوع یعنی نمایش گروهها و روابط تعریف‌کنندهٔ گروه در بسیاری از کتابهای عمومی در نظریهٔ گروهها انجام گرفته که فهرست آنها در انتهای این کتاب آمده است. همچنین تعدادی از مراجع ویژه دربارهٔ نظریهٔ نمایش گروهها در ابتدای فصل ۹ دیده می‌شود. در موضوع روابط تعریف‌کنندهٔ گروه علاقه‌مندم که به مرجع مهم [b۶] کار مشترک ه.س.م. کاکستر[3] و و.او.ج. موزر[4] و نیز کتاب اخیرِ د.ل. جانسن مرجع[5] [b۲۲] اشاره کنم.

کتاب حاضر به بخشهای کوتاهی تنظیم شده که در هر فصل پشت سر هم شماره‌گذاری شده است. در موارد بسیاری یک بخش اختصاص داده شده است به یک حکم و اثبات یک قضیهٔ تنها که در قسمتهای دیگر کتاب، با ذکر شمارهٔ آن بخش، به آن ارجاع می‌شود. نتایج مهمتر تحت عنوان 'لم' یا 'قضیه' آمده‌اند.

1. Helmut Wielandt 2. Oberwolfach 3. H. S. M. Coxeter 4. W.O.J. Moser
5. D.L. Johnson

تمرینات خود به تنهایی یک بخش اساسی از این کتاب را تشکیل می‌دهند. این تمرینات به‌طور متوالی از ۱ تا **۶۷۹** شماره‌گذاری شده‌اند و شماره‌های آنها با حروف سیاه وارد شده‌اند. هدف از تمرینات ۱ تا **۱۲** که در انتهای فصل ۰ آمده‌اند، در دسترس قراردادن مطالبی است که دانستن آنها از سوی خواننده مسلم گرفته شده‌اند. تمریناتی برای فصل ۱ در نظر گرفته نشده است. از فصل ۲ به بعد تمرینات در سرتاسر کتاب به فواصل تقریباً مساوی آمده‌اند. هدف این تمرینات روشن‌کردن و وسعت‌بخشیدن به مطالب مطرح‌شده در کتاب است، بلافاصله بعد از اینکه اثبات شده‌اند. ارجاعات زیادی به تمرینات در این کتاب به‌ویژه در فصلهای آخر داده شده است. این ارجاعات صرفاً با ذکر شمارهٔ آنها صورت گرفته‌اند و امید است که توزیع منظم این تمرینات و سیاه‌بودن شماره‌ها، پیداکردن آنها را بدون ذکر شمارهٔ صفحات دچار اشکال نکند. در احکام بسیاری از این تمرینها عبارتهایِ امریِ متداولِ 'ثابت کنید که' یا 'نشان دهید که' حذف شده‌اند؛ ولی اینها احکامی هستند که باید ثابت شوند. تصور می‌کنم که تعداد کمی از خوانندگان این کتاب احتمالاً به حل تمامی تمرینات بپردازند. ولی تعدادی از تعاریف و قضایا در تمرینات مطرح شده‌اند که به دلیل ضرورتِ وجودیِ آنها در متن اصلی کتاب، شماره‌های آنها با علامت ستاره از بقیهٔ تمرینات متمایز شده‌اند (مثل ۱*). اکثر این تمرینات خیلی ساده‌اند و بسیاری از تمرینات مشکلتر با راهنماییهایی که برای حل آنها توصیه شده همراهند.

به بعضی از قضایای مندرج در این کتاب، تاریخی ضمیمه شده است تا چشم‌اندازه تاریخی توسعهٔ موضوع را برساند. به‌همین‌دلیل مراجع متفاوتی از مقالات و کتب در انتهای کتاب آمده است. ولی ادعایی به تاریخی‌بودن کتاب ندارم. زیرا این کتاب قرار است راجع به نظریهٔ گروهها باشد نه در مورد تاریخ این موضوع. برای اطلاعی از گزارش تاریخی و نحوهٔ گسترش نظریهٔ گروه خواننده می‌تواند به کتاب هـ. ووسینک[1] [b۴۰] مراجعه کند.

مراجع آثار نویسندگان دیگر به مقالاتی که جلوی شمارهٔ آنها حرف 'a' گذاشته شده و کتبی که جلوی شمارهٔ آنها حرف 'b' علاوه شده تقسیم شده‌اند. آثار فهرست‌شده عمدتاً مربوط به کتابهایی هستند که در کتاب به آنها ارجاع شده است و به‌هیچ‌وجه فهرست کامل و جامعی از کتابشناسی موضوع نیست. بسیاری از نویسندگانی که نامشان ذکر شده آثار مهم دیگری در نظریهٔ گروهها نوشته‌اند و مسلماً اثرهای مهمی از پدیدآورندگان دیگر نیز وجود دارند که از آنها نامی برده نشده است. یک نشان از حجم نشریات مربوط به نظریهٔ گروهها در سالهای ۱۹۴۰ ـ ۱۹۷۰ را می‌توان از مجلدات مجله ادواری[2] *Mathematical Reviews* با عنوان: بازنگری[3] در گروههای متناهی (دانیل گورنشتاین[4]، انجمن ریاضی آمریکا ۱۹۷۴) و بازنگری در گروههای نامتناهی

1. H. Wussing 2. Periodical 3. Review 4. D. Gorenstein

(ج. باوَمزلاگ[1] انجمن ریاضی آمریکا ۱۹۷۴ در دو مجلد) می‌توان به‌دست آورد.

در مورد ریاضیدانانی که در نظریهٔ گروهها منشاء تأثیر اولیه در من بوده‌اند این شانس را داشته‌ام که در کلاسهای درس پروفسور و.اِل.اِج[2] در ادینبرگ[3]، پروفسور ف.هال[4] و دکتر د.ر.تانت[5] در کیمبریج، پروفسور ب. هوپرت[6] در ماینز[7]، و پروفسور هـ. ویلانت[8] در توبینگن[9] حضور پیدا کنم. اگرچه ممکن است دیدگاهها یا روشهای برخورد من با موضوعی که از درسهای خود آنها استخراج کرده و در اینجا به کار برده‌ام مورد توجه آنها قرار نگیرد. ولی دلم می‌خواهد دینی را که در خود احساس می‌کنم به همگی آنها ادا کنم، آنها که انگیزه‌های اولیه را در من به‌وجود آوردند و موجب شدند که من این موضوع را دنبال کنم، به‌ویژه پروفسور ویلانت به دلیل مطالب فصل ۱۰ که قبلاً از آن صحبت کرده‌ام.

نیوکاسل ساحل رود تاین
۲۶ می ۱۹۷۶

---

1. G. Baumslag 2. W. L. Edge 3. Edinburgh 4. P. Hall 5. D.R. Taunt
6. B. Huppert 7. Mainz 8. H. Wielandt 9. Tübingen

۰

بعضی قراردادها و نکات اساسی

در این کتاب حروف بزرگ G، H، J، K و L (گاهی با زیرنمایه‌ها و یا زَبَرنمایه‌ها) همواره معرف گروهها هستند. فرض شده است که خواننده با نکات اساسی مقدماتی که در این فصل گردآوری شده‌اند، آشنایی دارد. جزئیات بیشتر را، مثلاً، درگرین [b۱۴]، یا فصلهای ۱ و ۲ از لدرمن [b۲۹]، یا فصلهای ۱، ۲ و ۳ از مک‌دانلد [b۳۰] می‌توان پیدا کرد.

یک زیرگروه از گروه G عبارت است از زیرمجموعه‌ای از G که خود نسبت به عمل معرف G تشکیل یک گروه می‌دهد. بنابراین هرگاه X زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد، X زیرگروه G است اگر و تنها اگر داشته باشیم $x_1x_2^{-1} \in X$ که x_1 و x_2 اعضای Xاند.

ما معمولاً عضو همانی یک گروه را با ۱ نمایش می‌دهیم. لذا درصورتی‌که G گروه مورد بحث باشد، زیرمجموعهٔ $\{1\}$، متشکل از فقط عضو همانی G تشکیل یک زیرگروه می‌دهد که آن را زیرگروه بدیهی (نمایان[1]) G می‌نامیم. باید تمایز نمادی بین عضو ۱ و زیرگروه $\{1\}$ از G را دقیقاً محفوظ نگه‌داریم، اما در عمل همان نماد ۱ بدون ابرو را هم برای عضو و هم برای زیرگروه به‌کار می‌بریم. زیرگروه H ازگروه G نابدیهی گفته می‌شود، هرگاه $H \neq 1$. گروه G را بدیهی گوییم اگر G

۱. این ترجمهٔ مناسب کلمهٔ Trivial است، ولی از آنجا که 'بدیهی' به‌جای این کلمه بکار برده شده است ما نیز از کلمهٔ بدیهی استفاده می‌کنیم.

تنها یک عضو داشته باشد (در این حالت می‌نویسیم $G = ۱$)؛ و همچنین G را نابدیهی گوییم اگر G بیشتر از یک عضو داشته باشد. گاهی اوقات یک عضو غیر از ۱ در G را عضو نابدیهی می‌نامیم.

فرض می‌کنیم $g \in G$. هرگاه عضوهای g، $g^۲$، $g^۳$، $\cdots$ از G جملگی متمایز باشند، g را عضو نامتناهی مرتبه در G می‌گوییم و می‌نویسیم $o(g) = \infty$. از سویی، اگر اعداد صحیح و مثبت r و s وجود داشته باشند به‌طوری‌که $g^r = g^s$، می‌گوییم g در G متناهی مرتبه است؛ در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند n وجود دارد به‌طوری‌که $g^n = ۱$ و کوچکترین عدد n با این ویژگی را مرتبهٔ g می‌نامیم و آن را در این کتاب با $o(g)$ نشان می‌دهیم. اگر g متناهی مرتبه و m یک عدد صحیح باشد، آنگاه $g^m = ۱$ اگر و تنها اگر $o(g)$، m را بشمارد.

دو عضو $g_۱$ و $g_۲$ از G جابه‌جایی‌پذیر گفته می‌شود، اگر $g_۱g_۲ = g_۲g_۱$. زیرمجموعهٔ ناتهی X از G را یک مجموعهٔ جابه‌جایی‌پذیر از اعضا گوییم اگر وقتی $x_۱$ و $x_۲$ اعضایی از X باشند، $x_۱x_۲ = x_۲x_۱$. هرگاه خودِ G یک مجموعهٔ جابه‌جایی‌پذیر از اعضا باشد، G (به احترام نیلز هنریک آبل ۱۸۰۲ـ۲۹) یک گروه آبلی نامیده می‌شود.

اگر یک عضو g از G وجود داشته باشد که هر عضو G به صورت توانی مانند g^m از g (که m یک عدد صحیح مثبت است) قابل بیان باشد می‌گوییم که G یک گروه دوری است و g، G را تولید می‌کند. در این صورت می‌نویسیم $G = \langle g \rangle$. هر گروه دوری آبلی است.

فرض می‌کنیم X مجموعهٔ دلخواهی باشد. هرگاه X نامتناهی باشد می‌نویسیم $|X| = \infty$ و اگر متناهی باشد، تعداد اعضای X را با $|X|$ نمایش می‌دهیم. گاهی برای اینکه مشخص کنیم X متناهی است می‌نویسیم $|X| < \infty$. برای هر گروه G، $|G|$ را مرتبهٔ G می‌نامیم. به‌ویژه هرگاه G یک گروه دوری متناهی باشد، مثلاً $G = \langle g \rangle$، آنگاه $|G| = o(g)$. روشن است که هرگاه $o(g) = n$ آنگاه $G = \{۱, g, g^۲, \cdots, g^{n-۱}\}$. برای یک گروه دلخواه زیرگروه بدیهی، تنها زیرگروه از مرتبهٔ ۱ است.

در اشارات چندی که در سراسر کتاب به‌طور گذرا می‌آید به اعداد اصلی نامتناهی اشاره می‌کنیم. هرگاه X مجموعه‌ای نامتناهی باشد، $|X|$ را می‌توان عدد اصلی X تعبیر کرد. با این تعبیر قضایای مختلفی را که مطرح شده‌اند می‌توان بهبود بخشید تا قضایای حاصل انواع مختلف مجموعه‌های نامتناهی را از هم متمایز سازند. ولی خوانندهٔ ناآشنا با اعداد اصلی می‌تواند، بی‌آنکه به درک بقیهٔ مطالب وی خللی وارد آید، از مطالعهٔ چنین اشاراتی صرف‌نظر کند.

برای مجموعه‌های X و Y نمادهای زیر را به‌کار می‌بریم

$Y \subseteq X$ بدین معنی است که Y زیرمجموعهٔ X است,

$Y \subset X$ بدین معنی است که Y زیرمجموعهٔ X است و $Y \neq X$.

در حالت دوم می‌گوییم که Y زیرمجموعهٔ حقیقی X است. وقتی $Y \subseteq X$، مجموعهٔ اعضای X

را که به Y تعلق نداشته باشند، با $X \backslash Y$ نشان می‌دهیم. مجموعهٔ تهی را نیز با $\varnothing$ نشان خواهیم داد. در نظریهٔ گروهها می‌نویسیم:

$H \leqslant G$ به معنی H زیرگروه G است.

$H < G$ به معنی H زیرگروه حقیقی G است.

(تذکر. لدرمن و مک‌دانلد 'حقیقی' را به معنی 'حقیقی و نابدیهی' به‌کار برده‌اند، ولی ما از این نحوهٔ کاربرد پیروی نمی‌کنیم.)

بر طبق قضیهٔ لاگرانژ، هرگاه G یک گروه متناهی باشد و $H \leqslant G$، آنگاه $|H|$، $|G|$ را می‌شمارد. این واقعیت برای نظریهٔ گروههای متناهی بسیار مهم است. یادآوری می‌کنیم که این قضیه از راه افراز G به صورت اجتماع تعدادی از زیرمجموعه‌های مجزای G که هر یک شامل $|H|$ عضو است ثابت می‌شود. برای این زیرمجموعه‌ها می‌توانیم هم‌مجموعه‌های راست H در G را برگزینیم، یعنی زیرمجموعه‌های $Hg = \{hg : h \in H\}$ با $g \in G$ (که در آن هر g یک زیرمجموعهٔ Hg را مشخص می‌کند). همچنین می‌توانیم برای این زیرمجموعه‌ها، هم‌مجموعه‌های چپ H در G را برگزینیم، یعنی زیرمجموعه‌های $gH = \{gh : h \in H\}$ با $g \in G$. اگر $g_۱$ و $g_۲$ اعضایی از G باشند، داریم $Hg_۱ = Hg_۲$ اگر و تنها اگر $g_۱g_۲^{-۱} \in H$؛ و $g_۱H = g_۲H$ اگر و تنها اگر $g_۱^{-۱}g_۲ \in H$.

برای یک گروه دلخواه G (نه لزوماً متناهی) و $H \leqslant G$، باز هم همان استدلال به‌کار می‌رود. ما می‌توانیم G را به صورت اجتماع مجزایی از هم‌مجموعه‌های راست H در G یا هم‌مجموعه‌های چپ H در G افراز کنیم. اگر فقط تعداد متناهی هم‌مجموعهٔ راست متمایز از H در G وجود داشته باشد، فقط تعداد متناهی هم‌مجموعهٔ چپ متمایز از H در G وجود خواهد داشت و به‌عکس، و تعدادشان نیز یکی است. این عدد را شاخص H در G می‌نامیم و با $|G : H|$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که $|G : H| = ۱$ اگر و تنها اگر $H = G$. هرگاه G گروهی متناهی باشد آنگاه $|G : H| = |G|/|H|$. اما همچنین ممکن است که یک گروه نامتناهی زیرگروههایی حقیقی با شاخص متناهی داشته باشد. از طرفی اگر تعداد نامتناهی هم‌مجموعهٔ راست (یا همچنین چپ) متمایز از H در G وجود داشته باشد می‌نویسیم: $|G : H| = \infty$. بعداً (در فصل ۴) این مفهوم افراز یک گروه به صورت اجتماعی از زیرمجموعه‌های مجزا را در زمینهٔ خیلی کلیتری مطرح خواهیم کرد و قضایای مهم دیگری را با استدلالهایی از همین نوع نتیجه خواهیم گرفت. فرض بر این است که خواننده با مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی روی یک مجموعه و ارتباط بین این رابطهٔ هم‌ارزی و افراز مجموعه به صورت اجتماعی از زیرمجموعه‌های مجزا آشناست.

هرگاه $g \in H \leqslant G$، مرتبهٔ g در H با مرتبهٔ g در G یکی است. عضو g زیرگروه دوری، $\langle g\rangle$، از گروه G را تولید می‌کند و این زیرگروه متناهی است اگر و تنها اگر $o(g) < \infty$، که در این حالت:

$$|\langle g\rangle| = o(g)$$

حال اگر G یک گروه متناهی باشد؛ مثلاً $|G| = n$ و $g \in G$، آنگاه $\langle g\rangle$ متناهی است و در نتیجه $o(g)$ متناهی است؛ و بنابر قضیهٔ لاگرانژ، $o(g)$، n را می‌شمارد. لذا به‌ازای هر $g \in G$، $g^n = 1$.

نماد $\varphi : X \to Y$ را بدین منظور که φ نگاشتی از مجموعهٔ X به توی مجموعهٔ Y است به کار می‌بریم (کلمات نگاشت و تابع برای این منظور مترادف‌اند). نگارهٔ عضو $x \in X$ بر اثر φ را اغلب با $x\varphi$ یا x^φ نشان می‌دهیم. قرارداد اخیر دارای این مزیت است که هرگاه $\varphi : X \to Y$ و $\psi : Y \to Z$، آنگاه نگاشت مرکب از X به توی Z، که با عمل بر هر $x \in X$، ابتدا توسط φ و سپس ψ تعریف می‌شود با $\varphi\psi$ نمایش داده شود: لذا بنابر تعریف $x(\varphi\psi) = (x\varphi)\psi$ (این نحوهٔ نمایش با قرارداد اروپایی خواندن از چپ به راست متناظر است.) با نماد تابعی مرسوم در آنالیز که در آن نگارهٔ x بر اثر φ با $\varphi(x)$ نشان داده می‌شود، نگاشت مرکب با $\psi\varphi : (\psi\varphi)(x) = \psi(\varphi(x))$ نشان داده خواهد شد. ولی، رعایت یک قرارداد ثابت برای نمادگذاری نگاشتها مناسب نیست و یکی از دو قرارداد بر طبق شرایط، به کار برده خواهد شد.

اگر $\varphi : X \to Y$ و $x \in X$، اغلب برای نشان‌دادن اثر φ بر x نماد $\varphi : x \mapsto x\varphi$ را به کار می‌بریم. پیکان بسته $\mapsto$ تنها بین اعضای مجموعه‌ها مورد استفاده واقع می‌شود.

نگاشت $\varphi : X \to Y$ یک به یک گفته می‌شود هرگاه $x_1, x_2 \in X$ و $x_1 \neq x_2$، داشته باشیم $x_1\varphi \neq x_2\varphi$؛ این نگاشت پوشا گفته می‌شود اگر هر عضو $y \in Y$ برای مقداری چون $x \in X$ به‌صورت $y = x\varphi$ نشان داده شود. هرگاه φ هم یک به یک باشد و هم پوشا آن را دوسویی گوییم. فرض می‌کنیم 1_X، معرف نگاشت همانی روی X باشد، یعنی نگاشت $1_X : X \to X$ که به‌ازای هر $x \in X$ با ضابطهٔ $1_X : x \mapsto x$ تعریف می‌شود. در این صورت $\varphi : X \to Y$ یک به یک است اگر و فقط اگر نگاشتی چون $\psi : Y \to X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi\psi = 1_X$. و نیز هرگاه 1_Y معرف نگاشت همانی روی Y باشد آنگاه $\varphi : X \to Y$ پوشاست اگر و تنها اگر نگاشتی چون $\psi : Y \to X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\psi\varphi = 1_Y$. سرانجام $\varphi : X \to Y$ دوسویی است اگر و تنها اگر نگاشتی چون $\psi : Y \to X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi\psi = 1_X$ و $\psi\varphi = 1_Y$، یعنی اگر و تنها اگر φ وارون‌پذیر باشد. نگاشت دوسویی $\varphi : X \to X$ را اغلب یک جایگشت از X می‌نامیم. اگر X یک مجموعهٔ متناهی باشد، نگاشت یک به یک $\varphi : X \to X$ لزوماً جایگشتی است از X، نگاشت پوشای $\psi : X \to X$

نیز چنین است؛ در اینجا شرط متناهی‌بودن X ضروری است. فرض بر این است که خواننده با ویژگیهای مقدماتی جایگشتها آشناست. وقتی گروههای متقارن در فصل ۲ معرفی می‌شوند این ویژگیهای مقدماتی به‌طور خلاصه ارائه خواهند شد.

اعضای یک مجموعه را گاهی اوقات نقاط می‌نامند. می‌گوییم نگاشت $\varphi : X \to X$ نقطهٔ $x \in X$ را ثابت نگه می‌دارد اگر $x\varphi = x$.

دو گروه را یکریخت گوییم اگر یک دوسویی، یعنی نگاشتی حافظ ساختار از یکی به دیگری وجود داشته باشد (۶.۲ را ببینید) در این صورت رابطهٔ یکریختی یک رابطهٔ هم‌ارزی روی هر مجموعه از گروههاست. این رابطهٔ هم‌ارزی، در نظریهٔ گروهها بنیادی است از این جهت که نظریهٔ گروهها با رده‌بندی گروهها 'در حد یکریختی' سروکار دارد. ما نمی‌توانیم از لحاظ نظریهٔ گروهی؛ بین گروههایی که یکریخت‌اند اما هیچ عضو مشترکی ندارند، انتظار تمایزی داشته باشیم. از لحاظ اختصار یک ردهٔ یکریختی از گروهها را یک 'نوع' می‌نامیم. برای اینکه نشان دهیم G_1 و G_2 یکریخت‌اند می‌نویسیم $G_1 \cong G_2$.

اگر $\varphi : X \to Y$ و S یک زیرمجموعهٔ X باشد، تحدید φ به S نگاشت $\varphi_1 : S \to Y$ است که به‌ازای هر $s \in S$ با ضابطهٔ $\varphi_1 : s \mapsto s\varphi$ تعریف می‌شود. این نگاشت را گاهی اوقات با $\varphi|_S$ نشان می‌دهیم. ممکن است زیرمجموعه‌ای چون T از Y وجود داشته باشد که به‌ازای هر $s \in S$، $s\varphi \in T$. در این صورت ممکن است بخواهیم به نگاشت $\psi : S \to T$ که به‌ازای هر $s \in S$ با ضابطهٔ $\psi : s \mapsto s\varphi$ تعریف می‌شود اشاره کنیم. اگر $T \subset Y$ این نگاشت از نظر منطقی متمایز از φ_1 است. در این صورت می‌گوییم ψ از تحدید φ به‌دست آمده است.

اگر $\varnothing \subset S \subseteq X$ و 1_X معرف نگاشت همانی روی X باشد، آنگاه $1_X|_S : S \to X$ نگاشت شمولِ S در X است.

در سراسر این کتاب،

p همواره معرف یک عدد اول است،

ϖ یک مجموعه از اعداد اول،

$\mathbf{C}$ میدان اعداد مختلط،

$\mathbf{R}$ میدان اعداد حقیقی،

$\mathbf{Q}$ میدان اعداد گویا،

$\mathbf{Z}$ حلقهٔ اعداد صحیح،

و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$\mathbf{Z}_n$ معرف حلقهٔ اعداد صحیح به پیمانهٔ n است.

به‌ویژه $\mathbf{Z}_p$ یک میدان (به اصطلاح میدان گالوا) است که گاهی با $\mathrm{GF}(p)$ نشان داده می‌شود.

اگر a و b اعداد صحیح و n یک عدد صحیح مثبت باشد:

$a \equiv b \bmod n$ بدین معنی است که n، $a-b$ را می‌شمارد

گاهی اوقات بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b را با (a,b) نشان می‌دهیم: این تعریف زمانی صادق است که a و b هر دو با هم صفر نباشند. اگر $(a,b)=1$، می‌گوییم a و b متباین‌اند. هرگاه a و b اعداد صحیح متباینی باشند، آنگاه اعدادی صحیح مانند a' و b' وجود دارند به‌طوری‌که $aa'+bb'=1$.

۱*. هر گروه که مرتبهٔ آن عدد اول باشد دوری است.

۲*. هر دو گروه دوری از یک مرتبهٔ متناهی یکریخت‌اند.

۳*. اگر به‌ازای هر $g \in G$؛ $g^2=1$، G یک گروه آبلی است.

۴. فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in G$؛ در این صورت $o(g_1g_2)=o(g_2g_1)$.

۵*. (i) فرض می‌کنیم $g \in G$ با $o(g)=n<\infty$. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح m داریم:

$$o(g^m)=n/(m,n).$$

(ii) اگر G گروهی دوری از مرتبهٔ متناهی n باشد، تعداد اعضای متمایزی که G را تولید می‌کنند برابر است با $\varphi(n)$، که در آن φ تابع اویلر است: یعنی، $\varphi(n)$ تعداد اعداد صحیح مثبتی است که از n تجاوز نمی‌کنند و نسبت به n متباین‌اند.

۶*. فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in G$ با $o(g_1)=n_1<\infty$ و $o(g_2)=n_2<\infty$. اگر n_1 و n_2 متباین و g_1 و g_2 جابه‌جایی‌پذیر باشند، آنگاه $o(g_1g_2)=n_1n_2$.

۷. فرض می‌کنیم $g \in G$ با $o(g)=n_1n_2$، که در آن n_1 و n_2 اعداد صحیح متباین‌اند. در این صورت اعضای $g_1, g_2 \in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $g=g_1g_2=g_2g_1$ و $o(g_1)=n_1$ و $o(g_2)=n_2$. به‌علاوه g_1 و g_2 با این شرطها به‌طور یکتا مشخص می‌شوند.

۸. با درنظرگرفتن مرتبهٔ اعضای گروه ضربی متشکل از تمام اعضای ناصفر میدان $\mathbf{Z}_p$، قضیهٔ فرما[1] را ثابت کنید: به‌ازای هر عدد صحیح a که p را نمی‌شمارد $a^{p-1} \equiv 1$ (به پیمانهٔ p).

۹. فرض می‌کنیم G گروهی است آبلی از مرتبهٔ متناهی n. نشان دهید که حاصلضرب n عضو متمایز G با حاصلضرب همهٔ اعضای G از مرتبهٔ ۲ برابر است (اگر G دارای هیچ عضوی از مرتبهٔ ۲ نباشد، حاصلضرب اخیر به صورت ۱ نشان داده می‌شود). با به‌کاربردن این نتیجه برای گروه

1. Fermat's theorem

ضربی متشکل از تمام اعضای ناصفر میدان $\mathbf{Z}_p$، قضیهٔ ویلسن[1] را برای اعداد اول ثابت کنید:

$$(p-1)! \equiv -1 \text{ به پیمانه } p.$$

۱۰. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $g_1, g_2 \in G$. در این صورت $Hg_1 = Hg_2$ اگر و تنها اگر $g_1^{-1}H = g_2^{-1}H$.

۱۱. (i) فرض می‌کنیم $J \leqslant H \leqslant G$. در این صورت $|G:J|$ متناهی است اگر و تنها اگر $|G:H|$ و $|H:J|$ هر دو متناهی باشند، و دراین‌صورت: $|G:J|=|G:H||H:J|$.

(ii) فرض می‌کنیم $J \leqslant H \leqslant G$ با $|G:J|=p$، که p یک عدد اول است. در این صورت $H=J$ یا $H=G$.

۱۲. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $g \in G$. اگر $o(g)=n$ و $g^m \in H$ که n و m اعداد صحیح متباین‌اند، آنگاه $g \in H$.

1. Wilson's theorem

۱

مقدمه‌ای بر نظریهٔ گروههای متناهی

هدفِ نهایی نظریهٔ گروههای متناهی 'یافتن' تمام گروههای متناهی است: یعنی، نشان‌دادن چگونگی ساخت گروههای متناهی از هر 'نوع' ممکن، و نیز تعیین شیوه‌های مؤثری که مشخص می‌سازند از دو گروه متناهی مفروض کدامها از یک نوع اند. البته دستیابی به این کمال مطلوب به‌کلی خارج از دسترس روشهای موجود است (اگرچه وصول به هدف مشابه در مورد گروههای آبلی متناهی یکصد سال قبل صورت گرفته است: ۲۴.۸، ۴۱.۸ را ببینید). اما چه نوع برنامه‌ای را می‌توان در جهت تکمیل چنین هدفی طرح‌ریزی کرد؟

به هر گروه متناهی G، عدد صحیح $|G|$ وابسته است. اکنون توجهمان را به دو مطلب مقدماتی زیر معطوف می‌کنیم.

۱.۱ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، دست‌کم یک نوع گروه از مرتبهٔ n وجود دارد.

به‌عنوان مثال، مجموعهٔ ریشه‌های nام مختلط واحد تحت عمل ضرب، گروهی (دوزی) از مرتبهٔ n تشکیل می‌دهد: ۱۴.۲ را ببینید.

۲.۱ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، فقط تعداد متناهی گروه مرتبهٔ n از انواع مختلف وجود دارد.

برای اثبات این مطلب ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر گروه G از مرتبهٔ n و هر مجموعهٔ n عضویِ X، می‌توان به X ساختار یک گروه یکریخت با G داد. تنها چیزی که نیاز داریم انتخاب یک نگاشت دوسویی چون $\varphi: G \to X$ است و سپس تعریف ضرب در X با قاعدهٔ زیر

$$(g_1\varphi)(g_2\varphi) = (g_1g_2)\varphi$$

به‌ازای هر $g_1, g_2 \in G$. تحقیق اینکه ضرب روی X در اصلهای موضوع گروه صدق می‌کند ساده است. بنابراین، به موجب تعریف، φ به یک یکریختی بدل می‌شود. معنی پیدایش این یکریختی این است که از تخصیص همهٔ اعمال دوتایی ممکن به هر مجموعهٔ خاص n عضوی، گروههای مرتبهٔ n از هر نوع ممکن ظاهر می‌شوند. اما تعداد چنین تخصیصهای مختلف n^{n^2} است، و در نتیجه این عدد یک کران بالا برای تعداد انواع گروههای مرتبهٔ n نیز خواهد بود. (برای اثبات دیگری از ۲.۱، ۲۴.۴ را ببینید.)

به‌ازای هر عددِ صحیح مثبتِ n، فرض می‌کنیم $\nu(n)$ معرف تعداد انواع گروههای مرتبهٔ n باشد. آنچه که در حالت کلی راجع به $\nu(n)$ می‌دانیم بسیار اندک است (برای یک کران بالای دقیقتر در $\nu(n)$، ۳۰۱ را ببینید.)؛ اما می‌توان بی‌درنگ یک توضیح ساده را ارائه داد. از قضیهٔ لاگرانژ نتیجه می‌گیریم که یک گروه که مرتبهٔ آن عدد اول است باید دوری باشد (۱). از آنجایی که هر دو گروه دوری از یک مرتبه یکریخت‌اند (۲) خواهیم داشت

۳.۱ به‌ازای هر عدد اولِ p، $\nu(p) = 1$.

به غیر از اعداد اول اعدادی چون n نیز وجود دارند که برای آنها $\nu(n) = 1$. ما قضیه‌ای را که این اعداد را مشخص می‌کند متذکر می‌شویم ــ اگرچه این قضیه در نظریهٔ گروهها حائز اهمیت نیست؛ ولی صرفاً از لحاظ کنجکاوی مهم است (۵۷۵ را ببینید).

۴.۱ فرض می‌کنیم $n = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$، که در آن $S, m_1, \cdots, m_s$ اعداد صحیح مثبت و $p_1, \cdots, p_s$ اعداد اول متمایزند. در این صورت $\nu(n) = 1$ اگر و تنها اگر

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_s = 1$$

و نیز به‌ازای هر $i, j = 1, \cdots, s$؛ $p_i - 1$ بر p_j بخش‌پذیر نباشد.

(لذا برای مثال $\nu(15) = 1$؛ ۲۱۵ را ببینید.)

اینک فرض می‌کنیم به‌ازای هر عدد صحیح مثبتِ n، $\nu_a(n)$ معرف تعداد انواع گروههای آبلی مرتبهٔ n باشد. پس $\nu_a(n) \leqslant \nu(n)$. به موجب قضیه‌ای مربوط به ساختار گروههای آبلی متناهی (۴۳.۸ را ببینید) خواهیم داشت.

۵.۱ فرض می‌کنیم $n = p_۱^{m_۱} p_۲^{m_۲} \cdots p_s^{m_s}$، که در آن S, $m_۱, \cdots, m_s$ اعداد صحیح مثبت و $p_۱, \cdots, p_s$ اعداد اول متمایزند. در این صورت

$$\nu_a(n) = \nu_a(p_۱^{m_۱})\nu_a(p_۲^{m_۲}) \cdots \nu_a(p_s^{m_s})$$

و به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, s$؛

$\nu_a(p_j^{m_j})$ تعداد افرازهای m_j، یعنی تعداد طرق نمایش m_j به صورت حاصل جمعی از اعداد صحیح مثبت است. (ترتیب مؤلفه‌های موجود مطرح نیست). به‌ویژه $\nu_a(p_j^{m_j}) \geqslant m_j$.

این قضیه نشان می‌دهد که هیچ کران بالایی برای $\nu_a(n)$ که مستقل از n باشد، وجود ندارد و ازاین‌رو هیچ کران بالایی برای $\nu(n)$ نیز مستقل از n وجود نخواهد داشت.

یک راه طبیعی برای مسألهٔ ساختن گروههای متناهی؛ پیداکردن یک روش استقرایی بر حسب مرتبه‌های گروههاست. لذا باید سعی کنیم که هر گروه متناهی را بر حسب گروههای مرتبهٔ کوچکتر بیان کنیم: پس اصولاً ما می‌توانیم امیدوار باشیم که با شروع از گروههای پایه‌ای معین، گام به گام شرحی برای تمام انواع گروههای متناهی به‌دست دهیم.

بنابراین ما به‌طور طبیعی به فکر زیرگروهها می‌افتیم. می‌پرسیم یک گروه G از مرتبهٔ n چه زیرگروههایی دارد؟ به موجب قضیهٔ لاگرانژ مرتبهٔ هر زیرگروه G یکٔ مقسوم‌علیه n است. ولی لزوماً چنین نیست که به‌ازای هر مقسوم‌علیه m از n، G زیرگروهی از مرتبهٔ m داشته باشد. (۱۸۵ را ببینید.) بهترین قضیهٔ کلی در خصوص وجود زیرگروههایی از مرتبه‌های ممکن؛ نتیجهٔ زیر از قضیهٔ سیلو است (۳۲.۵ را ببینید).

۶.۱ فرض می‌کنیم G گروهی باشد از مرتبهٔ متناهی n. به‌ازای هر **عدد اول** p و هر توان p^m از p، که n را بشمارد، G زیرگروهی از مرتبهٔ p^m دارد.

این قضیه توجه ما را به گروههایی معطوف می‌کند که مرتبه‌های آنها توانی از یک عدد اول‌اند. این گروهها ویژگیهای خاص مفیدی دارند و نقش مهمی در تحلیل گروههای متناهی کلی ایفا می‌کنند.

در بین زیرگروههای یک گروه G زیرگروههایی هستند که بالاخص در به‌دست آوردن اطلاعاتی

از G مفید واقع می‌شوند: این زیرگروهها را زیرگروههای نرمال می‌نامیم، و نماد '$K \trianglelefteq G$' را به معنی' K یک زیرگروه نرمال G است' به‌کار می‌بریم. تعریف صریح این عبارت در ۲.۳ آمده است، اما برای بحث فعلی، ما صرفاً نکات کلیدی زیر را بیان می‌کنیم. (۲۰.۳ تا ۲۲.۳ را ببینید.)

۷.۱ فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت می‌توانیم گروه متناظر G/K را (که زیرگروه G نیست) تعریف کنیم؛ این گروه را، گروه خارج‌قسمت G بر K می‌نامیم. به تعبیری G از دو گروه K و G/K ساخته می‌شود. به‌ویژه، هرگاه G متناهی باشد، K و G/K نیز متناهی‌اند و خواهیم داشت: $|G| = |K| \cdot |G/K|$.

در بین گروههای نرمال G همواره می‌توان خود گروه G و ۱، زیرگروه بدیهی آن را در نظر گرفت که برای آنها داریم $G/G \cong ۱$ و $G/۱ \cong G$. ولی زیرگروههای نرمال جالب، در صورت وجود، زیرگروههایی هستند که با هر یک از این دو متفاوت‌اند.

اگر در ۷.۱، G متناهی باشد و $K \neq G$ و $K \neq ۱$، آنگاه نوعی از G بر حسب دو گروه K و G/K با مرتبه‌های کوچکتر از G به‌دست می‌آوریم. خصوصیات این نوع را نمی‌توان کاملاً مشخص کرد، زیرا دانستن نوع گروههای K و G/K در حالت کلی برای مشخص‌کردن نوع G به‌طور یکتا کافی نیست (۱۱۶ را ببینید). این امر مسألهٔ توسیع را به‌وجود می‌آورد: گروههای مفروض K و Q، انواع تمامی گروههای G را مشخص می‌کنند که $K \trianglelefteq G$ و $G/K \cong Q$. خاطر نشان می‌کنیم که اگر K و Q گروههایی متناهی باشند تعداد چنین انواعی متناهی است. زیرا همهٔ این گروههای G مرتبهٔ متناهی $|Q| \cdot |K|$ خواهند داشت، و بنابراین تعداد انواع این گروهها حداکثر $\nu(|K| \cdot |Q|)$ خواهد بود. با اینکه مسألهٔ توسیع دشوار است، ولی در مقایسه با بعضی از مسائلی که پیشتر ذکر کردیم بررسی آنها با روشهای متداول معمولی خیلی آسانتر است.

با این فرض که می‌توانیم با مسألهٔ توسیع کنار بیاییم، به خود جرأت می‌دهیم برنامهٔ زیر را آزمایش کنیم. نماد '$K \triangleleft G$' را به معنی 'K زیرگروه نرمال G است و $K \neq G$' به‌کار می‌بریم. برای هر گروه متناهی G زنجیری متشکل از زیرگروههای

$$۱ = K_۰ \triangleleft K_۱ \triangleleft K_۲ \triangleleft \cdots \triangleleft K_{s-۱} \triangleleft K_s = G \tag{i}$$

را در نظر می‌گیریم، که نمی‌شود آن را تظریف کرد: یعنی، طوری است که نمی‌توانیم زیرگروهی چون H را به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, s$؛ به صورت $K_{j-۱} \triangleleft H \triangleleft K_j$ درج کنیم. بنابراین تلاش بر این خواهد بود که G را بر حسب گروههای خارج‌قسمتی

$$K_۱/K_۰, K_۲/K_۱, \cdots, K_s/K_{s-۱}$$

که آنها را تا حد ممکن کوچک ساخته‌ایم؛ بیان کنیم. توجه داشته باشید که

$$|K_1/K_0|\cdot|K_2/K_1|\cdots|K_s/K_{s-1}|=|G|.$$

چنین زنجیر (i) که نمی‌توان آن را تظریف کرد یک سری ترکیبی برای G نامیده می‌شود.

۸.۱ هر گروه متناهی G دست کم یک سری ترکیبی دارد.

برای اثبات این مطلب، با استقرا بر $|G|$ استدلال می‌کنیم. هرگاه $|G|=1$، آنگاه $1=K_0=G$ یک سری ترکیبی برای G خواهد بود. فرض می‌کنیم $|G|>1$. اکنون $K \lhd G$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $|K|$ تا حد ممکن بزرگ باشد (امکان دارد $K=1$). در این صورت $|K|<|G|$، بنابراین به موجب فرض استقرا نتیجه می‌شود که K دارای یک سری ترکیبی است، مانند

$$1=K_0\lhd K_1\lhd\cdots\lhd K_{s-1}=K,$$

که در آن s یک عدد صحیح مثبت است. لذا

$$1=K_0\lhd K_1\lhd\cdots\lhd K_{s-1}\lhd K_s=G$$

یک سری ترکیبی برای G خواهد بود و اثبات به استقرا تمام می‌شود.

مهمترین نکته در خصوص سریهای ترکیبی در قضیهٔ ژوردان-هولدر گنجانده شده است. (۹.۷ را ببینید)

۹.۱ فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد و

$$1=K_0\lhd K_1\lhd\cdots\lhd K_s=G$$

و

$$1=H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_r=G$$

سریهایی ترکیبیِ G باشند. در این صورت $r=s$ و دو دنبالهٔ مرکب از s گروه خارج‌قسمتی K_1/K_0، K_2/K_1، ...، K_s/K_{s-1} و H_1/H_0، H_2/H_1، ...، H_s/H_{s-1} دارای گروههایی هستند دقیقاً از یک نوع با درجهٔ تکرار یکسان (احتمالاً با ترتیب‌های مختلف). s را طول ترکیبی G و گروههای K_1/K_0، K_2/K_1، ...، K_s/K_{s-1} را عاملهای ترکیبی G می‌نامیم.

بعضی گروهها طول ترکیبی ۱ دارند این گروهها، گروههای ساده نامیده می‌شوند. توضیحاً گروه G (نه لزوماً متناهی) را ساده گوییم اگر $G\neq 1$ و تنها زیرگروههای نرمال آن ۱ و G باشند. می‌توان نشان داد که: (۲.۷ را ببینید).

۱۰.۱ هر عامل ترکیبی از یک گروه متناهی نابدیهی گروهی است ساده.

قضیهٔ ژوردان-هولدر، قضیهٔ ۹.۱، در مورد گروههای متناهی را می‌توان مشابه قضیهٔ بنیادی حساب برای اعداد صحیح مثبت تصورکرد. با این تصورگروههای سادهٔ متناهی نقش اعداد اول را بازی می‌کنند. قضیهٔ ژوردان-هولدر بیان می‌کند که هرگروه متناهی نابدیهی G نوعی 'حاصلضرب' گروههای ساده است، واین عاملهای ساده با G غیر از ترتیب‌شان به‌طوریکتا مشخص می‌شوند. البته تشکیل یک 'حاصلضرب' در این زمینه، آنگونه که برای اعداد اول داشتیم، فرآیند مشخص‌کننده‌ای یکتا نخواهد بود. ولی، قضایای مذکور در این باب موجب تقسیم مسألهٔ رده‌بندی اولیه به دو قسمت می‌شوند: (i) یافتن گروههای سادهٔ متناهی از هر نوع ممکن ('قالبهای ساختمانی' نظریهٔ گروههای متناهی)، (ii) حل مسألهٔ توسیع (یعنی، پی‌بردن به چگونگی جورشدن قالبهای ساختمانی).

در طی ده سال اخیر تلاش زیادی صرف مسألهٔ (i) شده است و، با اینکه موانع موجود در پیش رو فوق‌العاده زیاد است و هدف هنوز نزدیک نیست، مع‌هذا پیشرفتهای زیادی صورت گرفته است. در این مرحله ما صرفاً قضیهٔ زیر را متذکر می‌شویم (۶.۳؛ ۶۰.۳، ۶۱.۳، ۲۴.۵ و ۲۸.۵ را ببینید).

۱۱.۱ تنها گروههای سادهٔ آبلی؛ گروههایی هستند که مرتبهٔ آنها اعداد اول‌اند. همچنین تعداد انواع گروههای سادهٔ متناهی ناآبلی بینهایت است.

چگونه می‌توانیم ساختار یک گروه سادهٔ ناآبلی را بررسی کنیم؟ هیچ زیرگروه نرمال حقیقی نابدیهی در اختیار نداریم تا امیدوار باشیم بتوانیم به‌وسیلهٔ آن ساختار این گروه را بر حسب ساختار دو گروه کوچکتر بیان کنیم، لیکن هنوز هم مایلیم با گروههای کوچکتر کار کنیم تا با گروههای بزرگتر. لذا ما به فکر زیرگروههایی می‌افتیم که نرمال نیستند. قضیهٔ زیر که یکی از جالبترین دستاوردهای دوران جدید است سرآغاز این تلاش است.

۱۲.۱ (و. فایت و ج. گ-تامپسن [a۲۳]). هر گروه سادهٔ متناهی ناآبلی زوج مرتبه است.

این قضیه حدسی بود از برنساید در ۱۹۱۱: ص ۵۰۳ از [b۳] را ببینید. در واقع برنساید در نخستین چاپ کتابش در ۱۸۹۷، بررسی وجود یا عدم وجود یک گروه سادهٔ ناآبلی فرد مرتبه را توصیه کرده بود، بی‌آنکه نتیجه‌اش را پیش‌بینی کند. این مسأله بالاخره در ۱۹۶۳ با چاپ مقاله‌ای در [a۲۳] حل و فصل شد. اثبات این قضیه متأسفانه فعلاً خارج از ظرفیت هرکتاب درسی است، ولی درکتاب د. گورنشتاین [b۱۳] شرح بسیاری از روشهای به‌کاررفته آمده است. اهمیت قضیهٔ فایت-تامپسن در این است که وجود عضوهای مرتبهٔ ۲ را در گروههای سادهٔ متناهی ناآبلی تضمین می‌کند.

۱۳.۱ فرض می‌کنیم G گروه دلخواهی زوج مرتبه باشد. در این صورت G دارای دست‌کم یک عضو مرتبهٔ ۲ است (هر چنین عضوی یک برگشت نامیده می‌شود.)

این قضیه یک نتیجهٔ بلافصل ۶.۱ است. راه دیگر، یک برهان مقدماتی‌تری مانند آنچه ذیلاً آمده است وجود دارد. فرض می‌کنیم $T = \{x \in G : x^2 = 1\}$ و $U = \{x \in G : x^2 \neq 1\}$. در این صورت T و U زیرمجموعه‌هایی از G هستند به‌طوری‌که $G = T \cup U$ و $T \cap U = \varnothing$. حال اعضای U را می‌شماریم. ممکن است که $U = \varnothing$، در این حالت $|U| = 0$. در غیر این صورت، $x_1 \in U$ را بر می‌گزینیم. در این صورت $x_1 \neq x_1^{-1} \in U$. ممکن است داشته باشیم $U = \{x_1, x_1^{-1}\}$، در این حالت $|U| = 2$. در غیر این صورت، عضو دیگر $x_2 \in U$ را انتخاب می‌کنیم. پس $x_2 \neq x_2^{-1} \in U$ و مضافاً $x_2^{-1} \neq x_1$ و $x_2^{-1} \neq x_1^{-1}$ (زیرا $x_2 \neq x_1^{-1}$ و $x_2 \neq x_1$). ممکن است داشته باشیم $U = \{x_1, x_1^{-1}, x_2, x_2^{-1}\}$، در این حالت $|U| = 4$. در غیر این صورت این عمل را ادامه می‌دهیم تا اینکه تمام اعضای U مورد بحث واقع شوند. در هر حالت مشاهده می‌کنیم که $|U|$ زوج است. از آنجایی‌که $|G|$ نیز زوج است و $|G| = |T| + |U|$، نتیجه می‌گیریم که $|T|$ زوج است. اما $T \neq \varnothing$، زیرا $1 \in T$. ازاین‌رو $|T| \geqslant 2$. بنابراین عضوی چون $t \in T$ وجود دارد که $t \neq 1$. یک چنین عضو t، یک برگشت است.

اکنون فرض می‌کنیم که G گروه دلخواهی باشد. به‌ازای هر $x \in G$، تعریف می‌کنیم

$$C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}.$$

به آسانی تحقیق می‌شود که $C_G(x)$ یک زیرگروه G است؛ این زیرگروه مرکزساز x در G نامیده می‌شود. (۲۵.۴ را ببینید). همچنین

$$\bigcap_{x \in G} C_G(x) = \{g \in G : gx = xg \text{ به‌ازای هر } x \in G\}$$

یک زیرگروه G است، که آن را مرکز G می‌نامیم و با $Z(G)$ نمایش می‌دهیم (۱۱۷ را ببینید). توجه داشته باشید که بلافاصله از تعاریف فوق نتیجه می‌شود که هرگاه $x \in G$ و $H = C_G(x)$ آنگاه $x \in Z(H)$.

مقدار زیادی از بحثهای جدید دربارهٔ گروههای سادهٔ متناهی به مرکزساز برگشتها مربوط است. دلیل مهم این مطلب در قضیهٔ زیر آورده شده است: (۹.۶ را ببینید).

۱۴.۱ (ر. براوئر و ک. ا. فاولر [a8]؛ ۱۹۵۵). فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی است (بنابراین به موجب ۱۲.۱، $|G|$ زوج است) و t برگشتی در G. در این صورت $C_G(t) \neq G$ و هرگاه $|C_G(t)| = m$ آنگاه $|G| \leqslant (\frac{1}{2}m(m+1))!$.

این قضیه امکان مشخص‌کردن یک گروه سادهٔ G را بر حسب ساختار مرکزساز یک برگشت، که گروهی است با مرتبهٔ کمتر از G به ما می‌دهد. به‌ویژه از ۱۴.۱ نتیجه می‌گیریم که:

۱۵.۱ فرض می‌کنیم H گروهی زوج مرتبه باشد با یک برگشت $u \in Z(H)$. در این صورت تعداد انواع گروههای سادهٔ متناهی که دارای یک برگشت t با $C_G(t) \cong H$ هستند متناهی است.

برای اثبات این مطلب ابتدا توجه می‌کنیم که هرگاه یک چنین گروه سادهٔ G آبلی باشد آنگاه بنابر ۱۱.۱، $|G| = 2$. از طرفی، هر گروه ناآبلی G از این قسم، بنابر ۱۴.۱ حداکثر دارای مرتبهٔ $(\frac{1}{2}|H|(|H|+1))!$ است، عددی که فقط به گروه مفروض H بستگی دارد. به موجب ۲.۱، تنها تعدادی متناهی گروه از انواع مختلف، از هر مرتبه وجود دارند. از این رو تعداد انواع مختلف گروههایی که مرتبه‌شان از عدد مفروض دلخواهی تجاوز نمی‌کند متناهی خواهد بود.

برنامهٔ زیر به دفعات به‌کار گرفته شده است. با یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی معلوم E و یک برگشت $u \in E$ شروع می‌کنیم و قرار می‌دهیم $H = C_E(u)$. سپس گروههای سادهٔ متناهی چون G را که دارای یک برگشت t هستند با $C_G(t) \cong H$ در نظر می‌گیریم. بنابر ۱۵.۱ فقط تعدادی متناهی گروه از نوع گروههایی مانند G وجود دارند. سعی می‌کنیم ثابت کنیم که عملاً فقط یک نوع گروه وجود دارد، به عبارت دیگر؛ لزوماً $E \cong G$. اگر این تلاش به نتیجه برسد؛ یک قضیهٔ مشخص‌سازی در مورد E اثبات شده است: یک مشخصه‌سازی از E برحسب ساختار مرکزساز یکی از برگشتهایش (گروهی که مرتبهٔ کوچکتر از E دارد.). قضایای مشخص‌سازی بسیاری از این قسم شناخته شده‌اند. اما اگر این تلاش به علت وجود گروههای غیریکریخت با E در میان گروههای G به نتیجه نرسد؛ ممکن است در بین گروههای G، گروههای ساده‌ای باشند که از قبل شناخته نشده‌اند. این روش در طی چند سال گذشته منشأ کشف چندین گروه سادهٔ متناهی جدید بوده است.

۲

مثالهایی از گروهها و همریختیها

بجاست که مطلب را با مفهوم یک نیم‌گروه شروع کنیم زیرا، چنانکه خواهیم دید، مثالهای مهم زیادی از گروهها به طریق طبیعی از نیم‌گروهها ناشی می‌شوند. ولی، در این کتاب به بسط نظریهٔ پهناور جبری نیم‌گروهها نخواهیم پرداخت.

۱.۲ تعریف هر نیم‌گروه یک مجموعهٔ ناتهی S است، به انضمام یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر در S. این عمل غالباً ضرب نامیده می‌شود، و هرگاه $x, y \in S$، حاصلضرب x و y (به‌همین‌ترتیب) به صورت xy نوشته می‌شود.

شرکت‌پذیری در S از لحاظ به‌خاطرسپردن بسیار مفید است و به ما اجازه می‌دهد که بدون ابهام به جای $(x_1x_2)x_3 = x_1(x_2x_3)$ بنویسیم $x_1x_2x_3$، که در آن x_1، x_2، x_3 اعضای دلخواهی از Sاند. به‌علاوه، از اینجا نتیجه می‌شود که می‌توان بدون ابهام به حاصلضرب هر تعداد متناهی از اعضا اشاره کرد و یک ترتیب معین را پذیرفت: پرانتزها را می‌شود به‌طور دلخواه در حاصلضرب $x_1x_2\cdots x_n$، درج و یا از آن حذف کرد، بدون اینکه نتیجه تغییر کند. (برای اثبات رسمی این مطلب، لدرمن [b۲۹] صص ۳ـ۴ یا مک‌دانلد [b۳۰] صص ۱۸ـ۱۹ را ببینید.) ازهمین‌جا قوانین

توان استانده نتیجه می‌شود: هرگاه $x \in S$، و m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی باشند، آنگاه $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ و $(x^m)^n = x^{mn}$. البته در حالت کلی مجاز نیستیم که ترتیب اعضا را در یک حاصلضرب تغییر دهیم، چرا که ممکن است داشته باشیم $x_1x_2 \neq x_2x_1$.

۲.۲ تعاریف فرض می‌کنیم S یک نیم‌گروه باشد.

(i) عضو $e \in S$، عضو همانی S نامیده می‌شود، هرگاه به‌ازای هر $x \in S$، $ex = x = xe$.

اگر S دارای عضو همانی باشد، این عضو یکتاست: زیرا اگر e و f عضوهای همانی S باشند، آنگاه $f = ef = e$.

(ii) فرض می‌کنیم که S دارای عضو همانی e باشد و $x \in S$. یک عضو $y \in S$ وارون x نامیده می‌شود، اگر $yx = e = xy$. هرگاه x دارای وارونی باشد، این وارون یکتاست: زیرا اگر y و z وارونهای x باشند، آنگاه $y = ye = yxz = ez = z$.

اکنون می‌گوییم یک گروه دقیقاً نیم‌گروهی است با عضو همانی به‌طوری‌که هر عضوش دارای وارون است.

(iii) هر زیرگروه از مجموعهٔ S زیرمجموعه‌ای است از S، که نسبت به عمل معرف S تشکیل یک گروه می‌دهد.

۱۳. مثالی از یک نیم‌گروه بیاورید که فاقد عضو همانی باشد.

۱۴. مثالی از یک نیم‌گروه نامتناهی با عضو همانی e بیاورید که هیچ عضو آن بجز e دارای وارون نباشد.

۳.۲ فرض می‌کنیم S نیم‌گروهی باشد با عضو همانی e. عضوی از S که وارون داشته باشد یک یکه در S نامیده می‌شود. در این صوت مجموعهٔ تمام یکه‌های S، زیرگروهی از S تشکیل می‌دهند، که گروه یکه‌های S نامیده می‌شود.

برهان فرض می‌کنیم U مجموعهٔ تمام یکه‌های S باشد. در این صورت $U \neq \varnothing$، زیرا $e \in U$. چون عمل معرف S شرکت‌پذیر است، در U نیز شرکت‌پذیر است. فرض می‌کنیم $x_1, x_2 \in U$. در این صورت عضوهایی چون $y_1, y_2 \in S$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$x_1y_1 = y_1x_1 = e = x_2y_2 = y_2x_2.$$

پس به همین نحو

$$(x_1x_2)(y_2y_1) = x_1(x_2y_2)y_1 = x_1ey_1 = x_1y_1 = e = (y_2y_1)(x_1x_2)$$

از این‌رو $x_۱x_۲ \in U$. واضح است که e عضو همانی برای U است، و $y_۱ \in U$. لذا $y_۱$ وارون $x_۱$ در U است. پس U یک زیرگروه S است.

۱۵. فرض می‌کنیم S یک نیم‌گروه باشد و $x \in S$. نشان دهید که $\{x\}$ یک زیرگروه S (از مرتبهٔ ۱) است اگر و تنها اگر $x = x^۲$. یک چنین عضو x، یک خودتوان در S نامیده می‌شود. (تذکر. یک نیم‌گروه ممکن است زیرگروههای متمایز متعددی از مرتبهٔ ۱ داشته باشد: ۱۶ را ببینید. چرا هر گروه تنها یک زیرگروه از مرتبهٔ ۱ دارد؟)

۱۶. فرض می‌کنیم X مجموعهٔ ناتهی دلخواهی باشد. S را مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های X بینگارید. نشان دهید که S نسبت به عمل $\cap$ یک نیم‌گروه است. آیا S عضو همانی دارد، و اگر چنین است، یکه‌های S چه هستند؟ نشان دهید که هر عضو S خود توان است (۱۵). نتیجه بگیرید که به‌ازای هر $Y \in S$، $\{Y\}$ یک زیرگروه S است، و نیز هر زیرگروه S دارای مرتبهٔ ۱ است.

اگر $\cup$ جایگزین $\cap$ شود چه خواهد شد؟

۴.۲ هرگاه X مجموعهٔ ناتهی دلخواهی باشد، مجموعهٔ M_X متشکل از تمام نگاشتهای X به توی خودش، نسبت به عمل ترکیب تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد. یک عضو همانی ۱ در M_X وجود دارد که به‌ازای هر $x \in X$ با ضابطهٔ $۱ : x \mapsto x$ تعریف می‌شود. یکه‌های M_X دقیقاً جایگشتهای Xاند. گروه یکه‌های M_X را با Σ_X نشان می‌دهند و گروه متقارن (نامحدود) بر X می‌نامند.

برهان مسلماً $M_X \neq \varnothing$، و نسبت به ترکیب بسته است، زیرا ترکیب دو نگاشت $\varphi_۱ : X \to X$ و $\varphi_۲ : X \to X$، با نگاشت $\varphi_۱\varphi_۲ : X \to X$ تعریف می‌شود. به‌علاوه، این ترکیب شرکت‌پذیر است: زیرا اگر $\varphi_۱, \varphi_۲, \varphi_۳ \in M_X$، تساوی $(\varphi_۱\varphi_۲)\varphi_۳ = \varphi_۱(\varphi_۲\varphi_۳)$ صرفاً بیانگر این حقیقت است که به‌ازای هر $x \in X$

$$x((\varphi_۱\varphi_۲)\varphi_۳) = (x(\varphi_۱\varphi_۲))\varphi_۳ = ((x\varphi_۱)\varphi_۲)\varphi_۳ = (x\varphi_۱)(\varphi_۲\varphi_۳) = x(\varphi_۱(\varphi_۲\varphi_۳)).$$

نگاشت ۱ که در بالا تعریف شده است به M_X تعلق دارد و روشن است که عضو همانی M_X است. بالاخره، هرگاه $\varphi, \psi \in M_X$، آنگاه ψ وارون φ در M_X است اگر و تنها اگر $\varphi\psi = ۱ = \psi\varphi$. برای یک φی معین، چنین ψای وجود خواهد داشت اگر و تنها اگر φ یک نگاشت دوسویی باشد، یعنی اگر و تنها اگر φ یک جایگشت X باشد. لذا گروه یکه‌های M_X متشکل از تمام جایگشتهای X است.

اشاره. گروه متقارن محدود بر یک مجموعهٔ ناتهی X در ۱۱۰ تعریف شده است.

۵.۲ هرگاه X مجموعه‌ای متناهی باشد با مثلاً $|X| = n > ۰$، آنگاه $|M_X| = n^n$ و $|\Sigma_X| = n!$.

خواننده حالا باید با نمادگذاری استاندارد در مورد جایگشتهای مجموعه‌های متناهی آشنا شده باشد، مثلاً لدرمن [b۲۹]، صص ۲۰ـ۲۶ را ببینید. لذا هرگاه n یک عدد صحیح مثبت باشد،

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & \cdots & n \\ a_۱ & a_۲ & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

معرف جایگشتی چون σ از مجموعهٔ $\{a_۱, a_۲, \cdots, a_n\} = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ است که به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, n$،

$$\sigma : j \mapsto a_j.$$

هر جایگشت از مجموعهٔ متناهی X را می‌توان به صورت حاصلضربی از دورهای زیرمجموعه‌های مجزای X نمایش داد، و این نمایش یکتاست مگر در ترتیب دورها. علاوه بر این هر دو دور مجزا با هم جابه‌جا می‌شوند. پس برای مثال

$$\begin{pmatrix} ۱&۲&۳&۴&۵&۶&۷&۸ \\ ۲&۶&۱&۷&۵&۳&۸&۴ \end{pmatrix} = (۱۲۶۳)(۴۷۸) = (۴۷۸)(۱۲۶۳),$$

که در آن مثلاً (۱۲۶۳) معرف جایگشت

$$\begin{pmatrix} ۱&۲&۶&۳ \\ ۲&۶&۳&۱ \end{pmatrix}$$

است و ما قرارداد معمول، حذف نقاطی را که توسط جایگشت در سمت راست ثابت می‌مانند، اتخاذ می‌کنیم — در این حالت نقطهٔ ۵ را. تعداد نقاط مجزایی را که در یک دور واقع می‌شوند طول این دور می‌نامیم. لذا برای مثال طول دور (۱۲۶۳) برابر ۴ است.

این نمادگذاری بر حسب دورها برای روشن‌ساختن محاسبات در گروههای متقارن متناهی، یک راه بسیار مناسبی است. برای مثال اگر $X = \{۱, ۲, ۳\}$، در Σ_X داریم

$$(۱۲۳) = (۱۳)(۱۲) \text{ و حال آنکه } (۱۳۲) = (۱۲)(۱۳).$$

این نشان می‌دهد که Σ_X یک گروه ناآبلی است.

در اینجا و همواره در این کتاب، زمانی که جایگشتهای یک مجموعه را (به جای نگاشتهایی از انواع دیگر) مورد بحث قرار می‌دهیم، نمادهای معرف جایگشتها را در سمت راست نقاطی قرار می‌دهیم، که آنها رویشان عمل می‌کنند. بنابراین جایگشتها از چپ به راست در یکدیگر ضرب می‌شوند.

۱۷. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای باشد با $|X| = ۲$. در این صورت آیا دو عضو M_X لزوماً با هم جابه‌جا می‌شوند؟ دو عضو Σ_X چطور؟

۱۸. جایگشت

$$\sigma = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ & ۷ \\ ۱ & ۵ & ۷ & ۴ & ۶ & ۲ & ۳ \end{pmatrix}$$

را به صورت حاصلضربی از دوره‌های مجزا نشان دهید. برای $\sigma^{۲}$ و $\sigma^{-۱}$ عباراتی به صورت حاصلضربهایی از دورهای مجزا بیابید.

ما اغلب با موارد خاصی چون وضعیت زیر سروکار خواهیم داشت: X و Y دو مجموعه (احتمالاً $X = Y$) هستند و T مجموعهٔ نگاشتهایی از X به توی Y است. بعضی از مجموعه‌های X، Y، T یا همهٔ آنها معمولاً گروه خواهند بود. چنین وضعیتی را در ۴.۲ مورد توجه قرار دادیم و اکنون وضعیت دیگری را در نظر می‌گیریم.

فرض می‌کنیم که دو گروه G و H (احتمالاً مثل هم) داریم. انتظار داریم که در بین تمام نگاشتهای $\varphi : G \to H$، آنهایی که حافظ ساختارند اهمیت خاصی داشته باشند.

۶.۲ تعاریف نگاشت $\varphi : G \to H$ را یک همریختی می‌خوانیم اگر به‌ازای هر $g_۱, g_۲ \in G$،

$$(g_۱ g_۲)\varphi = (g_۱\varphi)(g_۲\varphi).$$

هرگاه مضافاً φ دوسویی نیز باشد، φ را یک یکریختی می‌گوییم.

فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک یکریختی باشد و $\psi : H \to G$ وارون نگاشت دوسویی φ باشد. در این صورت ψ نیز یک یکریختی است: زیرا ψ دوسویی است، و اگر $h_۱, h_۲ \in H$ آنگاه عضوهای $g_۱, g_۲ \in G$ وجود دارند، به‌طوری‌که $h_۱ = g_۱\varphi$ و $h_۲ = g_۲\varphi$؛ ازاین‌رو،

$$\begin{aligned}(h_۱h_۲)\psi &= ((g_۱\varphi)(g_۲\varphi))\psi = ((g_۱g_۲)\varphi)\psi = (g_۱g_۲)(\varphi\psi)\\ &= g_۱g_۲ = (g_۱\varphi\psi)(g_۲\varphi\psi)\\ &= ((g_۱\varphi)\psi)((g_۲\varphi)\psi) = (h_۱\psi)(h_۲\psi).\end{aligned}$$

اگر یک یکریختی از G بر روی H وجود داشته باشد می‌گوییم G و H گروههای یکریخت‌اند، یا G و H از یک نوع‌اند و می‌نویسیم $G \cong H$. رابطهٔ $\cong$ در گروهها، یک رابطهٔ هم‌ارزی است (۲۰). اگر G و H یکریخت نباشند می‌نویسیم $G \ncong H$.

***۱۹.** اگر $\varphi : G \to H$ و $\psi : H \to J$ دو همریختی باشند، نگاشت مرکب $\varphi\psi : G \to J$ نیز یک همریختی است.

***۲۰.** تحقیق کنید که اگر $\mathscr{G}$ مجموعهٔ دلخواهی از گروهها باشد، آنگاه $\cong$ یک رابطهٔ هم‌ارزی در $\mathscr{G}$ است.

اغلب بجاست گروههای یکریختی را که اعضایشان مجموعه‌هایی مجزا هستند به صورت گروهی واحد تلقی کنیم، و بنویسیم $G \cong H$. ولی وقتی با زیرگروههای یک گروه G سروکار داریم. باید محتاطانه عمل کنیم. ممکن است G دارای زیرگروههایی مانند H و K باشد که مجموعه‌هایی متمایزند، اما $H \cong K$. البته در این صورت مجاز نیستیم بگوییم $H = K$. در این وضعیت ما با H و K نه تنها به‌عنوان گروههای مجرد سروکار داریم بلکه حتی رابطهٔ آنها را با گروه دربرگیرندهٔ آنها یعنی G نیز در نظر می‌گیریم.

۷.۲ هرگاه X و Y مجموعه‌هایی ناتهی باشند به‌طوری‌که یک نگاشت دوسویی چون $\varphi : X \to Y$ وجود داشته باشد، آنگاه $\Sigma_X \cong \Sigma_Y$. به‌ویژه در بررسی گروههای متقارن متناهی کافی است به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، جایگشتهای مجموعهٔ واحدی مرکب از n عضو را در نظر بگیریم. اغلب برای این کار مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$ را انتخاب می‌کنیم و برای گروه متقارن با n نقطه می‌نویسیم Σ_n (که در بیشتر کتابها S_n نوشته می‌شود). در این صورت، Σ_n گروه متقارن از درجهٔ n نامیده می‌شود.

برهان چون $\varphi : X \to Y$ یک دوسویی است، پس نگاشتی وارون چون $\psi : Y \to X$ وجود خواهد داشت، لذا

$\varphi\psi = ۱_X$، نگاشت همانی روی X،

و $\psi\varphi = ۱_Y$، نگاشت همانی روی Y.

به‌ازای هر $\sigma \in \Sigma_X$، $\psi\sigma\varphi : Y \to Y$. درحقیقت $\psi\sigma\varphi \in \Sigma_Y$؛ زیرا نگاشت $\psi\sigma^{-۱}\varphi : Y \to Y$ طوری است که

$$(\psi\sigma\varphi)(\psi\sigma^{-۱}\varphi) = ۱_Y = (\psi\sigma^{-۱}\varphi)(\psi\sigma\varphi).$$

اکنون به آسانی تحقیق می‌شود که نگاشت $\theta : \Sigma_X \to \Sigma_Y$ که با ضابطهٔ

$$\theta : \sigma \mapsto \psi\sigma\varphi \quad (\text{به‌ازای هر } \sigma \in \Sigma_X)$$

تعریف می‌شود، یک یکریختی است.

۸.۲ تعریف هرگاه یک همریختی یک به یک (که گاهی تکریختی نامیده می‌شود) از G به توی H وجود داشته باشد، می‌گوییم که G را می‌توان در H نشانید.

برای گروههای دلخواه G و H دستکم یک همریختی $\varphi : G \to H$ یعنی همریختی بدیهی $\varphi : g \mapsto ۱$ به‌ازای هر $g \in G$ وجود دارد. ولی طبیعی است که، در حالت کلی G را نمی‌توان در H نشانید.

*۲۱. (i) حاصلضربهای (۱۴)(۱۳)(۱۲) و (۱۵)(۱۴)(۱۳)(۱۲) را در گروه Σ_n، که در آن n عدد صحیحی است با $n \geqslant ۵$ محاسبه کنید.

(ii) جایگشتی چون (۱۲)، که دو نقطه را با هم جابه‌جا می‌کند و همهٔ نقاط دیگر را ثابت نگه می‌دارد یک ترانهش نامیده می‌شود. به‌ازای هر عدد صحیح $n > ۱$، نشان دهید که جایگشت $(۱۲۳\cdots n)$ را می‌توان به صورت حاصلضربی از $n - ۱$ ترانهش نشان داد.

(iii) برای هر عدد صحیح $n > ۱$، ثابت کنید که هر عضو نابدیهی Σ_n را می‌توان به‌صورت حاصلضرب حداکثر $n - ۱$ ترانهش بیان کرد.

۲۲. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، و $\sigma \in \Sigma_n$. همچنین فرض می‌کنیم σ را بتوان به صورت حاصلضربی از s دور مجزا به ترتیب به طولهای $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$، n_s نشان داد، که در آن s، $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$، n_s اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری‌که $n_۱ + \cdots + n_s = n$. در این صورت $o(\sigma)$ کوچکترین مضرب مشترک $n_۱$، $n_۲$، $\cdots$، n_s خواهد بود.

۲۳. فرض می‌کنیم n و m اعداد صحیح مثبتی باشند، به‌طوری‌که m، n را بشمارد. فرض می‌کنیم σ دوری به طول n در Σ_n باشد. در این صورت σ^m حاصلضرب m دور مجزا به طول n/m خواهد بود.

۲۴. هر گروهی را که بتوان در یک گروه آبلی نشانید، آبلی است.

۲۵. ثابت کنید که هرگاه X مجموعه‌ای ناتهی باشد و Y زیرمجموعهٔ ناتهی X، آنگاه Σ_Y را می‌توان در Σ_X نشانید. (بویژه، هرگاه m و n اعداد صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که $m \leqslant n$، آنگاه Σ_m را می‌توان در Σ_n نشانید.) لذا به این طریق یا به هر طریق دیگر نشان دهید که هرگاه $|X| > ۲$ آنگاه Σ_X ناآبلی است.

دو قضیهٔ بعدی برخی از ویژگیهای اساسی همریختیها را به دست می‌دهند.

۹.۲ فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد. در این صورت $۱\varphi = ۱$، و به‌ازای هر $g \in G$، $g^{-۱}\varphi = (g\varphi)^{-۱}$. مجموعهٔ $\{g\varphi : g \in G\}$ یک زیرگروه H است که ما آن را نگارهٔ φ می‌نامیم و با $\operatorname{Im}\varphi$ یا $G\varphi$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، برای هر زیرگروه K از G مجموعهٔ $K\varphi = \{k\varphi : k \in K\}$ یک زیرگروه از $\operatorname{Im}\varphi$ است.

برهان چون در G داریم $۱ = ۱ \cdot ۱$، لذا در H خواهیم داشت:

$$(۱\varphi)(۱\varphi) = ۱\varphi.$$

ازاین‌رو

$$۱\varphi = (۱\varphi)(۱\varphi)^{-۱} = ۱$$

(در سمت چپ تساوی اخیر ۱ معرف عضو همانی G است و حال آنکه در سمت راست ۱ معرف عضو همانی H است). همچنین در G داریم

$$g^{-۱}g = ۱,$$

و بنابراین در H خواهیم داشت

$$(g^{-۱}\varphi)(g\varphi) = ۱\varphi = ۱,$$

از این رو

$$g^{-۱}\varphi = (g\varphi)^{-۱}.$$

فرض می‌کنیم $J = \{g\varphi : g \in G\}$. در این صورت J زیرمجموعهٔ ناتهی H خواهد بود. به‌علاوه هرگاه $g_۱, g_۲ \in G$ آنگاه

$$(g_۱\varphi)(g_۲\varphi)^{-۱} = (g_۱\varphi)(g_۲^{-۱}\varphi) = (g_۱g_۲^{-۱})\varphi \in J.$$

پس $J \leqslant H$.

به‌ازای هر $K \leqslant G$، نگاشت

$$\varphi|_K : K \to H$$

یک همریختی است و $\operatorname{Im}\varphi|_K = K\varphi$. از این رو با توجه به آنچه ثابت کردیم $K\varphi \leqslant H$؛ و در این صورت چون $K\varphi \subseteq \operatorname{Im}\varphi$، پس $K\varphi \leqslant \operatorname{Im}\varphi$.

اکنون توجهمان را به نتیجهٔ زیر معطوف می‌کنیم که بلافاصله از ۹.۲ نتیجه می‌شود.

۱۰.۲ (i) هرگاه $\varphi : G \to H$ یک همریختی یک به یک باشد، آنگاه $G \cong G\varphi$، و به‌ازای هر زیرگروه K از G، $K \cong K\varphi$.

(ii) G را می‌توان در H نشانید اگر و تنها اگر G با یک زیرگروه H یکریخت باشد.

۲۶. هرگاه $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و G آبلی، آنگاه $\operatorname{Im}\varphi$ آبلی است.

۲۷*. فرض می‌کنیم که G_1 و G_2 گروههایی یکریخت‌باشند و $\varphi : G_1 \to G_2$ یک یکریختی باشد. هرگاه $K_1 \leqslant G_1$ و $K_2 = K_1\varphi$ آنگاه $|G_1 : K_1| = |G_2 : K_2|$.

۲۸. اگر G و H متناهی باشند، شرط لازم برای اینکه G را بتوان در H نشانید آن است که $|G|$، $|H|$ را بشمارد. با یک مثال نشان دهید که این شرط کافی نیست.

بجاست که در این مرحله بعضی مثالهای مهم از گروهها و همریختیها را گردآوری کنیم.

۱۱.۲ حلقهٔ دلخواه R در عمل جمع، گروهی آبلی چون R^+ را تشکیل می‌دهد: گروه جمعی R. عضو همانی R^+، عضو صفر R است و وارون $a \in R$ در R^+ عضو $-a$ است.
به‌ویژه توجهمان را معطوف می‌کنیم به گروههای

$$\mathbf{Z}^+ < \mathbf{Q}^+ < \mathbf{R}^+ < \mathbf{C}^+.$$

به‌ازای هر $a \in R$ (R یک حلقهٔ دلخواه) نگاشتهای

$$\lambda_a : R^+ \to R^+ \quad \text{و} \quad \rho_a : R^+ \to R^+,$$

که به‌ازای هر $x \in R^+$ با ضابطه‌های زیر تعریف می‌شوند

$$\lambda_a : x \mapsto ax \quad \text{و} \quad \rho_a : x \mapsto xa$$

همریختی‌اند. این مطلب از قوانین توزیع‌پذیری حلقهٔ R نتیجه می‌شود. هرگاه ضرب در R جابه‌جایی‌پذیر باشد، آنگاه به‌ازای هر $a \in R$، $\lambda_a = \rho_a$، اما اگر این ضرب جابه‌جایی‌پذیر نباشد، آنگاه به‌ازای یک مقدار $a \in R$ خواهیم داشت $\lambda_a \neq \rho_a$.

اگر $R = F$، F یک میدان، و $0 \neq a \in F$، آنگاه $\lambda_a : F^+ \to F^+$ یک یکریختی است: زیرا نگاشت λ_a وارون‌پذیر است، با وارون $\lambda_{a^{-1}}$.

اگر $R = \mathbf{Z}$ و $0 \neq n \in \mathbf{Z}$، آنگاه نگاشت $\lambda_n : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ همریختی یک به یک است. ولی $\operatorname{Im}\lambda_n = \{nx : x \in \mathbf{Z}^+\}$ یک زیرگروه حقیقی $\mathbf{Z}^+$ است، مگر اینکه $n = \pm 1$.

(مثلاً $\operatorname{Im}\lambda_2$ زیرگروه حقیقی $\mathbf{Z}^+$ است که از تمام اعداد صحیح زوج تشکیل شده است.) بنابراین هنگامی که $|n| \geqslant 2$، $\lambda_n : \mathbf{Z}^+ \to \mathbf{Z}^+$ یک همریختی یک به یک است که یک یکریختی نیست؛ و بنابر ۱۰.۲، $\operatorname{Im}\lambda_n$ یک زیرگروه حقیقی $\mathbf{Z}^+$ است که با خود $\mathbf{Z}^+$ یکریخت است (رک. ۳۰). توجه داشته باشید که $\mathbf{Z}^+$ یک گروه دوری است با $\mathbf{Z}^+ = \langle 1 \rangle$. گروههای $\mathbf{Q}^+$، $\mathbf{R}^+$، $\mathbf{C}^+$ هیچکدام دوری نیستند.

۲۹*. (i) هر گروه دوری نامتناهی با $\mathbf{Z}^+$ یکریخت است.

(ii) هرگاه G یک گروه نابدیهی باشد و تنها زیرگروههایش ۱ و G باشند، G گروهی است دوری از مرتبهٔ اول.

۳۰. (i) هرگاه G متناهی باشد هیچ زیرگروه حقیقی G با G یکریخت نیست.

(ii) هرگاه G گروهی باشد که وقتی $J < H \leqslant G$، $J \ncong H$، آنگاه هر عضو G متناهی مرتبه است. (مثالی از یک گروه نامتناهی با این ویژگی در ۱۴۴ آمده است.)

۳۱. نشان دهید که $\mathbf{Z}^+$ تعداد نامتناهی زیرگروه متمایز دارد. سپس نتیجه بگیرید که هر گروه نامتناهی تعداد نامتناهی زیرگروه متمایز دارد.

۳۲*. هیچ دو گروهی از گروههای $\mathbf{Z}^+$، $\mathbf{Q}^+$، $\mathbf{R}^+$ یکریخت نیستند. (اشاره. در واقع داریم $\mathbf{R}^+ \cong \mathbf{C}^+$. این مطلب را می‌شود با درنظرگرفتن $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ به‌عنوان فضاهای برداری روی $\mathbf{Q}$ و با استفاده از نظریهٔ فضاهای برداری و نکاتی راجع به اعداد اصلی نامتناهی ثابت کرد.)

۳۳. فرض می‌کنیم $\operatorname{Hom}(G, A)$ معرف مجموعهٔ تمام همریختیها از گروه G به توی گروه آبلی A باشد. عمل دوتایی + را در $\operatorname{Hom}(G, A)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به‌ازای $\varphi, \psi \in \operatorname{Hom}(GA)$

$$\varphi + \psi : G \to A$$

به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$\varphi + \psi : g \mapsto g^\varphi g^\psi$$

تعریف می‌شود. تحقیق کنید که $\varphi + \psi \in \operatorname{Hom}(G, A)$ و نسبت به عمل دوتایی +، $\operatorname{Hom}(G, A)$ ساختار یک گروه آبلی را به خود می‌گیرد.

نشان دهید که برای هر گروه آبلی A، $\operatorname{Hom}(\mathbf{Z}^+, A) \cong A$.

۱۲.۲ حلقهٔ دلخواه R تحت عمل ضرب تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد. اگر R دارای عضو همانی ضربی ۱ باشد، به موجب ۳.۲ اعضایی از R که در R دارای وارون ضربی‌اند، تحت عمل ضرب تشکیل یک گروه می‌دهند؛ این گروه را گروه یکه‌های R می‌نامند و آن را با $R^\times$ نمایش می‌دهند. به خصوص به گروههای $\mathbf{Z}^\times < \mathbf{Q}^\times < \mathbf{R}^\times < \mathbf{C}^\times$ توجه خواهیم داشت.

برای هر میدان F، $F^\times$ گروه ضربیِ تمامیِ اعضای ناصفر F است، و آبلی است. این نکته را بدون اثبات متذکر می‌شویم که هرگاه F یک میدان متناهی دلخواه باشد، آنگاه برای عدد اولی چون p و عدد صحیح مثبتی مانند m، $|F| = p^m$، و $F^\times$ گروهی است دوری از مرتبهٔ $p^m - 1$. (هرشتاین [b۱۹] فصل ۷؛ ۱ §، یا لَنگ [b۲۸] فصل VII؛ ۵ § یا زاسنهاوس [b۴۱] صص ۱۰۴ـ۱۰۵ را ببینید. همچنین ۱۵.۹ (ii) را ملاحظه کنید.) توجه داشته باشید که $\mathbf{Z}^\times = \{1, -1\}$ و حال آنکه $\mathbf{Q}^\times$، $\mathbf{R}^\times$، $\mathbf{C}^\times$ نامتناهی‌اند.

۳۴. نشان دهید که هرگاه $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و $g \in G$، و n نیز یک عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری‌که $g^n = 1$، آنگاه $(g\varphi)^n = 1$. ازاین‌رو با درنظرگرفتن اعضایی چون z از $\mathbf{C}^\times$ که در رابطهٔ $z^3 = 1$ صدق می‌کنند، و یا به هر طریق دیگر، نشان دهید که $\mathbf{C}^\times$ نه با $\mathbf{Q}^\times$ یکریخت است و نه با $\mathbf{R}^\times$.

۳۵. ثابت کنید $\mathbf{Q}^\times$ با $\mathbf{R}^\times$ یکریخت نیست. (راهنمایی. خاطر نشان می‌کنیم که به‌ازای هر عدد حقیقی مثبتِ a و هر عدد صحیح مثبتِ n، یک عدد حقیقی مثبت یکتای b وجود دارد به‌طوری‌که $a = b^n$.)

۳۶. ثابت کنید میدانی چون F وجود ندارد که $F^+ \cong F^\times$. (راهنمایی. فرض کنید میدانی چون F و یک یکریختی مانند $\varphi : F^\times \to F^+$ وجود دارد و $(-1)\varphi$ را در نظر بگیرید.)

۳۷. فرض می‌کنیم F یک میدان باشد. عمل دوتایی $*$ را بر F با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$a * b = a + b - ab \qquad \text{به‌ازای هر } a, b \in F$$

ثابت کنید که مجموعهٔ تمام اعضای F متمایز از ۱، نسبت به عمل $*$ یک گروه F^* تشکیل می‌دهند و $F^* \cong F^\times$.

۱۳.۲ مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی مثبت، یک زیرگروه $\mathbf{R}^\times_{\text{pos}}$ از $\mathbf{R}^\times$ تشکیل می‌دهد. نگاشت

$$\log : \mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \to \mathbf{R}^+$$

که به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}^\times_{\text{pos}}$ با ضابطهٔ

$$\log : x \mapsto \log x$$

تعریف می‌شود یک یکریختی است. ($\log x$ نمایش لگاریتم طبیعی x است).
(وارون این یکریختی چیست؟) ازاین‌رو

$$\mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \cong \mathbf{R}^+.$$

نگاشت

$$|\ \ | : \mathbf{C}^\times \to \mathbf{R}^\times_{\text{pos}}$$

که به‌ازای هر $z \in \mathbf{C}^\times$ با ضابطهٔ

$$|\ \ | : z \mapsto |z|$$

($|z|$ معرف قدر مطلق z است) تعریف می‌شود، یک همریختی پوشا است (که گاهی یک برو‌ریختی نامیده می‌شود). این نگاشت یکریختی نیست، چراکه مثلاً $|1| = |-1|$. تحدید این همریختی به $\mathbf{R}^\times$ همریختی پوشای

$$|\ \ | : \mathbf{R}^\times \to \mathbf{R}^\times_{\text{pos}}$$

است که باز هم یک یکریختی نیست.

۱۴.۲ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، مجموعهٔ همهٔ ریشه‌های nام مختلط عدد ۱، یک زیرگروه C_n از $\mathbf{C}^\times$ تشکیل می‌دهد. C_n گروهی است متناهی از مرتبهٔ n، و دوری که به‌وسیلهٔ $e^{2\pi i/n}$ تولید می‌شود

$$C_n = \{1, e^{2\pi i/n}, e^{4\pi i/n}, \dots, e^{2(n-1)\pi i/n}\}.$$

به‌ویژه $C_2 = \{1, -1\} = \mathbf{Z}^\times$. همچنین یک همریختی پوشای

$$\nu_n : \mathbf{Z}^+ \to C_n$$

وجود دارد که به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}^+$ با ضابطهٔ

$$\nu_n : x \mapsto e^{2\pi x i/n}$$

تعریف می‌شود. C_n را گروه دوریِ مرتبهٔ n می‌نامیم، زیرا هر گروه دوریِ مرتبهٔ n با C_n یکریخت است (۲).

به‌ازای هر $z \in \mathbf{C}^\times \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$، زیرگروه دوری $\langle z \rangle$ از $\mathbf{C}^\times$ نامتناهی است.

گاهی یک گروه دوری نامتناهی را با C_∞ نمایش می‌دهیم، زیرا هر دو گروه دوری نامتناهی یکریخت‌اند (۲۹).

۳۸. مجموعهٔ همهٔ اعداد گویای مثبت، یک زیرگروه $\mathbf{Q}^\times_{\mathrm{pos}}$ از $\mathbf{Q}^\times$ تشکیل می‌دهد، و یک همریختی پوشا مانند

$$|\ \ | : \mathbf{Q}^\times \to \mathbf{Q}^\times_{\mathrm{pos}}$$

وجود دارد که یکریختی نیست.

آیا $\mathbf{Q}^\times_{\mathrm{pos}} \cong \mathbf{Q}^+$ (ر.ک. ۱۳.۲)؟

۳۹. به‌ازای هر عدد صحیح مثبتِ n، تنها همریختیِ $\varphi : C_n \to \mathbf{C}^+$ همریختی بدیهی است.

۴۰. فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد. در این صورت:

(i) $\mathbf{Z}_n^+ \cong C_n$

(ii) $\mathbf{Z}_n^\times$ گروهی است آبلی از مرتبهٔ $\varphi(n)$، که در آن φ تابع اویلر است. (۵ را ببینید.)

(iii) با درنظرگرفتن مرتبهٔ اعضای $\mathbf{Z}_n^\times$، قضیهٔ اویلر-فرما را ثابت کنید: یعنی اگر m عدد صحیحی متباین با n باشد

$m^{\varphi(n)} \equiv 1$ به پیمانهٔ n

(این قضیه تعمیمی از ۸ است).

۴۱. (i) فرض می‌کنیم G یک گروه و n عدد صحیح مثبتی باشد که به‌ازای هر $g \in G$، $g^n = 1$. نشان دهید که هرگاه $\varphi : G \to \mathbf{C}^\times$ یک همریختی باشد، آنگاه $\mathrm{Im}\,\varphi \leqslant C_n$. از این رو نشان دهید که $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times) \cong \mathrm{Hom}(G, C_n)$ (ر.ک. **۳۳**).

(ii) نتیجه بگیرید که هرگاه G یک گروه متناهی باشد، $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times)$ نیز گروهی متناهی است. (اشاره. هرگاه G یک گروه آبلی متناهی باشد، در واقع $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times) \cong G$، ولی هنوز وسیلهٔ اثبات این حکم را نداریم. **۴۵۴** را ببینید.)

۱۵.۲ هر فضای برداریِ V روی میدان F تحت عمل جمع یک گروه آبلی V^+ تشکیل می‌دهد: گروه جمعی V. به‌ازای هر $a \in F$، نگاشت

$$\lambda_a : V^+ \to V^+$$

که با ضابطهٔ

$\lambda_a : v \to av$ به‌ازای هر $v \in V^+$

تعریف می‌شود یک همریختی است. این همریختی یک یکریختی است اگر $a \neq 0$. هرگاه بعد V در F برابر ۱ باشد، $V^+ \cong F^+$.

۱۶.۲ فرض می‌کنیم V یک فضای برداری $\neq 0$ روی میدان F باشد. در این صورت مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای خطیِ V به توی خودش، نسبت به اعمال معمولی جمع و ضربِ نگاشتهای خطی یک حلقهٔ $\mathscr{L}(V)$ تشکیل می‌دهد. این حلقه دارای عضو همانی ضربی است، یعنی نگاشت خطی

$1 : v \mapsto v$ به‌ازای هر $v \in V$

گروه یکه‌های $\mathscr{L}(V)$ (چنان‌که در ۱۲.۲ تعریف شد) متشکل از تمام نگاشتهای خطی وارون‌پذیر (یعنی ناتکین) از V به توی خودش است. این گروه را گروه خطی کلی V می‌نامیم و با $\mathrm{GL}(V)$ نمایش می‌دهیم.

فرض می‌کنیم F میدانی است متناهی با، مثلاً $|F| = p^m = q$، و بعد V روی F عدد متناهی n است. در این صورت $|V| = q^n$. فرض می‌کنیم بردارهای $v_1, \cdots, v_n$ یک پایه از V را تشکیل دهند. در این صورت نگاشت خطی $\theta : V \to V$ به‌وسیلهٔ اثرش بر $v_1, \cdots, v_n$ مشخص می‌شود و θ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $v_1\theta, \cdots, v_n\theta$ یک پایه از V را تشکیل دهند. علاوه‌براین به‌ازای هر پایهٔ $w_1, \cdots, w_n$ از V یک نگاشت خطی یکتای $\theta : V \to V$ وجود دارد که به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $v_i\theta = w_i$. بنابراین

$|\mathrm{GL}(V)| =$ تعداد پایه‌های مرتب V

برای ساختن پایه‌ای چون $w_1, \cdots, w_n$ برای V، می‌توانیم ابتدا w_1 را بردار ناصفر دلخواهی از V انتخاب کنیم، سپس w_2 را هر بردار دیگر به غیر از یک مضرب عددی w_1، و w_3 را نیز هر بردار به غیر از ترکیبهای خطی w_1 و w_2، و به‌همین‌ترتیب الی آخر. لذا

$$|\mathrm{GL}(V)| = (q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2)\cdots(q^n - q^{n-1})$$

۱۷.۲ فرض می‌کنیم F میدانی دلخواه باشد و n عدد صحیح مثبتی دلخواه. در این صورت مجموعهٔ تمام ماتریسهای وارون‌پذیر (یعنی ناتکین) $n \times n$ با درایه‌هایی در F نسبت به ضرب ماتریسها تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را گروه خطی کلی درجهٔ n روی F می‌نامند و با $\mathrm{GL}_n(F)$ نمایش می‌دهند.

هرگاه V یک فضای برداری n بعدی روی F باشد، آنگاه $\mathrm{GL}(V) \cong \mathrm{GL}_n(F)$. برای اثبات این حکم کافی است، یک پایه از V را انتخاب کنیم و سپس هر نگاشت خطی وارون‌پذیر از V به توی خودش را بر ماتریس نمایشگر آن نگاشت خطی وارون‌پذیر، نسبت به پایهٔ انتخاب شده، بنگاریم.

همریختی پوشایی مانند

$$\det : \mathrm{GL}_n(F) \mapsto F^\times$$

که به‌ازای هر $x \in \mathrm{GL}_n(F)$ با ضابطهٔ $\det : x \mapsto \det x$ تعریف می‌شود، وجود دارد ($\det x$ معرف دترمینان x است). خاطر نشان می‌کنیم که این همریختی یک یکریختی است اگر و تنها اگر $n = ۱$، به‌ویژه $\mathrm{GL}_۱(F) \cong F^\times$.

۴۲. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد به طوری که به‌ازای هر $g \in G$، $g^۲ = ۱$. نشان دهید که به‌ازای یک فضای برداری متناهی‌بعد V روی میدان $\mathbf{Z}_۲$، $G \cong V^+$. نتیجه بگیرید که برای عدد صحیحی چون $m \geqslant ۰$، $|G| = ۲^m$. (راهنمایی. بنابر ۳، G آبلی است. فرض کنید V متشکل از همان اعضای G باشد، و حاصل‌جمع دو عضو V را با حاصلضربشان در G یکی بینگارید و نیز ضرب اسکالر را ضرب معمولی تعریف کنید.)

۴۳. فرض کنید F یک میدان و m و n اعداد صحیح مثبتی باشند که $m \leqslant n$. در این صورت

(i) $\mathrm{GL}_m(F)$ را می‌توان در $\mathrm{GL}_n(F)$ نشانید.

(ii) $\mathrm{GL}_n(F)$ به‌ازای هر $n \geqslant ۲$، ناآبلی است.

۴۴. $\mathrm{GL}_۲(\mathbf{Z}_۲) \cong \Sigma_۳$.

۴۵. فرض می‌کنیم G مجموعهٔ تمام ماتریسهایی به شکل

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{pmatrix}$$

باشد، که در آن a، b، c اعدادی حقیقی‌اند به‌طوری‌که $ac \neq ۰$. ثابت کنید که G زیرگروهی است از $\mathrm{GL}_۲(\mathbf{R})$، و مجموعهٔ H متشکل از تمام اعضای G که برای آنها $a = c = ۱$، یک زیرگروه از G یکریخت با $\mathbf{R}^+$ تشکیل می‌دهد.

همهٔ اعضای مرتبهٔ ۲ در G را بیابید. ازاین‌رو نشان دهید که حاصلضرب دو عضو مرتبهٔ ۲ در G می‌تواند عضوی از مرتبهٔ نامتناهی باشد.

مثال بعدی ما به هر گروه G گروه دیگر $\mathrm{Aut}\, G$ را وابسته می‌سازد که نقش مهمی در فصول آتی دارد.

۱۸.۲ مجموعهٔ همهٔ همریختیهای گروه G به توی خودش (که گاهی درونریختیهای G نیز نامیده می‌شوند) نسبت به ترکیب نگاشتها تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهد (بنابر ۱۹): این نیم‌گروه، زیر نیم‌گروهی از M_G است (۴.۲ را ببینید). این نیم‌گروه یک عضو همانی دارد، که همریختی زیر است

$$۱ : g \mapsto g \qquad \text{به‌ازای هر } g \in G$$

علاوه بر این یکه‌های این نیم‌گروه دقیقاً یکریختیهای G بر روی G هستند. این یکه‌ها را خودریختیهای G می‌نامند. بنابر ۳.۲ مجموعهٔ همهٔ خودریختیهای G نسبت به ترکیب نگاشتها تشکیل یک گروه می‌دهد: این گروه با $\mathrm{Aut}\, G$ نمایش داده می‌شود. توجه داشته باشید که $\mathrm{Aut}\, G \leqslant \Sigma_G$.

۱۹.۲ به هر $g \in G$ یک خودریختی τ_g از G وابسته خواهد شد، که به صورت زیر تعریف می‌شود: به‌ازای هر $x \in G$

$$\tau_g : x \mapsto g^{-۱}xg$$

عضو $x\tau_g = g^{-۱}xg$ مزدوج x بر اثر g نامیده می‌شود. محققاً τ_g نگاشتی خوشتعریف از G به توی خودش است؛ و اگر $g, g_۱, g_۲, x, x_۱, x_۲ \in G$، آنگاه

$$(x_۱x_۲)\tau_g = g^{-۱}x_۱x_۲g = g^{-۱}x_۱gg^{-۱}x_۲g = (x_۱\tau_g)(x_۲\tau_g),$$

و درنتیجه τ_g یک همریختی است. به علاوه

$$x\tau_{g_۱g_۲} = (g_۱g_۲)^{-۱}xg_۱g_۲ = g_۲^{-۱}g_۱^{-۱}xg_۱g_۲ = x\tau_{g_۱}\tau_{g_۲},$$

و لذا

$$\tau_{g_۱g_۲} = \tau_{g_۱}\tau_{g_۲}. \qquad \text{(i)}$$

به‌ویژه چون $\tau_۱ = ۱$،

$$\tau_g\tau_{g^{-۱}} = ۱ = \tau_{g^{-۱}}\tau_g.$$

بنابراین τ_g وارون‌پذیر است: لذا $\tau_g \in \text{Aut } G$. خودریختی τ_g از G را خودریختی داخلی القاشده بر اثر G (یا مزدوجی G بر اثر g) می‌نامند. همچنین خودریختی از G را که داخلی نباشد، خودریختی خارجی G می‌نامند.

بنابر ۹.۲ و ۱۰.۲، τ_g هر زیرگروه K از G را به یک زیرگروه $K\tau_g$ از $\text{Im }\tau_g = G$ می‌نگارد که برای آن

$$K \cong K\tau_g = \{g^{-۱}kg : k \in K\}.$$

ما $K\tau_g$ را مزدوج K بر اثر g می‌نامیم و با $g^{-۱}Kg$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم

۲۰.۲ به‌ازای هر $K \leqslant G$ و هر $g \in G$، $g^{-۱}Kg$ زیرگروهی است از G یکریخت با K.

۲۱.۲ نگاشت

$$\tau : G \to \Sigma_G,$$

که به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$\tau : g \mapsto \tau_g$$

تعریف می‌شود یک همریختی است. این همریختی با تساوی (i) از ۱۹.۲ نشان داده می‌شود. علاوه بر این $\text{Im }\tau = \{\tau_g : g \in G\} \leqslant \text{Aut } G$. ما $\text{Im }\tau$ را با $\text{Inn } G$ نمایش می‌دهیم: که گروه تمام خودریختیهای داخلی G است. لذا

$$\text{Inn } G \leqslant \text{Aut } G \leqslant \Sigma_G.$$

می‌پرسیم چه موقع τ همریختی بدیهی است، یعنی چه وقت $\text{Inn } G = ۱$؟ داریم

$\tau_g = ۱$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in G$، $g^{-۱}xg = x$

یعنی اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x \in G$، $xg = gx$. ازاین‌رو به‌ازای هر $g \in G$، $\tau_g = ۱$ اگر و تنها اگر هر دو عضو x و g از G جابه‌جایی‌پذیر باشند. بنابراین داریم

۲۲.۲ $\text{Inn } G = ۱$ اگر و تنها اگر G آبلی باشد.

۴۶*. (i) هرگاه R یک حلقه باشد با همانی ضربی ۱، آنگاه $R^\times$ را می‌توان در $\text{Aut } R^+$ نشاند. (راهنمایی. ۱۱.۲ را ببینید.)

(ii) $\text{Aut } \mathbf{Z}^+ \cong \mathbf{Z}^\times$ و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $\text{Aut } \mathbf{Z}_n^+ \cong \mathbf{Z}_n^\times$.

۴۷*. فرض کنید که V یک فضای برداری $\neq ۰$ روی میدان F باشد. در این صورت

(i) $\text{GL}(V) \leqslant \text{Aut } V^+$. (۱۵.۲ و ۱۶.۲ را ببینید.)

(ii) هرگاه $F = \mathbf{Z}_p$ و بعد V روی $\mathbf{Z}_p$ برابر عدد متناهی n باشد، آنگاه

$$\text{Aut } V^+ \cong \text{GL}_n(\mathbf{Z}_p).$$

۴۸*. هرگاه $G_۱ \cong G_۲$ آنگاه $\text{Aut } G_۱ \cong \text{Aut } G_۲$ و $\text{Inn } G_۱ \cong \text{Inn } G_۲$.

۴۹*. رابطهٔ $\sim$ را روی G به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$x \sim y$ اگر و تنها اگر به‌ازای $g \in G$ای $g^{-۱}xg = y$

نشان دهید که رابطهٔ تزویج $\sim$، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی G است. (این نکته در زمینه‌ای کلی در فصل ۴ آمده است.)

۵۰. هرگاه $\alpha \in \text{Aut } G$ و $x \in G$، آنگاه

$$o(x^\alpha) = o(x).$$

به‌ویژه اعضای مزدوج یک گروه دارای یک مرتبه‌اند.

۵۱. یک گروه G با یک زیرگروه K و عضوی مانند g بیابید به‌طوری‌که $g^{-۱}Kg \neq K$.

۵۲. (i) نگاشتی که به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ $g \mapsto g^{-۱}$ تعریف می‌شود یک خودریختی G است اگر و تنها اگر G آبلی باشد.

(ii) هرگاه G گروه دلخواهی باشد که به‌ازای یک $g \in G$، $g^۲ \neq ۱$ آنگاه $\text{Aut } G \neq ۱$.

(اشاره. در واقع $\text{Aut } G \neq ۱$ اگر و تنها اگر $|G| > ۲$. اثبات با ملاحظهٔ زیر تمام می‌شود اگر به‌ازای هر $g \in G$، داشته باشیم $g^۲ = ۱$، آنگاه بنابر ۳، G آبلی خواهد بود، لذا G ساختار یک فضای برداری V روی $\mathbf{Z}_۲$ را خواهد داشت، و هر نگاشت خطی وارون‌پذیر $V \to V$ یک خودریختی G است. برای حالت متناهی ۴۲ را ببینید.)

۵۳. (i) فرض کنید $\alpha \in \text{Aut } G$ و

$$H = \{g \in G : g^\alpha = g\}.$$

ثابت کنید که H زیرگروه G است: H را زیرگروه نقطهٔ ثابت G تحت α می‌نامند.

(ii) فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و F یک میدان. برای هر $n \times n$ ماتریس y با درایه‌هایی در F، y' را ترانهادهٔ y می‌گیریم. نشان دهید که نگاشت

$$*: \mathrm{GL}_n(F) \to \mathrm{GL}_n(F)$$

که به‌ازای هر $x \in \mathrm{GL}_n(F)$ با ضابطهٔ

$$*: x \mapsto (x^{-1})'$$

تعریف می‌شود، یک خودریختی از $\mathrm{GL}_n(F)$ است و زیرگروه نقطهٔ ثابت متناظر با آن متشکل از تمام ماتریسهای $n \times n$ متعامد است با درایه‌هایی در F (یعنی ماتریسهای y به‌طوری که $y'y = 1$).

ثابت کنید (با فرض عکس آن و درنظرگرفتن دترمینانها) که $*$ خودریختی خارجی $\mathrm{GL}_n(F)$ است اگر $F \neq \mathbf{Z}_2$ و $F \neq \mathbf{Z}_3$. (اشاره. در واقع $*$ خودریختی خارجی $\mathrm{GL}_n(F)$ است مگر اینکه یا $F = \mathbf{Z}_2$ و $n \leqslant 2$ و یا $F = \mathbf{Z}_3$ و $n = 1$.)

۵۴. فرض می‌کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$. در این صورت α بی‌نقطهٔ ثابت خوانده می‌شود اگر زیرگروه نقطهٔ ثابت G تحت α بدیهی باشد (۵۳ را ببینید.)؛ یعنی هرگاه $1 \neq g \in G$ آنگاه، $g^\alpha \neq g$.

(اشاره. اصطلاح 'بی‌نقطهٔ ثابت' اصطلاحی رایج است. شاید تا حدی استفادهٔ نادرست از زبان باشد، زیرا طبیعی است که هر خودریختی یک گروه، عضو همانی را ثابت نگه می‌دارد. وقتی می‌گوییم یک خودریختی بی‌نقطهٔ ثابت است، منظور این است که آن خودریختی هیچ نقطه‌ای از گروه را به جز عضو همانی، ثابت نگه نمی‌دارد.)

(i) فرض می‌کنیم α یک خودریختی بی‌نقطهٔ ثابت از یک گروه متناهی G باشد. نشان دهید که

$$\{g^\alpha g^{-1} : g \in G\} = G.$$

نتیجه بگیرید که هرگاه $o(\alpha) = 2$ آنگاه به‌ازای هر $x \in G$،

$$x^\alpha = x^{-1},$$

و همچنین G آبلی فرد مرتبهٔ بزرگتر از ۱ است.

(ii) فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی فرد مرتبهٔ بزرگتر از ۱ باشد. در این صورت نگاشت

$$\alpha : x \mapsto x^{-1},$$

که به‌ازای هر $x \in G$ تعریف می‌شود، یک خودریختی بی‌نقطهٔ ثابتِ G از مرتبهٔ ۲ است.

(راهنمایی. در مورد (i) نشان دهید که نگاشت از G به توی خودش که به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$g \mapsto g^\alpha g^{-1}$$

تعریف می‌شود یک به یک است. سپس ۵۲ (i) و ۱۳.۱ را به کار ببرید.)

اکنون چند مثال از گروههایی را متذکر می‌شویم که در متون هندسی ظاهر می‌شوند.

۲۳.۲ فرض می‌کنیم X یک فضای متری با تابع فاصله $d : X \times X \to \mathbf{R}$ باشد. در این صورت نگاشت دوسویی $\varphi : X \to X$ حافظ‌ـساختار است، اگر به‌ازای هر $x, y \in X$

$$d(x\varphi, y\varphi) = d(x, y).$$

چنین نگاشت φ را یک طولپایی از X می‌نامیم. به سادگی تحقیق می‌شود که مجموعهٔ همهٔ طولپاییهای X یک زیرگروه $\mathrm{Isom}\, X$ از Σ_X تشکیل می‌دهد.

به‌علاوه اگر $\varnothing \subset Y \subseteq X$، آنگاه Y یک زیرفضای X است: یعنی Y نسبت به تحدید d به $Y \times Y$ یک فضای متری است. به‌ازای هر $\varphi \in \mathrm{Isom}\, X$ فرض می‌کنیم

$$Y\varphi = \{y\varphi : y \in Y\} \subseteq X.$$

سپس قرار می‌دهیم

$$S_X(Y) = \{\varphi \in \mathrm{Isom}\, Y : Y\varphi = Y\}.$$

یک تحقیق ساده نشان می‌دهد که

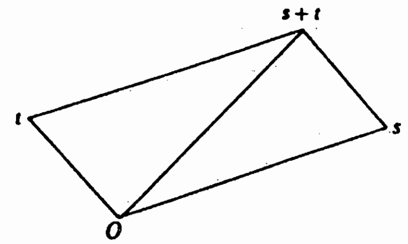
$$S_X(Y) \leqslant \mathrm{Isom}\, X.$$

ما $S_X(Y)$ را گروه تقارن Y (نسبت به فضای متری X) می‌نامیم.

به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم $X = E^2$، که در آن E^2 صفحهٔ اقلیدسی است، با تابع فاصلهٔ معمولی. چند نکته در مورد $\mathrm{Isom}\, E^2$ را بدون اثبات بیان می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر، کاکستر [b5] فصل ۳ را ببینید. (نکات متناظر مربوط به گروه طولپاییهای خط اقلیدسی E^1 را می‌توان

بلافاصله از روی تعریف نتیجه گرفت، و این نکات در ۵۶ ارائه شده‌اند.) مطلب را با ذکر چند طولپایی خاص E^2 شروع می‌کنیم

(i) اگر $\varphi : E^2 \to E^2$ نگاشتی باشد که هر نقطهٔ E^2 را به فاصلهٔ ثابت در جهتی ثابت تغییر مکان دهد، φ را یک انتقال E^2 می‌نامیم. هر انتقال یک طولپایی است. برای توصیف انتقالها با عبارتهای مختصاتی، یک نقطهٔ دلخواه E^2 را به‌عنوان مبدأ انتخاب می‌کنیم و آن را با $\mathbf{O}$ نمایش می‌دهیم. به هر نقطهٔ $s \in E^2$، پاره‌خط راست $\mathbf{Os}$ از $\mathbf{O}$ به s را مربوط می‌سازیم. مجموعهٔ متشکل از تمام چنین پاره‌خطهای راستی، به طریقی آشنا یک فضای برداری V از بعد ۲ روی $\mathbf{R}$ تشکیل می‌دهد: جمع بردارها با قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع تعریف می‌شود.



حال به‌ازای هر $s, t \in E^2$، برای نقطهٔ یکتای E^2 که با بردار $\mathbf{Os} + \mathbf{Ot}$ متناظر است خواهیم نوشت $s + t$. در این صورت یک انتقال از E^2 دقیقاً عبارت است از نگاشت

$$\tau_a : s \mapsto s + a \text{ ، } \quad \text{به‌ازای هر } s \in E^2$$

که در آن a یک عضو E^2 است. مجموعهٔ

$$\mathrm{Tr}\, E^2 = \{\tau_a : a \in E^2\}$$

متشکل از تمام انتقالها، یک زیرگروه آبلی از $\mathrm{Isom}\, E^2$ است و، در واقع، به‌وسیلهٔ نگاشتی با ضابطهٔ

$$\mathbf{Os} \mapsto \tau_s$$

به‌ازای هر $s \in E^2$ تعریف می‌شود، واضح است که

$$V^+ \cong \mathrm{Tr}\, E^2.$$

اگر یک دستگاه‌مختصات دکارتی برای E^2 با مبدأ ثابت $\mathbf{O}$ بگیریم و هر نقطهٔ s از E^2 را با زوج مرتب (x, y) از مختصاتش در این دستگاه (که در آن $x, y \in \mathbf{R}$) یکی بگیریم، یک انتقال دقیقاً نگاشتی خواهد بود به شکل

$$(x, y) \mapsto (x + b, y + c),$$

که در آن b و c اعدادی حقیقی و برای هر x, y ثابت‌اند.

(ii) نگاشت $\varphi : E^2 \to E^2$ را یک قرینه‌یابی محوری از E^2 می‌نامیم، اگر خطی چون l در E^2 وجود داشته باشد به‌طوری‌که φ هر نقطهٔ E^2 را به قرینه‌اش نسبت به l ببرد. اگر l محور xهای دستگاه مختصات دکارتی انتخاب شده باشد، قرینه‌یابی آن نسبت به l عبارت است از نگاشت

$$\varepsilon : (x, y) \mapsto (x, -y) \quad \text{به‌ازای هر } x, y \in \mathbf{R}$$

بنابراین ε یک طولپایی از E^2 است و $\varepsilon^2 = 1$.

(iii) فرض می‌کنیم s نقطهٔ دلخواهی از E^2 باشد و E^2 را به صورت نمودار آرگان با s به‌عنوان صفر در نظر می‌گیریم: یعنی نقاط E^2 را به طریق معمولی با اعداد مختلط نمایش می‌دهیم که در آن s با ۰ نمایش داده شده است. در این صورت هر نقطه در شکل قطبی با یک عبارت $re^{i\theta}$ نمایش داده می‌شود، که در آن $r, \theta \in \mathbf{R}$ و $r \geqslant 0$. دوران E^2 حول s نگاشتی است مانند

$$\rho_\alpha : re^{i\theta} \mapsto re^{i(\theta+\alpha)}$$

به‌ازای $\alpha \in \mathbf{R}$. در این صورت ρ_α یک طولپایی از E^2 است. از آنجا که $e^{i\alpha} = 1$ اگر و تنها اگر α مضرب صحیح 2π باشد، هر دوران حول s به طور یکتا به صورت ρ_α قابل بیان است، که $0 \leqslant \alpha < 2\pi$؛ α زاویهٔ دوران است. مجموعهٔ

$$\mathrm{Rot}(E^2; s) = \{\rho_\alpha : 0 \leqslant \alpha < 2\pi\}$$

از تمامی دورانها حول s، یک زیرگروه آبلی از $\mathrm{Isom}\, E^2$ است. توجه داشته باشید که به‌ازای هر نقطهٔ $s \in E^2$، یک چنین زیرگروهی از $\mathrm{Isom}\, E^2$ وجود خواهد داشت.

اکنون ساختار $\mathrm{Isom}\, E^2$ را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم. قرار می‌دهیم $G = \mathrm{Isom}\, E^2$ و H را مجموعهٔ تمام انتقالها و دورانهای E^2 می‌گیریم: یعنی

$$H = \mathrm{Tr}\, E^2 \cup \bigcup_{s \in E^2} \mathrm{Rot}(E^2; s).$$

در این صورت H زیرگروهی است از شاخص ۲ در G، و اگر ε انعکاس دلخواهی از E^2 باشد، آنگاه

$$G = H \cup H\varepsilon = H \cup \varepsilon H.$$

محاسبهٔ حاصلضرب اعضای G از روی این تعاریف ساده است.

۲۴.۲ به‌عنوان گروههای تقارن خاص، به مثالهای مهم زیر اشاره می‌کنیم. فرض می‌کنیم n عدد صحیح دلخواهی باشد با $n \geqslant 3$ و P_n را نمایش یک چندضلعی منتظم در E^2 با n یال می‌گیریم. گروه تقارن $S_{E^2}(P_n)$ را در نظر می‌گیریم و مثلاً قرار می‌دهیم

$$L = S_{E^2}(P_n).$$

اعضای L دقیقاً عبارت‌اند از n دوران حول مرکز چندضلعی به زوایای ۰، $2\pi/n$، $4\pi/n$، ...، $2(n-1)\pi/n$، به انضمام n قرینه‌یابی نسبت به خطوط واصل بین رئوس مقابل P_n، و (اگر n زوج باشد) خطوط واصل بین وسطهای اضلاع مقابل P_n، و در صورتی که (n فرد باشد) خطوط واصل از هر رأس به وسط ضلع مقابل P_n. بنابراین

$$|L| = 2n.$$

فرض می‌کنیم ρ معرف دوران در حول مرکز P_n به زاویهٔ $2\pi/n$ باشد و ε هر یک از n قرینه‌یابی نسبت به L. در این صورت می‌توان ثابت کرد که

$$\rho^n = 1 = \varepsilon^2 \quad \text{و} \quad \varepsilon\rho = \rho^{-1}\varepsilon,$$

و $2n$ عضو متمایز L عبارت‌اند از

$$1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \rho^2\varepsilon, \dots, \rho^{n-1}\varepsilon.$$

گروه L را گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$ می‌نامیم و با D_{2n} نمایش می‌دهیم. (این نمادگذاری مشخص به این دلیل اختیار شده است که نوع D_{2n} از اندازهٔ چندضلعی و موقعیتش در صفحه مستقل است: فقط به تعداد ضلعها، یعنی n بستگی دارد. برخی از مؤلفان، D_n یا قرارداد دیگری را به‌کار می‌برند درحالی‌که ما همواره از D_{2n} استفاده می‌کنیم.) توجه داشته باشید که $\rho \neq \rho^{-1}$، و در نتیجه D_{2n} یک گروه ناآبلی است.

۵۵. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. c را عدد حقیقی مثبتی فرض می‌کنیم و به‌ازای هر $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{هرگاه } x = y \\ c & \text{هرگاه } x \neq y \end{cases}$$

نشان دهید که d یک تابع فاصله برای X است، و برای این فضای متری

$$\operatorname{Isom} X = \Sigma_X.$$

۵۶. $\mathbf{R}$ را خط اقلیدسی E^1 با تابع فاصلهٔ معمولی در نظر می‌گیریم (یعنی به‌ازای هر $x, y \in \mathbf{R}$، $d(x,y) = |x-y|$).

(i) به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}$، نگاشت

$$\tau_a : x \mapsto x + a \qquad \text{به‌ازای هر } x \in \mathbf{R}$$

یک طولپایی از $\mathbf{R}$ است، که یک انتقال نامیده می‌شود، و

$$\mathbf{R}^+ \cong T = \{\tau_a : a \in \mathbf{R}\} \leqslant \operatorname{Isom} \mathbf{R}.$$

(ii) به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}$، نگاشت

$$\varepsilon_a : x \mapsto a - x \qquad \text{به‌ازای هر } x \in \mathbf{R}$$

یک طولپایی از $\mathbf{R}$ است، که قرینه‌یابی نامیده می‌شود و

$$\varepsilon_a^2 = 1 (= \tau_0) \text{ و } \varepsilon_a \tau_b = \tau_{-b} \varepsilon_a \qquad \text{به‌ازای هر } a, b \in \mathbf{R}$$

(iii) هر طولپایی از $\mathbf{R}$ یا یک انتقال است و یا یک قرینه‌یابی.

(iv) $\operatorname{Isom} \mathbf{R}$ یک گروه ناآبلی است و T یک زیرگروه آبلی از شاخص ۲ است.

۵۷. فرض می‌کنیم نمادگذاری مانند ۵۶ باشد. نشان دهید که به‌ازای هر $n \in \mathbf{Z}$،

$$\tau_1^n = \tau_n,$$

و اعضای گروه تقارن $S_{\mathbf{R}}(\mathbf{Z})$ دقیقاً طولپاییهای

$$\tau_1^n \quad \text{به‌ازای هر } n \in \mathbf{Z} \quad \text{و} \quad \tau_1^n \varepsilon_0 \quad \text{به‌ازای هر } n \in \mathbf{Z}.$$

هستند. باید توجه داشت که $\varepsilon_{\cdot}^{2} = 1$ و $\varepsilon_{\cdot}\tau_1 = \tau_1^{-1}\varepsilon_{\cdot}$. گروه $S_{\mathbf{R}}(\mathbf{Z})$ را گروه دووجهی نامتناهی، می‌نامند و با D_∞ نشان می‌دهند.

۵۸. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 3$. در این صورت D_{2n} را می‌توان در Σ_n نشانید. علاوه بر این $D_6 \cong \Sigma_3$، ولی هنگامی که $n > 3$، $D_{2n} \ncong \Sigma_n$. (می‌توان چنین فرض کرد که یک طولپایی از E^2 به‌طور یکتا با اثرش برهر سه نقطهٔ ناهمخط مشخص می‌شود.)

۵۹. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 3$، و $L = D_{2n}$. قرار می‌دهیم $J = \langle \rho \rangle$، که در آن ρ مانند ۲۴.۲ تعریف می‌شود. نشان دهید که هر عضو $L\backslash J$ از مرتبهٔ ۲ است. نتیجه بگیرید که J تنها زیرگروه دوری L از مرتبهٔ n است.

۶۰. هر گروه از مرتبهٔ ۶ یا با C_6 یکریخت است یا با D_6. ازاین‌رو با نمادگذاری فصل ۱، $\nu(6) = 2$. (راهنمایی. G را یک گروه نادوری از مرتبهٔ ۶ بگیرید. بنابر ۴۲، G دارای یک عضو x از مرتبهٔ ۳ است. فرض می‌کنیم y یک عضو G غیر از ۱، x، x^2 باشد. در این صورت $G = \{1, x, x^2, y, xy, x^2y\}$، $y^2 = 1$ و $yx = x^2y$.)

۶۱. (i) به‌ازای هر دو نقطهٔ t, s از E^2، انتقال یکتایی چون τ_a از E^2 وجود دارد که s را بر t می‌نگارد.

(ii) به‌ازای هر دو نقطهٔ t, s از E^2، هرگاه τ_a انتقال یکتایی از E^2 باشد که s را به t می‌برد، آنگاه

$$\tau_a^{-1}\mathrm{Rot}(E^2; s)\tau_a = \mathrm{Rot}(E^2; t)\cdot$$

لذا هر دو گروه از انتقالها، زیرگروههای مزدوج $\mathrm{Isom}\, E^2$ خواهند بود.

۶۲. به‌ازای هر مجموعهٔ ناتهی X، و هر نگاشت $\varphi : X \to X$، و هر $Y \subseteq X$، گیریم

$$Y\varphi = \{y\varphi : y \in Y\} \subseteq X\cdot$$

تحقیق کنید که نظیرهای ذیل از گروههای تقارن که در ۲۳.۲ معرفی شده‌اند، زیرگروههای گروههای مربوط هستند، همان‌گونه که گفته شده است.

(i) X را مجموعه‌ای ناتهی و Y را زیرمجموعه‌ای ناتهی از X می‌گیریم. در این صورت

$$S_X(Y) = \{\varphi \in \Sigma_X : Y\varphi = Y\} \leqslant \Sigma_X\cdot$$

(ii) فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی یک میدان F باشد و Y زیرمجموعه‌ای ناتهی از V. در این صورت

$$S_V(Y) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) : Y\varphi = Y\} \leqslant \mathrm{GL}(V)\cdot$$

(iii) G را گروهی دلخواه و Y را زیرمجموعه‌ای ناتهی از G می‌گیریم. در این صورت

$$S_G(Y) = \{\varphi \in \mathrm{Aut}\, G : Y\varphi = Y\} \leqslant \mathrm{Aut}\, G\cdot$$

۲۵.۲ اِ. آرتین [b۲] چنین بیان می‌کند 'در ریاضیات جدید بررسی تقارنهای یک ساختار ریاضی مفروض همواره جالبترین نتایج را به دست می‌دهد. تقارنها نگاشتهایی هستند که ویژگیهای معینی را حفظ می‌کنند.' بیان اخیر جواب این پرسش است که چرا گروهها نقش اساسی در ریاضیات امروزی دارند. تقارنهای یک ساختار، جایگشتهایی از مجموعهٔ زیربنایی Xاند، که حافظ ساختار هستند؛ و مجموعهٔ همهٔ چنین تقارنهایی، یک زیرگروه از Σ_X تشکیل می‌دهد. می‌توانیم گروهی را که بدین‌طریق به این ساختار وابسته می‌شود، نوعی اندازهٔ 'نظم' این ساختار در نظر بگیریم.

نمونه‌های متعددی از این مفهوم را در مثالهای قبل داشتیم. برای یک مجموعهٔ ناتهیِ X که هیچ ساختار مشخص دیگری ندارد، تقارنهای X دقیقاً جایگشتهای Xاند و گروه متناظرش خود Σ_X است. در مورد یک فضای برداری V، تقارنهای V نگاشتهای خطی وارون‌پذیر $V \to V$ هستند و گروه متناظرش $\mathrm{GL}(V)$ است. برای یک گروه G، تقارنهای G خودریختیهای Gاند و گروه متناظرش $\mathrm{Aut}\ G$ است. برای فضای متری X نیز تقارنهای X طولپاییهای X اند و گروه متناظرش $\mathrm{Isom}\ X$ است.

باز اگر X مجموعه‌ای با ساختار مشخص و Y زیرمجموعه‌ای از X باشد، گروه تقارن نسبی متناظری چون $S_X(Y)$ از Y نسبت به X وجود دارد: مانند مثالهای موجود در ۲۳.۲ و ۶۲.

این مفهوم از یک گروه به‌عنوان اندازهٔ تقارن یک ساختار ریاضی از اهمیت بنیادی برخوردار است. برای یافتن مثالهای دیگر، می‌توانیم منابع نظریهٔ گروه و در واقع جبر مجرد را مورد بررسی قرار دهیم، همین مفهوم درکنهِ نظریهٔ معادلات گالوا قرار دارد. برای اطلاعاتی در ارتباط با این موضوع به آرتین [b۱]، هرشتاین [b۱۹] فصل ۵، ۶ §، کاپلانسکی [b۲۵] قسمت I، لَنگ [b۲۸] فصل VII یا روتمن [b۳۴] صص ۹۶ـ۱۰۳ مراجعه کنید.

۶۳. فرض می‌کنیم $X = E^2$، صفحهٔ اقلیدسی باشد.

(i) فرض کنید $s \in X$، $J = S_X(s)$ و $K = \mathrm{Rot}(X; s)$.

در این صورت $K \leqslant J$، $|J : K| = 2$ و $J\backslash K$ متشکل از تمام قرینه‌یابیهای X نسبت به خطوط گذرنده بر s است.

(ii) فرض می‌کنیم $s, t \in X$ با $s \neq t$. در این صورت $|S_X(\{s,t\})| = 4$.

(iii) فرض می‌کنیم l خط دلخواهی در X باشد و $L = S_X(l)$، همچنین M متشکل از تمام انتقالهای X باشد که به L تعلق دارند. در این صورت $M \leqslant L$، $|L : M| = ۴$ و $M \cong \mathbf{R}^+$.

۶۴. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، F یک میدان، و V یک فضای برداری از بعد n روی F. هرگاه B یک پایه برای V باشد، آنگاه $S_V(B) \cong \Sigma_n$. ازاین‌رو Σ_n را می‌توان در $\mathrm{GL}_n(F)$ نشانید.

۶۵. X را یک مجموعه می‌گیریم با $|X| \geqslant ۲$، و فرض می‌کنیم $x \in X$ و $Y = X\backslash\{x\}$. در این صورت

$$S_X(x) \cong \Sigma_Y.$$

به یک گروه G، غالباً گروههای دیگر چندی از انواع مختلف وابسته‌اند: به‌عنوان مثال، G مجموعه‌ای از گروهها را به‌عنوان زیرگروههایش مشخص می‌سازد (اگرچه یافتن زیرگروههای G اغلب به‌طور ضمنی عملی نیست). قضیهٔ زیر بلافاصله از تعریف یک زیرگروه به‌دست می‌آید.

۲۶.۲ هرگاه $H \leqslant G$ و $K \leqslant G$ آنگاه $H \cap K \leqslant G$. به‌طورکلی هرگاه $\{H_i : i \in I\}$ مجموعهٔ دلخواهی از زیرگروههای G باشد (که با مجموعهٔ I اندیس‌گذاری شده است) آنگاه $\bigcap_{i\in I} H_i \leqslant G$.

۶۶*. هرگاه $H \leqslant G$ و $K \leqslant G$، با $|G : H| < \infty$ و $|G : K| < \infty$، آنگاه $|G : H\cap K| < \infty$.
(این مسأله اغلب قضیهٔ پوانکاره نامیده می‌شود. راهنمایی. از ۱۱ استفاده کنید.)

۶۷. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) هر دو زیرگروه متمایز G از مرتبهٔ p، در ۱ اشتراک دارند.

(ii) تعداد کل اعضای مرتبهٔ p در G، مضربی است از $p - ۱$.

توجه داشته باشید که اشتراک زیرگروهها همواره ناتهی است، چرا که ۱ به هر زیرگروه تعلق دارد. البته اشتراک زیرگروههای نابدیهی ممکن است بدیهی باشد.

اکنون اگر X زیرمجموعه‌ای از G باشد، مطمئناً، حداقل یک زیرگروه از G وجود دارد که X را شامل است، یعنی خود G. بنابراین اشتراک تمام زیرگروههای G که شامل X هستند، زیرگروهی خوشتعریف از G است.

۲۷.۲ تعریف فرض می‌کنیم $X \subseteq G$. در این صورت اشتراک همهٔ زیرگروههای G شامل X را زیرگروه G تولیدشده توسط X می‌نامیم و با $\langle X\rangle$ نشان می‌دهیم (در بعضی ازکتب $\langle X\rangle$ را با $\mathrm{Gp}\{X\}$ نشان می‌دهند). این زیرگروه کوچکترین زیرگروه یکتای G است که X را شامل است، بدین‌معنی که هرگاه $X \subseteq H \leqslant G$، آنگاه $\langle X\rangle \leqslant H$. البته اگر $H \leqslant G$ آنگاه $\langle H\rangle = H$.

باید توجه داشت که $\langle\varnothing\rangle = ۱$. هرگاه X یک زیرمجموعهٔ متناهی ناتهی از G باشد، مثلاً به صورت: $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$، آنگاه برای زیرگروهی که توسط X تولید شده، به‌جای $\langle\{x_1, \cdots, x_n\}\rangle$ می‌نویسیم $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$. به‌ویژه اگر X تنها متشکل از یک عضو x باشد، آنگاه خواهیم نوشت $\langle X\rangle = \langle x\rangle$، که زیرگروه دوری از G است که توسط x تولید شده است، این نمادگذاری با آنچه در فصل صفر معرفی شد مطابقت دارد.

به آسانی می‌توان بیان روشنی، از اعضای $\langle X\rangle$ بر حسب اعضای X به دست داد.

۲۸.۲ لم فرض می‌کنیم $\varnothing \neq X \subseteq G$. در این صورت

$\langle X\rangle = \{x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r} : n_i \in \mathbf{Z}$ و هر $x_i \in X$، هر r یک عدد صحیح مثبت است$\}$

(در حالت کلی یک عضو از $\langle X\rangle$ ممکن است نمایشهای مختلف زیادی به شکل آنچه در سمت راست آمده داشته باشد).

برهان فرض می‌کنیم H مجموعهٔ سمت راست فوق باشد. چون $\langle X\rangle$ در ضرب و تشکیل وارونهایش بسته است، $H \subseteq \langle H\rangle$. اما همچنین بنا به تعریف، $X \subseteq H$؛ و هرگاه $h_1, h_2 \in H$ آنگاه روشن است که $h_1h_2^{-1} \in H$. بنابراین $H \leqslant G$. ازاین‌رو $H \leqslant \langle X\rangle$، و در نتیجه $\langle X\rangle = H$.

۲۹.۲ تعریف هرگاه $X \subseteq G$ و $\langle X\rangle = G$ و X را یک مجموعهٔ مولد G گوییم. این مطلب باید با مفهوم مجموعه‌ای از بردارهای پدیدآورندهٔ یک فضای برداری مقایسه شود؛ اگرچه کلاً در نظریهٔ گروهها هیچ شباهتی در خصوص اعضای گروه با مفهوم استقلال خطی بردارها و نیز هیچ قضیهٔ پایه‌یی وجود ندارد (در مورد گروههای آبلی و گروههای متناهی مرتبه که مرتبه‌های آنها توانی از یک عدد اول‌اند، چیزی از این نوع امکان‌پذیر است. ۲۴.۸ و ۱۲.۱۱ را ببینید). بدیهی است که خود G و $G\backslash\{1\}$ مجموعه‌های مولدهای Gاند. معمولاً مجموعه‌های مولد 'کوچک' مورد نظر ما هستند. اگر G دارای یک مجموعهٔ مولدِ X باشد با $|X| \leqslant n$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، می‌گوییم G یک گروه n مولدی است. لذا گروههای ۱ مولدی دقیقاً گروههای دوری‌اند و گروههای دوری به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، n مولدی هستند.

۲.۳۰ چند مثال (i) می‌دانیم که هرگاه $n \geqslant ۳$، گروه تقارن Σ_n ناآبلی است؛ پس Σ_n مطمئناً دوری نیست. ولی، Σ_n به‌ازای هر n یک گروه ۲ مولدی است: به‌عنوان مثال هنگامی که $n \geqslant ۳$

$$\Sigma_n = \langle (۱۲), (۱۲۳\cdots n)\rangle.$$

برای اثبات این مطلب فرض می‌کنیم $\tau = (۱۲)$، $\sigma = (۱۲۳\cdots n)$ و $H = \langle \sigma,\tau\rangle \leqslant \Sigma_n$. در این صورت H شامل

$$\begin{aligned}\sigma^{-۱}\tau\sigma &= (۲۳), \sigma^{-۲}\tau\sigma^{۲} = \sigma^{-۱}(\sigma^{-۱}\tau\sigma)\sigma\\ &= (۳۴),\ldots,\sigma^{-(n-۲)}\tau\sigma^{n-۲} = (n-۱,n)\end{aligned}$$

خواهد بود. فرض می‌کنیم m یک عدد صحیح باشد که $۲ < m \leqslant n$. در این صورت H شامل

$$(m-۱,m)(m-۲,m-۱)\cdots(۳۴)(۲۳)(۱۲)(۲۳)(۳۴)\cdots(m-۱,m) = (۱m)$$

نیز خواهد بود. حال فرض می‌کنیم k و l اعداد صحیحی باشند که $۱ < k < l \leqslant n$. در این صورت H شامل $(۱k)(۱l)(۱k) = (kl)$ است. لذا H تمام ترانهش‌های Σ_n را شامل است. اکنون از ۲۱ نتیجه می‌شود که $H = \Sigma_n$.

(ii) فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت و V یک فضای برداری با بعد n روی $\mathbf{Z}_p$ باشد. در این صورت V^+ یک گروه n مولدی است، اما به‌ازای هر عدد صحیح $m < n$ یک گروه m مولدی نخواهد بود. برای اثبات اینکه V^+ یک گروه n مولدی است، فقط احتیاج داریم یک پایهٔ $v_۱, \ldots, v_n$ از V را در نظر بگیریم. در این صورت چون هر عضو V به صورت $k_۱v_۱+\cdots+k_nv_n$ با اعداد صحیح $k_۱, \ldots, k_n$ قابل بیان است، واضح است که $\langle v_۱,\cdots,v_n\rangle = V^+$. از طرفی هرگاه m یک عدد صحیح مثبت باشد و $w_۱, \ldots, w_m$ اعضای V باشند به‌طوری‌که $\langle w_۱,\cdots,w_m\rangle = V^+$، آنگاه بردارهای $w_۱, \ldots, w_m$ نیز V را به‌عنوان یک فضای برداری پدید می‌آورند و ازاین‌رو $m \geqslant n$.

(iii) به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant ۳$، گروه دووجهی $D_{۲n}$ یک گروه ۲ مولدی است: زیرا با نمادگذاری ۲۴.۲، $D_{۲n} = \langle\rho,\varepsilon\rangle$.

۶۸*. فرض می‌کنیم $\varnothing \neq X \subseteq G$. در این صورت هر عضو $\langle X\rangle$ قابل بیان به شکل $x_۱^{\varepsilon_۱}x_۲^{\varepsilon_۲}\cdots x_r^{\varepsilon_r}$ است که در آن $x_۱,x_۲,\cdots,x_r \in X$ و به‌ازای هر $i = ۱,\cdots,r$، $\varepsilon_i = \pm ۱$. علاوه بر این اگر هر عضو X از مرتبهٔ متناهی باشد می‌توانیم ε_iها را $+۱$ بگیریم.

۶۹*. r را یک عدد صحیح مثبت می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x_۱,\cdots,x_r \in G$. هرگاه x_i و x_j به‌ازای هر i و j که $۱ \leqslant i < j \leqslant r$، جابه‌جایی‌پذیر باشند، آنگاه $\langle x_۱,\cdots,x_r\rangle$ یک زیرگروه آبلی G است. و هر عضو $\langle x_۱,\cdots,x_r\rangle$ به شکل $x_۱^{n_۱}x_۲^{n_۲}\cdots x_r^{n_r}$ که در آن $n_۱,\cdots,n_r \in \mathbf{Z}$ قابل بیان است.

۷۰. (i) فرض می‌کنیم $H,K \leqslant G$. در این صورت

$$H\cup K \leqslant G \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad K\leqslant H \quad \text{یا} \quad H \leqslant K$$

(در هر حالت $H\cup K$ یا H است یا K). به‌ویژه G نمی‌تواند اجتماعی از دو زیرگروه حقیقی خود باشد.

(ii) گروه دووجهی $D_۸$ از مرتبهٔ ۸، اجتماعی است از سه زیرگروه حقیقی خودش.

۷۱*. فرض می‌کنیم $H,K \leqslant G$. در این صورت $\langle H\cup K\rangle$ معمولاً به $\langle H,K\rangle$ نمایش داده شده و الحاق H و K نامیده می‌شود، این زیرگروه کوچکترین زیرگروه یکتای G است که هم H را شامل است و هم K را.

(i) هر عضو $\langle H,K\rangle$ (غالباً به راههای مختلف) به شکل $h_۱k_۱h_۲k_۲\cdots h_rk_r$ قابل نمایش است که در آن r یک عدد صحیح مثبت است و $h_۱,\cdots,h_r \in H$ و $k_۱,\cdots,k_r \in K$.

(ii) هرگاه H و K زیرگروههای متناهی G باشند، آیا $\langle H,K\rangle$ لزوماً متناهی است؟ (ر.ک. قضیهٔ پوانکاره ۶۶)

۷۲*. X را یک مجموعهٔ (ناتهی) از مولدهای G می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ و $\psi : G \to H$ دو همریختی باشند. اگر به‌ازای هر $x \in X$،

$$x\varphi = x\psi$$

آنگاه

$$\varphi = \psi.$$

۷۳. فرض می‌کنیم که $G = \langle x,y\rangle$ و به‌ازای $k \in \mathbf{Z}$ای، $x^{-۱}yx = y^k$. نشان دهید که هر عضو G به شکل x^my^n که در آن $m,n \in \mathbf{Z}$ قابل بیان است. نتیجه بگیرید که هرگاه x,y از مرتبهٔ متناهی باشند، G یک گروه متناهی است و $|G| \leqslant o(x)o(y)$.

۷۴. فرض می‌کنیم $H < G$ و قرار می‌دهیم $X = G\backslash H$. در این صورت $\langle X\rangle = G$.

حال از گروههای دلخواه H و K گروه دیگری می‌سازیم که هم H را می‌توان در آن نشانید و هم K را.

۳۱.۲ تعریف از هر دو مجموعهٔ X و Y (که ممکن است یکی باشند) می‌توانیم مجموعهٔ دیگری مانند $X \times Y$ بسازیم که حاصلضرب دکارتی X و Y نامیده می‌شود: این مجموعه مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (x,y) است که در آن $x \in X$ و $y \in Y$. وقتی X و Y مجموعه‌هایی متناهی باشند، $X \times Y$ نیز مجموعه‌ای متناهی است و

$$|X \times Y| = |X| \cdot |Y|.$$

به‌علاوه اگر H و K گروههای دلخواهی باشند، مجموعهٔ $H \times K$ ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد مشروط بر آنکه به‌ازای هر $h, h' \in H$ و $k, k' \in K$ تعریف کنیم

$$(h,k)(h',k') = (hh', kk').$$

اصول موضوعهٔ گروه به آسانی تحقیق می‌شوند: بسته‌بودن بلافاصله از تعریف ضرب نتیجه می‌شود؛ شرکت‌پذیری از شرکت‌پذیری ضربهای H و K؛ عضو همانی $H \times K$، $(1,1)$ است و

$$(h,k)^{-1} = (h^{-1}, k^{-1}).$$

از این پس، هرگاه K, H گروههایی باشند، $H \times K$ معرف یک چنین گروهی خواهد بود: این گروه را حاصلضرب مستقیم K, H می‌نامیم.

۳۲.۲ چند مثال (i)

$$\mathbf{C}^+ \cong \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$$

زیرا نگاشت

$$a + ib \mapsto (a,b)$$

که به‌ازای هر $a, b \in \mathbf{R}$ تعریف می‌شود یک یکریختی است از $\mathbf{C}^+$ بر روی $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$.

(ii)

$$\mathbf{Q}^\times \cong \mathbf{Q}^\times_{\text{pos}} \times C_2$$

زیرا نگاشت

$$x \mapsto (|x|,\ \text{sign}\ x)$$

که به‌ازای هر $x \in \mathbf{Q}^\times$ تعریف می‌شود، و در آن

$$\text{sign}\ x = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x > 0 \\ -1 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

یک یکریختی است از $\mathbf{Q}^\times$ بر روی $\mathbf{Q}^\times_{\text{pos}} \times C_2$. به همین نحو

(iii)

$$\mathbf{R}^\times \cong \mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \times C_2$$

(iv) قرار می‌دهیم $U = \{z \in \mathbf{C}^\times : |z| = 1\}$. واضح است که U یک زیرگروه $\mathbf{C}^\times$ است، U را گروه دایره‌یی می‌نامند. در این صورت

$$\mathbf{C}^\times \cong \mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \times U$$

زیرا نگاشت

$$z \mapsto (|z|, z/|z|)$$

که به‌ازای هر $z \in \mathbf{C}^\times$ تعریف می‌شود، یک یکریختی است از $\mathbf{C}^\times$ بر روی $\mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \times U$. به عبارت دیگر اگر z به شکل قطبی $re^{i\theta}$ نمایش داده شود که در آن $r, \theta \in \mathbf{R}$، این یکریختی عبارت است از نگاشت

$$re^{i\theta} \mapsto (r, e^{i\theta}).$$

۳۳.۲ گروه $H \times K$ دارای زیرگروههای

$$H \times 1 = \{(h,1) : h \in H\} \cong H$$

و

$$1 \times K = \{(1,k) : k \in K\} \cong K$$

است. هر عضو $H \times K$ به صورت حاصلضربی از یک عضو $H \times 1$ و یک عضو $1 \times K$ قابل بیان است. به‌علاوه هر عضو $H \times 1$ با هر عضو $1 \times K$ جابه‌جایی‌پذیر است و

$$(H \times 1) \cap (1 \times K) = 1$$

برهان فرض می‌کنیم $\varphi : H \to H \times K$ به‌ازای هر $h \in H$ با ضابطهٔ

$$\varphi : h \mapsto (h,1)$$

تعریف شود. در این صورت به‌ازای $h_1, h_2 \in H$،

$$(h_1 h_2)\varphi = (h_1 h_2, 1) = (h_1, 1)(h_2, 1) = (h_1\varphi)(h_2\varphi)$$

بنابراین φ یک همریختی است، و به وضوح دیده می‌شود که φ یک به یک است. ازاین‌رو بنابر ۱۰.۲

$$H \cong H\varphi = H \times ۱ \quad \text{و} \quad H \times ۱ \leqslant H \times K\cdot$$

به‌همین‌نحو،

$$K \cong ۱ \times K \leqslant H \times K\cdot$$

به‌ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$،

$$(h, ۱)(۱, k) = (h, k) = (۱, k)(h, ۱)$$

و

$$(H \times ۱) \cap (۱ \times K) = \{(۱, ۱)\} = ۱\cdot$$

۷۵. $H \times K$ آبلی است اگر و تنها اگر H و K هر دو آبلی باشند.

*۷۶. هرگاه $H \cong J$ و $K \cong L$ آنگاه $(H \times K) \cong (J \times L)$.

*۷۷. (i) فرض می‌کنیم $V = \{۱, (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳)\} \subseteq \Sigma_۴$. نشان دهید که $V \leqslant \Sigma_۴$ و $V \cong C_۲ \times C_۲$. گروه V را گاهی گروه چهارتایی کلاین می‌نامند.

(ii) $C_۲ \times C_۲$ را می‌توان در $\mathrm{Gl}_۲(\mathbf{Q})$ نشانید. اما $C_۲ \times C_۲$ را به‌ازای میدان دلخواه F نمی‌توان در $F^\times$ نشانید.

(iii) $C_۲ \times C_۲$ و $C_۴$ گروه‌های غیر یکریخت از مرتبهٔ ۴اند.

(iv) هرگروه از مرتبهٔ ۴ یا با $C_۲ \times C_۲$ یکریخت است یا با $C_۴$. بنابراین $\nu(۴) = ۲$ (رک. ۶۰).

*۷۸. (i) هرگاه m و n اعداد صحیح مثبت متباینی باشند، آنگاه

$$C_m \times C_n \cong C_{mn}$$

(ii) فرض می‌کنیم H و K گروههای دوری متناهی باشند. در این صورت $H \times K$ دوری است اگر و تنها اگر اعداد $|H|$ و $|K|$ متباین باشند.

حال به قضیهٔ عکس ۳۳.۲ اشاره می‌کنیم.

۳۴.۲ لم فرض می‌کنیم G زیرگروههایی چون H و K دارد به‌طوری که هر عضو G به صورت حاصلضرب hk که $h \in H$ و $k \in K$ قابل بیان است و هر عضو H با هر عضو K جابه‌جایی‌پذیر است، و $H \cap K = ۱$. در این صورت $G \cong H \times K$.

برهان ابتدا اشاره می‌کنیم که هر $g \in G$ به طور یکتا به شکل حاصلضربی از یک عضو H و یک عضو K قابل بیان است: زیرا اگر فرض کنیم

$$g = hk = h'k'$$

که در آن $h, h' \in H$ و $k, k' \in K$؛ در این صورت بنابر فرض

$$(h')^{-۱}h = k'k^{-۱} \in H \cap K = ۱,$$

بنابراین $h = h'$ و $k = k'$. ازاین‌رو می‌توانیم نگاشت

$$\varphi : G \to H \times K$$

را با ضابطهٔ

$$\varphi : hk \mapsto (h, k) \qquad \text{به‌ازای هر } h \in H \text{ و هر } k \in K$$

تعریف کنیم. این نگاشت بنابر اشارهٔ فوق، خوشتعریف و آشکارا یک دوسویی است. همچنین φ یک یکریختی است، زیرا اگر $h_۱, h_۲ \in H$ و $k_۱$ و $k_۲ \in K$، آنگاه در G خواهیم داشت

$$(h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲) = h_۱h_۲k_۱k_۲$$

زیرا بنا به فرض $k_۱h_۲ = h_۲k_۱$، ازاین‌رو

$$\begin{aligned}((h_۱k_۱)(h_۲k_۲))\varphi &= (h_۱h_۲, k_۱k_۲)\\ &= (h_۱, k_۱)(h_۲, k_۲)\\ &= (h_۱k_۱)\varphi \cdot (h_۲k_۲)\varphi\end{aligned}$$

آنچه می‌خواستیم.

این ملاک مستقیماً برای مثالهای بخش ۳۲.۲ به کار گرفته می‌شود.

۷۹. فرض می‌کنیم n عددی صحیح باشد، $n \geqslant 3$ و $G = D_{2n}$ را گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$ می‌گیریم. نشان دهید که G دارای یک زیرگروه دوریِ H از مرتبهٔ n و یک زیرگروه K از مرتبهٔ ۲ است به‌طوری‌که هر عضو G به صورت hk که $h \in H$ و $k \in K$ قابل بیان است، و $H \cap K = 1$. آیا $G \cong H \times K$؟

۳۵.۲ برای گروههای دلخواه H و K، $H \times K \cong K \times H$.

برهان نگاشت $(h,k) \mapsto (k,h)$ (که به‌ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ تعریف می‌شود) یک یکریختی است از $H \times K$ بر روی $K \times H$.

۳۶.۲ تعریف حاصلضرب مستقیم دو گروه را می‌توان آشکارا به حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروهها بسط داد. فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبت دلخواهی باشد و G_1، G_2، $\cdots$، G_n را n گروه دلخواه (نه لزوماً متمایز) می‌گیریم. دراین صورت $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ مجموعهٔ همهٔ nتاییهای مرتب $(g_1, g_2, \cdots, g_n)$ است که به‌ازای هر $i = 1, 2, \cdots, n$، $g_i \in G_i$. این مجموعه با تعریف ضرب مؤلفه به مؤلفهٔ nتاییها ساختار یک گروه به خود می‌گیرد، که آن را حاصلضرب مستقیم G_1، G_2، $\cdots$، G_n می‌نامیم. (درصورتی‌که $n = 1$، به طور طبیعی این 'حاصلضرب مستقیم' را با G_1 یکی می‌گیریم.)

به‌عنوان مثال هرگاه V یک فضای برداری متناهی بعد، $n > 0$، روی میدان F باشد، آنگاه

$$V^+ \cong F^+ \times \cdots \times F^+,$$

یعنی حاصلضرب مستقیم n نسخهٔ F^+ (رک. ۱۵.۲).

۳۷.۲ برای گروههای دلخواه G، H و K داریم

$$G \times (H \times K) \cong G \times H \times K \cong (G \times H) \times K.$$

۸۰. فرض می‌کنیم F یک میدان و n یک عدد صحیح مثبت باشد، نشان دهید که مجموعهٔ H متشکل از تمام ماتریسهای قطری $n \times n$ ناتکین با درایه‌ها در F، زیرگروهی از $\mathrm{GL}_n(F)$ را تشکیل می‌دهد و

$$H \cong F^\times \times \cdots \times F^\times,$$

یعنی حاصلضرب مستقیم n نسخهٔ $F^\times$.

*۸۱. گروه G را تجزیه‌پذیر گوییم، اگر G زیرگروههایی حقیقی مثل H و K داشته باشد، که در مفروضات ۳۴.۲ صدق کنند. هرگاه چنین نباشد، G را تجزیه‌ناپذیر می‌نامیم.

(i) فرض می‌کنیم $n > 1$ یک عدد صحیح و

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}$$

تجزیهٔ n به حاصلضرب اعداد اول باشد که در آن s، m_1، $\cdots$، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند و p_1، $\cdots$، p_s اعداد اول متمایز. در این صورت C_n تجزیه‌پذیر است، هرگاه $s > 1$، و

$$C_n \cong C_{q_1} \times C_{q_2} \times \cdots \times C_{q_s}$$

که در آن به‌ازای هر $i = 1, \cdots, s$، $q_i = p_i^{m_i}$.

(ii) به‌ازای هر عدد اول p و هر عدد صحیح مثبت m، C_{p^m} تجزیه‌ناپذیر است.

۸۲. Σ_3 تجزیه‌ناپذیر است (رک. ۱۴۳).

۳

زیرگروههای نرمال، همریختیها و خارج‌قسمتها

۱.۳ تعاریف فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ باشد و A مجموعه‌ای ناتهی از خودریختیهای G. می‌گوییم H یک زیرگروه Aناوردای G است، اگر

به‌ازای هر $h \in H$ و $\alpha \in A$، $h^{\alpha} \in H$

به‌عنوان مثال، هرگاه $A = 1$، آنگاه بدیهی است که هر زیرگروه G، Aناورداست.

در دو مورد مهم خاص اصطلاحات خاصی را به‌کار می‌بریم. درصورتی‌که H، $\mathrm{Aut}\, G$ناوردا باشد، می‌گوییم H در G مشخصه است و اگر H، $\mathrm{Inn}\, G$ناوردا باشد می‌گوییم H در G نرمال (یا ناوردا، یا خود-مزدوج) است. مفهوم زیرگروه نرمال بر تمامی نظریهٔ گروهها سایه افکنده است و برای آن نماد خاصی به‌کار برده می‌شود. قرار می‌دهیم $H \trianglelefteq G$ بدین‌معنی که 'H یک زیرگروه نرمال G است' و $H \ntrianglelefteq G$ بدین‌معنی که 'H یک زیرگروه نرمال G نیست'. به علت اهمیت بنیادی این مفهوم، شرط معرف نرمال‌بودن را بار دیگر به‌طور صریح بیان می‌کنیم.

۲.۳ تعریف فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $h \in H$ و هر $g \in G$، $g^{-1}hg \in H$.

عبارت دیگر 'خودمزدوج' به سادگی توضیح داده می‌شود. هرگاه $H \trianglelefteq G$ آنگاه به‌ازای هر $g \in G$

$$g^{-1}Hg = \{g^{-1}hg : h \in H\} \leqslant H. \qquad \text{(i)}$$

در این صورت همچنین $gHg^{-1} = (g^{-1})^{-1}Hg^{-1} \leqslant H$؛ و از این رابطه به سادگی نتیجه می‌شود که

$$H \leqslant g^{-1}Hg. \qquad \text{(ii)}$$

به موجب (i) و (ii)،

$$g^{-1}Hg = H.$$

به عکس اگر به‌ازای هر $g \in G$، $g^{-1}Hg = H$، آنگاه به‌طور قطع $H \trianglelefteq G$. ازاین‌رو قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

۳.۳ فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in G$، $g^{-1}Hg = H$، یعنی اگر و تنها اگر H با تمام مزدوجهایش در G منطبق باشد.

۴.۳ $1 \trianglelefteq G$ و $G \trianglelefteq G$.

۵.۳ اگر G یک گروه آبلی باشد، هر زیرگروه G در G نرمال است.

برهان فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. هرگاه $h \in H$ و $g \in G$ آنگاه $g^{-1}hg = hg^{-1}g = h \in H$.

با توجه به فصل ۱ خاطر نشان می‌کنیم که G را ساده گوییم اگر $G \neq 1$ و ۱ و G تنها زیرگروههای نرمال G باشند.

۶.۳ (رک. ۱۱.۱) تنها گروههای سادهٔ آبلی گروههایی هستند که مرتبه‌های آنها اعداد اول‌اند.

برهان هرگاه G گروهی از مرتبهٔ عدد اول باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ لاگرانژ، ۱ و G تنها زیرگروههای G هستند و در نتیجه G مطمئناً ساده است.

به‌عکس، هرگاه G یک گروه سادهٔ آبلی باشد، آنگاه بنابر ۵.۳، ۱ و G تنها زیرگروههای Gاند. از این‌رو بنابر ۲۹، G متناهی و مرتبهٔ آن عدد اول است.

۷.۳ مثال تمام زیرگروههای Σ_3 را پیدا و آنهایی را که در Σ_3 نرمال‌اند مشخص کنید.

نخست، $1 \trianglelefteq \Sigma_3$ و $\Sigma_3 \trianglelefteq \Sigma_3$. حال باید زیرگروههای حقیقی نابدیهی Σ_3 را بیابیم: بنابر قضیهٔ لاگرانژ، این زیرگروهها می‌توانند تنها دارای مرتبهٔ ۲ و ۳ باشند. بنابر ۱، هرگروه از مرتبهٔ عدد اول دوری است. به‌علاوه

Σ_3 دارای ۱ عضو از مرتبهٔ ۱ است : ۱

۳ عضو از مرتبهٔ ۲ است : (۱۲)، (۱۳)، (۲۳)

۲ عضو از مرتبهٔ ۳ است : (۱۲۳)، (۱۳۲)

و $(123)^2 = (132)$. ازاین‌رو Σ_3، ۳ زیرگروه از مرتبهٔ ۲: $T = \{1,(12)\}$، $U = \{1,(13)\}$، $V = \{1,(23)\}$ دارد، و یک زیرگروه از مرتبهٔ ۳: $K = \{1,(123),(132)\}$. حال

$$(13)^{-1}(12)(13) = (13)(12)(13) = (23) \notin T,$$

بنابراین $T \ntrianglelefteq \Sigma_3$. به‌همین‌نحو $U \ntrianglelefteq \Sigma_3$ و $V \ntrianglelefteq \Sigma_3$. اما به‌ازای هر $g \in \Sigma_3$، بنابر ۲۰.۲، $g^{-1}Kg$ یک زیرگروه Σ_3 است از مرتبهٔ ۳ و بنابراین، $g^{-1}Kg = K$. ازاین‌رو $K \trianglelefteq \Sigma_3$.

توضیح زیر بی‌درنگ از ۲۶.۲ و تعریف زیرگروه نرمال نتیجه می‌شود.

۸.۳ هرگاه $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ آنگاه $H \cap K \trianglelefteq G$. به‌طورکلی اگر $\{H_i : i \in I\}$ مجموعهٔ دلخواهی از زیرگروههای نرمال G (که با یک مجموعهٔ I اندیس‌گذاری شده است) باشد آنگاه $\bigcap_{i\in I} H_i \trianglelefteq G$

۸۳. هرگاه $\varnothing \subset A \subseteq \operatorname{Aut} G$ و $\{H_i : i \in I\}$ مجموعهٔ دلخواهی از زیرگروههای Aناوردای G باشد، آنگاه $\bigcap_{i\in I} H_i$ یک زیرگروه Aناوردای G است.

۸۴. فرض می‌کنیم $\varnothing \subset A \subseteq \operatorname{Aut} G$، و H یک زیرگروه Aناوردای G باشد، همچنین فرض می‌کنیم $\alpha \in A$ و $H^\alpha = \{h^\alpha : h \in H\}$.

(i) نشان دهید که $H^\alpha \leqslant H$.

(ii) با یک مثال نشان دهید که ممکن است داشته باشیم $H^\alpha < H$. (راهنمایی. برای یک مثال، در نظر بگیرید $G = \mathbf{Q}^+$، $H = \mathbf{Z}^+$، $A = \{\lambda_2\}$ که در آن λ_2 خودریختی $x \mapsto 2x$ از $\mathbf{Q}^+$ است.)

(iii) ثابت کنید که اگر H متناهی باشد یا $A \leqslant \operatorname{Aut} G$، آنگاه $H^\alpha = H$.

۸۵. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد و $0 \neq w \in V$. W را زیر فضای ۱بعدی V که توسط w پدید آمده می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\alpha \in \mathrm{GL}(V)$. در این صورت بنابر ۴۷ (i)، $\alpha \in \operatorname{Aut} V^+$.

نشان دهید که w یک بردار ویژهٔ α است اگر و تنها اگر W^+ یک زیرگروه $\{\alpha\}$ناوردای V^+ باشد.

۸۶. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی از مرتبهٔ، مثلاً n باشد و m را یک مقسوم‌علیه n می‌گیریم، همچنین فرض می‌کنیم که G دارای دقیقاً یک زیرگروه H از مرتبهٔ m باشد. در این صورت H در G مشخصه است.

***۸۷.** فرض کنید که $K \trianglelefteq J \leqslant G$. همچنین $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و $\bar{K} = K\varphi$ و $\bar{J} = J\varphi$ (۹.۲ را ببینید). در این صورت $\bar{K} \trianglelefteq \bar{J} \leqslant H$.

۸۸. فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$. نشان دهید که اگر x و y اعضای G باشند به‌طوری‌که $xy \in H$، آنگاه $yx \in H$. آیا این حکم تنها با این فرض که $H \leqslant G$ صادق است؟

***۸۹.** مربع مستقیم $G \times G$ از G را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$\hat{G} = \{(g,g) : g \in G\} \subseteq G \times G.$$

نشان دهید که $\hat{G}$ یک زیرگروه $G \times G$ است که با G یکریخت است. $\hat{G}$ را زیرگروه قطری $G \times G$ می‌نامند. همین‌طور نشان دهید که $\hat{G} \trianglelefteq G \times G$ اگر و تنها اگر G آبلی باشد.

***۹۰.** فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و تعریف می‌کنیم

$$H_G = \bigcap_{g \in G} (g^{-1}Hg).$$

در این صورت $H_G \trianglelefteq G$ و هرگاه $K \leqslant H \leqslant G$ که $K \trianglelefteq G$، آنگاه $K \leqslant H_G$. لذا H_G بزرگترین زیرگروه نرمال یکتای G است که در H قرار دارد: H_G مغز (یا نرمال‌درونی) H در G نامیده می‌شود.

هستهٔ زیرگروه $\{1,(12)\}$ در Σ_3 چیست؟

۹۱. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح، $n \geqslant 2$، و F یک میدان باشد.

(i) مجموعهٔ تمام ماتریسهای $n \times n$ را که درایه‌های آنها در Fاند در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم e_{ij} معرف ماتریسی (تکین) باشد که درایهٔ i امین سطر و jامین ستونش ۱ و تمام درایه‌های دیگرش صفرند ($1 \leqslant i \leqslant n$ و $1 \leqslant j \leqslant n$). تحقیق کنید که

$$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il},$$

که در آن δ_{jk} دلتای کرونکر است. نشان دهید که هرگاه $i \neq j$، آنگاه به‌ازای هر $a \in F$، ماتریس $1 + ae_{ij}$ ناتکین است، و وارونش را بیابید.

(ii) قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}_n(F)$، و فرض می‌کنیم H زیرگروه G مرکب از تمام ماتریسهای قطری G باشد (۸۰ را ببینید). ثابت کنید که مغز H_G از H در G متشکل از تمام ماتریسهای اسکالر در G است، (یعنی ماتریسهای $a1$ که $0 \neq a \in F$.) و همچنین $H_G \cong F^{\times}$. (۹۰ را ببینید. راهنمایی. نشان دهید که اگر $x \in H$، و i امین و j امین درایه‌های قطری x مساوی نباشند، آنگاه مزدوج x توسط $1 + e_{ij}$ یک ماتریس قطری نخواهد بود.)

*۹۲. فرض می‌کنیم $g \in G$ و $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$. مانند ۱۹.۲ فرض می‌کنیم τ_g معرف خودریختی داخلی G باشد، که توسط g القا شده است. نشان دهید که $\alpha^{-1}\tau_g\alpha = \tau_{g\alpha}$، و نتیجه بگیرید که برای گروه دلخواه G، $\mathrm{Inn}G \trianglelefteq \mathrm{Aut}G$.

بین همریختیها و زیرگروههای نرمال یک ارتباط بنیادی وجود دارد که موضوع اصلی این فصل است.

۹.۳ **قضیه** فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و $K = \{g \in G : g\varphi = 1\}$. در این صورت $K \trianglelefteq G$. K را هستهٔ φ می‌نامیم و با $\mathrm{Ker}\,\varphi$ نمایش می‌دهیم (با هستهٔ یک نگاشت خطی مقایسه کنید).

برهان بنابر ۹.۲، $1 \in K$، بنابراین $K \neq \varnothing$. حال اگر $k_1, k_2 \in K$، آنگاه با استفاده از ۹.۲ داریم

$$(k_1k_2^{-1})\varphi = (k_1\varphi)(k_2^{-1}\varphi) = (k_1\varphi)(k_2\varphi)^{-1} = 1\cdot 1^{-1} = 1.$$

لذا $k_1k_2^{-1} \in K$. ازاین‌رو $K \leqslant G$. بالاخره اگر $k \in K$ و $g \in G$، آنگاه

$$(g^{-1}kg)\varphi = (g^{-1}\varphi)(k\varphi)(g\varphi) = (g\varphi)^{-1}\cdot 1\cdot(g\varphi) = 1.$$

لذا $g^{-1}kg \in K$. ازاین‌رو $K \trianglelefteq G$.

۱۰.۳ فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد. در این صورت φ یک به یک است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ker}\,\varphi = 1$ (مقایسه کنید با این نکته که: یک نگاشت خطی θ بین فضاهای برداری یک به یک است اگر و تنها اگر $\mathrm{Ker}\,\theta = 0$.)

برهان اگر φ یک به یک باشد، چون بنابر ۹.۲، $1\varphi = 1$، به موجب تعریف نتیجه می‌گیریم که $\mathrm{Ker}\,\varphi = 1$. به عکس، فرض می‌کنیم که $\mathrm{Ker}\,\varphi = 1$ و نیز $g_1, g_2 \in G$ با $g_1\varphi = g_2\varphi$. در این صورت بنابر ۹.۲

$$(g_1g_2^{-1})\varphi = (g_1\varphi)(g_2\varphi)^{-1} = 1.$$

ازاین‌رو $g_1g_2^{-1} \in \mathrm{Ker}\,\varphi = 1$ و در نتیجه $g_1 = g_2$. لذا φ یک به یک است.

دیدیم که هستهٔ هر همریختی $\varphi : G \to H$ یک زیرگروه نرمال G است. در ۲۳.۳ نشان خواهیم داد که به عکس برای هر $K \trianglelefteq G$ یک همریختی از G به یک گروه مناسب با هستهٔ K وجود دارد. قبل از انجام این کار، به چند ویژگی دیگر اشاره می‌کنیم.

۱۱.۳ فرض می‌کنیم $G = H \times K$. نگاشتهای $\pi_1 : G \to H$ و $\pi_2 : G \to K$ را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi_1 : (h,k) \mapsto h \quad \text{و} \quad \pi_2 : (h,k) \mapsto k \quad (\text{به‌ازای هر } (h,k) \in G)$$

در این صورت π_1 و π_2 همریختیهایی پوشا هستند و به ترتیب تصاویر G روی H و K نامیده می‌شوند. با نمادگذاری ۳۳.۲، $\mathrm{Ker}\,\pi_1 = 1 \times K$ و $\mathrm{Ker}\,\pi_2 = H \times 1$.

برهان به موجب تعریف $H \times K$ بلافاصله حکم نتیجه می‌شود.

۱۲.۳ فرض می‌کنیم $G = H \times K$. در این صورت $H \times 1 \trianglelefteq G$ و $1 \times K \trianglelefteq G$. اما $H \times 1$ و $1 \times K$ لزوماً در G مشخصه نیستند.

برهان حکم اول به موجب ۱۱.۳ و ۹.۳ نتیجه می‌شود. برای اینکه ببینیم $H \times 1$ و $1 \times K$ لزوماً در G مشخصه نیستند، این وضعیت را هنگامی که $H = K \neq 1$ در نظر می‌گیریم. لذا فرض می‌کنیم H یک گروه نابدیهی دلخواه باشد و $G = H \times H$. در این صورت به سادگی ملاحظه می‌شود که نگاشت

$$\alpha : G \to G$$

که به‌ازای هر $(h_1, h_2) \in G$ با ضابطهٔ

$$\alpha : (h_1, h_2) \mapsto (h_2, h_1)$$

تعریف می‌شود، یک خودریختی از G است. به‌ازای $1 \neq h \in H$، $(h,1)^\alpha = (1,h) \notin H \times 1$ و $(1,h)^\alpha = (h,1) \notin 1 \times H$. لذا $H \times 1$ و $1 \times H$ نرمال‌اند، اما در G مشخصه نیستند.

۱۳.۳ هرگاه $K \trianglelefteq G$ و $K \leqslant H \leqslant G$ آنگاه $K \trianglelefteq H$؛ اما H لزوماً در G نرمال نیست.

برهان حکم اول از تعریف نرمال‌بودن، بلافاصله نتیجه گرفته می‌شود. برای اثبات حکم دوم کافی است، بنابر ۷.۳، انتخاب کنیم $G = \Sigma_3$، $H = \{1, (12)\}$ و $K = 1$.

در ادامه نشان می‌دهیم که نرمال‌بودن رابطه‌ای ترایا نیست.

۱۴.۳ ممکن است اتفاقاً $K \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ اما $K \ntrianglelefteq G$.
برای بررسی این حالت، قرار می‌دهیم

$$J = \Sigma_3 \quad \text{و} \quad G = J \times J.$$

بنابر ۷.۳، J دارای یک زیرگروه نرمال L از مرتبهٔ ۳ است: $L = \{1, (123), (132)\}$. فرض می‌کنیم $H = L \times L \leqslant G$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که $H \trianglelefteq G$. (۱۱۱ را ببینید.) اما H یک گروه آبلی است، بنابراین هر زیرگروه H در H نرمال است. قرار می‌دهیم

$$K = \{(1,1), ((123),(123)), ((132),(132))\},$$

که یک زیرگروه H از مرتبهٔ ۳ است (۸۹ را ببینید.) در این صورت $K \trianglelefteq H$. اما $K \ntrianglelefteq G$. زیرا برای مثال

$$((12),1)^{-1}((123),(123))((12),1) = ((12)(123)(12),(123)) = ((132),(123)) \notin K.$$

نظر به نفی مطلب اخیر، نتیجهٔ مثبت زیر سودمند است.

۱۵.۳ لم هرگاه $H \trianglelefteq G$ و K یک زیرگروه مشخصهٔ H باشد، آنگاه $K \trianglelefteq G$.

برهان به‌ازای هر $g \in G$، $g^{-1}Hg = H$ (۳.۳). بنابراین خودریختی داخلی τ_g از G، که بر اثر g القا شده است، H را بر روی H می‌نگارد. ازاین‌رو با تحدید به H، τ_g یک خودریختی σ_g

از H را مشخص می‌کند

$$\sigma_g : h \mapsto g^{-1}hg \qquad \text{به‌ازای هر } h \in H$$

از آنجایی‌که K در H مشخصه است پس K، σ_gناوردا خواهد بود؛ لذا به‌ازای هر $k \in K$،

$$k^{\sigma_g} \in K,$$

یعنی

$$g^{-1}kg \in K.$$

این رابطه به‌ازای هر $g \in G$ صادق است، بنابراین $K \trianglelefteq G$.

۹۳. فرض می‌کنیم $K \leqslant H \leqslant G$. ثابت کنید که اگر $\varnothing \subset A \subseteq \operatorname{Aut} G$ و H یک زیرگروه Aناوردا از G باشد و K یک زیرگروه مشخصه از H، آنگاه K یک زیرگروه Aناوردای G است. (این حکم، تعمیم ۱۵.۳ است). به‌ویژه، اگر K در H مشخصه باشد و H نیز در G مشخصه باشد، آنگاه K در G مشخصه است (رک. ۱۴.۳).

۹۴*. فرض می‌کنیم $G = H \times K$.

(i) در این صورت $(\operatorname{Aut} H) \times (\operatorname{Aut} K)$ را می‌توان در $\operatorname{Aut} G$ نشانید.

(ii) اگر $H \times 1$ و $1 \times K$ در G مشخصه باشند، آنگاه $\operatorname{Aut} G \cong (\operatorname{Aut} H) \times (\operatorname{Aut} K)$.

۱۶.۳ تعریف به‌ازای هر دو زیرمجموعهٔ ناتهی X و Y از G، مجموعهٔ حاصلضرب را به‌صورت

$$XY = \{xy : x \in X, y \in Y\} \subseteq G$$

تعریف می‌کنیم.

اگر X متشکل از تنها یک عضو مانند x باشد، به جای $\{x\}Y$ می‌نویسیم xY، و به‌همین‌نحو اگر $Y = \{y\}$، به‌جای $X\{y\}$ می‌نویسیم Xy. این نمادگذاری با نمادگذاری معمولی برای هم‌مجموعه‌ها که در فصل ۰ گفته شد مطابقت دارد: زیرا هنگامی که $H \leqslant G$ و $g \in G$، gH یک هم‌مجموعهٔ چپ H در G است و Hg یک هم‌مجموعهٔ راست H در G.

این ضربِ زیرمجموعه‌های G شرکت‌پذیر است، زیرا اگر X، Y و Z زیرمجموعه‌های ناتهی G باشند

$$(XY)Z = \{xyz : x \in X, y \in Y, z \in Z\} = X(YZ).$$

ازاین‌رو

۱۷.۳ وقتی ضرب مانند ۱۶.۳ تعریف شود، مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی G یک نیم‌گروه $\mathscr{Q}(G)$ تشکیل می‌دهد.

البته این تعاریف زمانی که G جایگزین نیم‌گروه دلخواهی شود، برقرار می‌مانند. علاوه‌براین با زیرمجموعهٔ تهی $\varnothing$، می‌توانیم با تعریف $X\varnothing = \varnothing = \varnothing X$ به‌ازای هر $X \subseteq G$، کار کنیم: در این صورت $\mathscr{Q}(G) \cup \{\varnothing\}$ به یک نیم‌گروه $\mathscr{P}(G)$ بدل می‌شود که در آن $\varnothing$ نقش صفر ضربی را به عهده دارد. ولی ما $\mathscr{Q}(G)$ را فقط وقتی که G یک گروه باشد مورد بحث قرار می‌دهیم.

توجه داشته باشید که نمادگذاری قبلی در خصوص مزدوج یک زیرگروه، با تعاریف فعلی سازگار است: یعنی اگر $K \leqslant G$ و $g \in G$ آنگاه زیرگروه مزدوج $g^{-1}Kg$ حاصلضرب مناسبی است از مجموعه‌های $\{g^{-1}\}$، K، $\{g\}$.

*۹۵. فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت

(i) هر زیرگروه G که هم H و هم K را شامل باشد، مجموعه‌های حاصلضرب HK و KH را نیز شامل است.

(ii) $HK \leqslant G$ اگر و تنها اگر $HK = KH$.

(توجه. تساوی $HK = KH$ بدین‌معنی نیست که هر عضو H با هر عضو K جابه‌جایی‌پذیر است، بلکه بدین‌معنی است که به‌ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$، hk به‌ازای اعضایی چون $h' \in H$ و $k' \in K$ با $k'h'$ مساوی است، و به‌همین‌نحو kh را می‌توان به صورت یک عضو از HK نشان داد.)

(iii) مثالی بیابید که در آن HK یک زیرگروه G نباشد (ر.ک. ۷۱؛ ۳۸.۳ را نیز ببینید.)

۹۶. فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$ و $x, y \in G$ با $Hx = Ky$. در این صورت $H = K$.

۹۷. نیم‌گروه $\mathscr{Q}(G)$ دارای عضو همانی است، و G گروه یکه‌های $\mathscr{Q}(G)$ است.

*۹۸. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H, K \leqslant G$. در این صورت

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = |KH|\cdot$$

(توجه. HK و KH لزوماً زیرگروههای G نیستند، ۹۵ را ببینید.)

*۹۹. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H, K \leqslant G$.

(i) در این صورت $|\langle H, K\rangle : K| \geqslant |H : H \cap K|$ (۷۱ را ببینید.)

(ii) هرگاه $|H : H \cap K| > \frac{1}{2}|G : K|$ آنگاه $\langle H, K\rangle = G$.

*۱۰۰. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد و $H, K \leqslant G$ به‌طوری که

$$(|G : H||G : K|) = 1$$

در این صورت $|G : H \cap K| = |G : H||G : K|$ و $G = HK$.

(راهنمایی. از ۱۱، ۹۸، ۹۹ (i) استفاده کنید. بعداً خواهیم توانست شرط متناهی بودن G را حذف کنیم: ۱۹۷ را ببینید.)

هر زیرگروه از نیم‌گروه $\mathscr{Q}(G)$ باید شامل یک عضو همانی باشد، ازاین‌رو زیرمجموعهٔ X از G طوری است که $X^2 = X$ (یعنی یک زیرمجموعهٔ خودتوان است: ۱۵ را ببینید).

۱۸.۳ (i) هرگاه $H \leqslant G$ آنگاه $H^2 = H$.

(ii) فرض می‌کنیم $X \in \mathscr{Q}(G)$. اگر $X^2 = X$ و X متناهی باشد آنگاه $X \leqslant G$. ولی اگر شرط 'متناهی‌بودن X' را حذف کنیم، حکم برقرار نخواهد بود.

برهان (i) چون $H \leqslant G$، $H = 1H \subseteq H^2$. اما همچنین $H^2 \subseteq H$، زیرا $H \leqslant G$. ازاین‌رو $H^2 = H$.

(ii) فرض می‌کنیم $x \in X$. در این صورت $xX \subseteq X^2 = X$. چون X یک مجموعهٔ متناهی است و روشن است که $|xX| = |X|$، نتیجه می‌گیریم که $xX = X$. بنابراین $x \in xX$ و در نتیجه به‌ازای عضوی چون $e \in X$، $x = xe$. اما در این صورت، در G خواهیم داشت، $1 = x^{-1}x = e \in X$. به‌علاوه $1 \in xX$ و در نتیجه به‌ازای عضوی چون $y \in X$، $1 = xy$. بنابراین در G داریم $x^{-1} = y \in X$. همین‌طور چون $X^2 \subseteq X$، این نشان می‌دهد که $X \leqslant G$.

در خصوص مثالی که نشان دهد در اینجا، به متناهی‌بودن X احتیاج داریم، قرار می‌دهیم، $G = \mathbf{Z}^+$ و X را مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح نامنفی می‌گیریم. حاصل جمع هر دو عدد صحیح نامنفی یک عدد صحیح نامنفی است، و به‌عکس، هر عدد صحیح نامنفی n مجموع دو عدد صحیح نامنفی است، چرا که $n = 0 + n$. بنابراین $X^2 = X$. اما X یک زیرگروه $\mathbf{Z}^+$ نیست.

بنابر ۱۸.۳ به‌ازای هر $H \leqslant G$، $\{H\}$ زیرگروهی است از نیم‌گروه $\mathscr{Q}(G)$ از مرتبهٔ ۱ (و هنگامی که G یک گروه متناهی باشد، هر زیرگروه $\mathscr{Q}(G)$ از مرتبهٔ ۱، به‌ازای یک $H \leqslant G$ به صورت $\{H\}$ خواهد بود). می‌خواهیم زیرگروههای دیگری از $\mathscr{Q}(G)$ را تعیین کنیم که با زیرگروههای نرمال G در ارتباط‌اند. بعداً وقتی G یک گروه متناهی باشد خواهیم توانست مشخصات ساده‌ای از تمام زیرگروههای $\mathscr{Q}(G)$ به دست دهیم: ۵۷.۳ را ببینید.

ابتدا قضیهٔ ۳.۳ را دوباره بیان می‌کنیم:

۱۹.۳ فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in G$، $Hg = gH$.

۱۰۱. (گ. هاروکس) X را یک زیرمجموعهٔ متناهی و ناتهی از G می‌گیریم؛ مثلاً $X = \{x_۱, \cdots, x_n\}$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. فرض می‌کنیم که هرگاه $۱ \leqslant i \leqslant j \leqslant n$، $x_i x_j \in X$.

(i) با استقرا بر m ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت m و به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، $x_i^m \in X$.

(ii) به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، نتیجه بگیرید که x_i دارای مرتبهٔ متناهی است و $x_i^{-۱} \in X$.

(iii) هرگاه $x_i X = X$ آنگاه نتیجه بگیرید که $x_i^{-۱} X = X$.

(iv) سپس با استقرا بر j ثابت کنید که به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, n$، $x_j X = X$.

(v) به موجب ۱۸.۳ نتیجه بگیرید که $X \leqslant G$.

*۱۰۲ هرگاه $H \leqslant G$ و $|G : H| = ۲$ آنگاه $H \trianglelefteq G$.

۱۰۳. فرض می‌کنیم (صفحهٔ اقلیدسی) $X = E^۲$، همچنین قرار می‌دهیم $G = \mathrm{Isom}\, X$، $T = \mathrm{Tr}\, X$ و $H = T \cup \bigcup_{s \in X} \mathrm{Rot}(X; s)$. در این صورت، بنابر ۲۳.۲ خواهیم داشت $|G : H| = ۲$.

(i) فرض می‌کنیم $\tau \in H$. در این صورت τ هیچ نقطه‌ای از X را ثابت نگه نمی‌دارد اگر و تنها اگر $۱ \neq \tau \in T$.

(ii) فرض می‌کنیم $\sigma, \tau \in G$. هرگاه $\sigma^{-۱}\tau\sigma$ نقطه‌ای از X را ثابت نگه دارد آنگاه τ نیز نقطه‌ای از X را ثابت نگه می‌دارد.

(iii) $T \trianglelefteq G$. (راهنمایی. ۱۰۲ را به‌کار برید)

۲۰.۳ فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ و G/K معرف مجموعهٔ تمام هم‌مجموعه‌های K در G است. (بنابر ۱۹.۳، لازم نیست 'هم‌مجموعه‌ها' را با چپ یا راست مشخص کنیم.) در این صورت G/K زیرگروهی است از نیم‌گروه $\mathcal{Q}(G)$، که گروه خارج‌قسمتی (یا گروه سازه‌یی) G به‌وسیلهٔ K نامیده می‌شود. در G/K به‌ازای هر $x, y \in G$ داریم

$$(xK)(yK) = xyK,$$

K عضو همانی G/K است، و

$$(xK)^{-۱} = x^{-۱}K \quad (\text{به‌ازای } x, y \in G)$$

هرگاه G آبلی باشد، آنگاه G/K نیز آبلی است.

توجه. G/K زیرگروه G نیست: بلکه G/K گروهی است که از ضرب برخی از زیرمجموعه‌های G تشکیل شده است.

برهان فرض می‌کنیم $x, y \in G$. در این صورت بنابر ۳.۳ و ۱۸.۳ در $\mathcal{Q}(G)$،

$$(xK)(yK) = xy(y^{-۱}Ky)K = xyKK = xyK,$$

لذا مجموعهٔ G/K تحتِ ضربِ تعریف‌شده در $\mathcal{Q}(G)$ بسته است. به‌ویژه

$$(xK)K = xK = K(xK),$$

در نتیجه G/K دارای عضو همانی K است. به‌علاوه

$$(xK)(x^{-۱}K) = K = (x^{-۱}K)(xK),$$

در نتیجه $x^{-۱}K$ عضو وارون xK در G/K است.

بلافاصله از این تعریف نتیجه می‌گیریم:

۲۱.۳ $G/۱ \cong G$ و $G/G \cong ۱$.

فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، در این صورت بنابه تعریف G/K،

$$|G/K| = |G : K|,$$

یعنی شاخص K در G. ازاین‌رو داریم:

۲۲.۳ (رک. ۷.۱) هرگاه $K \trianglelefteq G$ و G یک گروه متناهی باشد آنگاه $|G/K| = |G|/|K|$.

۱۰۴. فرض می‌کنیم $K \leqslant G$. هرگاه مجموعهٔ تمام هم‌مجموعه‌های چپ K در G، یک زیرگروه از $\mathcal{Q}(G)$ را تشکیل دهد، آنگاه $K \trianglelefteq G$. (این قضیه عکس ۲۰.۳ است.)

*۱۰۵. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ با $|G/K| = n < \infty$.

(i) در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، $g^n \in K$.

(ii) هرگاه $g \in G$ و به‌ازای عدد صحیحی مثل m که $(m,n) = 1$، $g^m \in K$ آنگاه $g \in K$. (ر.ک. ۱۲).

*۱۰۶. فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$، با $|K| = m < \infty$. همچنین فرض می‌کنیم $x \in G$ و n یک عدد صحیح مثبتی باشد که $(m,n) = 1$.

(i) هرگاه $o(x) = n$ آنگاه $o(xK) = n$ (که در آن xK یک عضو گروه G/K در نظر گرفته شده است.)

(ii) هرگاه $o(xK) = n$ آنگاه عضوی مانند $y \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $o(y) = n$ و $xK = yK$.

*۱۰۷. با استقراء بر $|G|$ ثابت کنید که هرگاه G یک گروه آبلی متناهی باشد، به‌طوری‌که p، $|G|$ را بشمارد، آنگاه G عضوی از مرتبهٔ p دارد. (راهنمایی. اگر G یک زیرگروه نابدیهی حقیقی مثل K داشته باشد، آنگاه چون p اول است، یا p، $|K|$ را می‌شمارد و یا p، $|K|$ را نمی‌شمارد و $|G/K|$ را می‌شمارد. در حالت دوم از ۱۰۶ (ii) استفاده کنید.)

*۱۰۸. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ و $\bar{G} = G/K$. همچنین به‌ازای هر زیرمجموعهٔ X از G قرار می‌دهیم $\bar{X} = \{xK : x \in X\} \subseteq \bar{G}$.

(i) هرگاه X مجموعه‌ای از مولدهای G باشد، $\bar{X}$ نیز مجموعه‌ای از مولدهای $\bar{G}$ خواهد بود. به‌ویژه اگر G یک گروه nمولدی باشد، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، آنگاه $\bar{G}$ یک گروه nمولدی خواهد بود.

(ii) هرگاه X زیرمجموعه‌ای از G باشد، به‌طوری‌که $\bar{X}$ یک مجموعه از مولدهای $\bar{G}$ باشد، و اگر Y مجموعه‌ای از مولدهای K باشد، آنگاه $X \cup Y$ مجموعه‌ای از مولدهای G خواهد بود. به‌ویژه اگر K یک گروه mمولدی و G/K یک گروه nمولدی باشد که n, m اعدادی صحیح مثبت‌اند، آنگاه G یک گروه $(m+n)$مولدی خواهد بود.
(راهنمایی. از ۲۸.۲ استفاده کنید.)

*۱۰۹. فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $H \cap K \trianglelefteq G$ (۸.۳). نشان دهید که می‌توان یک نگاشت $\psi : G/(H \cap K) \to (G/H) \times (G/K)$ را با ضابطهٔ

$$\psi : g(H \cap K) \mapsto (gH, gK) \qquad (\text{به‌ازای هر } g \in G)$$

تعریف کرد، و ψ همریختی یک به یک است، لذا $G/(H \cap K)$ را می‌توان در $(G/H) \times (G/K)$ نشانید. نتیجه بگیرید که هرگاه G/H و G/K هر دو آبلی باشند آنگاه $G/(H \cap K)$ نیز آبلی است.

۱۱۰. فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. به‌ازای هر $\sigma \in \Sigma_X$، زیرمجموعهٔ $s(\sigma)$ از X را به صورت

$$s(\sigma) = \{x \in X : x\sigma \neq x\}$$

تعریف می‌کنیم.

(الف) فرض می‌کنیم $\sigma, \tau \in \Sigma_X$. در این صورت

(i) $s(\sigma^{-1}) = s(\sigma)$.

(ii) $s(\sigma\tau) \subseteq s(\sigma) \cup s(\tau)$.

(iii) $s(\sigma^{-1}\tau\sigma) = \{x\sigma : x \in s(\tau)\}$.

(iv) هرگاه $s(\sigma) \cap s(\tau) = \varnothing$، آنگاه $\sigma\tau = \tau\sigma$.

(ب) قرار می‌دهیم $\Sigma_{(X)} = \{\sigma \in \Sigma_X : |s(\sigma)| < \infty\}$.
در این صورت $\Sigma_{(X)} \trianglelefteq \Sigma_X$. گروه را گروه متقارن منحصر بر X می‌نامند.
به‌علاوه $\Sigma_{(X)} = \Sigma_X$ اگر و تنها اگر $|X| < \infty$؛ و اگر X نامتناهی باشد، آنگاه $\Sigma_{(X)}$ یک گروه نامتناهی است که مرتبهٔ هر عضوش متناهی است، وگروه خارج‌قسمتی $\Sigma_X/\Sigma_{(X)}$ نیز نامتناهی است.
(راهنمایی. می‌توان فرض کرد که اگر X نامتناهی باشد، آنگاه یک نگاشت یک به یک از $\mathbf{Z}$ به توی X وجود دارد.)

نتیجهٔ زیربنیادی است.

۲۳.۳ فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت نگاشت $\nu : G \to G/K$ که به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$\nu : g \mapsto gK$$

تعریف می‌شود یک همریختی پوشاست و $\operatorname{Ker} \nu = K$. نگاشت ν را همریختی طبیعی (یا کانونی) از G بر روی G/K می‌نامند.

برهان اینکه ν یک همریختی پوشاست، بلافاصله از ۲۰.۳ نتیجه می‌شود. حال فرض می‌کنیم $g \in G$. در این صورت $g \in \operatorname{Ker} \nu$ اگر و تنها اگر $gK = K$ (عضو همانی G/K)، یعنی اگر و تنها اگر $g \in K$. ازاین‌رو $\operatorname{Ker} \nu = K$.

نتیجهٔ اخیر نکته‌ای را که قبلاً متذکر شده بودیم ثابت می‌کند، یعنی زیرگروههای نرمال G دقیقاً هسته‌های همریختیهایی از G به گروههای دیگرند. اکنون شرح حلقه‌های اتصال زیرگروههای نرمال، گروههای خارج‌قسمتی و همریختیها را با مرتبط ساختن یک همریختی دلخواه به یک همریختی طبیعی مناسب تمام می‌کنیم.

۲۴.۳ قضیهٔ بنیادی همریختیها فرض می‌کنیم $\varphi : G \to H$ یک همریختی باشد و نیز (بنابر ۹.۳) $K = \operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq G$. همچنین ν را همریختی طبیعی از G بر روی G/K می‌گیریم. در این صورت یک همریختی یک به یکِ $\psi : G/K \to H$ وجود دارد به قسمی که $\varphi = \nu\psi$. به‌ویژه $\operatorname{Im}\varphi \cong G/\operatorname{Ker}\varphi$.

برهان نگاشت

$$\psi : G/K \to H$$

را با ضابطهٔ

$$\psi : gK \mapsto g\varphi \qquad (\text{به‌ازای هر } g \in G)$$

تعریف می‌کنیم. باید خوشتعریفی ψ را بررسی کنیم: یعنی اگر $x, y \in G$ و $xK = yK$ آنگاه $x\varphi = y\varphi$. اما $xK = yK$، اگر و تنها اگر $x^{-1}y \in K$، یعنی اگر و تنها اگر $(x^{-1}y)\varphi = 1$. به موجب ۹.۲ این رابطه برقرار خواهد بود اگر و تنها اگر $(x\varphi)^{-1}(y\varphi) = 1$، یعنی اگر و تنها اگر $x\varphi = y\varphi$. این تساوی نشان می‌دهد که ψ خوشتعریف است و علاوه‌براین یک به یک نیز هست. از این گذشته ψ یک همریختی است، زیرا اگر $x, y \in G$، آنگاه

$$((xK)(yK))\psi = (xyK)\psi = (xy)\varphi = (x\varphi)(y\varphi).$$

به‌علاوه داریم

$$x\nu\psi = (xK)\psi = x\varphi.$$

این تساوی به‌ازای هر $x \in G$ برقرار است، و در نتیجه

$$\nu\psi = \varphi.$$

سرانجام، بنابر ۱۰.۲، $G/K \cong \operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\varphi$.

اکنون قضیهٔ بنیادی را با چند مثال روشن می‌کنیم.

۲۵.۳ مطابق ۱۴.۲، به‌ازای عدد صحیح مثبت n به همریختی پوشای

$$\nu_n : \mathbf{Z}^+ \to C_n$$

که به‌ازای هر $x \in \mathbf{Z}^+$ با ضابطهٔ $\nu_n : x \mapsto e^{2\pi x i/n}$ تعریف می‌شود، اشاره می‌کنیم. در این صورت $\operatorname{Ker}\nu_n = \{nx : x\mathbf{Z}^+\}$. این زیرگروه از $\mathbf{Z}^+$ را با $n\mathbf{Z}^+$ نمایش می‌دهیم: $n\mathbf{Z}^+$ مرکب است از تمام مضارب صحیح n. اکنون بنابر قضیهٔ بنیادی خواهیم داشت

$$C_n = \operatorname{Im}\nu_n \cong \mathbf{Z}^+/\operatorname{Ker}\nu_n = \mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+.$$

لذا $\mathbf{Z}^+$ به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n دارای یک گروه خارج‌قسمتی از مرتبهٔ n است.

اینک قادریم تمام زیرگروهها و تمام گروههای خارج‌قسمتی $\mathbf{Z}^+$ را رده‌بندی کنیم. یادآوری می‌کنیم که، چون $\mathbf{Z}^+$ آبلی است، هر زیرگروه $\mathbf{Z}^+$ در $\mathbf{Z}^+$ نرمال است و بنابراین دارای یک گروه خارج‌قسمتی متناظر خواهد بود. فرض می‌کنیم

$$0 < H \leqslant \mathbf{Z}^+.$$

در این صورت H اعداد صحیح مثبت را شامل است، زیرا اگر $h \in H$ آنگاه همچنین $-h \in H$. n را کوچکترین عدد صحیح مثبت متعلق به H می‌گیریم. (در اینجا از اصل خوشترتیبی اعداد صحیح مثبت استفاده می‌کنیم.) پس H، شامل n و هر مضرب صحیح n است: یعنی $n\mathbf{Z}^+ \leqslant H$. فرض می‌کنیم $h \in H$، بنابر الگوریتم تقسیم درمورد اعداد صحیح، اعداد صحیحی چون q و r وجود دارند به‌طوری‌که $h = nq + r$ و $0 \leqslant r < n$. ازآنجایی‌که $nq \in n\mathbf{Z}^+ \leqslant H$، $r = h - nq \in H$. حال با توجه به انتخاب n نتیجه می‌گیریم که $r = 0$. ازاین‌رو $h \in n\mathbf{Z}^+$. این رابطه ثابت می‌کند که $H = n\mathbf{Z}^+$.

لذا تنها زیرگروههای نابدیهی $\mathbf{Z}^+$ زیرگروههای $n\mathbf{Z}^+$ هستند، یکی به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n. به‌علاوه با نمادگذاری ۱۱.۲، $\mathbf{Z}^+ \cong \operatorname{Im}\lambda_n = n\mathbf{Z}^+$. ما نشان داده‌ایم که $\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+ \cong C_n$؛ و البته $\mathbf{Z}^+/0 \cong \mathbf{Z}^+$. باید توجه داشته باشیم که هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتی $\mathbf{Z}^+$ دوری است؛ و همچنین هر زیرگروه $\mathbf{Z}^+$ یا متناهی است که در این حالت ۰ است، و یا دارای گروه خارج‌قسمتی متناهی است.

می‌توانیم این را با گروه (آبلی) $\mathbf{Q}^+$ مقایسه کنیم. در اینجا $\mathbf{Z}^+$ یک زیرگروه نامتناهی $\mathbf{Q}^+$ است، و خارج‌قسمت $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$ نیز یک گروه نامتناهی است: زیرا اگر a، b، c، d اعداد صحیح مثبتی باشند با $b \neq 0 \neq d$ آنگاه در $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$ خواهیم داشت

$$\frac{a}{b} + \mathbf{Z}^+ = \frac{c}{d} + \mathbf{Z}^+$$

اگر و تنها اگر $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ یک عدد صحیح باشد.

(در این حالت، هم‌مجموعه‌ها به‌طور جمعی نوشته می‌شوند زیرا عمل گروهی در $\mathbf{Q}^+$ جمعی

است.) لذا، به‌عنوان مثال، $\mathbf{Z}^+$، $\frac{1}{2}+\mathbf{Z}^+$، $\frac{1}{3}+\mathbf{Z}^+$، $\frac{1}{4}+\mathbf{Z}^+$، $\cdots$ عضوهای متمایز $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$ هستند. گروه $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$ را گروه جمعی اعداد گویا به پیمانهٔ ۱ می‌نامند.

۲۶.۳ فرض می‌کنیم U معرف گروه دایره‌یی باشد (۳۲.۲ را ببینید)، و نگاشت

$$\eta : \mathbf{R}^+ \to U$$

را به‌ازای هر $x \in \mathbf{R}^+$ با ضابطهٔ $\eta : x \mapsto e^{2\pi x i}$ تعریف می‌کنیم. روشن است که η یک همریختی پوشاست، و $\operatorname{Ker}\eta = \mathbf{Z}^+$. ازاین‌رو بنابر قضیهٔ بنیادی خواهیم داشت

$$U \cong \mathbf{R}^+/\mathbf{Z}^+.$$

۲۷.۳ فرض می‌کنیم G دارای زیرگروههای H و K باشد به‌طوری‌که $G = HK$، همچنین هر عضو H با هر عضو K جابه‌جایی‌پذیر است و $H \cap K = 1$. در این صورت بنابر ۳۴.۲ یک یکریختی $\varphi : G \to H \times K$ وجود دارد که با ضابطهٔ $\varphi : hk \mapsto (h,k)$ به‌ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم π_1 و π_2 به‌ترتیب معرف تصاویر $H \times K$ بر روی H و K باشند: ۱۱.۳ را ببینید. در این صورت بنابر ۱۱.۳ و ۱۹، $\varphi\pi_1 : G \to H$ یک همریختی پوشاست و

$$\operatorname{Ker}(\varphi\pi_1) = \{hk \in G : h = 1, k \in K\} = K.$$

ازاین‌رو بنابر قضیهٔ بنیادی خواهیم داشت

$$K \trianglelefteq G \quad \text{و} \quad G/K \cong H.$$

به‌همین‌طریق از $\varphi\pi_2 : G \to K$ نتیجه می‌گیریم

$$H \trianglelefteq G \quad \text{و} \quad G/H \cong K.$$

لذا، به‌عنوان مثال، به موجب ۳۲.۲ به‌دست می‌آوریم

$$\mathbf{C}^+/\mathbf{R}^+ \cong \mathbf{R}^+, \quad \mathbf{C}^\times/\mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \cong U,$$
$$\mathbf{C}^\times/U \cong \mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \cong \mathbf{R}^\times/C_2,$$
$$\mathbf{R}^\times/\mathbf{R}^\times_{\text{pos}} \cong C_2 \cong \mathbf{Q}^\times/\mathbf{Q}^\times_{\text{pos}},$$

و

$$\mathbf{Q}^\times/C_2 \cong \mathbf{Q}^\times_{\text{pos}}.$$

۲۸.۳ برای یک میدان F و یک عدد صحیح مثبت n، بار دیگر همریختی پوشای

$$\det : \mathrm{GL}_n(F) \to F^\times \qquad (\text{۱۷.۲ را ببینید}).$$

را در نظر می‌گیریم. در اینجا $\operatorname{Ker}\det = \{x \in \mathrm{GL}_n(F) : \det x = 1\}$. این زیرگروه نرمالِ $\mathrm{GL}_n(F)$ را گروه خطی خاصِ درجهٔ n روی F می‌نامند و با $\mathrm{SL}_n(F)$ نمایش می‌دهند. به موجب قضیهٔ بنیادی،

$$\mathrm{GL}_n(F)/\mathrm{SL}_n(F) \cong F^\times.$$

۱۱۱* فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H$ و $L \trianglelefteq K$. در این صورت $(J \times L) \trianglelefteq (H \times K)$ و

$$(H \times K)/(J \times L) \cong (H/J) \times (K/L)$$

۱۱۲. فرض می‌کنیم $s \in E^2$ (صفحهٔ اقلیدسی) باشد. در این صورت (گروه دایره‌یی) $\operatorname{Rot}(E^2; s) \cong U$.

۱۱۳ F را یک میدان و n را یک عدد صحیح مثبت می‌گیریم. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $a \in F$ عضو یکتای $b \in F$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $b^n = a$. در این صورت $\mathrm{GL}_n(F) \cong F^\times \times \mathrm{SL}_n(F)$. (به‌ویژه این حکم هنگامی برقرار است که $F = \mathbf{R}$ و n فرد باشد.)

۱۱۴*. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) یک همریختی φ از G بر روی H با $\operatorname{Ker}\varphi = K$ وجود دارد.

(ii) $G/K \cong H$.

۱۱۵. (i) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ و $\alpha \in \operatorname{Aut} G$. قرار می‌دهیم $K^\alpha = \{k^\alpha : k \in K\}$. در این صورت $K \cong K^\alpha \trianglelefteq G$ و $G/K \cong G/K^\alpha$.

(ii) گروه G می‌تواند دارای زیرگروههای نرمالی چون K و L باشد به‌طوری‌که $K \cong L$، اما $G/K \ncong G/L$، و نیز می‌تواند دارای زیرگروههای نرمالی مانند H و J باشد به‌طوری‌که $G/H \cong G/J$ اما $H \ncong J$. (راهنمایی. $G = C_2 \times C_4$ را در نظر بگیرید.)

۱۱۶. گروههای غیریکریخت G_1 و G_2 با $K_1 \trianglelefteq G_1$ و $K_2 \trianglelefteq G_2$ را طوری بیابید که $K_1 \cong K_2$ و $G_1/K_1 \cong G_2/K_2$. (راهنمایی. گروههای مرتبهٔ ۴ را در نظر بگیرید.)

۱۱۷* مرکز G به صورت

$$Z(G) = \{g \in G : \text{به‌ازای هر } x \in G\text{،}\ gx = xg\}$$

تعریف می‌شود. نشان دهید که $Z(G) = \operatorname{Ker} \tau$، که $\tau : G \to \Sigma_G$ همریختیی است که در ۲۱.۲ تعریف شده است. از اینجا نتیجه بگیرید

$$Z(G) \trianglelefteq G \quad \text{و} \quad \operatorname{Inn} G \cong G/Z(G).$$

۱۱۸. $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصهٔ آبلی از G است، و هر زیرگروه H از $Z(G)$ در G نرمال است. آیا لزوماً یک‌چنین زیرگروهی مثل H در G مشخصه است؟

*۱۱۹. هرگاه $K \trianglelefteq G$ و $|K| = ۲$، آنگاه $K \leqslant Z(G)$.

*۱۲۰. فرض کنید U مجموعهٔ تمام ماتریسهایی به شکل

$$\begin{pmatrix} ۱ & a & b \\ ۰ & ۱ & c \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

باشد، که در آن a، b، c اعضای دلخواهی از میدان F هستند و ۰ و ۱ به‌ترتیب معرف صفر و عضو همانی F هستند. ثابت کنید

$$U \leqslant \mathrm{GL}_۳(F) \quad \text{و} \quad Z(U) \cong F^+ \quad \text{و} \quad U/Z(U) \cong F^+ \times F^+.$$

*۱۲۱. ثابت کنید که هرگاه $K \trianglelefteq G$ آنگاه $Z(K) \trianglelefteq G$. با یک مثال نشان دهید که $Z(K)$ لازم نیست در $Z(G)$ قرار داشته باشد.

*۱۲۲. به‌ازای $H \leqslant G$، مرکزساز H در G را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$C_G(H) = \{g \in G : gh = hg \text{ به‌ازای هر } h \in H\}$$

در این صورت $Z(G) \leqslant C_G(H) \leqslant G$.

۱۲۳. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد و F یک میدان با $n \geqslant ۲$ و $F \neq \mathbf{Z}_۲$. قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}_n(F)$ و فرض می‌کنیم H زیرگروه G، متشکل از تمام ماتریسهای قطری در G باشد (۸۰ را ببینید).

(i) ثابت کنید $C_G(H) = H$. با استفاده از ۹۱ نتیجه بگیرید که $Z(G)$ از همهٔ ماتریسهای اسکالر G تشکیل یافته است.

(ii) به‌علاوه فرض می‌کنیم که یا $n > ۲$ یا $F \neq \mathbf{Z}_۳$. قرار می‌دهیم $S = \mathrm{SL}_n(F)$. در این صورت ثابت کنید که $C_G(H \cap S) = H$ و نتیجه بگیرید که $Z(S) = S \cap Z(G)$.

۱۲۴. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant ۳$، و قرار می‌دهیم $G = D_{۲n}$ (گروه دووجهی از مرتبه‌ی $۲n$). ثابت کنید که اگر n فرد باشد، $Z(G) = ۱$ و اگر n زوج باشد $|Z(G)| = ۲$، و در حالت دوم به‌ازای $n \geqslant ۶$، $G/Z(G) \cong D_n$، و به‌ازای $n = ۴$، $G/Z(G) \cong C_۲ \times C_۲$.

*۱۲۵. اگر $G/Z(G)$ دوری باشد، G آبلی است. (و در نتیجه $Z(G) = G$). (راهنمایی. فرض کنید $G/Z(G) = \langle gZ(G) \rangle$ که $g \in G$. نشان دهید که هر عضو G به شکل $g^r z$ نشان داده می‌شود، که در آن r یک عدد صحیح است و $z \in Z(G)$.)

۱۲۶. فرض می‌کنیم $x, y \in G$ و قرار می‌دهیم $xy = z$. اگر $z \in Z(G)$ آنگاه y, x جابه‌جایی‌پذیرند.

۱۲۷. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ و $\nu : G \to G/K$ همریختی طبیعی باشد. در این صورت همریختیهای پوشای $G \to G/K$ با هستهٔ K دقیقاً نگاشتهای $\nu\beta$ هستند که $\beta \in \operatorname{Aut}(G/K)$. از اینجا نتیجه بگیرید که اگر $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ و K توسط α بر روی خودش نگاشته شود آنگاه به‌ازای یک همریختیی چون $\beta \in \operatorname{Aut}(G/K)$ و $\alpha\nu = \nu\beta$.

۱۲۸. $\mathbf{C}^\times \cong \mathbf{R}^+ \times (\mathbf{R}^+/\mathbf{Z}^+)$ (ر.ک. $\mathbf{C}^+ \cong \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$).

۱۲۹. $\mathbf{C}^\times \cong \mathbf{C}^+/\mathbf{Z}^+$.

۱۳۰. $\mathbf{C}^\times/\mathbf{R}^\times \cong U/C_۲$، که در آن U گروه دایره‌یی است.

۱۳۱. فرض می‌کنیم

$$V = \{z \in \mathbf{C}^\times : \text{عدد صحیح مثبتی مانند } n \text{ وجود دارد به‌طوری‌که } z^n = ۱\}$$

که گروه ضربی تمام ریشه‌های مختلط ۱ است. در این صورت $V < U$ (گروه دایره‌یی). نشان دهید که

$$V \cong \mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+ \quad \text{و} \quad U/V \cong \mathbf{R}^+/\mathbf{Q}^+.$$

(اشاره. با توجه به نظریهٔ فضای برداری، می‌توان نشان داد که $\mathbf{R}^+/\mathbf{Q}^+ \cong \mathbf{R}^+$ و به موجب ۲۶.۳ می‌دانیم که $U \cong \mathbf{R}^+/\mathbf{Z}^+$. لذا U و $\mathbf{R}^+$، گروههای نایکریخت‌اند ــ چرا؟ــ هر یک از آنها دارای یک گروه خارج‌قسمتی است که با دیگری یکریخت است.)

*۱۳۲. $\mathbf{Z}^+$ تجزیه‌ناپذیر است (۸۱ را ببینید).

*۱۳۳. (i) هرگاه H زیرگروه حقیقی دلخواهی از $\mathbf{Q}^+$ باشد، $\mathbf{Q}^+/H$ نامتناهی است. (از ۱۰۵ استفاده کنید. حکم اخیر را با این نکته مقایسه کنید، که هرگاه K زیرگروه نابدیهی $\mathbf{Z}^+$ باشد، $\mathbf{Z}^+/K$ متناهی است.)

(ii) هر دو زیرگروه نابدیهی $\mathbf{Q}^+$ اشتراک نابدیهی دارند. ازاین‌رو $\mathbf{Q}^+$ تجزیه‌ناپذیر است (۸۱ را ببینید.)

(iii) هیچ زیرگروه حقیقیِ H از $\mathbf{Q}^+$ وجود ندارد که $\mathbf{Q}^+/H$ دوری باشد. (راهنمایی. هرگاه $H \leqslant \mathbf{Q}^+$ و $\mathbf{Q}^+/H$ دوری باشد، آنگاه بنابر (ii) $H \cap \mathbf{Z}^+ \neq 0$، سپس از (i) استفاده کنید.)

اکنون رابطهٔ موجود بین زیرگروههای یک نگارهٔ همریخت G و زیرگروههای G را در نظر می‌گیریم.

۲۹.۳ قضیه فرض می‌کنیم $\varphi : G \to \bar{G}$ یک همریختی پوشا باشد. $\mathscr{S}$ را مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای G می‌گیریم که $\operatorname{Ker}\varphi$ را شامل‌اند و فرض می‌کنیم $\bar{\mathscr{S}}$ مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای $\bar{G}$ باشد. در این صورت یک نگاشت دوسویی مانند

$$\hat{\varphi} : \mathscr{S} \to \bar{\mathscr{S}}$$

وجود دارد که با ضابطهٔ

$$\hat{\varphi} : H \mapsto H\varphi = \{h\varphi : h \in H\} \ = \bar{H} \ \text{مثلاً}$$

تعریف می‌شود. به‌علاوه به‌ازای $H \in \mathscr{S}$، $\bar{H} \trianglelefteq \bar{G}$ اگر و تنها اگر $H \trianglelefteq G$، و اگر چنین باشد،

$$\bar{G}/\bar{H} \cong G/H \quad (\text{ر.ک. ۸۷})$$

برهان محققاً $\hat{\varphi}$ نگاشتی خوشتعریف است: زیرا بنابر ۹.۲ اگر $H \leqslant G$ آنگاه $H\varphi \leqslant \bar{G}$. برای اینکه نشان دهیم $\hat{\varphi}$ دوسویی است، کافی است نشان دهیم که یک نگاشت وارون مانند

$$\hat{\psi} : \bar{\mathscr{S}} \to \mathscr{S}$$

وجود دارد. $\hat{\psi}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر $J \in \bar{\mathscr{S}}$ فرض می‌کنیم

$$\hat{\psi} : J \mapsto \{g \in G : g\varphi \in J\} = J^* \ \text{مثلاً}$$

(J^* را غالباً نگارهٔ وارون J تحت φ می‌نامند.)

در این صورت $J^* \in \mathscr{S}$. برای اثبات این مطلب ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $g \in \operatorname{Ker}\varphi$، آنگاه $g\varphi = 1 \in J$، و در نتیجه $g \in J^*$. لذا $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq J^*$. به‌علاوه اگر $g_1, g_2 \in J^*$

آنگاه بنابر ۹.۲، $(g_1 g_2^{-1})\varphi = (g_1\varphi)(g_2\varphi)^{-1} \in J$، زیرا $g_1\varphi, g_2\varphi \in J$ و $J \leqslant \bar{G}$. ازاین‌رو $g_1 g_2^{-1} \in J^*$. بنابراین $\operatorname{Ker}\varphi \leqslant J^* \leqslant G$. این رابطه نشان می‌دهد که $\hat{\psi}$ خوشتعریف است.

فرض می‌کنیم $H \in \mathscr{S}$ و $J \in \bar{\mathscr{S}}$. در این صورت

$$\begin{aligned}
H\hat{\varphi}\hat{\psi} &= \{g \in G : g\varphi \in H\hat{\varphi}\} \\
&= \{g \in G : g\varphi = h\varphi \ \ \text{به‌ازای } h \in H \text{ ی}\} \\
&= \{g \in G : h^{-1}g \in \operatorname{Ker}\varphi \ \ \text{به‌ازای } h \in H \text{ ی}\} \\
&= \{g \in G : g \in H\} \ \ (\text{زیرا } \operatorname{Ker}\varphi \leqslant H) \\
&= H,
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
J\hat{\psi}\hat{\varphi} &= \{x\varphi : x \in J\hat{\psi}\} \\
&= \{x\varphi : x \in G \ \text{و}\ x\varphi \in J\} \\
&= J \ \ (\text{زیرا } J \leqslant \bar{G} = G\varphi)
\end{aligned}$$

بنابراین $\hat{\varphi}\hat{\psi} =$ همانی $\mathscr{S}$ و $\hat{\psi}\hat{\varphi} =$ همانی $\bar{\mathscr{S}}$. ازاین‌رو $\hat{\psi}$ وارون $\hat{\varphi}$ است و بنابراین $\hat{\varphi}$ دوسویی است.

فرض می‌کنیم که $\operatorname{Ker}\varphi \leqslant H \trianglelefteq G$. در این صورت $\bar{H} \leqslant \bar{G}$ و به‌ازای هر $g\varphi \in \bar{G}$ و هر $h\varphi \in \bar{H}$ (که $g \in G$، $h \in H$)، بنابر ۹.۲ و چون $g^{-1}hg \in H$، خواهیم داشت

$$(g\varphi)^{-1}(h\varphi)(g\varphi) = (g^{-1}hg)\varphi \in \bar{H}\cdot$$

ازاین‌رو $\bar{H} \trianglelefteq \bar{G}$.

به‌عکس، فرض می‌کنیم که $\bar{H} \trianglelefteq \bar{G}$ و ν همریختی طبیعی $\bar{G} \to \bar{G}/\bar{H}$ باشد. مطابق آنچه که در بالا ثابت کردیم، به‌ازای یک $H \in \mathscr{S}$، $\bar{H} = H\varphi$. اما $\varphi\nu$ یک همریختی از G بر روی $\bar{G}/\bar{H}$ است و

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker}\varphi\nu &= \{g \in G : g\varphi \in \operatorname{Ker}\nu\} \\
&= \{g \in G : g\varphi \in \bar{H}\} \\
&= \bar{H}\hat{\psi} \\
&= H\hat{\varphi}\hat{\psi} \\
&= H\cdot
\end{aligned}$$

پس $H \trianglelefteq G$ و بنابر قضیهٔ بنیادی داریم

$$\bar{G}/\bar{H} = \mathrm{Im}\varphi\nu \cong G/H.$$

۱۳۴. با نمادها و مفروضات ۲۹.۳، فرض می‌کنیم $H, K \in \mathscr{S}$. در این صورت

(i) $\overline{H \cap K} = \bar{H} \cap \bar{K}$.

(ii) $\bar{K} \leqslant \bar{H}$ اگر و تنها اگر $K \leqslant H$.

(iii) $\overline{\langle H, K\rangle} = \langle \bar{H}, \bar{K}\rangle$ (راهنمایی. از ۷۱ استفاده کنید.)

حالت خاص و مهم ۲۹.۳ زمانی پیش می‌آید که $K \trianglelefteq G$ و برای φ، همریختی طبیعی $\nu : G \to G/K = \bar{G}$ انتخاب شده باشد. در این صورت $K = \mathrm{Ker}\,\varphi$ و اگر $K \leqslant H \leqslant G$، $\bar{H} = \{hk : h \in H\} = H/K$. بنابراین داریم:

۳۰.۳ قضیهٔ یکریختی فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت هر زیرگروه G/K به شکل H/K است که $K \leqslant H \leqslant G$. علاوه‌براین $H/K \trianglelefteq G/K$ اگر و تنها اگر $H \trianglelefteq G$ و در این صورت،

$$G/K\Big/H/K \cong G/H.$$

قضیهٔ بنیادی، قضیهٔ ۳۰.۳ و قضیه‌ای را که به‌زودی در ۴۰.۳ اثبات خواهیم کرد، بعضی از مؤلفان قضایای اول، دوم و سوم یکریختی نامیده‌اند. چون اتفاق‌نظر در تخصیص این شماره‌ها وجود ندارد، ما ترجیح می‌دهیم صرفاً به ‘قضیهٔ یکریختی’ و ‘قضیهٔ یکریختی دیگر’ اشاره کنیم.

قضیهٔ ۳۰.۳ را با رده‌بندی همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتیِ گروههای دوری، روشن می‌سازیم.

۳۱.۳ می‌دانیم که هر گروه دوری نامتناهی با $\mathbf{Z}^+$ یکریخت است (۲۹)، و ما قبلاً تمام زیرگروهها و خارج‌قسمتهایِ $\mathbf{Z}^+$ را در ۲۵.۳ رده‌بندی کرده‌ایم. بنابراین باید تنها گروههای دوری متناهی را در نظر بگیریم. هر گروه دوری از مرتبهٔ متناهی n، با C_n یکریخت است (۲)، و به موجب ۲۵.۳،

$$C_n \cong \mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+.$$

بنابر ۳۰.۳ هر زیرگروه $\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+$ به شکل $H/n\mathbf{Z}^+$ است که $n\mathbf{Z}^+ \leqslant H \leqslant \mathbf{Z}^+$. به‌علاوه به موجب ۲۵.۳، هر زیرگروه نابدیهی $\mathbf{Z}^+$ به شکل $m\mathbf{Z}^+$ است که در آن m یک عدد صحیح مثبت

است. به‌سادگی ملاحظه می‌شود که $n\mathbf{Z}^+ \leqslant m\mathbf{Z}^+$ اگر و تنها اگر m، n را بشمارد. ازاین‌رو زیرگروههای $\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+$، به‌ازای هر m که n را بشمارد، دقیقاً همان زیرگروههای $m\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+$ هستند.

به موجب ۳۰.۳، هنگامی که m یک مقسوم‌علیه n باشد، داریم

$$\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+\Big/m\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+ \cong \mathbf{Z}^+/m\mathbf{Z}^+ \cong C_m.$$

علاوه‌براین، چون $|\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+| = n$ و $|\mathbf{Z}^+/m\mathbf{Z}^+| = m$، به موجب ۲۲.۳،

$$|m\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+| = n/m.$$

همچنین بنابر ۲۵.۳ و ۱۱.۲، $m\mathbf{Z}^+ \cong \mathbf{Z}^+$، و چون هر خارج‌قسمت از Z^+ دوری است، $m\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+$ نیز دوری خواهد بود. لذا هر زیرگروه $\mathbf{Z}^+/n\mathbf{Z}^+$ دوری است. به‌طور خلاصه داریم:

۳۲.۳ همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی هر گروه دوری دوری‌اند. اگر G یک گروه دوری از مرتبهٔ متناهی n باشد، آنگاه به‌ازای هر مقسوم‌علیه s از n، G فقط یک زیرگروه H از مرتبهٔ s دارد، همچنین H دوری است و G/K نیز دوری خواهد بود از مرتبهٔ n/s.

۱۳۵. فرض می‌کنیم G گروهی است آبلی از مرتبهٔ متناهی n. با استقراء بر n ثابت کنید که به‌ازای هر مقسوم‌علیه n مثل m، G دارای زیرگروهی است از مرتبهٔ m. (ر.ک. ۱۸۵ و ۳۲.۵ و ۶۷۴، ۶۷۵، ۶۷۶. راهنمایی. اگر $m > 1$، فرض کنید p یک مقسوم‌علیه اول m باشد. برای اینکه نشان دهید G دارای زیرگروهی مانند K از مرتبهٔ p است، از ۱۰۷ استفاده کنید، و سپس G/K را در نظر بگیرید.)

*۱۳۶. K را یک زیرگروه مشخصهٔ G می‌گیریم.

(i) فرض می‌کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}\,G$ و $\bar{\alpha}$ را نگاشتی می‌گیریم که از G/K به توی خودش با ضابطهٔ

$$\bar{\alpha} : gK \mapsto g^{\alpha}K \quad (\text{به‌ازای هر } g \in G)$$

تعریف شده است. در این صورت $\bar{\alpha}$ خوشتعریف و یک خودریختی است از G/K.

علاوه‌براین، نگاشت $\alpha \mapsto \bar{\alpha}$ یک همریختی است از $\mathrm{Aut}\,G$ به‌توی $\mathrm{Aut}(G/K)$.

(ii) فرض می‌کنیم $K \leqslant H \leqslant G$. هرگاه H/K مشخصه در G/K باشد، آنگاه H مشخصه در G است. (اشاره. عکس (ii) برقرار نیست: ۱۳۷ را ببینید. ر.ک. ۳۰.۳)

۱۳۷. قرار می‌دهیم $G = D_8$، گروه دووجهی از مرتبهٔ ۸ و $K = Z(G)$. در این صورت $|K| = 2$ و $G/K \cong C_2 \times C_2$: ۱۲۴ را ببینید. فرض می‌کنیم H زیرگروه دوری یکتای G از مرتبهٔ ۴ باشد (۵۹).

نشان دهید که $H < K$، و نیز نشان دهید H و K زیرگروههای مشخصهٔ G هستند، اما H/K مشخصه در G/K نیست (رک. ۱۳۶)

*۱۳۸. (i) هر زیرگروه یک گروه دوری متناهی G مشخصه در G است.

(ii) فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n > 1$ و $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}$، تجزیهٔ n به صورت حاصلضرب اعداد اول باشد که در آن s، m_1، m_2، $\cdots$، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند و p_1، $\cdots$، p_s اعداد اول متمایزند. به‌ازای هر $i = 1, \cdots, s$ قرار می‌دهیم $q_i = p_i^{m_i}$. می‌دانیم (۸۱) که

$$\mathbf{Z}_n^+ \cong \mathbf{Z}_{q_1}^+ \times \mathbf{Z}_{q_2}^+ \times \cdots \times \mathbf{Z}_{q_s}^+ .$$

ثابت کنید که

$$\mathbf{Z}_n^\times \cong \mathbf{Z}_{q_1}^\times \times \mathbf{Z}_{q_2}^\times \times \cdots \times \mathbf{Z}_{q_s}^\times .$$

(راهنمایی. از ۴۶ و ۹۴ استفاده کنید.)

*۱۳۹. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد.

(i) G را گروهی دوری از مرتبهٔ n می‌گیریم و به‌ازای هر مقسوم‌علیه n چون s، فرض می‌کنیم G_s زیرگروه یکتای G از مرتبهٔ s باشد (۳۲.۳ را ببینید). در این صورت

$$G_s = \{x \in G : x^s = 1\} .$$

(ii) $\sum_s \varphi(s) = n$، که در آن مجموعیابی روی تمام مقسوم‌علیه‌های s از n صورت می‌گیرد و φ تابع اویلر است (۵ را ببینید).

(iii) فرض می‌کنیم G گروهی از مرتبهٔ n باشد، به‌طوری‌که به‌ازای هر مقسوم‌علیه n چون s، G حداکثر یک زیرگروه از مرتبهٔ s داشته باشد. در این صورت G دوری است. (۱۵.۹ (i) را نیز ببینید. راهنمایی. برای اینکه نشان دهید G باید عضوی از مرتبهٔ n داشته باشد، از (ii) و ۵ استفاده کنید.)

*۱۴۰. فرض می‌کنیم G گروهی نابدیهی باشد. زیرگروه حقیقی M از G را زیرگروه ماکسیمال G می‌نامند، اگر زیرگروهی مانند L وجود نداشته باشد که $M < L < G$.

(i) فرض کنید $K \leqslant M < G$، که $K \trianglelefteq G$. در این صورت M/K زیرگروه ماکسیمال G/K است اگر و تنها اگر M زیرگروه ماکسیمال G باشد.

(ii) اگر G متناهی باشد، آنگاه هر زیرگروه حقیقی G در یک زیرگروه ماکسیمال G قرار دارد.

(iii) هر زیرگروه حقیقی $\mathbf{Z}^+$ در یک زیرگروه ماکسیمال $\mathbf{Z}^+$ قرار دارد. (راهنمایی. ۲۵.۳ را ببینید و از (i) و (ii) استفاده کنید.)

(iv) $\mathbf{Q}^+$ زیرگروه ماکسیمال ندارد. (راهنمایی. از (i) و ۲۹ (i) و ۱۳۳ (i) استفاده کنید.)

(v) اگر $M < G$ و به‌ازای عدد اولی چون p داشته باشیم $|G : M| = p$، آنگاه M یک زیرگروه ماکسیمال G است. (۱۱ را ببینید.)

(vi) فرض می‌کنیم G متناهی باشد. در این صورت G دارای یک زیرگروه ماکسیمال یکتاست اگر و تنها اگر G دوری باشد و به‌ازای یک عدد اول p و یک عدد صحیح مثبت m، از مرتبهٔ p^m باشد.

۱۴۱. (i) اگر G یک گروه ناآبلی باشد، $\mathrm{Aut}\, G$ نمی‌تواند دوری باشد (راهنمایی. ۱۱۷ و ۱۲۵ را ببینید.)

(ii) گروهی متناهی چون G وجود ندارد که برای آن $\mathrm{Aut}\, G$ دوری از مرتبهٔ فرد بزرگتر از ۱ باشد. (راهنمایی. ۴۲ و ۵۲ را ببینید. اشاره. شرط متناهی بودن G در اینجا عملاً زاید است.)

۱۴۲. قرار می‌دهیم $G = D_\infty$، گروه دووجهی نامتناهی (۵۷ را ببینید.)

(i) در این صورت G تنها یک زیرگروه دوریِ H از شاخص ۲ در G دارد، و هر عضو G/H از مرتبهٔ ۲ است (رک. ۵۹).

(ii) فرض می‌کنیم $1 < K \leqslant H$. بنابر ۲۵.۳ می‌دانیم که H/K متناهی، مثلاً از مرتبهٔ n است. در این صورت $K \trianglelefteq G$ و اگر $n \geqslant 3$، $G/K \cong D_{2n}$، و برای $n = 2$، $G/K \cong C_2 \times C_2$، و نیز برای $n = 1$، $G/K \cong C_2$.

(iii) فرض می‌کنیم $J \leqslant G$ که $J \nleqslant H$. در این صورت $|J : H \cap J| = 2$ و اگر $H \cap J \neq 1$ آنگاه $J \cong D_\infty$.

(iv) قرار می‌دهیم $H = \langle h \rangle$. بنابر ۲۵.۳، زیرگروههای نابدیهی H، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n دقیقاً زیرگروههایی هستند به شکل $H_n = \langle h^n \rangle$. پس تنها nزیرگروه مجزای J از G وجود دارد به‌طوری‌که $J \nleqslant H$ و $H \cap J = H_n$. به‌علاوه $J \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $n \leqslant 2$.

(v) تنها زیرگروههای نرمال حقیقی G زیرگروههای H و دو زیرگروه از شاخص ۲ در G هستند که هر یک با D_∞ یکریختند.

(vi) هر زیرگروه نابدیهی G، با D_∞ یا C_∞ و یا C_2 یکریخت است، و هر خارج‌قسمت

نابدیهی حقیقی G، به‌ازای عدد صحیحی مانند $n \geqslant 3$ با D_{2n}، $C_2 \times C_2$ و یا C_2 یکریخت است.

(vii) با استفاده از ۳۰.۳ ، یا به هر طریق دیگر، همهٔ زیرگروهها، زیرگروههای نرمال و گروههای خارج‌قسمتی D_{2n} را به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant 3$، رده‌بندی کنید.

۱۴۳ فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 3$.

(i) اگر به‌ازای یک عدد صحیح فردِ m، $n = 2m$، آنگاه $D_{2n} \cong D_n \times C_2$.

(ii) اگر n دو برابر یک عدد صحیح فرد نباشد، D_{2n} تجزیه‌ناپذیر است. (۸۱ را ببینید.)

۱۴۴* به‌ازای هر عدد اول p، فرض می‌کنیم

$$C_{p^\infty} = \{z \in \mathbf{C}^\times : \text{عدد صحیح مثبتی مانند } n \text{ وجود داشته باشد به‌طوری‌که } z^{p^n} = 1\}.$$

در این صورت $C_{p^\infty} < V$ (گروه ضربی همهٔ ریشه‌های مختلط ۱) و نیز

$$1 < C_p < C_{p^2} < C_{p^3} < \cdots < C_{p^\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_{p^n}.$$

ثابت کنید که هر زیرگروه حقیقی C_{p^∞} به‌ازای یک عدد صحیح نامنفی چون n، برابر C_{p^n} است و همین‌طور $C_{p^\infty}/C_{p^n} \cong C_{p^\infty}$. لذا C_{p^∞} گروهی است نامتناهی که هر زیرگروه حقیقی‌اش متناهی و هر خارج‌قسمت نابدیهی‌اش با $C_p\infty$ یکریخت است. (مقایسه کنید با ویژگیهای $\mathbf{Z}^+$ در ۲۵.۳) نشان دهید که C_{p^∞} زیرگروه ماکسیمال ندارد. (۱۴۰ را ببینید.)

گروههای C_{p^∞} را به‌ازای هر p، گروههای شبه‌دوری (یا گروههای پروفر[1]) می‌نامند.

قبلاً دیده‌ایم که هر زیرگروه یک گروه ۱مولدی گروهی است ۱مولدی (۳۲.۳) و همچنین به‌ازای هر عدد صحیح مثبتِ n، هر گروه خارج‌قسمتی از یک گروه nمولدی، گروهی است nمولدی (۱۰۸). در حالت کلی نشان خواهیم داد که زیرگروههای، گروههای nمولدی لزوماً گروههای nمولدی نیستند. یک گروه را متناهی مولد گویند اگر شامل مجموعه‌ای متناهی از مولدها باشد. ما گروهی ۲مولدی خواهیم ساخت با زیرگروهی که حتی متناهی مولد نیست.

قبل از انجام این کار به یک ویژگی جالبِ $\mathbf{Q}^+$ اشاره می‌کنیم.

۳۳.۳ هر زیرگروه متناهی مولد $\mathbf{Q}^+$ دوری است. ازاین‌رو $\mathbf{Q}^+$ متناهی مولد نیست.

1. Prüfer

برهان X را یک زیرمجموعهٔ متناهی ناتهی از $\mathbf{Q}^+$، مثلاً

$$X = \left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \cdots, \frac{a_r}{b_r}\right\},$$

می‌گیریم، که در آن a_1، $\cdots$، a_r، b_1، $\cdots$، b_r اعدادی صحیح‌اند و می‌توان b_1، $\cdots$، b_r را مثبت فرض کرد. بنابر ۲۸.۲ و این واقعیت که $\mathbf{Q}^+$ آبلی است (۶۹ را ببینید)، داریم

$$\langle X\rangle = \left\{n_1\frac{a_1}{b_1} + n_2\frac{a_2}{b_2} + \cdots + n_r\frac{a_r}{b_r} : n_1, \cdots, n_r \in \mathbf{Z}\right\}.$$

ازاین‌رو هر عضو $\langle X\rangle$ یک عدد گویا به شکل $a/b_1b_2\cdots b_r$ است، که در آن $a \in \mathbf{Z}$. لذا خواهیم داشت $\langle X\rangle \leqslant \langle 1/b_1b_2\cdots b_r\rangle$، یک زیرگروه دوری از $\mathbf{Q}^+$. ازاین‌رو بنابر ۳۲.۳، $\langle X\rangle$ زیرگروهی است دوری از $\mathbf{Q}^+$. چون $\mathbf{Q}^+ \ncong \mathbf{Z}^+$ (۳۲)، $\mathbf{Q}^+$ دوری نیست (۲۹) و لذا متناهی مولد نیست.

۳۴.۳ فرض می‌کنیم H_1، H_2، H_3، $\cdots$ دنباله‌ای از زیرگروههای G باشد به‌طوری‌که $H_1 \leqslant H_2 \leqslant H_3 \leqslant \cdots$. این دنباله را یک دنبالهٔ صعودی از زیرگروهها می‌نامند. قرار می‌دهیم $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. در این صورت $H \leqslant G$.

برهان بدون تردید $H \neq \varnothing$. فرض می‌کنیم $h_1, h_2 \in H$. در این صورت اعداد صحیح مثبتی چون i_1، i_2 وجود دارند به‌طوری‌که $h_1 \in H_{i_1}$ و $h_2 \in H_{i_2}$. قرار می‌دهیم $j = \max\{i_1, i_2\}$. در این صورت $H_{i_1} \leqslant H_j$ و $H_{i_2} \leqslant H_j$، و در نتیجه $h_1, h_2, \in H_j$. چون $H_j \leqslant G$ و $h_1h_2^{-1} \in H_j$، بنابراین خواهیم داشت $h_1h_2^{-1} \in H$. ازاین‌رو $H \leqslant G$.

۳۵.۳ می‌توانیم بگوییم که $\mathbf{Q}^+$ اجتماع دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای دوری است (لزوماً زیرگروههای حقیقی، زیرا $\mathbf{Q}^+$ دوری نیست.) برای اثبات این مطلب، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، قرار می‌دهیم $H_n = \langle 1/n!\rangle \leqslant \mathbf{Q}^+$. در این صورت $\mathbf{Z}^+ = H_1 < H_2 < H_3 < \cdots$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \mathbf{Q}^+$ زیرا، هر عدد گویا به صورت a/b نمایش داده می‌شود که در آن a و b اعداد صحیح‌اند و $b > 0$، بنابراین

$$\frac{a}{b} = (b-1)!a \cdot \frac{1}{b!} \in H_b.$$

به‌عنوان مثالی دیگر، اشاره می‌کنیم که گروه C_{p^∞} که، در ۱۴۴ تعریف شده، اجتماع دنباله‌ای صعودی است از زیرگروههای دوری حقیقی‌اش.

روشن است که هر گروهی که اجتماع دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای حقیقی‌اش باشد، باید نامتناهی باشد. درحقیقت می‌توانیم ثابت کنیم

۳۶.۳ یک گروه متناهی مولد نمی‌تواند اجتماع دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای حقیقی‌اش باشد.

برهان قرار می‌دهیم $G = \langle X \rangle$، که X یک زیرمجموعهٔ متناهی ناتهی از G است. فرض می‌کنیم که $H_1 \leqslant H_2 \leqslant H_3 \leqslant \cdots$ دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای G باشد که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت i، $H_i < G$ و $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = G$. در این صورت به‌ازای هر $x \in X$، عدد صحیح مثبتی چون $i(x)$ وجود دارد به‌طوری‌که $x \in H_{i(x)}$. قرار می‌دهیم $j = \max\{i(x) : x \in X\}$. پس به‌ازای هر $x \in X$، $x \in H_j$، و در نتیجه خواهیم داشت

$$G = \langle X \rangle \leqslant H_j < G,$$

که یک تناقض است.

قضیهٔ اخیر برهان دیگری برای متناهی مولد نبودن $\mathbf{Q}^+$ است. اکنون نشان می‌دهیم:

۳۷.۳ یک گروه ۲ مولدی ممکن است زیرگروهی داشته باشد که متناهی مولد نباشد.

برهان یک گروه ۲ مولدیِ G را به صورت زیرگروهی از گروه متقارن $\Sigma_{\mathbf{R}}$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم نگاشتهای $x, y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}$ با ضابطه‌های

$$x : a \mapsto a + 1 \quad \text{و} \quad y : a \mapsto 2a$$

تعریف شده باشند. پس روشن است که x و y جایگشتهایی از $\mathbf{R}$اند. قرار می‌دهیم

$$G = \langle x, y \rangle \leqslant \Sigma_{\mathbf{R}}.$$

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، داریم

$$y^n : a \mapsto 2^n a \quad \text{و} \quad y^{-n} : a \mapsto 2^{-n} a \quad \text{،}a \in \mathbf{R} \text{ به‌ازای هر}$$

قرار می‌دهیم $x_n = y^n x y^{-n} \in G$. در این صورت می‌توان تحقیق کرد که: به‌ازای هر $a \in \mathbf{R}$، $x_n : a \mapsto a + 2^{-n}$ ازاین‌رو به‌ازای هر $n > 1$،

$$x_n^2 = x_{n-1}.$$

به‌علاوه قرار می‌دهیم $H_n = \langle x_n \rangle \leqslant G$. در این صورت اگر $n > 1$، $H_{n-1} \leqslant H_n$، در حقیقت $H_{n-1} < H_n$، زیرا $x_n \notin H_{n-1}$. لذا $H_1 < H_2 < H_3 < \cdots \leqslant G$. اکنون فرض می‌کنیم $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$، بنابر ۳۴.۳، $H \leqslant G$. هر H_n زیرگروهی است حقیقی از H، زیرا $H_n < H_{n+1} \leqslant H$. ازاین‌رو به‌موجب ۳۶.۳، باوجوداینکه G گروهی است ۲مولدی ولی H متناهی مولد نیست.

اشاره. برای خوانندهٔ آشنا با عددهای اصلی نامتناهی متذکر می‌شویم که به‌سادگی ثابت می‌شود که هر گروه متناهی مولد شماراست، ولی چنین نیست که هر گروه شمارا متناهی مولد باشد، زیرا $\mathbf{Q}^+$ شماراست (یا بنابر ۳۷.۳). گ. هیگمن. ب. ه. نیومن و ه. نیومن [a58] در ۱۹۴۹ ثابت کردند که هر گروه شمارا را می‌توان در یک گروه دو مولدی نشانید. یک برهان برای این نتیجه در روتمن، [b34] ص ۲۷۵ آمده است.

۱۴۵. G را دوریِ موضعی می‌نامیم اگر هر زیرگروه متناهی مولد G دوری باشد. لذا به‌موجب ۳۳.۳، $\mathbf{Q}^+$ دوریِ موضعی است.

(i) هر گروه دوریِ موضعی آبلی است.

(ii) گروهی که اجتماع دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای دوریِ موضعی‌اش باشد، دوریِ موضعی است.

(توجه. در واقع یک گروه دوریِ موضعی است اگر و تنها اگر با زیرگروهی از یک گروه خارج‌قسمتی $\mathbf{Q}^+$ یکریخت باشد. برهانی برای این نتیجه در شنکمن [b35] § II.2 آمده است.)

۱۴۶. فرض می‌کنیم G و H همانند ۳۷.۳ تعریف شده باشند. در این صورت $H \trianglelefteq G$ و H دوری موضعی است، (۱۴۵ را ببینید) و G/H دوری است. (راهنمایی. توجه داشته باشید که برای اثبات $H \trianglelefteq G$، کافی است بنابر ۲۸.۲ نشان دهید که به‌ازای هر $h \in H$، اعضای $x^{-1}hx$، xhx^{-1}، $y^{-1}hy$ و yhy^{-1} همه به H تعلق دارند. برای اثبات اینکه G/H دوری است، از ۱۰۸ استفاده کنید.)

۱۴۷. فرض می‌کنیم که H_1، H_2، H_3، $\cdots$ دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای G است به‌طوری‌که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $H_n \cong C_{p^n}$. در این صورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \cong C_{p^n}$. (۱۴۴ را ببینید. راهنمایی. با استقرا بر n نشان دهید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، عضوی چون $x_n \in H_n$ وجود دارد به‌طوری‌که $H_n = \langle x_n \rangle$ و $x_n = x_{n+1}^p$.)

۱۴۸. فرض می‌کنیم که $\mathbf{N}$ معرف مجموعهٔ تمام اعداد صحیح مثبت باشد و قرار می‌دهیم $G = \Sigma_{(\mathbf{N})}$، گروه متقارن منحصر بر $\mathbf{N}$، (۱۱۰ را ببینید). همین‌طور به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$ قرار می‌دهیم

$$G_n = \{\sigma \in G : j\sigma = j \text{ ،} j > n \text{ که } j \in \mathbf{N} \text{ به‌ازای هر}\}.$$

در این صورت:

(i) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $G_n < G$ و $G_n \cong \Sigma_n$.

(ii) G_1، G_2، G_3، $\ldots$ دنباله‌ای است صعودی از زیرگروههای G و $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

(iii) به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، G شامل زیرگروههای دوری‌مرتبهٔ n است، اما به‌ازای هر عدد اول p، G شامل زیرگروهی یکریخت با C_{p^∞} نیست (ر.ک. ۱۴۷. راهنمایی. برخلاف حکم، فرض کنید G دارای یک زیرگروه H یکریخت با C_{p^∞} است. با نشان دادن اینکه برای هر عدد صحیح مثبت n، زیرگروه یکتای H از مرتبهٔ p شامل عضوی است مانند σ به‌طوری‌که $|s(\sigma)| \geqslant p^n$، از ۲۲ و ۲۳ استفاده کنید تا به یک تناقض برسید.)

۱۴۹. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی مولد باشد. در این صورت هر زیرگروه از شاخص متناهی در G نیز متناهی مولد است (ر.ک. ۳۷.۳. راهنمایی. فرض کنید $\{x_1, \cdots, x_n\}$ مجموعه‌ای از مولدهای G باشد، و نیز $H \leqslant G$ با $|G:H| = m$، که m, n اعداد صحیح مثبت‌اند. به‌ازای هر $j = 1, \cdots, n$ قرار دهید $x_{n+j} = x_j^{-1}$ و فرض کنید g_1، $\cdots$، g_m اعضای G باشند به‌طوری‌که $G = \bigcup_{i=1}^{m} Hg_i$، با $g_1 = 1$. در این صورت به‌ازای هر زوج مرتب (i,j) که $i \in \{1,\cdots,m\}$ و $j \in \{1,2,\cdots,2n\}$، عضو یکتای $h_{ij} \in H$ و عدد صحیح یکتای $k \in \{1,\cdots,m\}$ وجود دارند به‌طوری‌که $g_i x_j = h_{ij} g_k$. فرض کنید $h \in H$، و توجه داشته باشید که $h = g_1 h$. برای اینکه نشان دهید $h \in \langle h_{ij} : i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,2n \rangle$، از ۶۸ استفاده کنید.
اشاره. از نتیجهٔ ژرفتری منسوب به اُ. شرایر[1] [a87] نتیجه می‌شود که هرگاه H زیرگروهی از شاخص m در گروه nمولدی G باشد، که m و n اعداد صحیح مثبت‌اند، آنگاه H یک گروه $(1 + m(n-1))$مولدی است، و این کران برای تعداد مولدهای H، بهترین کران ممکن است.)

قبلاً مشاهده کرده‌ایم (۹۵) که اگر H و K زیرگروههای G باشند، HK لزوماً زیرگروه G نیست. اینک می‌گوییم که:

۳۸.۳ هرگاه $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \leqslant G$.

برهان بنابر تعریف، $\varnothing \neq HK = \{hk : h \in H, k \in K\}$.
فرض می‌کنیم $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$. در این صورت

$$(h_1k_1)(h_2k_2)^{-1} = h_1k_1k_2^{-1}h_2^{-1} = (h_1h_2^{-1})(h_2k_1k_2^{-1}h_2^{-1}) \in HK,$$

زیرا $h_1h_2^{-1} \in H$، $k_1k_2^{-1} \in K$، $h_2 = (h_2^{-1})^{-1}$ و $K \trianglelefteq G$. ازاین‌رو $HK \leqslant G$.

1. O. Schreier

۳۹.۳ فرع هرگاه $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ آنگاه $HK \trianglelefteq G$.

برهان بنابر ۳۸.۳، $HK \leqslant G$. فرض می‌کنیم $g \in G$، $h \in H$ و $k \in K$. در این صورت

$$g^{-1}hkg = (g^{-1}hg)(g^{-1}kg) \in HK.$$

ازاین‌رو $HK \trianglelefteq G$.

قضیهٔ زیر مورد استفادهٔ زیادی دارد.

۴۰.۳ قضیهٔ یکریختی دیگر فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $H \cap K \trianglelefteq H$ و $H/H \cap K \cong HK/K$.

برهان ν را همریختی طبیعی $G \to G/K$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم ν_1 تحدید ν به H باشد، در این صورت $\nu_1 : H \to G/K$ یک همریختی است که برای آن

$$\operatorname{Ker} \nu_1 = \{h \in H : h \in \operatorname{Ker} \nu\} = H \cap K.$$

ازاین‌رو بنابر قضیهٔ اساسی،

$$H \cap K \trianglelefteq H \quad \text{و} \quad H/H \cap K \cong \operatorname{Im} \nu_1.$$

به‌موجب ۳۸.۳، $K \trianglelefteq HK \leqslant G$. به‌ازای هر $h \in H$، $h\nu_1 = hK \in HK/K$. علاوه‌براین هر عضو HK/K به شکل $hkK = hK = h\nu_1$ است که $h \in H$ و $k \in K$. لذا $\operatorname{Im} \nu_1 = HK/K$.

۱۵۰. فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$. قرار می‌دهیم $\bar{G} = G/K$ و $\overline{Z(G)} = Z(G)K/K$.
نشان دهید $\overline{Z(G)} \leqslant Z(\bar{G})$. با یک مثال نشان دهید که ممکن است داشته باشیم $Z(G) \leqslant Z(\bar{G})$.

*۱۵۱. فرض می‌کنیم H، J و K زیرگروههای نرمال G باشند، به‌طوری‌که $J \leqslant H$. ثابت کنید که هرگاه $H/J \leqslant Z(G/J)$، آنگاه $HK/JK \leqslant Z(G/JK)$ (۳۹.۳ را ببینید.)

*۱۵۲. G را فرادوری می‌نامند اگر یک زیرگروه دوری نرمال مانند L داشته باشد به‌طوری‌که G/L نیز دوری باشد. به‌عنوان مثال هر گروه دووجهی، فرادوری است: ۷۹، ۱۰۲، ۱۴۲ را ببینید. ثابت کنید که هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتی از یک گروه فرادوری، نیز فرادوری است.

۱۵۳. (هولدر) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، با Gی متناهی و Kی ساده. هرگاه $|K|^2$، $|G|$ را نشمارد، K تنها زیرگروه G است که با خودش یکریخت است.

۱۵۴. هیچ زیرگروه حقیقی H از $\mathbf{Q}^+$ وجود ندارد که $\mathbf{Q}^+ = H \dotplus \mathbf{Z}^+$. (راهنمایی. از ۴۰.۳ و ۲۵.۳ و ۱۳۳ استفاده کنید. در اینجا چون عمل گروه د $\mathbf{Q}^+$ جمعی است، ما نیز از علامت جمع برای نیم‌گروه متناظر $\mathscr{Q}(\mathbf{Q}^+)$ متشکل از زیرمجموعه‌های ناتهی $\mathbf{Q}^+$، استفاده می‌کنیم.)

۱۵۵. فرض می‌کنیم H_1، H_2، H_3، $\cdots$ دنباله‌ای صعودی از زیرگروههای G باشند و قرار می‌دهیم $H = \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \leqslant G$ (۳۴.۳ را ببینید.) هرگاه H_iها به‌ازای تعداد نامتناهی عدد صحیح مثبت متمایز i ساده باشند، H نیز ساده است.
(راهنمایی. نشان دهید که هرگاه $K \trianglelefteq H$ و H_i ساده باشد آنگاه یا $H_i \cap K = 1$ و یا $H_i \leqslant K$.)

۴۱.۳ تعاریف این قرارداد خود را یادآور می‌شویم که ϖ همواره معرف مجموعه‌ای از اعداد اول است.

(i) عدد صحیح مثبت n را یک ϖ عددی می‌گوییم اگر هر مقسوم‌علیه اول n به ϖ تعلق داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که لازم نیست هر عدد اول در ϖ عملاً مقسوم‌علیه n باشد: بنابراین، به‌عنوان مثال، ۶ یک $\{2,3,5\}$ عددی است. بنابر قرارداد، ۱ به‌ازای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول یک ϖ عددی است (و اگر $\varpi = \varnothing$، ۱ تنها ϖ عددی است). اگر $\varpi = \{p\}$، تنها ϖ عددها توانهای p هستند: ۱، p، p^2، p^3، $\ldots$.

(ii) فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. G را یک ϖ گروه گوییم، اگر $|G|$ یک ϖ عددی باشد. لذا به‌عنوان مثال Σ_3 و Σ_4، $\{2,3\}$ گروه هستند، اما Σ_5، یک $\{2,3\}$ گروه نیست. ولی Σ_3، Σ_4 و Σ_5 همگی $\{2,3,5\}$ گروه هستند. اگر $\varpi = \{p\}$، یک ϖ گروه را ترجیحاً (به‌جای یک $\{p\}$ گروه) یک p گروه می‌نامند.

۴۲.۳ هرگاه G یک ϖ گروه متناهی باشد آنگاه همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G، ϖ گروه‌اند.

برهان مرتبه‌های همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G، $|G|$ را می‌شمارند.

۴۳.۳ فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد، در این صورت G دارای بزرگترین ϖ زیرگروه نرمال یکتایی است، که با $O_\varpi(G)$ نمایش می‌دهیم و ϖ رادیکال G می‌نامیم (در اینجا $O_\varpi(G)$ 'بزرگترین' است بدین‌معنی که شامل هر ϖ زیرگروه نرمال G است.)

برهان از میان همهٔ زیرگروههای نرمال G، ϖ زیرگروه نرمال K را از بزرگترین مرتبه انتخاب می‌کنیم. (ممکن است $K = 1$.) سپس H را، ϖ زیرگروه نرمال دلخواهی از G می‌گیریم. بنابر ۳۹.۳، $HK \trianglelefteq G$، و بنابر ۴۰.۳، $|HK/K| = |H/H \cap K|$، که به‌موجب ۴۲.۳، یک ϖ عددی است. ازاین‌رو $|HK| = |HK/K||K|$ که حاصلضرب دو ϖ عددی است و بنابراین خودش یک ϖ عددی خواهد بود. لذا HK یک ϖ زیرگروه نرمال G است و در نتیجه بنابر انتخاب K و نیز ازآنجایی‌که $K \leqslant HK$، $HK = K$. ازاین‌رو $H \leqslant K$. لذا K ویژگی مطلوبِ $O_\varpi(G)$ را داراست.

به‌عنوان مثال، بنابر ۷.۳،

$$O_2(\Sigma_3) = 1 \quad \text{و} \quad O_3(\Sigma_3) = \{1, (123), (132)\}.$$

۴۴.۳ فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. در این صورت G دارای کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K است که G/K یک ϖ گروه است. قرار می‌دهیم $K = O^\varpi(G)$ و $G/O^\varpi(G)$ را ϖ مانده‌یی G می‌نامیم. (در اینجا $O^\varpi(G)$ 'کوچکترین' است بدین‌معنی است که هرگاه $H \trianglelefteq G$ و G/H یک ϖ گروه باشد، آنگاه $O^\varpi(G) \leqslant H$.)

برهان از میان همهٔ زیرگروههای نرمال G، فرض می‌کنیم K ازکوچکترین مرتبه باشد به‌طوری‌که G/K یک ϖ گروه است (ممکن است $K = G$). سپس فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$ که G/H یک ϖ گروه است. بنابر ۸.۳، $H \cap K \trianglelefteq G$، و، بنابر ۴۰.۳، $|HK/K| = |H/H \cap K|$ که به‌موجب ۴۲.۳، یک ϖ عددی است، زیرا $HK/K \leqslant G/K$. ازاین‌رو بنابر ۳۰.۳، $|G/H \cap K| = |G/H||H/H \cap K|$، که حاصلضرب دو ϖ عددی بوده و بنابراین خودش یک ϖ عددی است. چون $H \cap K \leqslant K$ و به‌موجب انتخاب K، نتیجه می‌شود که $H \cap K = K$. ازاین‌رو $K \leqslant H$. لذا K ویژگی مطلوب $O^\varpi(G)$ را داراست.

به‌عنوان مثال، بنابر ۷.۳،

$$O^3(\Sigma_3) = \Sigma_3 \quad \text{و} \quad O^2(\Sigma_3) = \{1, (123), (132)\}.$$

۴۵.۳ تعاریف اغلب مراجعه به ردهٔ همهٔ گروههای واجد یک ویژگی خاص بی‌فایده نیست. به‌عنوان مثال، ردهٔ گروههای آبلی، ردهٔ گروههای متناهی، ردهٔ ϖ گروههای متناهی و غیره را داریم. هنگامی که از ردهٔ $\mathfrak{X}$ از گروهها صحبت می‌کنیم همواره بایستی به‌یاد داشته باشیم که اگر $G \cong H \in \mathfrak{X}$، آنگاه $G \in \mathfrak{X}$: به‌طور لفظی، اگر $\mathfrak{X}$ شامل گروه خاصی باشد، شامل همهٔ

گروههایی از همان نوع نیز هست. به‌علاوه چنین فرض می‌کنیم که $\mathfrak{X}$ شامل گروه بدیهی (از مرتبهٔ ۱) نیز هست.

برای گروه خاص G و ردهٔ $\mathfrak{X}$ از گروهها، ممکن است بپرسیم که آیا G، $\mathfrak{X}$ رادیکال و $\mathfrak{X}$ مانده‌یی دارد یا نه؟ یعنی، آیا G یک بزرگترین $\mathfrak{X}$ زیرگروه نرمال یکتای H دارد یا نه (که در این حالت H، $\mathfrak{X}$ رادیکال G است) و همین‌طور آیا G یک کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K دارد به‌طوری‌که G/K یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد (که در این حالت G/K، $\mathfrak{X}$ مانده‌یی G است)؟ در اینجا، آن‌گونه که در نظریهٔ گروهها معمول است 'بزرگترین' و 'کوچکترین' به معنی تحدید در نظر گرفته می‌شوند. لذا ۴۳.۳ و ۴۴.۳ در مورد هر گروه متناهی اثبات وجود یک $\mathfrak{X}$ رادیکال و یک $\mathfrak{X}$ مانده‌یی است وقتی $\mathfrak{X}$ ردهٔ تمام ϖ گروههای متناهی باشد.

*۱۵۶. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. در این صورت $O_\varpi(G)$ و $O^\varpi(G)$ زیرگروههای مشخصهٔ G هستند و $G/O_\varpi(G)$ دارای ϖ رادیکال بدیهی است و $O^\varpi(G)$ دارای ϖ مانده‌یی بدیهی.

*۱۵۷. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، که G یک گروه متناهی است.

(i) ثابت کنید که $H \cap O_\varpi(G) \leqslant O_\varpi(H)$، و نیز هرگاه $H \trianglelefteq G$ آنگاه

$$H \cap O_\varpi(G) = O_\varpi(H)\cdot$$

با یک مثال نشان دهید که هرگاه H در G نرمال نباشد، ممکن است داشته باشیم

$$H \cap O_\varpi(G) < O_\varpi(H)\cdot$$

(ii) ثابت کنید $O^\varpi(H) \leqslant H \cap O^\varpi(G)$.

با یک مثال نشان دهید که حتی اگر H در G نرمال باشد، ممکن است داشته باشیم

$$O^\varpi(H) < H \cap O^\varpi(G)\cdot$$

۱۵۸. فرض کنید $K \trianglelefteq G$، که G یک گروه متناهی است. هرگاه G/K یک ϖ گروه باشد، آنگاه

$$O^\varpi(K) = O^\varpi(G)\cdot$$

(ر.ک. ۱۵۷ (ii)).

۱۵۹. فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال گروه متناهی G باشند.

(i) ثابت کنید که $O_\varpi(H)O_\varpi(K) \leqslant O_\varpi(HK)$.

با یک مثال نشان دهید که تساوی لزوماً برقرار نخواهد بود. (راهنمایی. $G = \Sigma_۳ \times C_۲$ و $\varpi = \{۲\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که G دو زیرگروه نرمال مجزا دارد که با $\Sigma_۳$ یکریخت‌اند و اینها را به‌عنوان H و K انتخاب کنید.)

(ii) ثابت کنید که $O^\varpi(H)O^\varpi(K) = O^\varpi(HK)$.

*۱۶۰. فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ رده‌ای از گروهها باشد.

(i) هرگاه G یک $\mathfrak{X}$ رادیکال H داشته باشد، H یک زیرگروه مشخصهٔ G است.

(ii) اگر G دارای یک $\mathfrak{X}$ مانده‌یی مانند G/K باشد، K یک زیرگروه مشخصهٔ G است (ر.ک. ۱۵۶).

۱۶۱. فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathscr{Y}$ رده‌هایی از گروهها باشند. می‌گوییم G یک $\mathfrak{X}$ در $\mathscr{Y}$ گروه است، اگر G یک زیرگروه نرمال L داشته باشد به‌طوری‌که $L \in \mathfrak{X}$ و $G/L \in \mathscr{Y}$. ثابت کنید که اگر هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتیِ یک $\mathfrak{X}$ گروه، یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد و اگر هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتیِ یک $\mathfrak{X}$ گروه نیز یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد آنگاه هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتیِ یک $\mathfrak{X}$ در $\mathscr{Y}$ گروه یک $\mathfrak{X}$ در $\mathscr{Y}$ گروه خواهد بود (این قضیه تعمیم ۱۵۲ است).

بعداً نشان خواهیم داد که هر گروه یک مانده‌یی آبلی دارد (هرچند در حالت کلی رادیکال آبلی ندارد ــ ۱۷۱ را ببینید.) برای این منظور تعریف زیر را می‌آوریم

۴۶.۳ تعریف جابه‌جاگر یک زوجِ مرتب $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای G، عبارت است از عضو

$$[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ \in G\cdot$$

به‌موجب این تعریف بلافاصله قضیهٔ زیر را خواهیم داشت

۴۷.۳ فرض می‌کنیم $g_۱, g_۲ \in G$. در این صورت

(i) $[g_۲, g_۱] = [g_۱, g_۲]^{-۱}$، و

(ii) $[g_۱, g_۲] = ۱$ اگر و تنها اگر $g_۱$ و $g_۲$ جابه‌جایی‌پذیر باشند.

۴۸.۳ تعاریف فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با H و K عبارت است از

$$[H, K] = \langle [h, k] : h \in H, k \in K \rangle \leqslant G\cdot$$

تأکید می‌کنیم که $[H,K]$ زیرگروهی است که به‌وسیلهٔ همهٔ جابه‌جاگرهای $[h,k]$ تولید شده است، که $h\in H$ و $k\in K$: اتفاقاً ممکن است که حاصلضرب دو جابه‌جاگر را نتوان به صورت یک جابه‌جاگر نشان داد. زیرگروه خاص $[G,G]$ را که به‌وسیلهٔ تمام جابه‌جاگرهای G تولید می‌شود، معمولاً به G' نمایش می‌دهند و گروه مشتق G (یا زیرگروه جابه‌جاگر G) می‌نامند.

۴۹.۳ فرض می‌کنیم $H,K\leqslant G$. در این صورت $[H,K]=[K,H]$.

برهان بنابر ۲۸.۲، اگر X زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد و $Y=\{x^{-1}: x\in X\}$، آنگاه $\langle X\rangle=\langle Y\rangle$. اکنون قضیه، از ۴۷.۳ (i) نتیجه می‌شود.

۵۰.۳ X را زیرمجموعه‌ای ناتهی از G و A را زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathrm{Aut}\,G$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم به‌ازای هر $x\in X$ و $\alpha\in A$، $x^\alpha\in\langle X\rangle$. در این صورت $\langle X\rangle$ یک زیرگروه Aناوردای G است.

برهان فرض می‌کنیم $y\in\langle X\rangle$. بنابر ۲۸.۲، y را می‌توان به شکل

$$y=x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r},$$

بیان کرد، که r عدد صحیحی است مثبت و هر $x_i\in X$ و هر $n_i\in\mathbf{Z}$. فرض می‌کنیم $\alpha\in A$. در این صورت

$$y^\alpha=(x_1^\alpha)^{n_1}(x_2^\alpha)^{n_2}\cdots(x_r^\alpha)^{n_r}.$$

چون، بنابر فرض هر $x_i^\alpha\in\langle X\rangle\leqslant G$، از اینجا نتیجه می‌شود که $y^\alpha\in\langle X\rangle$. ازاین‌رو $\langle X\rangle$، Aناورداست.

از این حکم، حکم زیر را نتیجه می‌گیریم

۵۱.۳ فرض می‌کنیم A زیرمجموعه‌ای ناتهی از $\mathrm{Aut}\,G$ و H و K زیرگروههای Aناوردای G باشند. در این صورت $[H,K]$ نیز زیرگروه Aناوردای G است. به‌ویژه، گروه مشتق G' یک زیرگروه مشخصهٔ G است.

برهان فرض می‌کنیم $h\in H$ و $k\in K$ و $\alpha\in A$. در این صورت

$$[h,k]^\alpha=(h^{-1})^\alpha(k^{-1})^\alpha h^\alpha k^\alpha=(h^\alpha)^{-1}(k^\alpha)^{-1}h^\alpha k^\alpha=[h^\alpha,k^\alpha].$$

چون بنابر فرض $h^\alpha\in H$ و $k^\alpha\in K$، لذا $[h,k]^\alpha\in[H,K]$. اینک حکم از ۵۰.۳ نتیجه می‌شود.

۵۲.۳ قضیه برای هر گروه G، گروه مشتق G' کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K از G است، به‌طوری‌که G/K آبلی است. (لذا G/G' مانده‌یی آبلی G است که گاهی آبلی‌ساز G نیز نامیده می‌شود.)

برهان فرض می‌کنیم $K\trianglelefteq G$. در این صورت G/K آبلی است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x,y\in G$، $(xK)(yK)=(yK)(xK)$؛ یعنی، اگر و تنها اگر $xyK=yxK$، یا هم‌ارز با آن $x^{-1}y^{-1}xyK=K$؛ یعنی، اگر و تنها اگر به‌ازای هر $x,y\in G$، $[x,y]\in K$. لذا G/K آبلی است اگر و تنها اگر $G'\leqslant K$. چون بنابر ۵۱.۳، $G'\trianglelefteq G$، اثبات تمام می‌شود.

۵۳.۳ لم فرض می‌کنیم $H\trianglelefteq G$ و $K\trianglelefteq G$. در این صورت $[H,K]\leqslant H\cap K$. به‌ویژه، اگر $H\cap K=1$ آنگاه هر عضو H با هر عضو K جابه‌جایی‌پذیر است.

برهان فرض می‌کنیم $h\in H$ و $k\in K$. در این صورت

$$[h,k]=h^{-1}(k^{-1}hk)\in H,$$ زیرا $H\trianglelefteq G$

و

$$[h,k]=(h^{-1}k^{-1}h)k\in K,$$ زیرا $K\trianglelefteq G$

لذا به‌ازای هر

$h\in H$ و هر $k\in K$، $[h,k]\in H\cap K$،

ازاین‌رو

$$[H,K]\leqslant H\cap K.$$

اینک قسمت دوم برهان، از ۴۷.۳ (ii) نتیجه می‌شود.

حال ۳۴.۲ (و عکس آن) را مجدداً به صورت مفید زیر تنظیم می‌کنیم.

۵۴.۳ قضیه $G \cong H\times K$ اگر و تنها اگر G زیرگروههای نرمالی چون H_1 و K_2 داشته باشد، به‌طوری‌که $H_1 \cong H$، $K_2\cong K$، $G=H_1K_2$ و $H_1\cap K_2=1$.

برهان اگر φ یک یکریختی از $H\times K$ بر روی G باشد، قرار می‌دهیم $H_1=(H\times 1)\varphi$ و $K_2=(1\times K)\varphi$ و سپس از ۳۳.۲، ۱۲.۳ و ۲۹.۳ استفاده می‌کنیم. برای عکس این قضیه، فرض می‌کنیم که $H\cong H_1 \trianglelefteq G$ و $K\cong K_2\trianglelefteq G$، $G=H_1K_2$ و $H_1\cap K_2=1$. بنابر ۵۳.۳، هر عضو H_1 با هر عضو K_2 جابه‌جایی‌پذیر است. پس به موجب ۳۴.۲ و ۷۶، $G\cong H_1\times K_2\cong H\times K$.

*۱۶۲. فرض می‌کنیم $K\leqslant H\leqslant G$ که $K\trianglelefteq G$. در این صورت

(i) $H\trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $[H,G]\leqslant H$.

(ii) $H/K\leqslant Z(G/K)$ اگر و تنها اگر $[H,G]\leqslant K$.

۱۶۳. هر زیرگروه از G که شامل G' باشد در G نرمال است.

*۱۶۴. فرض می‌کنیم $K\trianglelefteq G$.

(i) هرگاه $x,y\in G$ آنگاه در G/K، داریم

$$[xK,yK]=[x,y]K\cdot$$

(ii) اگر $H,J\leqslant G$، آنگاه

$$[HK/K,JK/K]=[H,J]K/K\cdot$$

به‌ویژه $(G/K)'=G'K/K$ (ر.ک. ۱۵۰).

*۱۶۵. قرار می‌دهیم $G=H\times K$.

(i) هرگاه $h_1,h_2\in H$ و $k_1,k_2\in K$، آنگاه

$$[(h_1,k_1),(h_2,k_2)]=([h_1,h_2],[k_1,k_2])\cdot$$

(ii) هرگاه H_1، H_2 زیرگروههایی از H و K_1، K_2 زیرگروههایی از K باشند، آنگاه

$$[H_1\times K_1,H_2\times K_2]=[H_1,H_2]\times[K_1,K_2]\cdot$$

به‌ویژه:

$$G'=H'\times K'\cdot$$

۱۶۶. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n\geqslant 3$، و قرار می‌دهیم $G=D_{2n}$، گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$. در این صورت بر حسب آنکه n زوج باشد یا فرد $|G/G'|$ یا ۴ است یا ۲.

۱۶۷. فرض می‌کنیم A گروهی آبلی باشد.

(i) به‌ازای هر همریختی $\varphi:G\to A$، $G'\leqslant \mathrm{Ker}\,\varphi$.

(ii) $\mathrm{Hom}(G,A)\cong\mathrm{Hom}(G/G',A)$ (۳۳ را ببینید).

*۱۶۸. یک گروه را تام گوییم اگر بر گروه مشتق خود منطبق باشد یا به‌عبارت دیگر گروهی باشد که دارای هیچ گروه خارج قسمتی آبلی نابدیهی نباشد. ثابت کنید هر زیرگروه تام H از یک گروه دلخواه G در G' قرار دارد.

*۱۶۹. (i) فرض می‌کنیم $x,y,z\in G$. در این صورت

$$[xy,z]=y^{-1}[x,z]y[y,z]\cdot$$

(ii) فرض می‌کنیم H، J، K زیرگروههای نرمال G باشند. در این صورت

$$[HJ,K]=[H,K][J,K]\cdot$$

۱۷۰. (i) قرار می‌دهیم $Z_1=Z(G)$ و $Z_2\trianglelefteq G$ را به صورت $Z_2/Z_1=Z(G/Z_1)$ تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $z\in Z_2$ و θ_z را نگاشتی از G به توی خودش می‌گیریم که به‌ازای هر $x\in G$ با ضابطهٔ

$$\theta_z : x\mapsto [x,z]$$

تعریف می‌شود. ثابت کنید θ_z یک همریختی است که برای آن $\mathrm{Im}\,\theta_z\leqslant Z_1$ و $G'\leqslant\mathrm{Ker}\,\theta_z$. (راهنمایی. ۱۶۲ و ۱۶۹ را ببینید.)

(ii) فرض می‌کنیم G گروهی است تام (۱۶۸). ثابت کنید که $G/Z(G)$ مرکز بدیهی دارد. (اشاره. این نتیجه به لم گرون معروف است. لزومی ندارد که یک گروه تام خودش مرکز بدیهی داشته باشد. به‌عنوان مثال می‌توان نشان داد که به‌ازای هر میدان F با بیش از ۳ عضو، گروه $\mathrm{SL}_2(F)$ که در ۲۸.۳ تعریف شده، تام است، و اگر در F، $1+1\neq 0$ آنگاه مرکز $\mathrm{SL}_2(F)$ از مرتبهٔ ۲ خواهد بود. ۱۲۳ را ببینید.)

*۱۷۱. یک گروه، لزومی ندارد که رادیکال آبلی داشته باشد. این حکم را با در نظر گرفتن $G=D_8$، گروه دو وجهی از مرتبه ۸، ثابت کنید. زیرگروههای آبلی نرمال H و K در G را طوری بیابید که $HK=G$.

اکنون نشان می‌دهیم که به هر زیرگروه H از G، بزرگترین زیرگروه یکتایی چون L از G وابسته می‌شود به‌طوری که $H \trianglelefteq L \leqslant G$.

۵۵.۳ فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و تعریف می‌کنیم $N_G(H) = \{g \in G : g^{-1}Hg = H\}$. در این صورت $H \trianglelefteq N_G(H) \leqslant G$، و هرگاه $H \trianglelefteq J \leqslant G$، آنگاه $J \leqslant N_G(H)$. $N_G(H)$ را نرمال‌ساز H در G می‌نامیم.

برهان فرض می‌کنیم $L = N_G(H)$، که $N_G(H)$ را در بالا تعریف کردیم. مسلماً $H \subseteq L$، بنابراین $L \neq \phi$. فرض می‌کنیم $x, y \in L$. چون $y^{-1}Hy = H$، از اینجا نتیجه می‌شود که $H = yHy^{-1}$، و در نتیجه

$$(xy^{-1})^{-1}Hxy^{-1} = y(x^{-1}Hx)y^{-1} = yHy^{-1} = H\cdot$$

از این‌رو $xy^{-1} \in L$. بنابراین $L \leqslant G$. اما $H \leqslant L$، و بلافاصله از تعریف L نتیجه می‌شود که $H \trianglelefteq L$. بالاخره اگر $H \trianglelefteq J \leqslant G$، و $x \in J$ آنگاه $x \in G$ و بنابر ۳.۳، $x^{-1}Hx = H$. از این‌رو بنابر تعریف L، $x \in L$. لذا $J \leqslant L$.

توجه داشته باشید که بنابر ۳.۳ خواهیم داشت.

۵۶.۳ فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $N_G(H) = G$.

اینک می‌توانیم به حل مسأله‌ای بپردازیم که پیشتر در این فصل به آن اشاره کرده بودیم.

۵۷.۳ فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. در این صورت زیرگروههای نیم‌گروه $\mathcal{Q}(G)$ دقیقاً گروههایی هستند به شکل H/K که در آنها $K \trianglelefteq H \leqslant G$.

برهان هرگاه $K \trianglelefteq H \leqslant G$، خارج قسمت H/K گروهی است که اعضایش زیرمجموعه‌های ناتهی از G هستند عمل ضرب در آن همان عمل ضرب در $\mathcal{Q}(G)$ است، یعنی H/K زیرگروهی است از $\mathscr{Q}(G)$.

حال $\mathscr{G}$ را زیرگروه دلخواهی از $\mathcal{Q}(G)$ می‌گیریم. در این صورت عضو همانی $\mathscr{G}$ زیرمجموعهٔ ناتهیِ K از G است، به‌طوری که $K^2 = K$. از آنجا که G متناهی است، از ۱۸.۳ نتیجه می‌شود که $K \leqslant G$. به‌علاوه اگر $X \in \mathscr{G}$ آنگاه $Y \in \mathscr{G}$ی وجود دارد به‌طوری که $XY = K$. همچنین $XK = X = KX$، از این‌رو $|K| \leqslant |X|$ و نیز $|X| \leqslant |K|$. بنابراین $|X| = |K|$. فرض

می‌کنیم $x \in X$. در این صورت $xK \subseteq XK = X$. چون $|xK| = |K| = |X| < \infty$، از اینجا نتیجه می‌شود که $xK = X$. به همین نحو $Kx = X$.

لذا هر عضو $\mathscr{G}$ یک هم مجموعهٔ xK از K در G است، در نتیجه $xK = Kx$، از این رو $K = x^{-1}Kx$، یعنی $x \in N_G(K)$. لذا اعضای $\mathscr{G}$، اعضای $N_G(K)/K$ هستند، و ضرب در $\mathscr{G}$ همان ضرب در $N_G(K)/K$ است؛ یعنی $\mathscr{G}$ زیرگروهی است از $N_G(K)/K$. از این رو بنابر ۳۰.۳، $\mathscr{G} = H/K$، که در آن $K \leqslant H \leqslant N_G(K)$؛ و به عبارت دیگر بنابر ۵۵.۳، $K \trianglelefteq H \leqslant G$.

۱۷۲. قرار می‌دهیم $G = \Sigma_3$ و $H = \{1, (12)\}$. در این صورت $N_G(H)$ چیست؟

۱۷۳. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $g \in G$. در این صورت $N_G(g^{-1}Hg) = g^{-1}N_G(H)g$.

*۱۷۴. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. ثابت کنید که هرگاه H متناهی باشد، آنگاه

$$N_G(H) = \{g \in G : g^{-1}hg \in H \text{ ،}h \in H \text{ به‌ازای هر}\}\cdot$$

با یک مثال نشان دهید که در صورت نامتناهی بودن H ممکن است این مطلب برقرار نباشد (راهنمایی. ۸۴ را ببینید. به‌عنوان مثال فرض می‌کنیم $G = \langle x, y\rangle$ همان‌گونه که در ۳۷.۳ تعریف شد، و $H = \langle x \rangle$. در این صورت به‌ازای هر $h \in H.$، $y^{-1}hy \in H.$ ، اما $y \notin N_G(H.)$)

*۱۷۵. فرض می‌کنیم H، $J \leqslant G$. اگر به‌ازای هر $x \in J$، $x^{-1}Hx \leqslant H$ آنگاه $J \leqslant N_G(H)$ (رک. ۱۷۴. راهنمایی. $J = \{x^{-1} : x \in J\}$.)

۱۷۶. فرض می‌کنیم $\varnothing \subset A \subseteq \mathrm{Aut}G$. هرگاه H یک زیرگروه Aناوردای متناهی G باشد، آنگاه $C_G(H)$ و $N_G(H)$ زیرگروههای Aناوردای G خواهند بود. (۸۴، ۱۲۲ و ۱۷۴ را ببینید.)

۱۷۷. فرض می‌کنیم $\hat{G} = \{(g,g) : g \in G\}$ زیرگروه قطری $G \times G$ باشد (۸۹ را ببینید). در این صورت:

$$N_{G\times G}(\hat G) = \hat G \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad Z(G) = 1$$

*۱۷۸. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و X و Y را زیرمجموعه‌های ناتهی G می‌گیریم به‌طوری که $\langle X \rangle = G$ و $\langle Y \rangle = H$.

(i) اگر به‌ازای هر $x \in X$، $x^{-1}Hx = H$ آنگاه $H \trianglelefteq G$.

(راهنمایی. از این نکته استفاده کنید که $N_G(H) \leqslant G$.)

(ii) اگر به‌ازای هر $g \in G$، و هر $y \in Y$، $g^{-1}yg \in H$ آنگاه $H \trianglelefteq G$.

(از ۵۰.۳ استفاده کنید.)

(iii) اگر به‌ازای هر $x \in X$، و هر $y \in Y$، $x^{-1}yx \in H$، آنگاه به‌ازای هر $x \in X$، $x^{-1}Hx \leqslant H$. از اینجا نتیجه بگیرید که هرگاه H متناهی باشد، $H \trianglelefteq G$.

(iv) حکم دوم (iii) بدون شرط متناهی بودن H ممکن است صادق نباشد. (برای اثبات این موضوع، گروه $G = \langle x, y \rangle$ از ۳۷.۳ را در نظر بگیرید. قرار دهید $H_0 = \langle x \rangle$. در این صورت $x^{-1}xx = x \in H_0$ و $y^{-1}xy = x^2 \in H_0$، اما $H_0 \ntrianglelefteq G$ زیرا $yxy^{-1} \notin H_0$.)

(v) اگر به‌ازای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$، $x^{-1}yx \in H$ و $xyx^{-1} \in H$، آنگاه $H \trianglelefteq G$.

*۱۷۹. (i) فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$. در این صورت

$$[H,K] \trianglelefteq \langle H, K \rangle.$$

(۷۱ را ببینید. راهنمایی. از ۱۶۹ (i)، ۴۷.۳ (i) و ۱۷۸ (v) استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم G یک گروه ناآبلی ساده باشد و H و K را زیرگروههای حقیقی G می‌گیریم به‌طوری که $G = \langle H, K \rangle$. در این صورت

$$G = [H,K].$$

(iii) فرض می‌کنیم G یک گروه ناآبلی ساده باشد که برای آن اعضایی مانند t و x وجود داشته باشند به‌طوری که $o(t) = 2$ و $o(x) = 3$ و $G = \langle x, t \rangle$. در این صورت همچنین

$$G = \langle x, t^{-1}xt \rangle$$

(اشاره. بعداً ثابت خواهیم کرد که یک چنین گروه G وجود دارد: به ۲۴.۵ و ۳۱۵ مراجعه کنید. راهنمایی. با استفاده از (ii) نشان دهید که $G = \langle [x,t], [x^{-1},t] \rangle$ و سپس $[x^{-1},t][x,t]^{-1}$ را در نظر بگیرید.)

*۱۸۰. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. بستار نرمال H در G، اشتراک تمام زیرگروههای نرمال G تعریف می‌شود که شامل H است و به شکل H^G نمایش داده می‌شود. در این صورت

(i) H^G کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای G است که شامل H است.

(ii) $H^G = \langle g^{-1}hg : g \in G, h \in H \rangle$. (راهنمایی. از ۱۷۸ (ii) استفاده کنید.)

(iii) $H^G = H[H,G]$. (توجه داشته باشید که بنابر ۱۷۹ (i)، $[H,G] \trianglelefteq G$.)

۱۸۱. قرار می‌دهیم $G = \langle j, k \rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathrm{C})$، که در آن

$$j = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

فرض می‌کنیم $J = \langle j \rangle$ و $K = \langle k \rangle$. نشان دهید که $|J| = |K| = 4$ و $|J \cap K| = 2$. به کمک ۱۷۸ (iii) نشان دهید که $J \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. از اینجا نتیجه بگیرید که $|G| = 8$. نشان دهید که تنها عضو مرتبهٔ ۲ در G عبارت است از $j^2 = k^2$. از اینجا نتیجه بگیرید، که اگر چه G ناآبلی است ولی هر زیرگروه G در G نرمال است. G مثال دیگری است از یک گروه که نمی‌تواند دارای یک رادیکال آبلی باشد (رک. ۱۷۱).

این گروه G را با Q_8 نمایش می‌دهیم و گروه چهارتاییها می‌نامیم. اگر عدد مختلط i را با ماتریس

$$jk = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

یکی بگیریم، آنگاه اعضای این گروه یعنی i، j و k در روابط زیر صادق‌اند

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i = jk = -kj, \quad j = ki = -ik, \quad k = ij = -ji$$

که توسط سِر ویلیام رُوئن همیلتن (۱۸۰۵ـ۱۸۶۵) کشف شد، و

$$Q_8 = \{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}.$$

۱۸۲. ثابت کنید که $Q_8 \not\cong D_8$.

نخستین مثالهای گروههای ناآبلی ساده را اواریست گالوا (۱۸۱۱ـ۱۸۳۲) کشف کرده است. ما هم اکنون این گروهها را معرفی می‌کنیم: اما ساده بودن آنها در فصل ۵ ثابت می‌شود.

۵۸.۳ n را یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ می‌گیریم، و گروه Σ_n متشکل از تمام جایگشتهای مجموعه‌ای مانند $X = \{1, 2, \cdots n\}$ را در نظر می‌گیریم. $\frac{1}{2}n(n-1)$ زوج نامرتب $\{i,j\}$ با $i, j \in X$ و $i \neq j$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$N = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j - i),$$

که عدد صحیحی است مثبت. به‌ازای هر $\sigma \in \Sigma_n$، فرض می‌کنیم

$$N_\sigma = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j\sigma - i\sigma).$$

در این صورت $N_1 = N$. به‌علاوه به‌ازای هر σ، $N_\sigma = \pm N$: زیرا وقتی $\{i,j\}$ تمامی $\frac{1}{2}n(n-1)$ زیرمجموعهٔ ۲ عضوی X را می‌پیماید، $\{i\sigma, j\sigma\}$ نیز همان مجموعه‌ها را می‌پیماید (چرا که اگر $\{i\sigma, j\sigma\} = \{k\sigma, l\sigma\}$ آنگاه یا $i\sigma = k\sigma$ و $j\sigma = l\sigma$ یا $i\sigma = l\sigma$ و $j\sigma = k\sigma$، از این رو یا $i = k$ و $j = l$ یا $i = l$ و $j = k$، و در نتیجه $\{i,j\} = \{k,l\}$.) قرار می‌دهیم $N_\sigma = \varepsilon_\sigma N$: لذا

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} 1 & N_\sigma = N \quad \text{هرگاه} \\ -1 & N_\sigma = -N \quad \text{هرگاه} \end{cases}$$

در این صورت ε_σ را علامت σ می‌نامیم.

خاطر نشان می‌کنیم که $\varepsilon_\sigma = (-1)^{t_\sigma}$، که t_σ تعداد ازواج مرتب (i,j) است به قسمی که $i,j \in X$ و $i < j$ و $i\sigma > j\sigma$. به‌عنوان مثال هرگاه σ ترانهش (rs) باشد آنگاه $\varepsilon_\sigma = -1$: چرا که می‌توانیم فرض کنیم $r < s$ و در این صورت به‌ازای هر $i \in X$

$$i\sigma = \begin{cases} i & \text{هرگاه } i \text{ متمایز از } r \text{ و } s \text{ باشد} \\ s & i = r \quad \text{وقتی} \\ r & i = s \quad \text{هنگامی که} \end{cases}$$

از این رو، به‌ازای $i,j \in X$ با $i < j$ داریم $i\sigma > j\sigma$ اگر و تنها اگر یا $i = r$ و $r < j \leqslant s$ یا $r < i < s$ و $j = s$؛ لذا $t_\sigma = 2(s-r) - 1$، که عدد صحیحی است فرد.

حال فرض می‌کنیم $\sigma, \tau \in \Sigma_n$ و به‌ازای هر $i,j \in X$ که $i < j$، قرار می‌دهیم $i\sigma = i'$ و $j\sigma = j'$. در این صورت:

$$N_{\sigma\tau} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j\sigma\tau - i\sigma\tau) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j'\tau - i'\tau)\cdot$$

در حاصلضرب سمت راست به‌جای هر عامل $j'\tau - i'\tau$ که برای آن $i' > j'$، $-(i'\tau - j\tau)$ را می‌گذاریم. در این صورت بنابر تعریف ε_σ، داریم

$$\begin{aligned} N_{\sigma\tau} &= \varepsilon_\sigma \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j\tau - i\tau) \\ &= \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau N\cdot \end{aligned}$$

ولی

$$N_{\sigma\tau} = \varepsilon_{\sigma\tau} N\cdot$$

چون این دو، روابطی بین اعداد صحیح ناصفرند، نتیجه می‌شود که

$$\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau\cdot$$

این تساوی نشان می‌دهد که نگاشت

$$\varepsilon : \Sigma_n \longrightarrow C_2 = \{1, -1\} \text{، تعریف شده با ضابطهٔ } \varepsilon : \sigma \mapsto \varepsilon_\sigma$$

یک همریختی است، و آن را سرشت متناوب[1] بر Σ_n می‌نامند. علاوه بر این، ε پوشاست چرا که نشان داده‌ایم هرگاه σ یک ترانهش باشد آنگاه $\varepsilon_\sigma = -1$. (توجه داشته باشید که چون $n \geqslant 2$، ترانهشها در Σ_n موجودند.) به موجب قضیهٔ بنیادی همریختیها

$$\operatorname{Ker}\varepsilon \trianglelefteq \Sigma_n \quad \text{و} \quad \Sigma_n/\operatorname{Ker}\varepsilon \cong \operatorname{Im}\varepsilon = C_2\cdot$$

این بدان معنی است که $\operatorname{Ker}\varepsilon$ زیرگروهی از شاخص ۲ در Σ_n است. ما $\operatorname{Ker}\varepsilon$ را گروه متناوب از درجهٔ n می‌خوانیم و آن را به A_n نمایش می‌دهیم. اعضای A_n جایگشتهای زوج X و اعضای $\Sigma_n \backslash A_n$ جایگشتهای فرد X نامیده می‌شوند. خاطر نشان می‌کنیم که

$$|A_n| = n!/2 = |\Sigma_n \backslash A_n|\cdot$$

به‌علاوه توجه داشته باشید که ضرب جایگشتهای زوج و فرد شبیه جمع اعداد صحیح زوج و فرد است:

(زوج)(فرد) = فرد = (فرد)(زوج)   و   (فرد)(فرد) = زوج = (زوج)(زوج)

چگونه می‌توانیم زوج یا فرد بودن جایگشت مفروضی را تعیین کنیم؟

۵۹.۳ فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد و $\sigma \in \Sigma_n$. گیریم $\sigma = \nu_1\nu_2\cdots\nu_r$ نمایش عبارت σ به صورت حاصلضرب دورهای مجموعه‌های مجزا باشد، و دور ν_j دارای طول m_j $(j = 1, \cdots, r)$ باشد. در این صورت جایگشت σ زوج یا فرد است برحسب اینکه عدد صحیح $\sum_{j=1}^{r}(m_j - 1)$ زوج یا فرد باشد.

برهان ابتدا یک دورِ ν، مثلاً با طول m را در نظر می‌گیریم که در آن $2 \leqslant m \leqslant n$: مانند

$$\begin{aligned} \nu &= (a_1 a_2 \cdots a_m) \\ &= (a_1 a_2)(a_1 a_3)\cdots(a_1 a_m) \quad \text{(۲۱ را ببینید)} \end{aligned}$$

1. alternating character

در این صورت بنابر تساوی (i) از ۵۸.۳،

$$\varepsilon_\nu = \varepsilon_{(a_۱a_۲)}\varepsilon_{(a_۱a_۳)}\cdots\varepsilon_{(a_۱a_m)} = (-۱)^{m-۱},$$

زیرا علامت هر ترانهش ۱− است.

حال اگر مانند آنچه در فرض است داشته باشیم: $\sigma = \nu_۱\nu_۲\cdots\nu_r$، بنابر تساوی (i) از ۵۸.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma &= \varepsilon_{\nu_۱}\varepsilon_{\nu_۲}\cdots\varepsilon_{\nu_r}\\ &= (-۱)^{m_۱-۱}(-۱)^{m_۲-۱}\cdots(-۱)^{m_r-۱}\\ &= (-۱)^k \cdot \text{ که در آن } k = \sum_{j=۱}^{r}(m_j - ۱)\end{aligned}$$

با این تساوی اثبات حکم تمام است.

به‌عنوان مثال در $\Sigma_۵$،

$$\begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \\ ۴ & ۵ & ۲ & ۱ & ۳ \end{pmatrix} = (۱۴)(۲۵۳),$$

که جایگشتی است فرد زیرا $۳ = (۱ - ۳) + (۱ - ۲)$، یک عدد صحیح فرد است.

گالوا قضیهٔ زیر را ثابت کرد

۶۰.۳ هرگاه $n \geqslant ۵$، A_n یک گروه ناآبلی ساده است.

ما این مطلب را در ۲۸.۵ ثابت خواهیم کرد. پیدایش اتفاقی عدد ۵ در این قضیه عمیقاً به حل‌ناپذیری معادلهٔ کلی درجهٔ ۵ مربوط می‌شود. برای توضیح این مطلب خواننده می‌تواند به مراجع نظریهٔ گالوا که در ۲۵.۲ ذکر شده است مراجعه کند. گروه $A_۵$ دارای مرتبهٔ ۶۰ است، و همان‌گونه که در فصل ۵ نشان خواهیم داد، هیچ گروه ناآبلی ساده با مرتبهٔ کمتر از ۶۰ وجود ندارد.

۱۸۳. کدام‌یک از جایگشتهای زیر در $\Sigma_۶$ زوج‌اند و کدام یک فرد:

$$(۱۲۳۴۵۶) \quad , \quad (۱۲۳۴۵) \quad , \quad (۱۲۳)(۴۵), \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & ۶ \\ ۲ & ۴ & ۶ & ۱ & ۳ & ۵ \end{pmatrix} ؟$$

۱۸۴*. فرض می‌کنیم $n > ۱$ یک عدد صحیح باشد و $H \leqslant \Sigma_n$. ثابت کنید که هرگاه H شامل یک جایگشت فرد باشد زیرگروهی از شاخص ۲ دارد. از اینجا نتیجه بگیرید که هرگاه H ساده باشد و $|H| > ۲$، آنگاه $H \leqslant A_n$.

۱۸۵*. (i) تمامی ۱۲ عضو $A_۴$ را بنویسید و مرتبه‌های آنها را به‌دست آورید.

(ii) ثابت کنید که $Z(A_۴) = ۱$. (راهنمایی. با استفاده از ۶ نشان دهید که هرگاه $Z(A_۴) \neq ۱$ آنگاه $A_۴$ عضوی از مرتبهٔ ۶ خواهد داشت.)

(iii) نشان دهید که $A_۴$ یک زیرگروه یکتای V از مرتبهٔ ۴ دارد، و نتیجه بگیرید که $V \trianglelefteq A_۴$.

(iv) ثابت کنید که $A_۴$ زیرگروهی از مرتبهٔ ۶ ندارد. (راهنمایی. فرض کنید که $A_۴$ یک زیرگروه H از مرتبهٔ ۶ دارد. سپس $H \cap V$ را در نظر بگیرید و به‌وسیلهٔ ۱۰۲، ۴۰.۳، ۱۱۹ و (ii) به یک تناقض برسید.)

۶۱.۳ این فصل را با چند اشاره دربارهٔ گروههای ساده خاتمه می‌دهیم. ما به یک خانواده از گروههای سادهٔ متناهی ناآبلی با بینهایت نوع مختلف، یعنی گروههای متناوب از درجهٔ ۵ و بزرگتر اشاره کردیم. به چند مثال دیگر نیز اشاره می‌کنیم.

n را یک عدد صحیح بزرگتر از ۱ می‌گیریم و فرض می‌کنیم F میدان دلخواهی باشد. گیریم $S = \mathrm{SL}_n(F)$ گروه همهٔ ماتریسهای $n \times n$ با درایه‌های اسکالر F و دترمینان ۱ باشد (۲۸.۳). در این صورت می‌توان نشان داد که $Z(S)$، متشکل از همهٔ ماتریسهای اسکالر در S است، یعنی ماتریسهای $a۱$ که $a \in F$ و $a^n = ۱$. (در ارتباط با این وضعیت وقتی $F \neq \mathbf{Z}_۲$ و یا $n > ۲$ و یا $F \neq \mathbf{Z}_۲$، ۱۲۳ را ببینید.) گروه $S/Z(S)$ را گروه خطی خاص تصویری درجهٔ n روی F می‌نامند و با $\mathrm{PSL}_n(F)$ نشان می‌دهند. می‌توان ثابت کرد که $\mathrm{PSL}_n(F)$ یک گروه ناآبلی ساده است، مگر وقتی که $n = ۲$ و F یا $\mathbf{Z}_۲$ باشد یا $\mathbf{Z}_۳$. (برای اثبات آرتین [b2] یا هوپرت [b21] را ببینید). این نتیجه در حالت خاص مثالهایی از گروههای ناآبلی سادهٔ نامتناهی به‌دست می‌دهد، چرا که وقتی میدان F نامتناهی باشد، $\mathrm{PSL}_n(F)$ نیز نامتناهی است. وقتی F متناهی باشد، $\mathrm{PSL}_n(F)$ نیز متناهی است.

خانواده‌های دیگری از گروههای ناآبلی ساده، از گروههای ماتریسها وجود دارند که به همین طریق مشخص می‌شوند: گروههای موسوم به ماتریسهای متعامد، الصاقی[1] و یکانی. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح زوج مثبت باشد، مثلاً $n = ۲m$، که m عدد صحیحی مثبت است و فرض می‌کنیم F میدان دلخواهی باشد. گیریم y یک ماتریس $n \times n$ ثابت

1. Symplectic

ناتکین پاد متقارنی باشد که درایه‌های آن در F هستند: به‌دلیل زوج بودن n چنین ماتریسی وجود دارد. به‌ازای هر $x \in \mathrm{GL}_{2m}(F)$، فرض می‌کنیم x' معرف ترانهادهٔ x باشد در این صورت مجموعهٔ

$$\{x \in \mathrm{GL}_{2m}(F) : x'yx = y\}$$

زیرگروهی از $\mathrm{GL}_{2m}(F)$ تشکیل می‌دهد که آن را گروه الصاقی درجهٔ $2m$ روی F می‌نامند و با $\mathrm{Sp}_{2m}(F)$ نمایش می‌دهند. نوع این گروه به انتخاب ماتریس پاد متقارن y بستگی ندارد. می‌توان نشان داد که هر ماتریس در $\mathrm{Sp}_{2m}(F)$ دارای دترمینان ۱ است، بنابراین $\mathrm{Sp}_{2m}(F) \leqslant \mathrm{SL}_{2m}(F)$. قرار می‌دهیم $Y = \mathrm{Sp}_{2m}(F)$. در این صورت $Z(Y)$، متشکل از ماتریسهای اسکالر در Y است، و در واقع $|Z(Y)| = 2$ اگر در F، $1 + 1 \neq 0$، و $Z(Y) = 1$ اگر در F $1 + 1 = 0$. گروه $Y/Z(Y)$، گروه تصویری الصاقی درجهٔ $2m$ روی F نامیده می‌شود و با $\mathrm{PSp}_{2m}(F)$ نمایش داده می‌شود، و $\mathrm{PSp}_{2m}(F)$ یک گروه ناآبلی ساده است، مگر هنگامی که $2m = 2$ و F یا $\mathbf{Z}_2$ است یا $\mathbf{Z}_3$، و وقتی که $2m = 4$ و $F = \mathbf{Z}_2$. (برای جزئیات این گروهها و نیز گروههای متعامد و یکانی، آرتین [b۲]، دیودونه [b۹] و [b۱۰]، و هوپرت [b۲۱] را ببینید.)

این خانواده‌های گروههای ساده را که با گروههای ماتریسها تعریف شده‌اند کامی ژوردان (۱۸۳۸ـ۱۹۲۲) کشف کرده و در کتابش [b۲۳] مورد بحث قرار داده است. این گروهها معمولاً گروههای سادهٔ کلاسیک نامیده می‌شوند. خانوادهٔ دیگری را در ۱۹۰۵ لئوناردو یوجین دیکسن (۱۸۷۴ـ۱۹۵۴) کشف کرد، نامبرده یک بررسی اجمالی از گروههای کلاسیک در کتابش [b۸] انجام داده است. پیش از او اِ ماتیو (۱۸۳۵ـ۱۸۹۰) پنج گروه سادهٔ منفرد پیدا کرده بود که تاکنون به یک خانوادهٔ نامتناهی تعلق نگرفته‌اند؛ آنها زیرگروههای گروههای متناوب A_{11}، A_{12}، A_{22}، A_{23}، A_{24} هستند. این گروههای ساده که به‌نظر نمی‌آید اعضای یک خانوادهٔ نامتناهی باشند، در حال حاضر به گروههای سادهٔ پراکنده معروف شده‌اند.

تا ۱۹۵۵ گروههای سادهٔ متناهی دیگری کشف نشدند. در آن سال که شوالی روشی را بیان کرد که ساختمان گروههای ژوردان و دیکسن را همراه با خانواده‌های نامتناهی جدیدی از گروههای ساده به‌دست می‌داد. بعدها چند مؤلف دیگر خانواده‌هایی را کشف کردند که با روش شوالی متفاوت بود. برای جزئیات بیشتر خواننده را به مقاله و کتابی از ر. و. کارتر [a۱۴] و [b۴] ارجاع می‌دهیم.

در این زمان، تا حد زیادی انتظار می‌رفت که فهرست گروههای سادهٔ متناهیِ به‌دست آمده کامل شده باشند. اما در ۱۹۶۵ یک گروه سادهٔ جدید به‌وسیلهٔ ز. یانکو کشف شد: گروه ماتریسهای

7×7 با درایه‌هایی در میدان $\mathbf{Z}_{11}$ و از مرتبهٔ $2^3.3.5.7.11.19$. از ۱۹۶۵ به بعد، نزدیک به بیش از دو دوجین از گروههای سادهٔ متناهی پراکنده پیدا شدند، و وضعیت درک ما از گروههای سادهٔ متناهی متزلزل شد. ما حتی هنوز هم نمی‌دانیم آیا فهرست کنونی از گروههای ساده از درجهٔ کمتر از ۱۰۰۰۰۰۰ کامل است یا نیست. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به بررسی مقالات و. فایت [a۲۱] و د. گورِنشتاین [a۴۴]، فصول ۱۶ و ۱۷ از کتاب گورِنشتاین [b۱۳]، و کتابی که م. ب. پاول و گ. هیگمن [b۳۳] گردآوری کرده‌اند ارجاع می‌دهیم.

۴

عملهای گروهی بر مجموعه‌ها

در فصل ۲ دربارهٔ اهمیت گروههایی که به صورت گروههای **تقارن** دستگاههای ریاضی پیدا می‌شوند؛ بحث کردیم. فرض می‌کنیم X یک دستگاه باشد، بدین‌معنی که مجموعه‌ای باشد با ساختاری مشخص، ممکن است این ساختار جبری یا هندسی باشد، و نیز فرض می‌کنیم G زیرگروهی از گروه تقارن X باشد (گروه‌مرکب از تمام جایگشتهای حافظ‌ـساختار X). در این صورت هر $g \in G$ هر $x \in X$ را به عضوی از X بدل می‌کند (و در استفاده از عبارت 'بدل می‌کند'، این امکان را نیز می‌پذیریم که g، x را ثابت نگه می‌دارد). این عضو از X که g، x را به آن بدل می‌کند با xg نشان داده می‌شود. بدین‌طریق گروه G را به‌عنوان عمل‌کننده بر دستگاه X در نظر می‌گیریم. این عمل زمانی مشخص می‌شود که به‌ازای هر $g \in G$ و هر $x \in X$ عضو متناظر $xg \in X$ مشخص شده باشد. ثابت شده است که **این مفهوم** ساده از عمل گروهی، بسیار ثمربخش است. خواهیم دید که به‌وجودآوردن این عمل گروهی از روی تعریفی که مفهوم اولیه را تعمیم می‌دهد خیلی سودمند خواهد بود. در این فصل **مفهوم** عمل گروهی بر یک مجموعه را (بدون ساختار دیگر) تعریف می‌کنیم و آن را بسط می‌دهیم.

۱.۴ تعریف می‌گوییم G بر مجموعهٔ ناتهی X عمل می‌کند (یا G ترتیب اعضای X را عوض می‌کند) اگر به هر $g \in G$ و هر $x \in X$؛ عضو یکتای $xg \in X$، طوری متناظر شود که به‌ازای هر $x \in X$ و $g_۱, g_۲ \in G$؛ داشته باشیم

$$(xg_۱)g_۲ = x(g_۱g_۲)$$

و

$$x۱ = x.$$

بخواهیم روشنتر بیان کنیم، می‌گوییم تحت این شرطها G بر X از راست عمل می‌کند. می‌توانیم به طریقی مشابه آنچه را که به‌عنوان عمل یک گروه بر یک مجموعه از طرف چپ در نظر گرفته می‌شود تعریف کنیم. بعداً (در فصل ۱۰) به بحث دربارهٔ عملهای راست و چپ، توأماً احتیاج پیدا می‌کنیم و در نتیجه تمایز بین آنها را حفظ می‌کنیم. تا آن موقع اگر از عمل گروهی بدون قید و شرط صحبت کنیم، منظور ما عمل از طرف راست است.

۲.۴ چند مثال (i) فرض می‌کنیم X مجموعهٔ ناتهی دلخواهی باشد و $G \leqslant \Sigma_X$. در این صورت G بر X عمل می‌کند. در این حالت هر $g \in G$ یک نگاشت $X \to X$ است و به‌ازای $x \in X$، xg نگارهٔ x تحت نگاشت g است. شرط $(xg_۱)g_۲ = x(g_۱g_۲)$ از ۱.۴، به موجب تعریف ترکیب نگاشتها و شرط $x۱ = x$، بنابر تعریف عضو همانی ۱ از Σ_X برقرار است. این عمل را عمل طبیعی G بر X می‌نامند.

(ii) فرض می‌کنیم V یک فضای برداری $\neq ۰$ روی میدان F باشد. در این صورت با نمادگذاری معمولی فضای برداری، به هر $a \in F$ و $v \in V$ عضو $av \in V$ نظیر می‌شود. با این تناظر، گروه ضربی $F^{\times}$ بر V (که به‌عنوان یک مجموعه در نظر گرفته می‌شود) از چپ عمل می‌کند: زیرا اگر $a_۱, a_۲ \in F$ و $v \in V$ آنگاه به موجب اصول موضوعهٔ فضای برداری، $a_۱(a_۲v) = (a_۱a_۲)v$ و $۱v = v$. اما گروه جمعی F^{+} نمی‌تواند بدین‌طریق از چپ بر V عمل کند: زیرا اگر عمل کند، باید داشته باشیم $a_۱(a_۲v) = (a_۱ + a_۲)v$ و $۰v = v$، این تساویها هر دو برقرار نیستند مگر اینکه یا $v = ۰$ یا $a_۱ \neq ۱$ و $a_۲ = a_۱(a_۱ - ۱)^{-۱}$.

۱۸۶. فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X (از راست) عمل کند. در این صورت یک عمل چپ از G بر X با تعریف $gx = xg^{-۱}$، به‌ازای هر $g \in G$ و $x \in X$، به‌دست می‌آوریم. چرا این عمل چپ در حالت کلی با تعریف $gx = xg$ به‌دست نمی‌آید؟

بلافاصله به رابطهٔ بین عملهای گروه بر مجموعهٔ X و گروه تقارن X، یعنی، Σ_X توجه می‌کنیم.

۳.۴ قضیه فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. در این صورت به هر $g \in G$ نگاشت $\rho_g : X \to X$، که با ضابطهٔ $\rho_g : x \mapsto xg$ تعریف شده، متناظر می‌شود و این نگاشت جایگشتی است از X. علاوه‌براین، نگاشت $\rho : G \to \Sigma_X$ که با ضابطهٔ $\rho : g \mapsto \rho_g$ تعریف شده یک همریختی است. این همریختی را نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل گروهی می‌نامند.

برهان فرض می‌کنیم $g \in G$. بنابر تعریف، ρ_g نگاشتی است از X به توی خودش. با استفاده از اصل موضوع اول ۱.۴، به‌ازای $g_{۱}, g_{۲} \in G$ و $x \in X$ داریم

$$x\rho_{g_{۱}g_{۲}} = x(g_{۱}g_{۲}) = (xg_{۱})g_{۲} = (x\rho_{g_{۱}})\rho_{g_{۲}} = x(\rho_{g_{۱}}\rho_{g_{۲}}),$$

بنابراین

$$\rho_{g_{۱}g_{۲}} = \rho_{g_{۱}}\rho_{g_{۲}}. \qquad \text{(i)}$$

علاوه‌براین، با استفاده از اصل موضوع دوم ۱.۴ داریم

$$x\rho_{۱} = x۱ = x,$$

بنابراین

$$\rho_{۱} = ۱ \in \Sigma_X. \qquad \text{(ii)}$$

بنابر (i) و (ii)؛

$$\rho_g\rho_{g^{-۱}} = ۱ = \rho_{g^{-۱}}\rho_g.$$

لذا ρ_g یک نگاشت وارون‌پذیر از X به توی خودش است، یعنی، یک جایگشت از X. سپس (i) نشان می‌دهد که ρ یک همریختی است از G به توی Σ_X.

۴.۴ قضیه فرض می‌کنیم σ یک همریختی از G به توی Σ_X باشد، که در آن X یک مجموعهٔ ناتهی است. در این صورت G بر X عمل می‌کند وقتی که به‌ازای هر $g \in G$ و $x \in X$ تعریف کنیم

$$xg = x(g\sigma),$$

و σ نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل است.

برهان به‌ازای $g_{۱}, g_{۲} \in G$ و $x \in X$، بنابر تعریفِ ترکیبِ نگاشتها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(x(g_{۱}\sigma))(g_{۲}\sigma) &= x((g_{۱}\sigma)(g_{۲}\sigma))\\ &= x((g_{۱}g_{۲})\sigma),\end{aligned}$$

زیرا σ یک همریختی است؛
و همچنین $x(۱\sigma) = x$؛ زیرا بنابر ۹.۲، σ باید $۱ \in G$ را به $۱ \in \Sigma_X$ بنگارد. ازاین‌رو با قراردادن

$$xg = x(g\sigma),$$

ما یک عمل از G بر X را تعریف کرده‌ایم. فرض می‌کنیم ρ نمایش جایگشتی متناظرِ G باشد. در این صورت

$$x\rho_g = xg = x(g\sigma),$$

ازاین‌رو به‌ازای هر $g \in G$، $\rho_g = g\sigma$ و در نتیجه $\rho = \sigma$.

لذا با درنظرگرفتن عملهای گروهی بر مجموعهٔ X، نه تنها زیرگروههای Σ_X، بلکه همریختیهای گروهها به توی Σ_X را نیز بررسی می‌کنیم.

۵.۴ تعریف فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. این عمل را عمل صادق گوییم، اگر نمایش جایگشتی متناظر G یک به یک باشد.

در ۲.۴ (i)، نمایش جایگشتی دقیقاً نگاشت شمول $G \to \Sigma_X$ است. این نگاشت مسلماً یک به یک است، در نتیجه عمل مفروض صادق است. عمل چپ از $F^\times$ بر V در ۲.۴ (ii) نیز صادق است.

۶.۴ لم فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. رابطهٔ $\sim$ را بر X به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $x_{۱} \sim x_{۲}$ اگر و تنها اگر $x_{۱}, x_{۲} \in X$ و یک عضو $g \in G$ وجود داشته باشد به قسمی که $x_{۱}g = x_{۲}$. در این صورت $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی بر X است.

برهان به‌ازای هر $x \in X$، $x۱ = x$؛ بنابراین $x \sim x$. اگر $x_{۱} \sim x_{۲}$ آنگاه به‌ازای $g \in G$ی؛ $x_{۱}g = x_{۲}$، ازاین‌رو $x_{۲}g^{-۱} = (x_{۱}g)g^{-۱} = x_{۱}۱ = x_{۱}$ و در نتیجه $x_{۲} \sim x_{۱}$. اگر $x_{۱} \sim x_{۲}$ و $x_{۲} \sim x_{۳}$ آنگاه به‌ازای $g_{۱}, g_{۲} \in G$ی؛ $x_{۱}g_{۱} = x_{۲}$ و $x_{۲}g_{۲} = x_{۳}$، ازاین‌رو $x_{۱}(g_{۱}g_{۲}) = (x_{۱}g_{۱})g_{۲} = x_{۳}$؛ و در نتیجه $x_{۱} \sim x_{۳}$.

تعریف زیر از اهمیتی اساسی برخوردار است.

۷.۴ تعریف فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. در این صورت X نسبت به رابطهٔ هم‌ارزی $\sim$ در ۶.۴، به رده‌های هم‌ارزی مجزا افراز می‌شود. این رده‌های هم‌ارزی، مدارها یا رده‌های ترایایی این عمل نامیده می‌شوند. به‌ازای هر $x \in X$، مدار شامل x را مدار x می‌نامند: این مدار عبارت است از مجموعهٔ $\{xg : g \in G\}$ از X.

۸.۴ فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند و داشته باشیم $x \in X$. قرار می‌دهیم: $\mathrm{Stab}_G(x) = \{g \in G : xg = x\}$. در این صورت $\mathrm{Stab}_G(x)$ زیرگروهی است از G؛ که پایدارساز x در G نامیده می‌شود. (در بعضی کتابها، این زیرگروه را اغلب با G_x نمایش می‌دهند و گروه همروندی x در G می‌نامند.)

برهان به موجب ۱.۴، $1 \in \mathrm{Stab}_G(x)$، بنابراین $\mathrm{Stab}_G(x) \neq \varnothing$. فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in \mathrm{Stab}_G(x)$. در این صورت $xg_1 = x = xg_2$، ازاین‌رو

$$x(g_1g_2^{-1}) = (xg_1)g_2^{-1} = (xg_2)g_2^{-1} = x1 = x,$$

و در نتیجه $g_1g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(x)$. لذا $\mathrm{Stab}_G(x) \leqslant G$.

قضیهٔ زیر نتیجهٔ بلافصلِ تعاریف مفروض قبلی است.

۹.۴ فرض می‌کنیم G بر X عمل کند، و ρ نمایش جایگشتی متناظرِ G باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ker}\,\rho = \bigcap_{x \in X} \mathrm{Stab}_G(x)\cdot$$

*۱۸۷. فرض می‌کنیم که G بر مجموعهٔ X عمل کند. به‌ازای هر $g \in G$ و هر زیرمجموعهٔ ناتهی Y از X، تعریف می‌کنیم

$$Yg = \{yg : y \in Y\} \subseteq X\cdot$$

همچنین تعریف می‌کنیم

$$G_Y = \{h \in G : \text{به‌ازای هر } y \in Y\text{،}\ yh = y\} = \bigcap_{y \in Y} \mathrm{Stab}_G(y),$$

$$G_Y^* = \{h \in G : Yh = Y\}\cdot$$

در این صورت

(i) $G_{Yg} = g^{-1}G_Yg$ و $G^*_{Yg} = g^{-1}G^*_Yg$

به‌ویژه به‌ازای هر $x \in X$، $\mathrm{Stab}_G(xg) = g^{-1}\mathrm{Stab}_G(x)g$.

(ii) $G_Y \trianglelefteq G_Y^* \leqslant G$ (رک. ۶۲ (i)).

(iii) هرگاه Y یک مدار عملِ G بر X باشد، آنگاه $G_Y \trianglelefteq G$، G بر Y عمل می‌کند و G/G_Y با نگارهٔ نمایش جایگشتی متناظر G بر Y یکریخت است.

۱۸۸. فرض می‌کنیم که گروه متناهی G بر مجموعهٔ متناهی X به‌طور صادق عمل کند. X_1، $\cdots$، X_s را مدارهای این عمل می‌گیریم، که در آن s یک عدد صحیح مثبت است، و به‌ازای هر $i = 1, \cdots, s$ قرار می‌دهیم $|X_i| = n_i$ (پس $n_1 + \cdots + n_s = |X|$). در این صورت G را می‌توان درگروه $\Sigma_{n_1} \times \cdots \times \Sigma_{n_s}$ نشانید (راهنمایی. از ۱۸۷ (iii) و ۱۰۹ استفاده کنید.)

۱۰.۴ چند مثال (i) فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، $\sigma \in \Sigma_n$ و $G = \langle\sigma\rangle$. فرض می‌کنیم که σ به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا مانند

$$\sigma = (a_{11}a_{12}\cdots a_{1n_1})(a_{21}\cdots a_{2n_2})\cdots(a_{s1}\cdots a_{sn_s}),$$

بیان شده باشد که در آن s، n_1، $\cdots$، n_s اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری‌که $n_1 + \cdots + n_s = n$. در این صورت مدارهای عمل طبیعی G بر مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, n\}$ عبارت‌اند از s زیرمجموعهٔ مجزای $\{a_{11}, \cdots, a_{1n_1}\}$، $\{a_{21}, \cdots, a_{2n_2}\}$، $\cdots$، $\{a_{s1}, \cdots, a_{sn_s}\}$.

به‌عنوان مثال، به‌ازای $n = 5$ و $\sigma = (123)(45)$، تنها دومدار $\{1, 2, 3\}$ و $\{4, 5\}$ وجود دارند. توجه کنید که در این صورت خواهیم داشت:

$$\mathrm{Stab}_G(1) = \mathrm{Stab}_G(2) = \mathrm{Stab}_G(3) = \langle\sigma^3\rangle$$

و نیز $\mathrm{Stab}_G(4) = \mathrm{Stab}_G(5) = \langle\sigma^2\rangle$. چون $o(\sigma) = 6$، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ تعداد اعضای واقع در مدار x برابر است با $|G : \mathrm{Stab}_G(x)|$. در ۱۱.۴ نشان خواهیم داد که این تعداد تصادفی نیست بلکه مثالی است از یک قضیهٔ کلی.

(ii) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت H بر G (که به‌عنوان یک مجموعه در نظر گرفته می‌شود) با ضرب از راست در G عمل می‌کند؛ یعنی هنگامی که به هر $h \in H$ و هر $g \in G$ عضو $gh \in G$ متناظر می‌شود. اینکه، ضرب مذکور یک عمل از H بر G را تعریف

می‌کند از قانون شرکت‌پذیری ضرب در G و ویژگی معرف عضو همانی نتیجه می‌شود. به‌علاوه، به‌ازای $g \in G$،

$$\mathrm{Stab}_H(g) = \{h \in H : gh = g\} = ۱.$$

به‌ویژه، از ۹.۴، نتیجه می‌شود که این عمل صادق است. همچنین مدار g مجموعهٔ $gH = \{gh : h \in H\}$، یعنی هم مجموعهٔ چپ H در G است که شامل g است. لذا به موجب ۶.۴ می‌توانیم نتیجه بگیریم که هم‌مجموعه‌های چپ متمایز H در G جدا از هم‌اند و ازاین‌رو قضیهٔ لاگرانژ را به‌دست می‌آوریم.

به طریقی مشابه، ضرب از چپ اعضای G در اعضای H معرف یک عمل چپ از H بر G است، مدارهای این عمل هم مجموعه‌های راست H در G هستند.

لم زیر دربارهٔ طولهای مدارها واقعیتی کلیدی است که در کاربردهای بسیاری مورد نیاز واقع می‌شود.

۱۱.۴ لم فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند، و همچنین $x \in X$. در این صورت

$$|\text{مدار } x| = |G : \mathrm{Stab}_G(x)|.$$

برهان فرض می‌کنیم $X_۱$ معرف مدار x باشد، قرار می‌دهیم $H = \mathrm{Stab}_G(x)$ و فرض می‌کنیم Y معرف مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌های راست H در G باشد. در این صورت

$$X_۱ = \{xg : g \in G\}.$$

نگاشت

$$\mu : X_۱ \to Y$$

را با ضابطهٔ

$$\mu : xg \mapsto Hg \qquad (\text{به‌ازای هر } g \in G)$$

تعریف می‌کنیم. باید تحقیق کنیم که این نگاشت خوشتعریف است. فرض می‌کنیم $g_۱, g_۲ \in G$. لازم است مطمئن شویم که هرگاه $xg_۱ = xg_۲$، $Hg_۱$ نیز مساوی $Hg_۲$ می‌شود. با استفاده از اصل موضوعهای ۱.۴؛ مشاهده می‌کنیم هرگاه $xg_۱ = xg_۲$ آنگاه

$$x(g_۱g_۲^{-۱}) = (xg_۱)g_۲^{-۱} = (xg_۲)g_۲^{-۱} = x۱ = x,$$

بنابراین

$$g_۱g_۲^{-۱} \in \mathrm{Stab}_G(x) = H,$$

در نتیجه $Hg_۱ = Hg_۲$، آنچه مطلوب بود.

به‌علاوه؛ به عکس ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $Hg_۱ = Hg_۲$ آنگاه $g_۱g_۲^{-۱} \in H$، لذا

$$x(g_۱g_۲^{-۱}) = x,$$

بنابراین

$$xg_۱ = x((g_۱g_۲^{-۱})g_۲) = xg_۲.$$

این نشان می‌دهد که μ نگاشتی است یک به یک. به موجب تعریف واضح است که μ پوشاست، بنابراین در واقع μ نگاشتی است دوسویی. ازاین‌رو

$$|X_۱| = |Y|,$$

آنچه ادعا شده بود (به‌ویژه معنی این تساوی این است که $|X_۱| = \infty$، اگر و تنها اگر $|Y| = \infty$).

۱۸۹. فرض می‌کنیم $G \leqslant \Sigma_۴$، و عمل طبیعی G را بر مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴\}$ در نظر می‌گیریم. در مورد هر یک از Gهای اختیارشده در زیر، مدارهای این عمل را بنویسید و پایدارساز هر نقطه را بیابید. قضیهٔ ۱۱.۴ را در هر حالت تحقیق کنید:

(i) $G = \langle(۱۲۳)\rangle$،

(ii) $G = \langle(۱۲۳۴)\rangle$،

(iii) $G = \{۱, (۱۲)(۳۴), (۱۳)(۲۴), (۱۴)(۲۳)\}$،

(iv) $G = \{۱, (۱۲), (۱۲)(۳۴), (۳۴)\}$،

(v) $G = A_۴$.

۱۹۰. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، F یک میدان، و V یک فضای برداری از بعد n روی F. فرض می‌کنیم مانند ۲.۴ (ii)، $F^\times$ بر V از چپ عمل کند. مدارهای این عمل و پایدارساز هر $v \in V$ را در $F^\times$ پیدا، و تحقیق کنید که نتیجهٔ ۱۱.۴ در این حالت معتبر است. هرگاه $|F| = q < \infty$ چند مدار وجود دارد؟

ما دو عملِ گروهی خاص را که بسیار اهمیت دارند مورد بحث قرار می‌دهیم: عمل توسط ضرب از راستِ یک گروه بر مجموعه‌ای از هم مجموعه‌های راست یک زیرگروه، و عمل توسط

ترویجِ یک گروه بر زیرمجموعه‌هایش. همچنین از اطلاعات راجع به این عملها در به‌دست‌آوردن نتایج بنیادی روی گروههای مجرد استفاده خواهیم کرد.

۱۲.۴ تعریف فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. این عمل ترایا خوانده می‌شود اگر دارای تنها یک مدار باشد. عملی را که ترایا نباشد ناترایا می‌نامند.

برای مثال، فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد و قرار می‌دهیم $X=\{1,2,\cdots,n\}$. در این صورت عمل طبیعی Σ_n بر X ترایاست؛ ازاین‌رو عمل طبیعی زیرگروه دوری $\langle(12\cdots n)\rangle$ از Σ_n بر X نیز ترایاست. عمل طبیعی A_n بر X ترایاست، اگر $n\geqslant 3$: زیرا اگر $n\geqslant 3$ و i و j دو نقطهٔ متمایز دلخواه از X باشند، نقطه‌ای مانند $k\in X$ متمایز از i و j وجود دارد، و در این صورت (بنابر ۵۹.۳) $(ijk)\in A_n$، و (ijk)، i را به j بدل می‌کند.

۱۳.۴ فرض می‌کنیم $H\leqslant G$ و X مجموعهٔ هم مجموعه‌های راست H در G باشد. در این صورت G با ضرب از راست بر X عمل می‌کند: به هر $g\in G$ و هر $Hx\in X$ (که $x\in G$) هم‌مجموعهٔ $Hxg\in X$ متناظر می‌شود.

این تناظر معرف یک عمل از G بر X است، زیرا اگر $x,g_1,g_2\in G$ آنگاه

$$(Hxg_1)g_2=Hxg_1g_2$$

و $Hx1=Hx$. این عمل ترایاست، چرا که هر دو هم‌مجموعهٔ راست H در G تحت این عمل هم‌ارزند: هرگاه $x_1,x_2\in G$ آنگاه $x_1^{-1}x_2\in G$ و $(Hx_1)x_1^{-1}x_2=Hx_2$.

سپس توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_G(Hx)&=\{g\in G: Hxg=Hx\}\\&=\{g\in G: xgx^{-1}\in H\}\\&=x^{-1}Hx,\end{aligned}$$

که این هم مزدوج H است تحت x (۱۹.۲). توجه داشته باشید که، بنابر ۱۱.۴ به‌ازای هر $x\in G$،

$$|G:x^{-1}Hx|=|X|=|G:H|.$$

البته، اگر G متناهی باشد، این رابطه به موجب قضیهٔ لاگرانژ واضح است (۲۷ را نیز ببینید).

فرض می‌کنیم ρ^H نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل باشد. در این صورت بنابر ۹.۴، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}\rho^H&=\bigcap_{x\in G}x^{-1}Hx\\&=H_G,\end{aligned}$$

مغز H در G است (۹۰).

وقتی $|G:H|<\infty$، می‌توانیم بنابر ۷.۲، Σ_X را با $\Sigma_{|G:H|}$ یکی بگیریم. در این صورت ρ^H یک همریختی است از G به توی $\Sigma_{|G:H|}$ و قضیهٔ بنیادی همریختیها واقعیت ساده، اما مهم زیر را به دست می‌دهد.

۱۴.۴ قضیه هرگاه H زیرگروهی از شاخص متناهی در G باشد آنگاه G/H_G را می‌توان در $\Sigma_{|G:H|}$ نشانید.

فرع زیر یک نتیجهٔ بلافصل آن است.

۱۵.۴ فرع هرگاه H زیرگروهی از شاخص متناهی درگروه نامتناهی G باشد، آنگاه یک زیرگروه نرمال K از G وجود دارد به قسمی که $K\leqslant H$ و G/K متناهی است.

اکنون دو نتیجهٔ نه‌چندان بدیهی، منسوب به ر. بیر [a5]، در مورد گروه نامتناهی متناهی مولد را به‌دست می‌آوریم.

۱۶.۴ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه نامتناهی متناهی مولد باشد. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، G دارای تنها تعداد متناهی زیرگروه از شاخص n است.

برهان هرگاه H زیرگروه دلخواهی از شاخص n در G باشد، بنابر ۱۴.۴ یا همریختی از G به توی Σ_n با هستهٔ H_G وجود دارد. فرض می‌کنیم $G=\langle x_1,\cdots,x_m\rangle$، که در آن m یک عدد صحیح مثبت است. یک همریختی دلخواه $\varphi: G\to\Sigma_n$ (بنابر ۲۸.۲) مشخص می‌شود به محض اینکه $x_1\varphi$، $\cdots$، $x_m\varphi$ تعیین شوند. ازاین‌رو، چون Σ_n یک گروه متناهی است، تنها تعداد متناهی همریختی از G به توی Σ_n وجود دارد، و بنابراین تنها تعداد متناهی زیرگروه نرمالِ G وجود دارند که برای مغزبودن در زیرگروههای از شاخص n در G واجد شرایط باشند. علاوه‌براین، هر چنین زیرگروه نرمال K از G، می‌تواند مغز تنها تعداد متناهی زیرگروه G از شاخص n در G

باشد، زیرا G/K گروهی متناهی است. ازاین‌رو در G، تنها تعداد متناهی زیرگروه از شاخص n وجود دارد.

۱۷.۴ فرع فرض می‌کنیم H زیرگروهی از شاخص متناهی در گروه نامتناهی متناهی مولد G باشد. در این صورت یک زیرگروه مشخصهٔ K از G وجود دارد به‌طوری‌که $K \leqslant H$ و G/K متناهی است.

برهان قرار می‌دهیم $|G:H| = n$. بنابر ۱۶.۴، G تنها دارای تعداد متناهی زیرگروه از شاخص n است: فرض می‌کنیم $H_1 = H$، H_2، $\cdots$، H_s زیرگروههای از شاخص n باشند. در این صورت قرار می‌دهیم

$$K = \bigcap_{i=1}^{s} H_i.$$

می‌دانیم هر خودریختی G، یک زیرگروه از شاخص n را به زیرگروهی از شاخص n می‌نگارد (۲۷)، و بنابراین ترتیب زیرگروههای H_1، $\cdots$، H_s را در بین خودشان عوض می‌کند؛ ازاین‌رو K را بر خودش می‌نگارد. لذا K در G مشخصه است. سرانجام بنابر قضیهٔ پوانکاره (۶۶)، G/K متناهی است.

در ۱۶.۴ و ۱۷.۴، شرط متناهی مولدبودن G را، چنانکه از درنظرگرفتن گروه جمعی فضای برداری نامتناهی بعد روی $\mathbf{Z}_p$ ملاحظه می‌شود، نمی‌توان حذف کرد.

مسألهٔ ۱۰۲ نتیجهٔ بلافصل دیگری است از ۱۴.۴، زیرا $|\Sigma_2| = 2$. وقتی که G یک گروه متناهی باشد می‌توان این را تعمیم داد.

۱۸.۴ فرع فرض می‌کنیم G متناهی و p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. اگر H زیرگروهی از شاخص p در G باشد، $H \trianglelefteq G$.

برهان فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $|G:H| = p$. در این صورت $|G/H_G| = p|H:H_G|$. فرض می‌کنیم $|H:H_G| > 1$ و q را مقسوم‌علیه اول $|H:H_G|$ می‌گیریم. در این صورت q، $|G|$ را می‌شمارد، و در نتیجه بنابر فرض $q \geqslant p$. از طرفی بنابر ۱۴.۴، $|G/H_G|$، $p!$ را می‌شمارد، لذا pq، $p!$ را خواهد شمرد، و در نتیجه q، $(p-1)!$ را می‌شمارد. چون q اول است، نتیجه می‌شود $q < p$، که این یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم $|H:H_G| = 1$. ازاین‌رو $H = H_G \trianglelefteq G$.

۱۹۱. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $|G:H| = n < \infty$. ϖ را مجموعهٔ تمام اعداد اولی می‌گیریم که از n تجاوز نمی‌کنند. در این صورت G/H_G یک ϖ گروه متناهی است.

۱۹۲. فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ متناهی باشد با یک زیرگروه H از شاخص عدد اول p. در این صورت p بزرگترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ است و p^2، $|G|$ را نمی‌شمارد.

۱۹۳. فرض می‌کنیم $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$ و $K = Z(G)$. بنابر ۱۶.۲ و ۱۷.۲، $|G| = 48$ و بنابر ۱۲۳، $|K| = 2$.

(i) فرض می‌کنیم $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbf{Z}_3 \text{ و } ac \neq 0 \right\}$. نشان دهید که $|H| = 12, K \leqslant H \leqslant G$.

(ii) ثابت کنید که $H_G = K$.

(iii) با استفاده از ۱۴.۴ نتیجه بگیرید که $G/K \cong \Sigma_4$.

۱۹۴. یک گروه سادهٔ نامتناهی نمی‌تواند زیرگروهی حقیقی از شاخص متناهی داشته باشد.

***۱۹۵.** یک گروه را دوره‌یی می‌خوانیم اگر هر عضوش مرتبهٔ متناهی داشته باشد. لذا هر گروه متناهی دوره‌یی است. گروههای دوره‌یی نامتناهی نیز وجود دارند، به‌عنوان مثال $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$: ۲۵.۳ را ببینید.

(i) همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی از یک گروه دوره‌یی، دوره‌یی هستند.

(ii) هرگاه $K \trianglelefteq G$ و گروههای K و G/K هر دو دوره‌یی باشند، آنگاه G دوره‌یی است.

(iii) یک گروه، دوره‌یی است اگر زیرگروهی دوره‌یی از شاخص متناهی داشته باشد.

۱۹۶. G را متناهی موضعی می‌خوانند اگر هر زیرگروه متناهی مولد G متناهی باشد.

(i) هر گروه متناهی موضعی دوره‌یی است (۱۹۵). (اشاره. عکس این حکم برقرار نیست: ۲۹.۸ را ببینید).

(ii) هر گروه آبلی دوره‌یی متناهی موضعی است. (راهنمایی. از ۶۹ استفاده کنید.)

(iii) (اَ. ج. اشمیت [a۸۶]). هرگاه $K \trianglelefteq G$ و گروههای K و G/K هر دو متناهی موضعی باشند، آنگاه G متناهیِ موضعی است. (راهنمایی. از ۴۰.۳؛ ۱۰۸ و ۱۴۹ استفاده کنید.)

(iv) یک گروه، متناهی موضعی است اگر یک زیرگروه متناهی موضعی از شاخص متناهی داشته باشد.

۱۹۷. فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$ و $|G:H|$، $|G:K|$ متناهی و متباین باشند. در این صورت خواهیم داشت: $|G:H \cap K| = |G:H||G:K|$ و $G = HK$. (این نتیجه تعمیم مسألهٔ ۱۰۰ است. از ۱۵.۴، ۶۶ و ۱۰۰ استفاده کنید.)

حال نشان می‌دهیم که هر عمل گروهی ترایا به معنایی که در تعریف زیر آمده، با یک عمل از نوع مذکور در ۱۳.۴ هم‌ارز است.

۱۹.۴ تعریف فرض می‌کنیم گروههای G_1 و G_2 به ترتیب بر مجموعه‌های X_1 و X_2 عمل کنند. این عملها را هم‌ارز گوییم اگر یک یکریختی $\varphi : G_1 \to G_2$ و یک نگاشت دوسویی $\mu : X_1 \to X_2$ وجود داشته باشد به قسمی که، به‌ازای هر $g_1 \in G_1$ و $x_1 \in X_1$،

$$(x_1 g_1)\mu = (x_1\mu)(g_1\varphi).$$

این رابطه معرف یک رابطهٔ هم‌ارزی بر عملهای گروهی است.

۲۰.۴ قضیه فرض می‌کنیم G به‌طور ترایا بر مجموعهٔ X عمل کند. فرض می‌کنیم $x \in X$ و قرار می‌دهیم $H = \mathrm{Stab}_G(x)$. در این صورت عمل G بر X با عمل ضرب از راست G در مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G هم‌ارز است.

برهان چون عملِ G بر X ترایا است،

$$X = \{xg : g \in G\}.$$

نگاشت μ از X به مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G را با ضابطهٔ

$$\mu : xg \mapsto Hg \quad (\text{به‌ازای هر } g \in G)$$

تعریف می‌کنیم. این نگاشت خوشتعریف است، زیرا اگر $g_1, g_2 \in G$ و $xg_1 = xg_2$، آنگاه داریم $g_1 g_2^{-1} \in \mathrm{Stab}_G(x) = H$ و در نتیجه $Hg_1 = Hg_2$. این استدلال در جهت عکس برای اینکه نشان دهیم اگر $Hg_1 = Hg_2$ آنگاه $xg_1 = xg_2$، نیز به‌کار می‌رود. بنابراین روشن است که μ یک نگاشت دوسویی است. تا به اینجا، اثبات عیناً همان اثباتی است که در ۱۱.۴ داشتیم. به‌ازای هر $g, g_1 \in G$،

$$((xg)g_1)\mu = (x(gg_1))\mu = Hgg_1 = ((xg)\mu)g_1.$$

اکنون با انتخاب خودریختی همانی G به‌عنوان یکریختی مورد نیاز، تساوی فوق هم‌ارزی عملهای گروهی مذکور را ثابت می‌کند.

۲۱.۴ از ۱۳.۴ و ۲۰.۴ نتیجه می‌شود که هرگاه $H \leqslant G$ و $x \in G$ آنگاه عمل ضرب از راستِ G بر مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راستِ H در G، با عمل ضرب از راستِ G بر مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راستِ $x^{-1}Hx$ در G هم‌ارز است.

*۱۹۸. فرض می‌کنیم X و Y مجموعه‌هایی باشند با نگاشت دوسویی $\mu : X \to Y$؛ و نیز G به‌طور صادق بر مجموعهٔ X عمل کند. در این صورت این عمل با عمل طبیعی یک زیرگروه مناسبِ Σ_Y بر Y هم‌ارز است. (راهنمایی. ۷.۲ را ببینید.)

*۱۹۹. فرض می‌کنیم گروههای G_1 و G_2 به‌ترتیب به‌طور ترایا بر مجموعه‌های X_1 و X_2 عمل کنند. هرگاه این عملها هم‌ارز باشند و $x_1 \in X_1$ و $x_2 \in X_2$ آنگاه $\mathrm{Stab}_{G_1}(x_1) \cong \mathrm{Stab}_{G_2}(x_2)$.

۲۰۰. فرض می‌کنیم گروههای G و H هر دو بر یک مجموعهٔ X عمل کنند، و نمایشهای جایگشتی متناظر آنها به ترتیب ρ و σ باشند. ثابت کنید که این عملها هم‌ارزند اگر و تنها اگر یک یکریختی $\varphi : G \to H$ و یک عضو مانند $\mu \in \Sigma_X$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\varphi\sigma = \rho\tau_\mu$، که در آن τ_μ خودریختی درونی Σ_X است که به‌وسیلهٔ μ القا شده است.

از اینجا نتیجه بگیرید که هرگاه $G \leqslant \Sigma_X$، $H \leqslant \Sigma_X$ و هر یک از عملهای G و H بر X طبیعی باشند، آنگاه این عملها هم‌ارزند اگر و تنها اگر G و H زیرگروههای مزدوج Σ_X باشند.

۲۰۱. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد و $H, J \leqslant G$. دو عمل ضرب از راست G، بر مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G، و نیز بر مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست J در G را در نظر می‌گیریم. این دو عمل هم‌ارزند اگر و تنها اگر یک خودریختی α از G وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H^\alpha = J$.

۲۰۲. عملهای یک گروه G بر مجموعه‌ها را در نظر می‌گیریم. یک مجموعهٔ X به انضمام یک عملِ G بر X را یک G مجموعه می‌نامند. اگر X یک G مجموعه باشد و $Y \subseteq X$، Y یک G زیرمجموعه از X است، اگر عملِ G بر X به یک عملِ G بر Y تحدید شود، یعنی اگر به‌ازای هر $y \in Y$ و $g \in G$، $yg \in Y$. مجموعهٔ تهی $\varnothing$ به‌عنوان یک G زیرمجموعه از هر G مجموعه در نظرگرفته می‌شود. یک G مجموعهٔ ناتهیِ X را تحویل‌ناپذیر می‌نامند، اگر $\varnothing$ و X تنها G زیرمجموعه‌های X، باشند. یک G نگاشت از یک G مجموعهٔ X به یک G مجموعهٔ Y نگاشتی است مانند $\varphi : X \to Y$ به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in X$ و $g \in G$، $(x\varphi)g = (xg)\varphi$.

(i) فرض می‌کنیم X یک G مجموعهٔ ناتهی باشد. در این صورت مدارهای عملِ G بر X، G زیرمجموعه‌های تحویل‌ناپذیر Xاند، و دقیقاً تنها G زیرمجموعه‌های تحویل‌ناپذیر X هستند. به‌ویژه، X تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر عمل G بر X ترایا باشد.

(ii) فرض می‌کنیم X یک G مجموعهٔ ناتهی باشد و $\{X_r : r \in R\}$ مجموعهٔ همهٔ G زیرمجموعه‌های تحویل‌ناپذیر X باشد. به‌ازای هر G زیرمجموعهٔ ناتهی Y از X یک زیرمجموعهٔ ناتهی مانند S از R وجود دارد به‌طوری‌که $Y = \bigcup_{s\in S} X_s$.

(iii) فرض می‌کنیم φ یک G نگاشت از G مجموعهٔ X به G مجموعهٔ Y باشد. در این صورت $\operatorname{Im}\varphi = \{x\varphi : x \in X\}$ یک G زیرمجموعهٔ Y است؛ و به‌ازای هر G زیرمجموعهٔ W از Y، $\{x \in X : x\varphi \in W\}$ یک G زیرمجموعهٔ X است.

(iv) هر G نگاشت از یک G مجموعهٔ ناتهی به یک G مجموعهٔ تحویل‌ناپذیر لزوماً پوشاست.

(v) فرض می‌کنیم φ یک G نگاشت از G مجموعهٔ تحویل‌ناپذیر X به G مجموعهٔ Y باشد. در این صورت به‌ازای هر G زیرمجموعهٔ W از Y، یا $\operatorname{Im}\varphi \subseteq W$ یا $W \cap \operatorname{Im}\varphi = \varnothing$.

(vi) هرگاه X یک G مجموعهٔ ناتهی باشد، آنگاه مجموعهٔ همهٔ G نگاشتهای دوسویی $X \to X$ زیرگروهی است مانند Σ_X^G از Σ_X.

(vii) هرگاه X یک G مجموعهٔ تحویل‌ناپذیر باشد، آنگاه $|\Sigma_X^G| \leqslant |X|$.

(viii) هرگاه $H \leqslant G$ و X مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G باشد، و عملِ G بر X با ضرب از راست، همانند ۱۳.۴، تعریف شده باشد، آنگاه X یک G مجموعهٔ تحویل‌ناپذیر است و $\Sigma_X^G \cong N_G(H)/H$.

۲۲.۴ تعریف عمل G بر مجموعهٔ X را منظم می‌خوانیم اگر این عمل ترایا باشد و به‌ازای هر $x \in X$، $\operatorname{Stab}_G(x) = 1$.

از این تعریف و ۹.۴ نتیجه می‌شود که یک عمل منظم، صادق است.

۲۳.۴ در ۱۳.۴ با انتخاب $H = 1$ یک عمل منظم از G به‌دست می‌آوریم. در این حالت داریم $X = G$، و G با ضرب از راست بر خودش عمل می‌کند. نمایش جایگشتی متناظر ρ^1 از G را نمایش جایگشتی منظم راست G می‌نامند: ρ^1 هر $g \in G$ را به جایگشتی از G می‌نگارد که از ضرب همهٔ اعضای G از راست در g به‌دست می‌آید. عملی که با استفاده از این انتخاب از G به‌دست آمد، به تعبیر ۱۹.۴، با عمل G بر خودش با ضربِ از راست هم‌ارز است: این هم‌ارزی از ۲۰.۴ نتیجه می‌شود.

وقتی ۱۰.۲ را برای ρ^1 به‌کار بریم، قضیهٔ معروف زیر را به‌دست می‌آوریم، که اثباتش از مطالب مقالهٔ کیلی مندرج در [a۱۶]، در ۱۸۵۴ نتیجه شده است.

۲۴.۴ قضیه (آ. کیلی) G را می‌توان در Σ_G نشاند.

این قضیه اثبات دیگری از واقعیتی است که در ۲.۱ ثابت شده، که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n تنها تعداد متناهی انواع گروههای متمایز از مرتبهٔ n وجود دارند: زیرا، بنابر قضیهٔ کیلی هرگروه از مرتبهٔ n را می‌توان در Σ_n نشانید و Σ_n به‌عنوان یک گروه متناهی دارای تنها تعداد متناهی زیرگروه است.

۲۰۳. فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند.

(i) این عمل منظم است اگر ترایا باشد و به‌ازای $x \in X$ ی، $\operatorname{Stab}_G(x) = 1$. (راهنمایی. ۱۸۷ (i) را ببینید.)

(ii) هرگاه G آبلی و این عمل صادق و ترایا باشد، آنگاه این عمل منظم است.

۲۰۴. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد که به‌طور ترایا بر مجموعهٔ متناهی X، $|X| = n$، عمل می‌کند. در این صورت $|G|$ مضربی است از n، و $|G| = n$، اگر و تنها اگر این عمل منظم باشد.

۲۰۵*. فرض می‌کنیم $|G| = 2r$، که r عدد صحیحی است فرد و $r > 1$. بنابر ۱۳.۱، یک عضو t در G وجود دارد که $o(t) = 2$. نشان دهید که در نمایش جایگشتی منظم راستِ G، t با یک جایگشت فرد متناظر است. با استفاده‌از ۱۸۴ نتیجه بگیرید که G گروه ساده نیست.

۲۰۶. فرض می‌کنیم N معرف مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت باشد. هرگروه متناهی را می‌توان در $\Sigma_{(\mathrm{N})}$، گروه متقارن محدود شده به N، نشانید. (۱۱۰ و ۱۴۸ را ببینید.)

ما اکنون عمل گروهی مهم دیگری را در نظر می‌گیریم.

۲۵.۴ G برخودش با تزویج عمل می‌کند. در این حالت، به‌ازای هر $g \in G$ و هر $x \in G$ برای عضوی از G که g، x را به آن می‌برد؛ می‌نویسیم x^g، و در نتیجه بنابر تعریف

مزدوج x تحت g (۱۹.۲)، $x^g = g^{-1}xg$

این رابطه معرف یک عمل از G بر خودش است؛ زیرا اگر $x, g_1, g_2 \in G$ آنگاه

$$(x^{g_1})^{g_2} = g_2^{-1}(g_1^{-1}xg_1)g_2 = (g_1g_2)^{-1}x(g_1g_2) = x^{g_1g_2}$$

و

$$x^1 = 1^{-1}x1 = x.$$

به‌علاوه مدار x عبارت است از مجموعهٔ

$$\{g^{-1}xg : g \in G\},$$

ردهٔ تزویجی x در G (۴۹ را ببینید.)؛ و

$$\begin{aligned}\mathrm{Stab}_G(x) &= \{g \in G : g^{-1}xg = x\}\\ &= \{g \in G : xg = gx\}\\ &= C_G(x),\end{aligned}$$

که مرکزساز x در G است (فصل ۱ را ببینید). نمایش جایگشتی متناظر G عبارت است از نگاشت $\tau : G \to \Sigma_G$ که در ۲۱.۲ تعریف شده است. به موجب ۹.۴ داریم

$$\mathrm{Ker}\,\tau = \bigcap_{x \in G} C_G(x) = Z(G),$$

همان‌گونه که در ۱۱۷ داشتیم.

وقتی از ۱۱.۴ و تعریف مدار برای این عمل استفاده می‌کنیم؛ نتایج مهم زیر را به‌دست می‌آوریم.

۲۶.۴ فرع به‌ازای هر $x \in G$،

$$|\text{ردهٔ تزویجی } x \text{ در } G| = |G : C_G(x)|.$$

۲۷.۴ فرع (معادلهٔ رده‌یی). هرگاه G یک گروه متناهی باشد با k ردهٔ تزویجی متمایز از اعضا، و اگر $x_1, \cdots, x_k$ اعضایی از G باشند، که هر یک عضو یکی از این k رده باشند، آنگاه

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)|.$$

عدد صحیح مثبت k را عدد ردهٔ G می‌نامند، که ما آن را با $k(G)$ نمایش می‌دهیم.

حال به دو کاربردِ معادلهٔ رده‌یی اشاره می‌کنیم.

۲۸.۴ قضیه هرگاه $|G| = p^n$، که n عدد صحیحی است مثبت، آنگاه $Z(G) \neq 1$.

این قضیه را در ۸.۵ تعمیم خواهیم داد، اما خود این قضیه آنقدر مهم است که ارزش دارد جداگانه ثابت شود.

برهان فرض می‌کنیم $x \in G$. بنابر ۲۶.۴، ردهٔ تزویجی x شامل دقیقاً یک عضو است اگر و تنها اگر $C_G(x) = G$، یعنی اگر و تنها اگر $x \in Z(G)$. ازاین‌رو اگر $Z(G) = 1$، معادلهٔ رده‌یی چنین به‌دست می‌دهد

$$p^n = 1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k,$$

که هر یک از اعداد صحیح مثبت $m_2, \cdots, m_k$ یک مقسوم‌علیه p^n بوده و بزرگتر از ۱ است. (با نمادگذاری ۲۷.۴، $m_i = |G : C_G(x_i)|$.) اما در این صورت، ازآنجاکه p اول است، هر یک از اعداد $m_2, \cdots, m_k$ توانی از p است با نمایی مثبت، و درنتیجه $m_2 + m_3 + \cdots + m_k$ بر p بخش‌پذیر است. بنابراین از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که ۱ بر p بخش‌پذیر است، و این یک تناقض است. بدین‌ترتیب نتیجه می‌گیریم که $Z(G) \neq 1$.

این ویژگی برای بررسی گروههایی که مرتبه‌های آنها توان یک عدد اول‌اند، اساسی است و در حالت کلی برای همهٔ گروههای متناهی که مرتبهٔ آنها شامل دو یا چند عدد اول باشد صادق نیست: به‌عنوان مثال، گروه Σ_3 از مرتبهٔ ۶ مرکز بدیهی دارد.

با استفاده از ۲۸.۴، دو فرع زیر را نتیجه می‌گیریم.

۲۹.۴ فرع اگر G یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی باشد، $|G|$ دست‌کم بر دو عدد اول متمایز بخش‌پذیر است.

حقیقت امر این است که مرتبهٔ یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی دست‌کم بر سه عدد اول متمایز بخش‌پذیر است. این یک قضیهٔ مهم از ویلیام برنساید (۱۸۵۲ـ۱۹۲۷) است، که ما دوباره به آن مراجعه خواهیم کرد؛ اما در این کتاب اثبات نخواهیم کرد.

۳۰.۴ فرع هر گروه مرتبهٔ p^2 آبلی است.

برهان برخلاف حکم فرض می‌کنیم که $|G| = p^2$ و G ناآبلی است. در این صورت $Z(G) < G$ و در نتیجه بنابر ۲۸.۴ و قضیهٔ لاگرانژ، $|Z(G)| = p$. ازاین‌رو $|G/Z(G)| = p$؛ و بنابراین $G/Z(G)$ دوری است. اما در این صورت نتیجه می‌گیریم که G آبلی است (۱۲۵)؛ و این یک تناقض است.

به‌ازای هر عدد اول مانند p، یک گروه ناآبلی از مرتبهٔ p^3 وجود دارد: ۲۲۱ را ببینید.

۲۰۷. فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی باشد و p بزرگترین مقسوم‌علیه اول $|G|$.

در این صورت:

(i) هرگاه $H < G$ آنگاه $|G : H| \geqslant p$.

(ii) هرگاه X یک ردهٔ تزویجی از اعضای نابدیهی G باشد، آنگاه $|X| \geqslant p$.

۲۰۸. فرض می‌کنیم X یک ردهٔ تزویجی از اعضای G باشد. در این صورت $\langle X \rangle \trianglelefteq G$. (راهنمایی. از ۳.۵۰ استفاده کنید.)

۲۰۹. فرض می‌کنیم X یک ردهٔ تزویجی از اعضای نابدیهی G باشد.

(i) فرض می‌کنیم $\alpha \in \operatorname{Aut} G$ و $X^\alpha = \{x^\alpha : x \in X\}$. در این صورت X^α یک ردهٔ تزویجی از اعضای G است.

(ii) فرض می‌کنیم که G یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی باشد و به‌ازای هر ردهٔ تزویجی Y از اعضای G، متمایز از X، یا $|Y| \neq |X|$ و یا اعضای X و اعضای Y مرتبه‌های متفاوت داشته باشند. قرار می‌دهیم $n = |X|$. در این صورت $\operatorname{Aut} G$ را می‌توان در Σ_n نشانید. (راهنمایی. در مورد (ii) نشان دهید که $\operatorname{Aut} G$ بر X عمل می‌کند و $G = \langle X \rangle$. همین‌طور از ۲۰۸ و ۲۸.۲ استفاده کنید.)

۲۱۰. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و x و y اعضای مزدوج G باشند. در این صورت تعداد اعضای متمایز $g \in G$ به‌طوری‌که $x^g = y$ برابر است با $|C_G(x)|$.

۲۱۱. فرض می‌کنیم $x \in G$، که G یک گروه متناهی است. در این صورت $|C_G(x)| \geqslant |G/G'|$ (که در آن G' معرف گروه مشتق G است: ۴۸.۳ را ببینید.)

۲۱۲. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و F یک میدان به قسمی که $|F| > n$. قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}_n(F)$، و فرض می‌کنیم x یک ماتریس قطری در G باشد که n درایهٔ قطری‌اش، اعضای متمایزی از Fاند. ثابت کنید که $C_G(x)$ زیرگروهی است از G متشکل از همهٔ ماتریسهای قطری در G (رک. ۱۲۳).

۲۱۳. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و F یک میدان که در آن $1 + 1 \neq 0$. قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}_n(F)$ و به‌ازای هر $i = 0, 1, \dots, n-1$؛ فرض می‌کنیم t_i ماتریس قطری در G باشد که اولین i درایهٔ قطری‌اش برابر با ۱ باشد و درایه‌های قطری دیگرش برابر ۱−.
ثابت کنید که هر عضوِ مرتبهٔ ۲ در G با یکی از n عضو $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ در G مزدوج است. همچنین ثابت کنید که هیچ دو عضوی از $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ در G مزدوج نیستند.
ازاین‌رو G دقیقاً دارای n ردهٔ تزویجی از اعضای مرتبهٔ ۲ است. (راهنمایی. فرض کنید V یک فضای برداری از بعد n روی F باشد و یک پایه از V را انتخاب کنید. نسبت به این پایه، هر عضو مرتبهٔ ۲ از G، معرف یک عضو از $\mathrm{GL}(V)$ مانند θ از مرتبهٔ ۲ است. توجه داشته باشید

که به‌ازای هر $v \in V$؛ $v = \frac{1}{2}(v + v\theta) + \frac{1}{2}(v - v\theta)$. بدین‌ترتیب نشان دهید که یک پایه از V وجود دارد که نسبت به آن، θ به‌وسیلهٔ یکی از ماتریسهای $t_0, t_1, \dots, t_{n-1}$ نمایش داده می‌شود. توجه کنید که دو عضو G در G مزدوج‌اند اگر و تنها اگر نسبت به پایهٔ مناسبی از V معرف یک عضو از $\mathrm{GL}(V)$ باشند.)

۲۱۴. H را زیرگروهی از شاخص ۲ در گروه متناهی G می‌گیریم. فرض می‌کنیم به‌ازای هر $h \in H$ با $h \neq 1$، $C_G(h) \leqslant H$ (یعنی، بنابر ۲۶.۴، ردهٔ G تزویج شامل h به دو ردهٔ H تزویج تقسیم شود.) در این صورت $G \backslash H$ ردهٔ تزویجی منفرد از اعضایِ G را تشکیل می‌دهد. (راهنمایی. فرض کنید $g \in G \backslash H$. نشان دهید که نگاشت $h \mapsto g^h$؛ که به‌ازای هر $h \in H$ تعریف می‌شود؛ نگاشتی است یک به یک از H به توی G.)

۲۱۵. ثابت کنید که هر گروه مرتبهٔ ۱۵ آبلی است. با استفاده از ۱۰۷ و ۶ نتیجه بگیرید که هر گروهِ مرتبهٔ ۱۵ دوری است (و بنابراین $\nu(15) = 1$). (راهنمایی. اگر G یک گروه ناآبلی از مرتبهٔ ۱۵ باشد، بنابر ۱۲۵، $Z(G) = 1$. سپس با استفاده از معادلهٔ رده‌یی نشان دهید که G دقیقاً یک ردهٔ تزویجی دارد با ۵ عضو، و این ردهٔ تزویجی متشکل از همهٔ اعضای G از مرتبهٔ ۳ است، که با ۶۷ در تناقض است. اشاره. این نتیجه به روش دیگری در ۱۸.۵ ثابت خواهد شد.)

۲۱۶. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد و p را کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ می‌گیریم. هرگاه $k(G) > |G|/p$ آنگاه $Z(G) \neq 1$.

۲۱۷. اگر G یک گروه متناهی ناآبلی باشد، $k(G) > |Z(G)| + 1$.

۲۱۸. فرض می‌کنیم G یک گروه ناآبلی باشد.

(i) به‌ازای هر $x \in G$، $Z(G) < C_G(x)$.

(ii) هرگاه $|G| = p^3$، آنگاه $|Z(G)| = p$ و $k(G) = p^2 + p - 1$.

۲۱۹. (i) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر H اجتماع رده‌های تزویجیِ G اعضا باشد.

(ii) فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$، که G یک گروه متناهی است. در این صورت

$$k(G/H) \leqslant k(G) - j + 1,$$

که در آن j تعداد رده‌های G تزویجی از اعضای H است.

(iii) هرگاه G یک گروه متناهی ناآبلی باشد به‌طوری‌که $G/Z(G)$ آبلی باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$k(G) \geqslant |G/Z(G)| + |Z(G)| - 1.$$

*۲۲۰. از معادلهٔ رده‌یی برای اثبات قضیهٔ کوشی استفاده کنید که می‌گوید: هرگاه G یک گروه متناهی باشد و p، $|G|$ را بشمارد آنگاه G عضوی از مرتبهٔ p دارد. (راهنمایی. از استقرا بر $|G|$ و این حقیقت استفاده کنید که بنابر ۱۰۷، اگر G آبلی باشد قضیه صحیح است: رک. ۱۳.۱. بعداً قضیهٔ کوشی را به روش دیگری ثابت خواهیم کرد: ۱۱.۵ را ببینید.)

*۲۲۱. فرض می‌کنیم U زیرگروهی از $\mathrm{GL}_3(F)$ باشد که در ۱۲۰ تعریف شده است؛ و قرار می‌دهیم $F = \mathbf{Z}_p$.

(i) در این صورت U گروهی است ناآبلی از مرتبهٔ p^3.

(ii) هرگاه $p > 2$؛ آنگاه به‌ازای هر $x \in U$، $x^p = 1$ (رک. ۳).

۲۲۲. هرگروه از مرتبهٔ p^2 یا با C_{p^2} یکریخت است یا با $C_p \times C_p$. ازاین‌رو $\nu(p^2) = 2$ (رک. ۷۷).

بدیهی است که هرگاه G یک گروه متناهی باشد آنگاه $k(G) \leqslant |G|$ (و مساوی است اگر و تنها اگر G آبلی باشد). به‌عنوان دومین کاربرد از معادلهٔ رده‌یی این حقیقت نه چندان بدیهی را که $|G|$ از بالا به‌وسیلهٔ تابعی از $k(G)$ کراندار است، ثابت می‌کنیم. از فرمولهای اثباتِ اسکات [b36] پیروی می‌کنیم.

۳۱.۴ قضیه (اِ. لانداؤ [a69]؛ ۱۹۰۳). به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، یک عدد صحیح مثبت $N(k)$ وجود دارد به‌طوری‌که، به‌ازای هر گروه متناهی G با عدد ردهٔ k، $|G| \leqslant N(k)$.

برهان هرگاه G یک گروه متناهی با عدد ردهٔ k باشد، آنگاه معادلهٔ رده‌یی برای G با نمادگذاری ۲۷.۴، چنین به‌دست می‌دهد

$$|G| = \sum_{i=1}^{k} |G : C_G(x_i)|. \tag{i}$$

به‌ازای هر $i = 1, \cdots, k$ قرار می‌دهیم $n_i = |C_G(x_i)|$. بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود، می‌توانیم فرض کنیم که x_1، $\cdots$، x_k طوری علامتگذاری شده‌اند که

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_k. \tag{ii}$$

توجه کنید که در این صورت $n_1 = |G|$، زیرا $C_G(1) = G$. با تقسیم معادلهٔ (i) بر $|G|$ به دست می‌آوریم

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i}. \tag{iii}$$

بنابراین به منظورکامل‌کردن برهان کافی است نشان دهیم تنها تعداد متناهی دنبالهٔ $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ از اعداد صحیح مثبت وجود دارند که در (ii) و (iii) صدق می‌کنند: زیرا در این صورت ما می‌توانیم برای $N(k)$ بزرگترین مقدار n_1 را در میان چنین دنباله‌هایی انتخاب کنیم.

برای انجام این امر با استقرا بر k ثابت خواهیم کرد که به‌ازای هر عدد صحیح k و هر عدد حقیقی A اگر $\mathscr{S}(k, A)$ نمایش مجموعهٔ تمام دنباله‌های $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ از اعداد صحیح مثبت صادق در (ii) باشد و

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = A, \tag{iv}$$

آنگاه $\mathscr{S}(k, A)$ یک مجموعهٔ متناهی است. (البته ممکن است اتفاق بیفتد که $\mathscr{S}(k, A) = \varnothing$، به‌عنوان مثال وقتی $A \leqslant 0$، اما این حالت مهم نیست.) اگر $k = 1$، این ادعا بدیهی است. فرض می‌کنیم $k > 1$، و به استقرا، $\mathscr{S}(k-1, B)$ به‌ازای هر عدد حقیقی B مجموعه‌ای متناهی باشد. همچنین می‌توانیم فرض کنیم که $A > 0$. هرگاه $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ دنباله‌ای در $\mathscr{S}(k, A)$ باشد آنگاه

$$A = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} \leqslant \frac{k}{n_k},$$

بنابراین

$$n_k \leqslant \frac{k}{A}.$$

لذا تنها تعداد متناهی امکان انتخاب در مورد n_k وجود دارد.

اما $\mathscr{S}(k, A)$ زیرمجموعه‌ای است از مجموعهٔ $\mathscr{T}(k, A)$ مرکب از تمام دنباله‌های $(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ از اعداد صحیح مثبت به‌طوری‌که $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_{k-1}$، $n_k \leqslant \dfrac{k}{A}$ و

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n_i} = A - \frac{1}{n_k}. \tag{v}$$

چون به‌ازای هر انتخاب n_k، $\mathscr{S}(k-1, A - (1/n_k))$ بنابر فرض استقرا مجموعه‌ای است متناهی، و نیز چون تنها تعداد متناهی انتخاب برای n_k وجود دارد؛ نتیجه می‌شود که $\mathscr{T}(k, A)$ مجموعه‌ای است متناهی. ازاین‌رو $\mathscr{S}(k, A)$ نیز مجموعه‌ای است متناهی، و اثبات استقرا به پایان می‌رسد.

گروههایی نامتناهی نیز وجود دارند که تنها تعداد متناهی ردهٔ تزویجی متمایز دارند. در واقع، گ. هیگمن، ب. ه. نیومن و ه. نیومن [a۵۸] ثابت کردند که هر گروه نامتناهی را که در آن هیچ عضو نابدیهی از مرتبهٔ متناهی وجود نداشته باشد می‌توان در یک گروه که در آن تمام اعضای نابدیهی یک ردهٔ تزویجی واحدی تشکیل می‌دهند، نشانید.

۲۲۳. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت

(i) $k(G) = 2$ اگر و تنها اگر $G \cong C_2$.

(ii) $k(G) = 3$ اگر و تنها اگر $G \cong C_3$ یا $G \cong \Sigma_3$.

(راهنمایی. معادلهٔ رده‌یی را همچون در اثبات ۳۱.۴، مورد استفاده قرار دهید. در حالت (ii)، نشان دهید که مرتبه‌های ممکن برای G عبارت‌اند از ۳، ۴، ۶ و گروههای از این مرتبه‌ها را بررسی کنید.)

۲۲۴. (i) X را یک ردهٔ تزویجی از اعضای G می‌گیریم و قرار می‌دهیم $X^* = \{x^{-1} : x \in X\}$. نشان دهید که X^* یک ردهٔ تزویجی از اعضای G است.

(ii) فرض می‌کنیم که G متناهی باشد. ثابت کنید که هرگاه $|G|$ فرد باشد $\{1\}$ تنها ردهٔ تزویجی X است به‌طوری‌که $X = X^*$، اما اگر $|G|$ زوج باشد، دست‌کم یک ردهٔ تزویجی X غیر از $\{1\}$ وجود دارد به قسمی که $X = X^*$.

(iii) ثابت کنید که هرگاه G یک گروه متناهی باشد با $k(G)$ی زوج، آنگاه $|G|$ زوج است. با یک مثال نشان دهید که عکس این مطلب برقرار نیست.

(راهنمایی. در مورد اولین حکمِ (ii)، ۱۲ ممکن است سودمند باشد.)

سپس توسیعی از عمل G بر خودش را که در ۲۵.۴ بیان شده است، به عملی بر مجموعهٔ $\mathscr{Q}(G)$ مرکب از تمام زیرمجموعه‌های ناتهی G، در نظر می‌گیریم.

۳۲.۴ G بر $\mathscr{Q}(G)$ با تزویج عمل می‌کند: به‌ازای هر $g \in G$ و هر زیرمجموعهٔ ناتهی U از G، g، U را به مجموعهٔ

$$U^g = g^{-1}Ug = \{g^{-1}ug : u \in U\},$$

می‌برد که مزدوج U بر اثر g نامیده می‌شود. (هنگامی که U متشکل از یک عضو منفرد یا یک زیرگروه G باشد، این قرارداد با اصطلاحات قبلیِ ما مطابقت دارد.) به سادگی بررسی می‌شود که این معرف یک عمل از G بر $\mathscr{Q}(G)$ است، و عمل در ۲۵.۴ با تحدید این عمل به زیرمجموعه‌های G متشکل از اعضای منفرد به دست می‌آید.

به‌ازای هر $U \in \mathscr{Q}(G)$، مدارِ شامل U عبارت است از مجموعهٔ همهٔ مزدوجهای U، یعنی مجموعهٔ $\{g^{-1}Ug : g \in G\}$ از زیرمجموعه‌های G: این را ردهٔ تزویجی U در G می‌نامند؛ و نیز $\mathrm{Stab}_G(U) = \{g \in G : g^{-1}Ug = U\}$ را نرمال‌ساز U در G می‌نامند و با $N_G(U)$ نمایش می‌دهند (هنگامی که U یک زیرگروه G باشد، این قراردادها با اصطلاحات و نمادگذاریهای معرفی‌شده در ۵۵.۳ مطابقت می‌کنند).

بعضی مواقع می‌گوییم H، U را به صورت نرمال بدل می‌کند و این بدین‌معنی است که $H \leqslant N_G(U)$.

نماد 'توانی' U^g برای مزدوج $g^{-1}Ug$ بسیار مناسب است، که به‌عنوان نماد مورد قبول در بقیهٔ کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

با استفاده از ۱۱.۴ برای ۳۲.۴، تعمیم زیر از ۲۶.۴ را به‌دست می‌آوریم:

۳۳.۴ فرع به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی U از G،

$$|G : N_G(U)| = |\text{ردهٔ تزویجی } U \text{ در } G|$$

(یعنی، $|G : N_G(U)|$ تعداد مزدوجهای متمایز U در G است.)

۳۴.۴ به‌ازای هر $H \leqslant G$، در ۵۵.۳ دیده‌ایم که $N_G(H)$ بزرگترین زیرگروه یکتای G است، که H را به‌عنوان یک زیرگروه نرمال در بر دارد. اما در مورد یک زیرمجموعهٔ U از G که یک زیرگروه نیست $N_G(U)$ حتی لازم نیست که شامل U باشد: ۲۲۵ را ببینید. توجه کنید که وقتی به‌ازای $x \in G$ی، $U = \{x\}$، آنگاه $N_G(U) = N_G(x) = C_G(x)$. ولی می‌توانیم به طریق طبیعی زیرگروه $C_G(U)$ از G را به‌ازای هر $U \in \mathscr{Q}(G)$ تعریف کنیم، و باز هم $N_G(U) \neq C_G(U)$. با نمادگذاری ۱۸۷، که G بر خودش به‌وسیلهٔ تزویج عمل می‌کند و U زیرمجموعهٔ ناتهی دلخواهی از G است، $C_G(U) = G_U$ و $N_G(U) = G_U^*$.

۳۵.۴ تعریف به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی U از G، مرکزساز U در G را به صورت

$$C_G(U) = \{g \in G : ug = gu \text{ ،} u \in U \text{ به‌ازای هر}\} = \bigcap_{u \in U} C_G(u) \leqslant G,$$

تعریف می‌کنیم. (این تعریف با تعریف در ۱۲۲ وقتی $U = H \leqslant G$ مطابقت دارد.) توجه داشته باشید که $C_G(U) = G$ اگر و تنها اگر $U \subseteq Z(G)$.

بعضی مواقع می‌گوییم H، U را به صورت مرکز در می‌آورد، این بدان معنی است که $H \leqslant C_G(U)$.

به آسانی دیده می‌شود که همواره $C_G(U) \leqslant N_G(U)$، و در واقع $C_G(U) \trianglelefteq N_G(U)$ (۲۳۳). هنگامی که U زیرگروهی از G است، قضیهٔ سودمند دیگری را نیز می‌توان به‌دست آورد.

۳۶.۴ لم به‌ازای هر $H \leqslant G$، $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ و $N_G(H)/C_G(H)$ را می‌توان در $\text{Aut}\, H$ نشانید.

برهان چون (بنابر ۵۵.۳) $H \trianglelefteq N_G(H)$، به‌ازای هر $h \in H$، $g \in N_G(H)$ داریم $h^g \in H$. پس واضح است که $N_G(H)$ بر H از راه تزویج عمل می‌کند. فرض می‌کنیم σ نمایش جایگشتی متناظر $N_G(H)$ باشد، بنابراین به‌ازای هر $g \in N_G(H)$،

$$g\sigma : h \mapsto h^g \qquad \text{به‌ازای هر } h \in H$$

لذا

$$\begin{aligned} \text{Ker}\,\sigma &= \{g \in N_G(H) : h^g = h,\ \text{به‌ازای هر } h \in H\} \\ &= \{g \in N_G(H) : hg = gh,\ \text{به‌ازای هر } h \in H\} \\ &= C_G(H) \qquad \text{زیرا } C_G(H) \leqslant N_G(H), \end{aligned}$$

ازاین‌رو بنابر قضیهٔ بنیادی همریختیها،

$$C_G(H) \trianglelefteq N_G(H) \quad \text{و} \quad \text{Im}\,\sigma \cong N_G(H)/C_G(H).$$

به‌ازای هر $g \in N_G(H)$، $g\sigma$ جایگشتی است از H. در واقع $g\sigma$ یک خودریختی از H است، زیرا اگر $h_1, h_2 \in H$ آنگاه

$$(h_1h_2)^g = g^{-1}h_1h_2g = g^{-1}h_1gg^{-1}h_2g = h_1^g h_2^g.$$

ازاین‌رو $\text{Im}\,\sigma$ زیرگروهی است از $\text{Aut}\, H$ و در نتیجه $N_G(H)/C_G(H)$ را می‌توان در $\text{Aut}\, H$ نشانید.

این لم در متن کلیتری در فصل ۹ مطرح خواهد شد. ما این فصل را با ذکر چند کاربرد به پایان می‌بریم.

هرگاه H یک گروه متناهی باشد آنگاه $\text{Aut}\, H$ نیز متناهی است. ازاین‌رو به موجب ۳۶.۴ نتیجه می‌گیریم که در یک گروه نامتناهی هر زیرگروه نرمال متناهی مرکزسازی 'بزرگ' دارد.

۳۷.۴ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه نامتناهی باشد. در این صورت به‌ازای هر زیرگروه نرمال متناهی H از G، $G/C_G(H)$ متناهی است. به‌ویژه، هرگاه G خارج‌قسمت متناهی نابدیهی نداشته باشد، هر زیرگروه نرمالِ متناهی G آبلی است و در $Z(G)$ قرار دارد.

به‌عنوان مثال خاطرنشان می‌کنیم که $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$ و C_{p^∞} گروههای آبلی نامتناهی هستند که خارج‌قسمت متناهی نابدیهی ندارند، اما زیرگروههای متناهی زیادی دارند: ۱۳۳ و ۱۴۴ را ببینید.

۳۸.۴ لم (i) به‌ازای هر گروه دوری G، $\text{Aut}\, G$ آبلی است.

(ii) هرگاه $|G| = p$ آنگاه $|\text{Aut}\, G| = p - 1$.

برهان هر دوگزارهٔ (i) و (ii) از ۴۶ نتیجه می‌شوند، ولی ما آنها را در اینجا مستقیماً ثابت می‌کنیم.

قرار می‌دهیم $G = \langle g \rangle$. در این صورت هر خودریختی α از G به‌وسیلهٔ اثرش بر g مشخص می‌شود. فرض می‌کنیم $\alpha, \beta \in \text{Aut}\, G$ با، مثلاً، $g^\alpha = g^r$ و $g^\beta = g^s$ که در آن $r, s \in \mathbf{Z}$. در این صورت

$$g^{\alpha\beta} = (g^r)^\beta = g^{rs} = g^{sr} = (g^s)^\alpha = g^{\beta\alpha}.$$

چون خودریختیهای $\alpha\beta$ و $\beta\alpha$ از G اثر واحدی بر g دارند، نتیجه می‌شود که $\alpha\beta = \beta\alpha$. لذا $\text{Aut}\, G$ آبلی است.

اینک فرض می‌کنیم که G متناهی باشد. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح خاص r، یک خودریختی α از G وجود خواهد داشت به‌قسمی‌که $g^\alpha = g^r$، فقط مشروط بر آنکه داشته باشیم $o(g^r) = o(g)$. هرگاه $o(g) = p$ آنگاه $p - 1$ انتخاب برای g^r وجود خواهد داشت، بنابراین $|\text{Aut}\, G| = p - 1$.

از ۳۶.۴ و ۳۸.۴ فرع زیر را نتیجه می‌گیریم.

۳۹.۴ فرع (i) هرگاه G یک گروه تام (۱۶۸ را ببینید) و K یک زیرگروه نرمال دوری G باشد آنگاه $K \leqslant Z(G)$.

(ii) هرگاه G یک گروه متناهی، p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ و K یک زیرگروه نرمالِ G از مرتبهٔ p باشد، آنگاه $K \leqslant Z(G)$ (ر.ک. ۱۱۹ و ۱۸.۴).

*۲۲۵. فرض می‌کنیم $G=\Sigma_3$. زیرمجموعهٔ U از G را طوری بیابید که $N_G(U)=1$.

۲۲۶. فرض می‌کنیم U زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. در این صورت G به‌وسیلهٔ تزویج بر ردهٔ تزویجی U در G، به‌طور ترایا عمل می‌کند، و این عمل با عمل ضرب از راستِ G در مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست $N_G(U)$ در G هم‌ارز است.

۲۲۷. فرض می‌کنیم H یک زیرگروه متناهیِ G باشد و قرار می‌دهیم $K=H^G$، بستار نرمال H در G (۱۸۰ را ببینید.). در این صورت K یک زیرگروه نرمال متناهی G است اگر و تنها اگر $|G:N_G(H)|<\infty$. (ر.ک. ۱۴.۴ و ۱۵.۴). راهنمایی. برای اینکه ثابت کنید اگر $|G:N_G(H)|<\infty$ آنگاه $|K|<\infty$، فرض کنید $H_1, H_2, \cdots, H_n$ مزدوجهای متمایز H در G باشند: ۳۳.۴ را ببینید. فرض کنید $k\in K$. با استفاده از ۱۸۰ (ii) و ۲۸.۲ نشان دهید که k به شکل $k=h_{i_1}h_{i_2}\cdots h_{i_r}$ نمایش داده می‌شود، که در آن r عدد صحیحی است مثبت و به‌ازای هر $j=1,\cdots,r$، $i_j\in\{1,2,\cdots,n\}$ و $h_{i_j}\in H_{i_j}$. یک‌چنین نمایشی را برای k با مقداری از r که تا حد ممکن کوچک باشد، انتخاب کنید. در این صورت ملاحظه می‌کنید که هرگاه $r>n$، اعداد صحیح j و l وجود دارند به‌طوری‌که $1\leqslant j<l\leqslant r$ و $i_j=i_l$، و در این صورت

$$h_{i_j}h_{i_{j+1}}\cdots h_{i_l}=(h_{i_j}h_{i_l})(h_{i_l}^{-1}h_{i_{j+1}}h_{i_l})\cdots(h_{i_l}^{-1}h_{i_{l-1}}h_{i_l}).$$

از اینجا نتیجه بگیرید که $r\leqslant n$. این حالت خاصی است از قضیهٔ معروف به لم دیتسمَن.)

۲۲۸. فرض می‌کنیم F یک میدان باشد و قرار می‌دهیم $G=\mathrm{GL}_2(F)$.

(i) ثابت کنید که Σ_3 را می‌توان در G نشاند. (راهنمایی. نشان دهید که اعضای $\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ از G زیرگروهی ناآبلی از مرتبهٔ ۶ تولید می‌کنند، و ۵۸ و ۶۰ را ببینید.)

(ii) فرض می‌کنیم که در F، $1+1\neq 0$. ثابت کنید که $C_2\times C_2\times C_2$ را نمی‌توان در G نشاند. سپس نتیجه بگیرید که گروه متناوب A_4 را نیز نمی‌توان در G نشاند. (راهنمایی. فرض کنید که $C_2\times C_2\times C_2$ را بتوان در G نشاند و با استفاده از ۲۱۲ و ۲۱۳ به یک تناقض برسید. به‌علاوه توجه داشته باشید که اگر L زیرگروهی از G یکریخت با A_4 باشد، آنگاه $L\cap Z(G)=1$. ۱۲۳، ۱۸۵ و ۵۴.۳ را ببینید.

اشارات. چون $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_2)\cong\Sigma_3$ (۴۴)، A_4 را نمی‌توان در $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_2)$ نشاند. ولی یک میدان F با $|F|=4$ وجود دارد، و معلوم است که به‌ازای این F، $\mathrm{SL}_2(F)\cong A_5$؛ بنابراین A_4 را می‌توان در $\mathrm{GL}_2(F)$ نشاند).

*۲۲۹. (i) فرض می‌کنیم که U یک زیرمجموعهٔ ناتهیِ G باشد و $g\in G$ در این صورت

$$C_G(U^g)=C_G(U)^g \quad , \quad N_G(U^g)=N_G(U)^g \quad \text{و} \quad \langle U^g\rangle=\langle U\rangle^g$$

(ii) فرض می‌کنیم $H,K\leqslant G$ و $g\in G$. در این صورت

$$Z(H^g)=Z(H)^g \quad , \quad H^g\cap K^g=(H\cap K)^g \quad \text{و} \quad \langle H^g,K^g\rangle=\langle H,K\rangle^g$$

*۲۳۰. فرض می‌کنیم $K\trianglelefteq G$.

(i) هرگاه $H\leqslant G$ و $g\in G$، آنگاه $(HK/K)^{Kg}=H^gK/K$.

(ii) هرگاه H_1 و H_2 زیرگروههای مزدوج G باشند، آنگاه H_1K/K و H_2K/K زیرگروههای مزدوج G/K خواهند بود.

(iii) هرگاه J_1/K و J_2/K زیرگروههای مزدوجِ G/K باشند، آنگاه J_1 و J_2 زیرگروههای مزدوج G خواهند بود.

۲۳۱. فرض می‌کنیم که G یک گروه سادهٔ نامتناهی باشد.

(i) هرگاه U زیرمجموعهٔ ناتهیِ G باشد به‌طوری‌که فقط تعداد متناهی مزدوج متمایزِ U در G وجود داشته باشد، آنگاه یا $U=\{1\}$ و یا $\langle U\rangle=G$.

(ii) هرگاه x یک عضو نابدیهی G باشد، تعداد نامتناهی مزدوج متمایزِ x در G وجود دارد.

۲۳۲. فرض می‌کنیم $x\in G$. ثابت کنید که هرگاه $C_G(x)\trianglelefteq G$، آنگاه x در یک زیرگروه نرمال آبلی G قرار خواهد داشت. با یک مثال نشان دهید که عکس این حکم برقرار نیست. (راهنمایی. اگر $C_G(x)\trianglelefteq G$، نشان دهید که $\langle x\rangle^G$ آبلی است: ۱۸۰ را ببینید.)

*۲۳۳. نشان دهید که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهیِ U از G، داریم $C_G(U)\trianglelefteq N_G(U)$ و نیز $N_G(V)/C_G(U)$ را می‌توان در Σ_U نشاند. برای $G=\Sigma_3$، U را طوری بیابید که $C_G(U)\neq N_G(U)$.

*۲۳۴. فرض می‌کنیم که $x\in G$. مرکزساز توسیع‌یافتهٔ x در G، بنابه تعریف، زیرگروه

$$C_G^*(x)=N_G(\{x,x^{-1}\})$$

است. نشان دهید که $|C_G^*(x):C_G(x)|\leqslant 2$. برای $G=\Sigma_3$، اعضای $x,y\in G$ را پیدا کنید که $|C_G^*(x):C_G(x)|=2$ و $C_G^*(y)=C_G(y)$.

۲۳۵. (i) فرض می‌کنیم که G ناآبلی است و $Z = Z(G)$. در این صورت، به‌ازای هر $x \in G\backslash Z$، $Z\langle x\rangle$ یک زیرگروه آبلی G است که Z را به‌طور حقیقی در بر دارد.

(ii) فرض می‌کنیم A یک زیرگروه آبلیِ G باشد. A را یک زیرگروه آبلی ماکسیمال G می‌نامیم اگر هیچ زیرگروه آبلی از G وجود نداشته باشد که A را به‌طور حقیقی در برداشته باشد. با این تعریف، A یک زیرگروه آبلی ماکسیمال G است اگر و تنها اگر $C_G(A) = A$.

۲۳۶. فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$ و قرار می‌دهیم $K = C_G(J)$. در این‌صورت $H \leqslant N_G(K)$. به‌ویژه، هرگاه $N_G(K) = K$ آنگاه $J \leqslant Z(H)$.

۲۳۷. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) هرگاه $H \leqslant G$ آنگاه

$$\left|\bigcup_{g\in G} H^g\right| \leqslant 1 + |G| - |G:H|\cdot$$

ازاین‌رو اجتماع همهٔ مزدوجهای یک زیرگروه حقیقی G در G یک زیرمجموعهٔ حقیقی G است.

(ii) اگر $K \leqslant G$ و K دست‌کم شامل یک عضو از هر ردهٔ تزویجی از اعضای G باشد، آنگاه در واقع $K = G$.

۲۳۸. فرض می‌کنیم G گروهی نابدیهی باشد.

(i) هرگاه M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد (۱۴۰ را ببینید) آنگاه، به‌ازای هر $g \in G$، M^g نیز یک زیرگروه ماکسیمال G است.

(ii) هرگاه G متناهی و دقیقاً یک ردهٔ تزویجی از زیرگروههای ماکسیمال داشته باشد، آنگاه G دوری است و به‌ازای یک عدد اول p و یک عدد صحیح مثبت m از مرتبهٔ p^m خواهد بود. (رک. ۱۴۰ (vi). راهنمایی. از ۲۳۷ (i) استفاده کنید.)

۲۳۹. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری n بعدی روی یک میدان F باشد، که در آن n یک عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ است و قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}(V)$ (۱۶.۲). فرض می‌کنیم $0 \neq v \in V$، و H را مجموعهٔ همهٔ اعضای G می‌گیریم که برای آنها v یک بردار ویژه است. در این صورت:

(i) $H < G$.

(ii) هرگاه $F = \mathbf{C}$، آنگاه $\bigcup_{g\in G} H^g = G$.

(رک. ۲۳۷. راهنمایی. وقتی $F = \mathbf{C}$، هر $x \in G$ دارای یک بردار ویژه مانند w است، و ازاین‌رو عضوی چون $g \in G$ وجود دارد که $vg = w$.)

۲۴۰. فرض می‌کنیم G یک گروه نامتناهی باشد با $Z(G) = 1$. بنابر ۳۷.۴؛ هرگاه G هیچ خارج‌قسمت متناهی نابدیهی نداشته باشد، آنگاه G هیچ زیرگروه نرمال متناهی نابدیهی نخواهد داشت. با یک مثال نشان دهید که عکس این حکم صادق نیست. (راهنمایی. گروه دووجهی نامتناهی D_∞ را در نظر بگیرید.)

۲۴۱. $G \cong D_\infty$، اگر و تنها اگر G یک زیرگروه نرمال دوری نامتناهیِ $H = \langle h\rangle$ داشته باشد به‌طوری‌که $H < G$ و، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $C_G(h^n) = H$. (راهنمایی. از ۲۹، ۴۶ و ۳۶.۴ استفاده کنید.)

۲۴۲*. فرض می‌کنیم p یک عدد اول فرد باشد.

(i) در این صورت $\mathbf{Z}_p^\times$ دقیقاً دارای یک عضوِ مرتبهٔ ۲ است.

(ii) G را یک گروه مرتبهٔ $2p$ می‌گیریم. دراین‌صورت G دارای زیرگروه دوری $\langle x\rangle$ از مرتبهٔ p و زیرگروه دوری $\langle t\rangle$ از مرتبهٔ ۲ است، و x^t یا x است یا x^{-1}. ازاین‌رو G یا با C_{2p} یکریخت است یا با D_{2p} (رک. ۶۰. راهنمایی. از قضیهٔ کوشی ۲۲۰ به انضمام ۴۰ و ۴۶ استفاده کنید.)

۲۴۳*. هرگاه G یک گروه دوریِ مرتبهٔ p^n باشد، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، آنگاه $|\mathrm{Aut}\, G| = p^n - p^{n-1}$ (رک. ۳۸.۴ (ii)، ۴۰ و ۴۶).

۲۴۴. فرض می‌کنیم $J \leqslant G$. در این صورت $C_G(J) = 1$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر H که $J \leqslant H \leqslant G$، $Z(H) = 1$.

۲۴۵. عضوهای $C_{\mathrm{Aut}\, G}(\mathrm{Inn}\, G)$ خودریختیهای مرکزی G نامیده می‌شوند. فرض می‌کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$. ثابت کنید که α یک خودریختی مرکزی G است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in G$، $g^\alpha g^{-1} \in Z(G)$. از اینجا نتیجه بگیرید، که هرگاه $Z(G) = 1$ آنگاه $Z(\mathrm{Aut}\, G) = 1$. (راهنمایی. از ۹۲ و ۱۱۷ استفاده کنید.)

برای اطلاعات بیشتر از عملهای طبیعی گروهها بر مجموعه‌ها، کتابهای پَسمَن [b۳۲] و ویلانت [b۳۸] را ببینید.

۵

p گروههای متناهی و قضیهٔ سیلو*

در این فصل کاربردهای بنیادی بیشتری از مفاهیم مطروحه در فصل ۴، در ارتباط با عملهای گروهی بر مجموعه‌ها را ارائه می‌دهیم. این کاربردها بالاخص به pگروههای متناهی و pزیرگروههایِ گروههای متناهی مربوط خواهند بود. ما اطلاعات بیشتری از گروههای سادهٔ متناهی به‌دست می‌آوریم و نیز ساده بودن گروههای متناوب A_n را به‌ازای $n \geqslant ۵$ ثابت خواهیم کرد.

۱.۵ تعریف فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. در این صورت زیرمجموعهٔ ثابت نقطهٔ X به صورت

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}_X(G) &= \{x \in X : xg = x \text{ ،}g \in G \text{ به‌ازای هر }\} \\ &= \{x \in X : \mathrm{Stab}_G(x) = G\},\end{aligned}$$

تعریف می‌شود. لذا $\mathrm{Fix}_X(G)$ متشکل از عضوهایی از X است که هر یک به‌تنهایی یک مدار تشکیل می‌دهد. البته ممکن است اتفاق بیفتد که $\mathrm{Fix}_X(G) = \varnothing$. به‌ویژه، اگر G به‌طور ترایا بر

* تلفظ صحیح این نام سولُو است ولی چون متداول نیست همان سیلو را به‌کار می‌بریم.

X عمل کند، آنگاه $\mathrm{Fix}_X(G) = \phi$، مگر اینکه $|X| = 1$.

به‌عنوان مثال، اگر $G \leqslant \Sigma_4$ و G به‌طور طبیعی بر مجموعهٔ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ عمل کند، آنگاه برای $G = \langle(123)\rangle$، $\mathrm{Fix}_X(G) = \{4\}$، درصورتی‌که برای $G = \langle(12)(34)\rangle$، $\mathrm{Fix}_X(G) = \varnothing$.

کاربرد سادهٔ ۱۱.۴ در ذیل بسیار سودمند است. اثبات اساساً همان اثبات ۲۸.۴ است.

۲.۵ لم فرض می‌کنیم G یک p گروه متناهی باشد که بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. در این صورت

$$|\mathrm{Fix}_X(G)| \equiv |X| \quad p \text{ پیمانه}$$

برهان فرض می‌کنیم که X_1، $\cdots$، X_k مدارهای این عمل باشند، که در آن k یک عدد صحیح مثبت است. حال اعضای X را شمارش می‌کنیم:

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|.$$

بنابر ۱۱.۴، هر $|X_i|$ مقسوم‌علیهی است از $|G|$ و ازاین‌رو، چون p اول است، $|X_i|$ بایستی توانی از p باشد. اگر فقط j مدار تک‌عضوی وجود داشته باشد $0 \leqslant j \leqslant k$، آنگاه $|\mathrm{Fix}_X(G)| = j$ و از تساوی فوق نتیجه می‌شود

$$|X| = j + \text{حاصل جمعی از توانهای } p \text{ با نماهای مثبت}$$

(که در آن حاصل‌جمع اخیر تهی است، اگر $j = k$). ازاین‌رو

$$|\mathrm{Fix}_X(G)| = j \equiv |X| \quad p \text{ پیمانه}$$

با استفاده از عمل گروهی ۱۳.۴ و ملاحظات ذیل دو نتیجهٔ مهم از ۲.۵ به‌دست می‌آوریم.

۳.۵ فرض می‌کنیم G بر مجموعهٔ X عمل کند. در این صورت هر زیرگروه J از G از راه تحدید عمل G، بر X عمل می‌کند: یعنی، به هر $j \in J$ و هر $x \in X$ یک عضو $xj \in X$ متناظر خواهد شد که با عمل G بر X مشخص می‌شود. روشن است که این تناظر در شرایط یک عمل J بر X صدق می‌کند.

به‌ازای هر $x \in X$، $\mathrm{Stab}_J(x) = \mathrm{Stab}_G(x) \cap J$. ازاین‌رو $x \in \mathrm{Fix}_X(J)$ اگر و تنها اگر $J \leqslant \mathrm{Stab}_G(x)$. اگر ρ نمایش جایگشتی G متناظر با عمل مفروض باشد، آنگاه $\rho|_J$ نمایش جایگشتی J متناظر بااین عمل J خواهد بود. اگر عمل G صادق باشد، عمل J نیز صادق است. اما ممکن است عمل G ترایا باشد ولی عمل J ناترایا باشد.

به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم $H, J \leqslant G$ و همچنین G با ضرب از راست بر مجموعهٔ X متشکل از هم‌مجموعه‌های راست H در G، مانند ۱۳.۴، عمل کند. عمل با تحدیدِ J بر X را در نظر می‌گیریم. در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، $\mathrm{Stab}_J(Hg) = H^g \cap J$، و $Hg \in \mathrm{Fix}_X(J)$ اگر و تنها اگر $J \leqslant H^g$. عمل J بر X ترایاست اگر و تنها اگر $HJ = G$، که در این حالت، بنابر ۲۰.۴، این عمل با عمل J به‌وسیلهٔ ضرب از راست در مجموعهٔ متشکل از هم‌مجموعه‌های راست $H \cap J$ در J هم‌ارز است.

۴.۵ قضیه گیریم $H, J \leqslant G$. فرض می‌کنیم $|G : H| = r < \infty$ و J یک pگروه متناهی باشد و نیز p، r را نشمارد. در این صورت به‌ازای عضوی چون $g \in G$، $J \leqslant H^g$.

برهان X را مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G می‌گیریم. در این صورت $|X| = |G : H| = r$. فرض می‌کنیم J با تحدید عمل G بر X با ضرب از راست بر X عمل کند. بنابر ۲.۵، پیمانهٔ p $r \equiv |\mathrm{Fix}_X(J)|$. چون بنابر فرض، p، r را نمی‌شمارد، نتیجه می‌گیریم که $|\mathrm{Fix}_X(J)| \neq 0$، یعنی $\mathrm{Fix}_X(J) \neq \varnothing$. ازاین‌رو بنابر ۳.۵، به‌ازای عضوی مانند $g \in G$، $J \leqslant H^g$.

۵.۵ قضیه فرض می‌کنیم H، p زیرگروهی از گروه متناهی G باشد و p، $|G : H|$ را بشمارد. در این صورت p، $|N_G(H)/H|$ را نیز خواهد شمرد.

برهان X را مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G می‌گیریم و فرض می‌کنیم با تحدید عمل G بر X باضرب از راست، H بر X عمل کند (به گونه‌ای که در ۳.۵، با $J = H$ عمل کرد). بنابر ۲.۵، پیمانهٔ p $|G : H| \equiv |\mathrm{Fix}_X(H)|$. فرض می‌کنیم $g \in G$. بنابر ۳.۵؛ $Hg \in \mathrm{Fix}(H)$ اگر و تنها اگر $H \leqslant H^g$، یعنی اگر و تنهااگر $H = H^g$ (زیرا $|H^g| = |H|$)، یا هم‌ارز با آن اگر و تنها اگر $g \in N_G(H)$. ازاین‌رو

$$|\mathrm{Fix}_X(H)| = |N_G(H)/H|,$$

و به این‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مهمترین حالت خاص ۵.۵ را به‌عنوان نتیجه‌ای جداگانه بیان می‌کنیم. (وقتی قضیهٔ سیلو را ثابت کردیم، خواهیم دید که عملاً این نتیجه با ۵.۵ هم‌ارز است.)

۶.۵ فرع در هر pگروه متناهیِ G، هر زیرگروه حقیقی یک زیرگروه حقیقی نرمال‌سازش در G است.

این ویژگیِ گروههایی که مرتبهٔ آنها توان یک عدد اول است، در حالت کلی برای گروههای متناهی که مرتبه‌شان شامل دو یا چند عدد اول است، برقرار نیست. به‌عنوان مثال: گروه Σ_3، از مرتبهٔ ۶، دارای زیرگروههایی است 'خود-نرمال‌ساز' از مرتبهٔ ۲.

۲۴۶. فرض می‌کنیم که G بر مجموعهٔ X عمل کند، و $\mathrm{Fix}_X(G) = \varnothing$. اگر $|G| = 35$ و $|X| = 19$، تعداد مدارهای این عمل و طول هر مدار را بیابید.

۲۴۷. فرض می‌کنیم $H, J \leqslant G$ (که احتمالاً $H = J$). یک زیرمجموعه از G به شکل

$$HgJ = \{hgj : h \in H, j \in J\},$$

که در آن $g \in G$، یک هم‌مجموعهٔ مضاعف نسبت به H و J نامیده می‌شود. X را مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G می‌گیریم و فرض می‌کنیم J بر X، همان‌گونه که در ۳.۵ عمل می‌کرد عمل کند. به‌ازای هر $g \in G$ نشان دهید که HgJ اجتماع اعضایی از X است که مدارِ Hg تحت این عمل را تشکیل می‌دهند و ازاین‌رو (با استفاده از ۱۱.۴) نشان دهید که هرگاه H و J متناهی باشند، آنگاه

$$|HgJ| = \frac{|H||J|}{|H^g \cap J|}.$$

به‌علاوه نشان دهید که اگر $g_1, g_2 \in G$ و $Hg_1J \neq Hg_2J$، آنگاه $Hg_1J \cap Hg_2J = \varnothing$. رابطهٔ هم‌ارزی در G که برای آن هم مجموعه‌های مضاعف نسبت به H و J رده‌های هم‌ارزی‌اند چه هستند؟

۲۴۸. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. تعاریف زیر را می‌آوریم:

(الف) فرض می‌کنیم که G بر مجموعهٔ X عمل کند. این عمل را یک عمل فروبنیوس می‌گوییم‌اگر ترایا باشد، اما منظم نباشد، $|X| > 1$، و هرگاه x_1 و x_2 دو عضو متمایز X باشند آنگاه

$$\mathrm{Stab}_G(x_1) \cap \mathrm{Stab}_G(x_2) = 1.$$

(ب) G را یک گروه فروبنیوس می‌گوییم اگر G دارای یک زیرگروه حقیقی نابدیهی H باشد به‌طوری‌که $N_G(H) = H$، و هرگاه H^{g_1} و H^{g_2} مزدوجهای متمایزی از H در G باشند (که $g_1, g_2 \in G$)، $H^{g_1} \cap H^{g_2} = 1$. هر چنین زیرگروه H را یک متمم فروبنیوس در G می‌نامیم.
گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

(i) G عمل فروبنیوس بر یک مجموعه را دارد اگر و تنها اگر G یک گروه فروبنیوس باشد.

(ii) هرگاه G یک گروه فروبنیوس و H یک متمم فروبنیوس در G باشد، آنگاه

$$|G : H| \equiv 1 \ \text{پیمانه}\ |H|.$$

(iii) هرگاه G یک گروه فروبنیوس باشد آنگاه $Z(G) = 1$.

(iv) فرض می‌کنیم n عدد صحیح مثبتی باشد و عمل طبیعی Σ_n را بر مجموعهٔ $\{1, 2, \cdots, n\}$ در نظر می‌گیریم. این یک عمل فروبنیوس است اگر و تنها اگر $n = 3$.

(v) فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، $n \geqslant 3$. در این صورت گروه دووجهی D_{2n} یک گروه فروبنیوس است اگر و تنها اگر n فرد باشد.

(راهنمایی. ۱۲۴، ۱۸۷ و ۲۰۳ را ببینید. در مورد (ii)، تحدید یک عمل فروبنیوس مناسب از G به H را در نظر بگیرید و مدارها را بشمارید. اشارات. فرض کنید H یک متمم فروبنیوس در گروه فروبنیوس G باشد. ف. گ. فروبنیوس (۱۸۴۹ـ۱۹۱۷) در [a31] این قضیهٔ مهم را ثابت کرد که در این صورت

$$K = \{1\} \cup (G \setminus \bigcup_{g \in G} H^g)$$

زیرگروهی است نرمال از G. به‌علاوه $G = HK$، $H \cap K = 1$ و هر متمم فروبنیوس در G با H مزدوج است. ازاین‌رو هر دو عمل فروبنیوس G هم‌ارزند.)

۲۴۹. فرض می‌کنیم $|G| = p^m r$، که در آن m و r اعداد صحیح مثبتی هستند و p، r را نمی‌شمارد. در این صورت G دارای زیرگروهی است از مرتبهٔ p^m. (راهنمایی. pزیرگروه H از G را با بزرگترین مرتبهٔ ممکن درنظر بگیرید و از ۵.۵ و قضیهٔ کوشی، ۲۲۰، برای اثبات $|H| = p^m$ استفاده کنید. این مسأله قسمتی از قضیهٔ سیلو است که به طریقی متفاوت در ۹.۵ ثابت خواهد شد.)

حال از ۲.۵ برای اثبات قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم

۷.۵ قضیه فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$، که G گروهی است متناهی، و نیز J را یک pزیرگروه G می‌گیریم. در این صورت اگر $|H| \not\equiv 1$ پیمانه p آنگاه $H \cap C_G(J) \neq 1$.

برهان چون $H \trianglelefteq G$، لذا G با تزویج بر H عمل می‌کند. سپس با تحدید این عمل، J نیز بر H عمل می‌کند. بنابر تعریف

$$\begin{aligned}\mathrm{Fix}_H(J) &= \{h \in H : h^j = h \text{ ،به‌ازای هر } j \in J\}\\ &= \{h \in H : hj = jh \text{ ،به‌ازای هر } j \in J\}\\ &= H \cap C_G(J).\end{aligned}$$

چون J یک pگروه متناهی است و H نیز متناهی است، ۲.۵ نشان می‌دهد که

$$|H \cap C_G(J)| \equiv |H| \ \text{پیمانه}\ p$$

بنابراین، چون مطابق فرض، $|H| \not\equiv 1$ پیمانه p، نتیجه می‌شود که $H \cap C_G(J) \neq 1$.
به‌عنوان مهمترین حالت خاص، فرع زیر را داریم

۸.۵ فرع فرض می‌کنیم G یک pگروه متناهی باشد و $1 < H \trianglelefteq G$. در این صورت $H \cap Z(G) \neq 1$. (این فرع ۲۸.۴ را به‌عنوان یک حالت خاص شامل است.)

برهان در ۷.۵، J را مساوی G بگیرید.

یادآوری می‌کنیم که بنابر قضیهٔ لاگرانژ، مرتبهٔ هر زیرگروه از یک گروه متناهیِ G مقسوم‌علیهی است از $|G|$. عکس این مطلب صادق نیست، بدین‌معنی که ممکن است مقسوم‌علیه‌هایی وجود داشته باشند که از قلم افتاده باشند: به‌ازای هر مقسوم‌علیه n از $|G|$، G لزوماً دارای زیرگروهی از مرتبهٔ n، نخواهد بود. (۱۸۵ را ببینید.) قضیهٔ سیلو که بعداً ثابت خواهیم کرد، وجود زیرگروههایی با مرتبه‌های خاص را به‌دست می‌دهد و اطلاعات با ارزشی از چنین زیرگروههایی به ما می‌دهد. این قضیه که در ۱۸۷۲ ثابت شد، در نظریهٔ گروههای متناهی اهمیت بنیادی دارد، و کشف آن در تعیین سرشت پیشرفتهای بعدی این نظریه، نتیجه‌ای قطعی داشته است. اثباتهای متعدد مختلفی برای قضیهٔ سیلو پیدا شده‌اند: یک روش برای قسمتی از این قضیه در ۲۴۹ نشان داده شده است. اثباتی را که در اینجا می‌آوریم کاربرد بسیار موفقی است از روشهای عمل گروهی منسوب به هـ. ویلانت در ۱۹۵۹.

۹.۵ قضیه (ل. سیلو [a95]). فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد با $|G| = p^m r$، که در آن m عدد صحیحی است نامنفی و r یک عدد صحیح مثبت، به‌طوری‌که p، r را نمی‌شمارد.
در این صورت

(الف) G دارای زیرگروهی است از مرتبهٔ p^m. یک چنین زیرگروهی را یک pزیرگروه سیلو از گروه G می‌نامند.

(ب) هرگاه H یک pزیرگروه سیلو از گروه G باشد و J یک pزیرگروه دلخواه از G، آنگاه به‌ازای یک $g \in G$، $J \leqslant H^g$. به‌ویژه، p زیرگروههای سیلو از G، یک ردهٔ تزویجی واحد از زیرگروههای G را تشکیل می‌دهند.

(ج) فرض می‌کنیم n تعداد p زیرگروههای سیلو از گروه G باشد. در این صورت $n = |G : N_G(H)|$، که در آن H، pزیرگروه سیلوی دلخواهی از G است و n، r را می‌شمارد و پیمانهٔ p $n \equiv 1$.

برهان (الف) (هـ. ویلانت [a۱۰۲]) مجموعهٔ $\mathscr{X}$ شامل همهٔ زیرمجموعه‌های U از G را که $|U| = p^m$ در نظر می‌گیریم. تعداد چنین زیرمجموعه‌هایی عبارت است از

$$|\mathscr{X}| = \binom{p^m r}{p^m} = \frac{p^m r}{p^m}\cdot\frac{p^m r-1}{p^m-1}\cdot\frac{p^m r-2}{p^m-2}\cdots\frac{p^m r-p^m+1}{1}.$$

اگر در هر جمله مانند $(p^m r - j)/(p^m - j)$ از حاصلضرب فوق، مقسوم‌علیه‌های مشترک صورت و مخرج کسر را تا حد امکان حذف کنیم، p به‌عنوان یک مقسوم‌علیه در صورت کسر باقی نمی‌ماند. این مطلب در مورد $j = 0$ واضح است؛ و برای $j > 0$ با مثلاً $j = p^l q$، که l یک عدد صحیح نامنفی است و q عدد صحیح مثبتی است که بر p بخش‌پذیر نیست، چون $l < m$، داریم

$$\frac{p^m r - j}{p^m - j} = \frac{p^{m-l} r - q}{p^{m-l} - q},$$

و بنابراین p، $p^{m-l}r - q$ را نمی‌شمارد. چون p یک عدد اول است، حذف p حاصلضربِ صورتهای حذف‌شدهٔ کسرها را نمی‌شمارد، و بنابراین

(i) p، $|\mathscr{X}|$ را نمی‌شمارد.

به‌ازای $U \in \mathscr{X}$ و $g \in G$، $Ug = \{ug : u \in U\}$ زیرمجموعه‌ای است از G که $|Ug| = p^m$: لذا $Ug \in \mathscr{X}$. حال واضح است که G بر مجموعهٔ $\mathscr{X}$ با ضرب راست عمل می‌کند. با این عمل، $\mathscr{X}$ به مدارهایی افراز می‌شود و از (i) نتیجه می‌گیریم که

(ii) یک مدار $\mathscr{X}_1$ وجود دارد به‌طوری‌که p، $|\mathscr{X}_1|$ را نمی‌شمارد.

فرض می‌کنیم $V \in \mathscr{X}_1$، بنابراین $\mathscr{X}_1$ مدار شامل V است، و قرار می‌دهیم $H = \mathrm{Stab}_G(V) \leqslant G$. بنابر ۱۱.۴

(iii) $$|\mathscr{X}_1| = |G : H|.$$

چون $|G : H||H| = |G| = p^m r$، به موجب (ii) و (iii) و این حقیقت که p یک عدد اول است، نتیجه می‌شود که

p^m، $|H|$ را می‌شمارد.

حال قرار می‌دهیم

$$V = \{x_1, x_2, \cdots, x_{p^m}\}.$$

در این صورت به‌ازای هر $h \in H$،

$$Vh = V.$$

یعنی،

$$\{x_1 h, x_2 h, \cdots, x_{p^m} h\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_{p^m}\}.$$

ازاین‌رو به‌ازای مقداری از i، $x_1 h = x_i$ که $1 \leqslant i \leqslant p^m$، بنابراین

$$h = x_1^{-1} x_i.$$

لذا

(v) $$|H| \leqslant p^m.$$

بنابر (iv) و (v)، $|H| = p^m$: بدین‌ترتیب H یک pزیرگروه سیلوی G است.

(ب) حال فرض می‌کنیم H یک pزیرگروه سیلوی دلخواهی از G باشد و J یک pزیرگروه دلخواه G. ازآنجایی‌که $|G : H| = |G|/|H| = r$ و p، r را نمی‌شمارد، با استفاده از ۴.۵ نشان داده می‌شود به‌ازای $g \in G$، $J \leqslant H^g$، آنچه مطلوب بود. به‌ویژه هرگاه J یک pزیرگروه سیلو از G باشد، آنگاه چون $|H^g| = |H| = |J|$، به موجب ۲۰.۲، نتیجه می‌شود که $J = H^g$، لذا J زیرگروهی است از G که در همان ردهٔ تزویجی H قرار دارد. چون هر زیرگروه G، مزدوج با H، مطمئناً همان مرتبهٔ H را دارد و لذا یک pزیرگروه سیلو از G است، در نتیجه p زیرگروههای سیلو از G یک ردهٔ تزویجی واحد را تشکیل می‌دهند.

قبل از اثبات (ج)، به لم زیر که نتیجه‌ای از (ب) است اشاره می‌کنیم:

۱۰.۵ لم فرض می‌کنیم H یک pزیرگروه سیلو از گروه متناهی G باشد. در این صورت H، pزیرگروه سیلوی یکتای $N_G(H)$ است.

برهان به‌سادگی ملاحظه می‌شود که H، pزیرگروه سیلوی هر زیرگروه G شامل H است (۲۵۲). به‌ویژه H یک pزیرگروه سیلو از $N_G(H)$ است. فرض می‌کنیم K، pزیرگروه سیلوی دلخواهی از $N_G(H)$ باشد. بنابر ۹.۵ (ب)، عضوی چون $g \in N_G(H)$ وجود دارد به‌طوری‌که $K = H^g$. اما در این صورت، چون $g \in N_G(H)$، $H^g = H$. ازاین‌رو H، pزیرگروه سیلوی یکتای $N_G(H)$ است.

اشاره. ۱۰.۵ را می‌توان به‌سادگی با استفاده از ۳۸.۳ و ۴۰.۳ و بدون استناد به ۹.۵ (ب) ثابت کرد.

برهانِ ۹.۵ (ج). فرض می‌کنیم $\mathscr{S}$ معرف مجموعهٔ همهٔ p زیرگروههای سیلو از G باشد و $H \in \mathscr{S}$. بنابر (ب)، $\mathscr{S}$ ردهٔ تزویجی H در G است و در نتیجه به موجب ۳۳.۴

$$n = |\mathscr{S}| = |G : N_G(H)|\cdot$$

چون

$$r = |G : H| = |G : N_G(H)||N_G(H) : H|,$$

در نتیجه n، r را می‌شمارد.

اما G با تزویج به‌طور ترایا بر $\mathscr{S}$ عمل می‌کند. بنابراین، با تحدید این عمل، H نیز بر $\mathscr{S}$ عمل می‌کند ـ هر چند نه‌لزوماً به‌طور ترایا. بنابر ۲.۵

$$|\mathrm{Fix}_{\mathscr{S}}(H)| \equiv |\mathscr{S}| \quad \text{پیمانه } p$$

فرض می‌کنیم $K \in \mathscr{S}$. در این صورت $K \in \mathrm{Fix}_{\mathscr{S}}(H)$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $h \in H$، $K^h = K$، یعنی، اگر و تنها اگر $H \leqslant N_G(K)$. اما بنابر ۱۰.۵، $H \leqslant N_G(K)$ اگر و تنها اگر $H = K$. ازاین‌رو $\mathrm{Fix}_{\mathscr{S}}(H) = \{H\}$؛ در نتیجه $|\mathrm{Fix}_{\mathscr{S}}(H)| = ۱$ و

$$n \equiv ۱ \quad \text{پیمانه } p،$$

آنچه مطلوب بود.

*۲۵۰. (i) فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد، با یک pزیرگروه J که $C_G(J)$ نیز یک pگروه است. نشان دهید که به‌ازای هر زیرگروه نرمال G چون H که مرتبه‌اش بر p بخش‌پذیر نیست، $|H| \equiv ۱$ پیمانه p.

(ii) با استفاده از (i) نشان دهید که تنها مرتبهٔ ممکن برای یک زیرگروه نرمال نابدیهی $\Sigma_۴$ که بر ۳ بخش‌پذیر نباشد ۴ است. (راهنمایی. ۱۸۵ را ببینید.)

۲۵۱. فرض می‌کنیم A زیرگروه نرمال آبلی G باشد. می‌گوییم A یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال G است، اگر هیچ زیرگروه نرمال آبلی از G وجود نداشته باشد که به‌طور حقیقی شامل A باشد. (ر.ک. ۲۳۵ (ii)).

ثابت کنید که هرگاه G یک pگروه متناهی و A یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال از G باشد، آنگاه A یک زیرگروه آبلی ماکسیمال از G است. (راهنمایی. فرض کنید که $A < C_G(A)$، و $\bar{G} = G/A$ را در نظر بگیرید. با استفاده از ۳۰.۳، ۳۶.۴، ۸.۵ و ۱۲۵ یک تناقض به‌دست آورید. اشاره. هرگاه H یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی باشد، آنگاه ۱ یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال از H است، اما ۱ مسلماً زیرگروه آبلی ماکسیمال از H نیست. علاوه‌براین ۳۹۲، ۴۰۰، ۶۴۴ و ۶۴۵ را ببینید.)

*۲۵۲. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و H یک pزیرگروه سیلو از G باشد.

(i) هرگاه $H \leqslant L \leqslant G$، آنگاه H یک pزیرگروه سیلو از L است و هر pزیرگروه سیلو از L یک pزیرگروه سیلو از G نیز هست.

(ii) هرگاه $K \trianglelefteq G$، آنگاه $H \cap K$ یک pزیرگروه سیلو از K و HK/K یک pزیرگروه سیلو از G/K است. علاوه‌براین، هر pزیرگروه سیلو از K به شکل $H^* \cap K$ است که در آن H^* یک pزیرگروه سیلو از G است؛ و هر pزیرگروه سیلو از G/K به شکل H^*K/K است که باز هم H^* یک pزیرگروه سیلو از G است.

(iii) با یک مثال نشان دهید که اگر $K \ntrianglelefteq G$، $H \cap K$ لزوماً یک pزیرگروه سیلو از K نخواهد بود.

(iv) $O_p(G) \leqslant H \leqslant O^{\varpi}(G)$، که در آن ϖ مجموعه‌ای است دلخواه مرکب از اعداد اول که شامل p نیست. علاوه‌براین $G = HO^p(G)$.

۲۵۳. فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد. هرگاه G یک pزیرگروه سیلوی نرمال داشته باشد، آنگاه هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتی G نیز یک pزیرگروه سیلوی نرمال خواهد داشت.

۲۵۴. فرض می‌کنیم P یک pزیرگروه سیلو از گروه متناهی G باشد، و همچنین

$$P \leqslant J \leqslant H \leqslant G\cdot$$

در این صورت p، $|H : J|$ را نمی‌شمارد.

۲۵۵. فرض می‌کنیم K یک زیرگروه نرمال متناهی G باشد. اگر K یک pزیرگروه سیلوی نرمال مانند P داشته باشد، آنگاه $P \trianglelefteq G$.

۲۵۶. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، که در آن G یک گروه متناهی است. P_0 را یک pزیرگروه سیلو از H بگیرید و فرض کنید P یک pزیرگروه سیلو از G باشد که $P_0 \leqslant P$. (بنابر ۹.۵ (ب) یک‌چنین زیرگروه P وجود دارد.) در این صورت $P_0 = P \cap H$.

۲۵۷. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی، H و K زیرگروههای نرمال G و P یک pزیرگروه سیلو از G باشد. در این صورت $(PH) \cap (PK) = P(H \cap K)$.

۲۵۸. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد و H و K زیرگروههایی از G باشند که $G = HK$.

(i) هرگاه H و K در G نرمال باشند، آنگاه به‌ازای هر pزیرگروه سیلو از G مانند P،

$$P = (P \cap H)(P \cap K).$$

(ii) با یک مثال نشان دهید که اگر H و K هر دو در G نرمال نباشند، نتیجهٔ (i) لزوماً برقرار نخواهد بود.

(iii) با این وجود، همواره pزیرگروه سیلویی مانند P از G وجود دارد که برای آن

$$P = (P \cap H)(P \cap K).$$

(راهنمایی. در مورد (iii)، با استفاده از ۹.۵ (ب) و ۲۵۶ نشان دهید که یک pزیرگروه سیلو مانند P از G وجود دارد به‌طوری‌که $P \cap H$ یک pزیرگروه سیلو از H و $P \cap K$ یک pزیرگروه سیلو از K است. سپس از ۹۸ استفاده کنید.)

***۲۵۹.** فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح فرد باشد، $n \geqslant 3$. در این صورت هر زیرگروه سیلو گروه دووجهی D_{2n} از مرتبهٔ $2n$، دوری است.

۲۶۰. U را زیرگروهی از $\mathrm{GL}_2(F)$ که در ۱۲۰ تعریف‌شده می‌گیریم. نشان دهید که وقتی $F = \mathbf{Z}_p$، U یک pزیرگروه سیلو از $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ است.

***۲۶۱.** یک ۲ زیرگروه سیلو چون T از Σ_4 بیابید و نشان دهید که $T \cong D_8$. Σ_4 چند تا ۲ زیرگروه سیلو دارد؟ (راهنمایی. Σ_4 یک زیرگروه دوری U از مرتبهٔ ۴ دارد و بنابر قضیهٔ سیلو، U در یک ۲ زیرگروه سیلو از Σ_4 چون T قرار دارد.)

***۲۶۲.** فرض می‌کنیم $|G| = 2^m r$، که در آن m و r اعداد صحیح مثبت‌اند و r فرد است. علاوه‌براین فرض می‌کنیم ۲ زیرگروههای سیلو از G دوری باشند. با تعمیم برهان ۲۰۵، نشان دهید که G دارای زیرگروهی است از شاخص ۲. سپس با استقرا بر m ثابت کنید که G دارای یک زیرگروه نرمال از مرتبهٔ r است. (راهنمایی. توجه داشته باشید که هرگاه $H \trianglelefteq G$ با $|H| = r$، آنگاه H در واقع مشخصه در G است.)

۲۶۳. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی از مرتبهٔ زوج باشد و $x \in G$ که $o(x) = 2$. هرگاه $C_G(x)$ دارای یک ۲ زیرگروه سیلوی دوری باشد، G دارای زیرگروهی است از شاخص ۲ (و در نتیجه اگر $|G| > 2$، G ساده نخواهد بود). (راهنمایی. از ۳۲.۳، ۲۸.۴ و ۲۶۲ استفاده کنید.)

۲۶۴. (i) فرض می‌کنیم $G = HK$، که $H < G$ و $K < G$. هرگاه $H \cap K$ شامل یک زیرگروه نرمال نابدیهی L از H باشد، آنگاه $L^G \leqslant K$ (که درآن L^G معرف بستار نرمال L در G است: ۱۸۰ را ببینید.) لذا G ساده نیست.

(ii) یک گروه سادهٔ G نمی‌تواند به صورت $G = HK$ با $H < G$ و $K < G$، H آبلی، و $H \cap K \neq 1$ بیان شود. (اشاره. اگر داشته باشیم $H \cap K = 1$ حکم صادق نخواهد بود. به‌عنوان مثال با $G = A_5$، یک گروه ساده از مرتبهٔ ۶۰ ــ ۲۴.۵ را ببینید ــ یک زیرگروه دوریِ H از مرتبهٔ ۵ و یک زیرگروه $K \cong A_4$ از مرتبهٔ ۱۲ وجود دارد و $G = HK$؛ ولی البته $H \cap K = 1$.)

(iii) فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ متناهی ناآبلی باشد با یک p زیرگروه سیلوی آبلی مانند H و یک زیرگروه حقیقیِ K، که شاخص آن توانی است از p. در این صورت $|G : K| = |H|$، p، $|K|$ را نمی‌شمارد و H یک زیرگروه آبلی ماکسیمال از G است. (۲۳۵ را ببینید. راهنمایی. از ۹۸ و ۱۰۰ استفاده کنید.)

ما قضیهٔ کوشی دربارهٔ مرتبهٔ اعضای گروه را در ۲۲۰ بیان کردیم. این قضیه می‌تواند در اثبات وجود زیرگروههای سیلو مورد استفاده قرارگیرد: ۲۴۹ را ببینید. ولی به قضیهٔ کوشی در اثبات قضیهٔ سیلو که در ۹.۵ ارائه شد احتیاجی نبود و در نتیجه اکنون می‌توانیم قضیهٔ کوشی را از قضیهٔ سیلو نتیجه بگیریم.

۱۱.۵ قضیه (آ. کوشی، ۱۸۴۴.) هرگاه G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که p، $|G|$ را بشمارد، G عضوی از مرتبهٔ p دارد.

برهان فرض می‌کنیم H یک pزیرگروه سیلو از G باشد. چون p، $|G|$ را می‌شمارد، لذا $H \neq 1$. $x \in H$ را که $x \neq 1$ انتخاب می‌کنیم. در این صورت $o(x) > 1$ و $o(x)$، $|H|$ را می‌شمارد. ازاین‌رو به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند s، $o(x) = p^s$. بنابراین $x^{p^{s-1}}$ یک عضو G از مرتبهٔ p است.

۱۲.۵ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت G یک ϖ گروه است اگر و تنها اگر مرتبهٔ هر عضو G یک ϖ عددی باشد (۴۱.۳ را ببینید.)

برهان اگر $|G|$ یک ϖ عددی باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ لاگرانژ، مرتبهٔ هر عضو G یک ϖ عددی است. از طرفی اگر $|G|$ یک ϖ عددی نباشد، آنگاه عدد اولی مانند $p \notin \varpi$ وجود دارد به‌طوری‌که p، $|G|$ را می‌شمارد. در این صورت به موجب قضیهٔ کوشی نتیجه می‌گیریم که G عضوی دارد که مرتبه‌اش یک ϖ عددی نیست.

لم سادهٔ زیر مورد استفادهٔ زیادی دارد: به این لم اغلب عنوان 'استدلال فراتینی' داده می‌شود.

۱۳.۵ لم (ج. فراتینی [a۲۹]، ۱۸۸۵). اگر K یک زیرگروه نرمال متناهیِ G و P یک pزیرگروه سیلو از K باشد، آنگاه $G = N_G(P)K$.

برهان فرض می‌کنیم $g \in G$. در این صورت

$$P^g \leqslant K^g = K,$$

زیرا $K \trianglelefteq G$. بنابراین، چون $|P^g| = |P|$، لذا P^g یک pزیرگروه سیلو از K نیز هست. ازاین‌رو، بنابر قضیهٔ سیلو، P و P^g زیرگروههای مزدوج K هستند؛ لذا

$$P^g = P^k \qquad \text{به‌ازای عضوی چون } k \in K$$

و در نتیجه $P^{gk^{-1}} = P$، بنابراین $gk^{-1} \in N_G(P)$. ازاین‌رو $g \in N_G(P)K$. این رابطه به‌ازای هر $g \in G$ برقرار است؛ و در نتیجه حکم به اثبات می‌رسد.

۱۴.۵ فرع فرض می‌کنیم G گروه متناهی و P یک pزیرگروه سیلو از G باشد. در این صورت به‌ازای هر زیرگروه G مانند H که شامل $N_G(P)$ باشد، داریم $N_G(H) = H$.

برهان فرض می‌کنیم $N_G(P) \leqslant H \leqslant G$. در این صورت، چون $P \leqslant H \leqslant G$، محققاً P یک pزیرگروه سیلو از H خواهد بود (۲۵۲). قرار می‌دهیم $L = N_G(H)$. حال از ۱۳.۵ با H به‌جای K و L به‌جای G استفاده می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $L = N_L(P)H$. چون $N_L(P) \leqslant N_G(P) \leqslant H$، در نتیجه $L = H$، آنچه مطلوب بود.

۲۶۵. گروه G، متناهی یا نامتناهی را یک ϖ گروه می‌خوانیم اگر مرتبهٔ هر عضو G متناهی و یک ϖعددی باشد. (اگر G متناهی باشد، ۱۲.۵ نشان می‌دهد که این تعریف با تعریف ارائه شده در ۴۱.۳ مطابقت دارد.)

(i) مجموعهٔ همهٔ اعداد مختلط z، که در معادلهٔ $z^n = ۱$ صدق می‌کنند، و در آن n همهٔ ϖ عددی‌ها را اختیار می‌کند، یک ϖ زیرگروه نامتناهی از $\mathbf{C}^\times$ را تشکیل می‌دهد، مشروط بر آنکه $\varpi \neq \varnothing$.

(ii) همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی یک ϖ گروه، خود ϖ گروه‌اند.

(iii) اگر H زیرگروهی از شاخص متناهی در یک ϖ گروه G باشد، آنگاه $|G : H|$ یک ϖ عددی است.

***۲۶۶.** فرض می‌کنیم G گروهی متناهی، p یک مقسوم‌علیه اول $|G|$، و n تعداد p زیرگروههای سیلوی متمایز از G باشد. در این صورت نرمال‌سازهای p زیرگروههای سیلو از G در G، ردهٔ تزویجی واحدی از n زیرگروه G را تشکیل می‌دهند.

۲۶۷. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت H را در G درون‌پایا می‌خوانیم اگر به‌ازای هر $\alpha \in \operatorname{Aut} G$، خودریختی α، H را به مزدوجی از H در G بنگارد.

(i) اگر G متناهی باشد، هر زیرگروه سیلو، در G درون‌پایا است.

(ii) اگر $H \leqslant K \trianglelefteq G$ و H در K درون‌پایا باشد، آنگاه $G = N_G(H)K$. (این حکم، تعمیم لم ۱۳.۵ است.)

۲۶۸. فرض می‌کنیم $J \leqslant G$. در این صورت J را در G نرمال‌گرا می‌خوانیم، اگر به‌ازای هر $g \in G$، و $x \in \langle J, J^g \rangle$ ی، $J^g = J^x$، همچنین J را در G نرمال‌گریز می‌خوانیم اگر به‌ازای هر $g \in G$، داشته باشیم $g \in \langle J, J^g \rangle$.

(i) هرگاه K یک زیرگروه نرمال متناهی G باشد، هر زیرگروه سیلو مانند K در G نرمال‌گراست.

(ii) اگر J در G نرمال‌گرا باشد، $N_G(J)$ در G نرمال‌گریز است.

(iii) هرگاه $J \leqslant H \leqslant G$ و همچنین J در G نرمال‌گریز باشد، آنگاه $N_G(H) = H$. (این قسمت، تعمیم فرع ۱۴.۵ است. ۲۷۰ را نیز ببینید.)

۲۶۹. فرض می‌کنیم J یک زیرگروه نرمال‌گرای G باشد (۲۶۸). n را تعداد زیرگروههای متمایز واقع در ردهٔ تزویجی J در G می‌گیریم و فرض می‌کنیم $n < \infty$. در این صورت $n \neq ۲$.
(اشاره. در حالت خاص وقتی که G متناهی باشد و J یک زیرگروه سیلو از G، حکم بی‌درنگ از ۹.۵ (ج) نتیجه می‌شود.)

۲۷۰. فرض می‌کنیم $J \leqslant G$. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(الف) J در G نرمال‌گریز است (۲۶۸).

(ب) هرگاه $H \leqslant G$، $g \in G$ و $J \leqslant H \cap H^g$، آنگاه $g \in H$.

هم‌اکنون نشان می‌دهیم که چگونه قضیهٔ سیلو می‌تواند برای این اثبات که بعضی اعداد فاقد شرایط 'مرتبه‌بودن' برای گروههای سادهٔ متناهی هستند، به‌کار برده شود. ابتدا به نتیجهٔ زیر اشاره می‌کنیم

۱۵.۵ فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ ناآبلی متناهی و p یک مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. در این صورت n، تعداد p زیرگروههای سیلو G، بزرگتر از ۱ است.

برهان P را یک pزیرگروه سیلو از G می‌گیریم. به موجب ۲۹.۴، $|G|$ دستکم بر دو عدد اول متمایز بخش‌پذیر است، و در نتیجه $1 < P < G$. اگر P تنها زیرگروه G از مرتبهٔ $|P|$ باشد، آنگاه P در G نرمال است که با ساده‌بودن G در تناقض است. ازاین‌رو $n > 1$.

۱۶.۵ قضیه هرگاه $|G| = pq$، که p و q اعداد اول متمایزی هستند که پیمانه p $q \not\equiv 1$، آنگاه G دارای یک pزیرگروه سیلوی نرمال است.

برهان بنابر قضیهٔ سیلو، n، تعداد p زیرگروههای سیلوی متمایز G یک مقسوم‌علیه q بوده، و پیمانه p $n \equiv 1$. چون q اول است، n یا ۱ است یا q، و چون بنابر فرض پیمانه p $q \not\equiv 1$، در نتیجه $n = 1$. لذا G، pزیرگروه سیلوی یکتایی مانند P دارد، و در نتیجه $P \trianglelefteq G$.

۱۷.۵ فرع هرگاه $|G| = pq$، و p و q اعداد اول متمایز باشند، آنگاه G ساده نیست.

برهان بی‌آنکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که $p > q$. در این صورت $q - 1$ نمی‌تواند بر p بخش‌پذیر باشد و در نتیجه، به موجب ۱۶.۵، G، pزیرگروه سیلوی نرمالی مانند P خواهد داشت. چون $1 < P < G$، G ساده نیست.

می‌دانیم که به‌ازای هر p، $\nu(p) = 1$ (۳.۱). همچنین به موجب ۱۶.۵ می‌توانیم فرع زیر را ثابت کنیم (ر.ک. ۴.۱، ۲۱۵ و ۵۷۵).

۱۸.۵ فرع هرگاه p و q اعداد اول متمایزی باشند به‌طوری‌که پیمانه q $p \not\equiv 1$ و پیمانه p $q \not\equiv 1$، آنگاه $\nu(pq) = 1$؛ یعنی هر گروه از مرتبهٔ pq دوری است.

برهان فرض می‌کنیم $|G| = pq$. بنابراین ۱۶.۵، G یک pزیرگروه سیلوی نرمال مانند P و یک qزیرگروه سیلوی نرمال مانند Q دارد. چون P و Q دارای مرتبه‌های اول‌اند، لذا دوری‌اند: مثلاً

$$P = \langle x \rangle \quad \text{و} \quad Q = \langle y \rangle.$$

بنابر قضیهٔ لاگرانژ، $P \cap Q = 1$. ازاین‌رو مطابق ۵۳.۳ داریم

$$xy = yx.$$

حال از اینجا نتیجه می‌شود که عضو xy از G دارای مرتبهٔ pq است (۶)، و بنابراین

$$\langle xy \rangle = G.$$

لذا G دوری است.

۱۹.۵ قضیه هرگاه $|G| = p^2q$، و p و q اعداد اول متمایز باشند، آنگاه G دارای یک pزیرگروه سیلوی نرمال یا یک qزیرگروه سیلوی نرمال است و در نتیجه G ساده نیست.

برهان فرض می‌کنیم n_p و n_q به‌ترتیب تعداد p زیرگروههای سیلو و q زیرگروههای سیلو G باشند. برخلاف آنچه که می‌خواهیم ثابت کنیم، فرض می‌کنیم $n_p > 1$ و $n_q > 1$. بنابر قضیهٔ سیلو، n_p، q را که یک عدد اول است می‌شمارد: ازاین‌رو $n_p = q$. همچنین پیمانه p $n_p \equiv 1$، بنابراین نتیجه می‌شود که $q > p$. باز هم بنابر قضیهٔ سیلو، n_q، p^2 را می‌شمارد، بنابراین n_q یا p است یا p^2. اما هر عضوِ مرتبهٔ q در G، زیرگروهی از مرتبهٔ q تولید می‌کند، که یک qزیرگروه سیلو از G است. هر دو زیرگروه متمایز G از مرتبهٔ q در ۱ مشترکند و در نتیجه $n_q(q-1)$ عضو متمایز از مرتبهٔ q وجود خواهد داشت. ازاین‌رو اگر $n_q = p^2$، آنگاه درست $p^2q - p^2(q-1) = p^2$ عضو در G وجود خواهند داشت که از مرتبهٔ q نیستند. اما در این صورت، چون هیچ عضو یک pزیرگروه سیلوی G مانند P، دارای مرتبهٔ q نیست و نیز چون $|P| = p^2$، لذا P باید pزیرگروه یکتای سیلو G باشد، اما این با فرض $n_p > 1$ در تناقض است. بنابراین $n_q = p$ اما چون پیمانه q $n_q \equiv 1$، نتیجه می‌گیریم که $p > q$، تناقض نهایی.

۲۰.۵ قضیه هرگاه $|G| = pqr$، و p، q و r اعداد اول متمایز باشند، G ساده نیست.

برهان می‌توانیم فرض کنیم که $p > q > r$. برخلاف آنچه که می‌خواهیم ثابت کنیم، فرض می‌کنیم یک گروه سادهٔ G از مرتبهٔ pqr وجود داشته باشد. n_p، n_q و n_r را به ترتیب تعداد pزیرگروههای سیلو، qزیرگروههای سیلو و rزیرگروههای سیلوی G می‌گیریم. به موجب ۱۵.۵ همهٔ این اعداد از ۱ بزرگترند. چون pزیرگروههای سیلو G از مرتبهٔ pاند، هر دو pزیرگروه سیلوی G، در ۱ مشترک‌اند. ازاین‌رو n_p تا pزیرگروه سیلوی G شامل $n_p(p-1)$ عضو متمایز از مرتبهٔ p

خواهند بود. به‌همین‌نحو n_q تا qزیرگروه سیلوی G شامل $n_q(q-۱)$ عضو متمایز از مرتبهٔ q و n_r تا rزیرگروه سیلوی G شامل $n_r(r-۱)$ عضو متمایز از مرتبهٔ r خواهند بود. بنابراین

$$|G| = pqr \geqslant ۱ + n_p(p-۱) + n_q(q-۱) + n_r(r-۱).$$

بنابر قضیهٔ سیلو، n_p، qr را می‌شمارد و $n_p \equiv ۱$ پیمانه p. چون $n_p > ۱$ و نیز $p > q$ و $p > r$، در نتیجه $n_p = qr$. همچنین n_q، pr را می‌شمارد و $n_q \equiv ۱$ پیمانه q. چون $n_q > r$ و $q > r$، خواهیم داشت $n_q \geqslant p$. بالاخره $n_r > ۱$ و n_r، pq را می‌شمارد، بنابراین $n_r \geqslant q$. حال داریم

$$pqr \geqslant ۱ + qr(p-۱) + p(q-۱) + q(r-۱),$$

و ازاین‌رو

$$۰ \geqslant (p-۱)(q-۱),$$

که آشکارا صادق نیست.

۲۷۱. گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۰۰۰ وجود ندارد.

۲۷۲. گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۳۰۰ وجود ندارد. (راهنمایی. با استفاده از ۱۴.۴ نشان دهید که اگر یک‌چنین گروهی وجود داشته باشد، می‌توان آن گروه را در $\Sigma_۶$ نشانید؛ اما این امر غیرممکن است.)

۲۷۳. گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۳۲ وجود ندارد.

۲۷۴. فرض می‌کنیم G زیرگروههای نرمالی مانند H، J و L داشته باشد به‌طوری‌که $L < J < H$ و $|H/J| = p$ و $|J/L| = q$، و p و q اعداد اول متمایز باشند. نشان دهید که اگر $p > q$، آنگاه زیرگروه نرمالی چون K از G وجود دارد به‌طوری‌که $L < K < H$ و $|H/K| = q$ و $|K/L| = p$.

۲۷۵. فرض می‌کنیم G گروهی ساده از مرتبهٔ ۶۰ باشد.

(i) تعداد زیرگروههای G از مرتبهٔ ۵ را پیدا کنید و نشان دهید که G دارای دقیقاً ۲۴ عضو از مرتبهٔ ۵ است.

(ii) نشان دهید که G عضوی از مرتبهٔ ۱۵ ندارد.

(iii) نشان دهید که G دقیقاً ۲۰ عضو از مرتبهٔ ۳ دارد.

۲۷۶. اگر $|G| = p^۲q$، و p و q اعداد اول متمایز باشند به‌طوری‌که $p^۲ \not\equiv ۱$ پیمانه q و $q \not\equiv ۱$ پیمانه p، آنگاه G آبلی است. (راهنمایی. از ۵۴.۳ استفاده کنید.)

۲۷۷. فرض می‌کنیم $|G| = p^mq$، که در آن p و q اعداد اول متمایزند و m یک عدد صحیح مثبت است. Q را یک qزیرگروه سیلوی G می‌گیریم و نیز فرض می‌کنیم که $N_G(Q) = Q$. در این صورت G دارای یک pزیرگروه سیلوی نرمال است.

۲۷۸. هر گروه از مرتبهٔ ۲۵۵ دوری است. (راهنمایی. فرض کنید $|G| = ۲۵۵$. نشان دهید که Gزیرگروه نرمالی از مرتبهٔ ۱۷ دارد و یک زیرگروه مانند K از مرتبهٔ ۸۵. گروههای مرتبهٔ ۸۵ دوری‌اند. با استفاده از ۱۸.۴ نشان دهید که $K \trianglelefteq G$. در این صورت، بنابر ۳۶.۴، ۴۶، ۷۸ و ۹۴، $K \leqslant Z(G)$.)

*۲۷۹. (i) قرار می‌دهیم $n = p^mr$، که در آن m یک عدد صحیح مثبت است و r عددی صحیح بزرگتر از ۱، به‌طوری‌که p، r را نمی‌شمارد. اگر گروه ساده‌ای از مرتبهٔ n وجود داشته باشد، آنگاه p^m، $(r-۱)!$ را می‌شمارد. (راهنمایی. از ۱۴.۴ استفاده کنید.)

(ii) به‌ازای $m \geqslant ۴$، هیچ گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۵×۲^m وجود ندارد.

می‌خواهیم ثابت کنیم که $A_۵$ تنها گروه سادهٔ ناآبلی از مرتبهٔ حداکثر ۱۰۰، است. با لم زیر شروع می‌کنیم

۲۱.۵ لم هنگامی که $n \leqslant ۴$، Σ_n زیرگروه سادهٔ ناآبلی نخواهد داشت.

برهان حکم برای $n \leqslant ۳$ واضح است، بنابراین $\Sigma_۴$ را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $\Sigma_۴$ خودش ساده نیست، چراکه گروه متناوب $A_۴$ یک زیرگروه نرمال حقیقی نابدیهی $\Sigma_۴$ است (۵۸.۳). هرگاه H یک زیرگروه سادهٔ ناآبلی $\Sigma_۴$ باشد، آنگاه چون $|\Sigma_۴| = ۲^۳ \times ۳$ و بنابر ۲۹.۴، $|H|$ بایستی هم بر ۲ بخش‌پذیر باشد هم بر ۳. ازاین‌رو $|H|$ باید یا ۲×۳ باشد یا $۲^۲ \times ۳$. اما این امکانها بنابر ۱۷.۵ و ۱۹.۵ (یا بنابر ۲۷۹) قابل قبول نیستند.

۲۲.۵ فرع هرگاه G یک گروه سادهٔ ناآبلی باشد و $H < G$، آنگاه $|G : H| \geqslant ۵$. (رک. ۲۰۷)

برهان قرار می‌دهیم $|G : H| = n$. در این صورت بنابر ۱۴.۴، G/H_G را می‌توان در Σ_n نشانید. ازآنجایی‌که $H_G \leqslant H < G$ و G ساده است، $H_G = ۱$. لذا G را می‌توان در Σ_n نشانید. ازاین‌رو بنابر ۲۱.۵، $n \geqslant ۵$.

۲۳.۵ لم nرا عدد صحیح مثبتی می‌گیریم به‌طوری‌که $n \leqslant ۱۰۰$ و $n \neq ۶۰$. در این صورت هیچ گروه سادهٔ ناآبلی از مرتبهٔ n وجود ندارد.

برهان فرض می‌کنیم یک گروه سادهٔ ناآبلیِ G از مرتبهٔ n وجود داشته باشد. در این صورت $n > 1$ و می‌توانیم n را به شکل

$$n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i},$$

بیان کنیم، که در آن s، m_1، $\cdots$، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند، و p_1، $\cdots$، p_s اعداد اول متمایز. می‌توانیم فرض کنیم که $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. بنابر ۲۹.۴، داریم، $s \geqslant 2$. هرگاه $s \geqslant 4$ آنگاه $n \geqslant 2 \times 3 \times 5 \times 7 > 100$، که یک تناقض است. ازاین‌رو s یا با ۲ برابر است یا با ۳. به موجب ۱۷.۵ و ۱۹.۵ و ۲۰.۵، خواهیم داشت، $\sum_{i=1}^{s} m_i > 3$. هرگاه $\sum_{i=1}^{s} m_i \geqslant 7$ آنگاه $n > 2^7 > 100$، که یک تناقض است. ازاین‌رو

$$4 \leqslant \sum_{i=1}^{s} m_i \leqslant 6.$$

ابتدا فرض می‌کنیم که $s = 2$. هرگاه p_1 و p_2 هر دو فرد باشند آنگاه $n \geqslant 3^3 \times 5 > 100$ که یک تناقض است. ازاین‌رو $p_1 = 2$ و p_2 عدد اول فردی است، مانند p. قرار می‌دهیم $m_1 = l$ و $m_2 = m$. در این صورت

$$n = 2^l p^m,$$

که در آن l و m اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری‌که $4 \leqslant l + m \leqslant 6$. اگر $l \leqslant 2$ آنگاه pزیرگروه سیلوی G، زیرگروهی حقیقی از شاخص حداکثر ۴ در G خواهد بود، و به موجب ۲۲.۵ این قابل قبول نیست. ازاین‌رو

$$3 \leqslant l \leqslant 5 \quad \text{و} \quad 1 \leqslant m \leqslant 3.$$

فرض می‌کنیم n_p تعداد p زیرگروههای سیلوی G باشد. بنابر ۱۵.۵، $n_p > 1$، و بنابر قضیهٔ سیلو، n_p در G شاخص زیرگروهی است از G (یعنی شاخص نرمال‌ساز یک pزیرگروه سیلوی G در G)، n_p، 2^l را می‌شمارد و $n_p \equiv 1$ پیمانه p. ازاین‌رو، n_p، 2^5 را می‌شمارد و بنابر ۲۲.۵، $n_p > 4$. نمی‌توانیم $n_p = 32$ را داشته باشیم؛ چرا که این ایجاب می‌کند که $p = 31$ و بنابراین $n \geqslant 32 \times 31 > 100$. ازاین‌رو باید داشته باشیم

$$n_p = 8 \text{ و } p = 7 \qquad \text{یا} \qquad n_p = 16 \text{ و } p = 3 \text{ یا } 5$$

اگر $n_p = 8$ و $p = 7$ آنگاه، چون $|G| \leqslant 100$، خواهیم داشت $|G| = 56$. بنابراین

چون ۷ زیرگروههای سیلوی G از مرتبهٔ ۷اند و $n_7 = 8$، $48 = 8 \times 6$ عضو در G از مرتبهٔ ۷ وجود خواهد داشت. اما در این صورت تنها $56 - 48 = 8$ عضو در G وجود دارد که از مرتبهٔ ۷ نیستند و این ۸ عضو باید ۲ زیرگروه سیلوی یکتای G را تشکیل دهند: این امر با ساده‌بودن G در تناقض است. اگر $n_p = 16$، آنگاه $l \geqslant 4$: ازاین‌رو $m = 1$، چه در غیر این صورت $n \geqslant 2^4 \times 3^2 > 100$، که یک تناقض است. لذا، اگر $n_p = 16$ و $p = 3$، یک ۲ زیرگروه سیلوی G دارای شاخص ۳ در G خواهد بود، که با ۲۲.۵ در تناقض است. بالاخره اگر $n_p = 16$ و $p = 5$ آنگاه، چون $|G| \leqslant 100$، $|G| = 80$. اما این حالت بنابر ۲۷۹ قابل قبول نیست.

حال فرض می‌کنیم $s = 3$. چون $n \leqslant 100$ و $n \neq 60$، این امر ایجاب می‌کند که $n = 2^2 \times 3 \times 7 = 84$ یا $n = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$. هرگاه $|G| = 84$، آنگاه تعداد ۷ زیرگروههای سیلوی G، یعنی n_7، بنابر قضیهٔ سیلو، مقسوم‌علیهی از ۱۲ خواهد بود و $n_7 \equiv 1$ پیمانه ۷. علاوه‌براین به موجب ۱۵.۵، $n_7 > 1$. این شرایط برای n_7 سازگار نیست. بالاخره چون $90 = 2 \times 45$ و ۴۵ عددی است فرد، به موجب ۲۰۵ می‌دانیم که گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۹۰ وجود ندارد. بدین‌ترتیب این لم اثبات می‌شود.

۲۸۰. گروه ساده‌ای از مرتبهٔ $6 \times p^m$ به‌ازای عدد اول دلخواه p و عدد صحیح مثبت m وجود ندارد. (راهنمایی. از ۲۷۹، ۲۰.۵ و ۲۲.۵ استفاده کنید.)

۲۸۱. فرض می‌کنیم گروهی ساده مانند G از مرتبهٔ ۱۴۴ وجود داشته باشد. در این صورت

(i) G، دارای ۱۶، ۳ زیرگروه سیلو است.

(ii) H_1 و H_2 را ۳ زیرگروههای سیلو متمایزی از G می‌گیریم. دراین‌صورت $G = \langle H_1, H_2 \rangle$. ازاین‌رو اگر $H_1 \cap H_2 \neq 1$، آنگاه $Z(G) \neq 1$: که یک تناقض است.

(iii) بنابر (ii)، هر دو ۳ زیرگروه سیلوی متمایز G اشتراک بدیهی دارند. نتیجه بگیرید که G دارای تنها یک ۲ زیرگروه سیلو است: که یک تناقض است. سپس نتیجه بگیرید که گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۴۴ وجود ندارد. (راهنمایی. از ۹۹، ۳۰.۴ و ۲۲.۵ استفاده کنید.)

۲۸۲. فرض می‌کنیم که یک گروه سادهٔ G از مرتبهٔ ۱۱۲ وجود دارد. T_1 و T_2 را ۲ زیرگروههای سیلوی متمایز G می‌گیریم، به‌طوری‌که $|T_1 \cap T_2|$ تا حد ممکن بزرگ باشد. در این صورت

(i) $|T_1 \cap T_2| \geqslant 4$.

(ii) $N_G(T_1 \cap T_2)$، یک ۲ زیرگروه G است.

(iii) بنابر قضیهٔ سیلو، یک ۲ زیرگروه سیلوِ S از G وجود دارد که $N_G(T_1 \cap T_2)$ را شامل است. در این صورت $T_1 = S = T_2$: که یک تناقض است.

سپس نتیجه بگیرید که زیرگروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۱۲ وجود ندارد. (راهنمایی. از ۹۹، ۶.۵ و ۲۲.۵ استفاده کنید.) (اشاره. به شکلی متفاوت با این استدلال ثابت می‌شود که گروه ساده‌ای از مرتبهٔ $p^m q$، که در آن p و q اعداد اول متمایزند و m یک عدد صحیح مثبت است، وجود ندارد. ب. هوپرت [b۲۱] ص ۴۱ یا هـ. زاسنهاوس [b۴۱] ص ۱۳۸ را ببینید.)

۲۴.۵ لم A_5 ساده است.

برهان به‌عکس فرض می‌کنیم که A_5 ساده نیست. قرار می‌دهیم $G = A_5$ و یک زیرگروه نرمال حقیقی از G مانند K از بزرگترین مرتبهٔ ممکن را انتخاب می‌کنیم. در این صورت $K \neq 1$. گروه خارج‌قسمتی G/K ساده است: زیرا که در غیر این صورت یک زیرگروه نرمال حقیقی نابدیهی مانند H/K خواهیم داشت و بنابراین به‌موجب ۳۰.۳، H یک زیرگروه نرمال حقیقیِ G خواهد بود با $|H| > |K|$، که با انتخاب K در تناقض است. چون G/K ساده است و $|G/K| < |G| = 60$، از ۲۳.۵ نتیجه می‌شود که G/K آبلی است. از این‌رو بنابر ۵۲.۳

به‌ازای هر $x, y \in G$، $\quad [x, y] \in K$

فرض می‌کنیم

$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{a, b, c, d, e\}.$$

(با استفاده از ۵۹.۳) ملاحظه می‌کنیم که اعضای نابدیهی A_5 سه نوع‌اند:

$(abcde)$: از این نوع عضو $24 = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{5}$ تا وجود دارند،

(abc) : از این نوع عضو $20 = \dfrac{5\times4\times3}{3}$ تا وجود دارند،

$(ab)\,(cd)$: از این نوع عضو $15 = \dfrac{5\times4\times3\times2}{2\times2\times2}$ تا وجود دارند.

می‌توانیم به‌جای x و yی فوق هر عضو از این سه نوع را برگزینیم. حال

$$\begin{aligned}[(aeb), (aecbd)] &= (bea)(dbcea)(aeb)(aecbd)\\ &= (abcde),\\ [(adb), (bce)] &= (bda)(ecb)(adb)(bce)\\ &= (abc),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}[(abc), (abd)] &= (cba)(dba)(abc)(abd)\\ &= (ab)(cd).\end{aligned}$$

از این‌رو (با انتخاب مناسبِ a، b، c، d و e) ملاحظه می‌کنیم که هر عضو نابدیهی A_5 به K تعلق دارد. لذا $K = G$، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که A_5 ساده است.

لازم به ذکر است که برهانهایی مستقیم‌تر و مقدماتی‌تر برای ساده بودن A_5 وجود دارد. یکی از این برهانها در ۲۸۷ ارائه شده است. برهان فوق‌الذکر در متن کنونی این کتاب به‌خاطر کاربردهای قضیهٔ سیلو که در اثبات ۲۳.۵ به‌کار گرفته شده است و برای نقطه‌نظر اتخاذ شده در آنجا اساسی می‌باشند، و در حقیقت بخش بسیار ضروری برای نظریه گروههای متناهی است، آورده شده است. لذا ساده بودن A_5 همان‌گونه که در ۲۴.۵ ملاحظه کردیم، به‌راحتی نتیجه می‌شود.

اکنون با یک مثال نشان می‌دهیم که چگونه قضیهٔ سیلو در به‌دست‌آوردن اطلاعاتی زیرگروههای یک گروه متناهی به‌غیر از p زیرگروهها، می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۲۵.۵ مثال انواع همهٔ زیرگروههای حقیقی A_5 را بیابید که مرتبه‌شان دست‌کم بر دو عدد اول متمایز بخش‌پذیر باشند، و همچنین تعداد زیرگروههایی را بیابید که در هر ردهٔ تزویجیِ زیرگروههای A_5 قرار می‌گیرند.

(i) فرض می‌کنیم $G = A_5$. در این صورت، چون G ساده است، ۲۲.۵ نشان می‌دهد که به‌ازای هر $H < G$، $|G : H| \geqslant 5$ و بنابراین $|H| \leqslant 12$. ازاین‌رو، چون $|G| = 60$، مرتبه‌های ممکن برای زیرگروههای در نظرگرفته‌شده عبارت‌اند از: ۶، ۱۰، ۱۲.

(ii) اما G دارای زیرگروههایی است از مرتبهٔ ۱۲: زیرا اگر عمل طبیعی G بر مجموعهٔ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ را در نظر بگیریم آنگاه روشن است که $\mathrm{Stab}_G(5) \cong A_4$. فرض می‌کنیم $H < G$ و $H \cong A_4$. در این صورت H دارای زیرگروهی است نرمال مانند T از مرتبهٔ ۴ (۱۸۵)، و ازآنجاکه $5\times3\times2^2 = 60$، T یک ۲ زیرگروه سیلوی G است. اما $H \leqslant N_G(T) < G$، زیرا G ساده است؛ و درنتیجه بنابر (i)، $12 \leqslant |N_G(T)| \leqslant |H| = 12$. ازاین رو $N_G(T) = H$، و تعداد ۲ زیرگروههای سیلوی G برابر است با $|G : H| = 5$. لذا نرمال‌سازِ یک ۲ زیرگروه سیلوی G در G با A_4 یکریخت است، و هر زیرگروه G یکریخت با A_4، نرمال‌ساز یک ۲ زیرگروه سیلوی G، در G است. بنابر ۲۶۶، از اینجا نتیجه می‌شود که زیرگروههای G، یکریخت با A_4، یک ردهٔ تزویجی واحد، مرکب از ۵ زیرگروه تشکیل می‌دهند.

(iii) فرض می‌کنیم n_3 و n_5 به‌ترتیب تعداد ۳ زیرگروههای سیلو و ۵ زیرگروههای سیلوی G باشند. در این صورت، n_3، 5×2^2 را می‌شمارد و پیمانه ۳ $n_3 \equiv 1$، همچنین n_5، 3×2^2 را می‌شمارد و پیمانه ۵ $n_5 \equiv 1$. به‌علاوه ازآنجاکه n_3 و n_5 هر دو حداقل ۵ هستند، خواهیم داشت: $n_3 = 10$ و $n_5 = 6$. U را زیرگروه دلخواه G از مرتبهٔ ۳ و V را زیرگروه دلخواه G از مرتبهٔ ۵ می‌گیریم و قرار می‌دهیم $J = N_G(U)$ و $K = N_G(V)$. در این صورت $|G:J| = n_3 = 10$ و $|G:K| = n_5 = 6$. ازاین‌رو $|J| = 6$ و $|K| = 10$، در نتیجه G دارای زیرگروههایی است از مرتبه‌های ۶ و ۱۰. علاوه‌براین، ۲۶۶ نشان می‌دهد که نرمال‌سازهای ۳ زیرگروههای سیلوی G در G ردهٔ تزویجی واحدی، مرکب از ۱۰ زیرگروه G از مرتبهٔ ۶ تشکیل می‌دهند، و همچنین نرمال‌سازهای ۵ زیرگروههای سیلوی G در G، ردهٔ تزویجی واحدی، مرکب از ۶ زیرگروه از G از مرتبهٔ ۱۰ تشکیل می‌دهند.

(iv) اکنون فرض می‌کنیم J زیرگروه دلخواه G از مرتبهٔ ۶ باشد و K زیرگروه دلخواه G از مرتبهٔ ۱۰. در این صورت، بنابر ۱۶.۵، J دارای یک زیرگروه نرمال U از مرتبهٔ ۳ است و K دارای یک زیرگروه نرمال V از مرتبهٔ ۵. بنابراین به موجب (iii)، $|N_G(U)| = 6$ و $|N_G(V)| = 10$، و در نتیجه $J = N_G(U)$ و $K = N_G(V)$. ازاین‌رو تنها زیرگروههای مرتبهٔ ۶ از G عبارت‌اند از نرمال‌سازهای ۳ زیرگروههای سیلوی G در G، و تنها زیرگروههای مرتبهٔ ۱۰ عبارت‌اند از نرمال‌سازهای ۵ زیرگروههای سیلوی G در G.

(v) با درنظرگرفتن شکل اعضای A_5 به صورت حاصلضرب دورهای مجزا، مشاهده می‌کنیم که G دارای هیچ عضوی با مرتبهٔ بزرگتر از ۵ نیست. ازاین‌رو زیرگروههای مرتبهٔ ۶ و ۱۰ از G دوری نیستند. بنابراین ۲۴۲ نشان می‌دهد که اگر $J, K \leqslant G$ و $|J| = 6$، $|K| = 10$ آنگاه $J \cong D_6$ و $K \cong D_{10}$.

(vi) بالاخره فرض می‌کنیم H زیرگروه دلخواه G از مرتبهٔ ۱۲ باشد. T را یک ۲ زیرگروه سیلوی H می‌گیریم و فرض می‌کنیم U یک ۳ زیرگروه سیلو H باشد. بنابر ۱۹.۵؛ یا $T \trianglelefteq H$ و یا $U \trianglelefteq H$. هرگاه $U \trianglelefteq H$ آنگاه $|N_G(U)| \geqslant |H| = 12$؛ اما ازآنجایی‌که $|U| = 3$، بنابر (iii) می‌دانیم $|N_G(U)| = 6$، و این یک تناقض است. ازاین‌رو $T \trianglelefteq H$. چون $|T| = 4$، T یک ۲ زیرگروه سیلوی G است. لذا بنابر (ii)، $H \leqslant N_G(T) \cong A_4$. ازآنجایی‌که $|H| = 12$؛ نتیجه می‌شود که $H = N_G(T)$.

بنابراین فهرست مطلوب به صورت زیر است:

(الف) یک ردهٔ تزویجی از ۱۰ زیرگروه یکریخت با D_6.

(ب) یک ردهٔ تزویجی از ۶ زیرگروه یکریخت با D_{10}.

(ج) یک ردهٔ تزویجی از ۵ زیرگروه یکریخت با A_4.

حال با استفاده از ۲۴.۵ به‌عنوان پایه‌ای برای یک اثبات استقرایی، نشان می‌دهیم که هرگاه $n \geqslant 5$، A_n ساده است. برای رسیدن به این هدف، احتیاج داریم چگونگی افراز Σ_n به رده‌های تزویجی را شرح دهیم.

۲۶.۵ لم فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و $\sigma, \tau \in \Sigma_n$. فرض می‌کنیم شکل σ به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا به فرم

$$\sigma = (a_{11}a_{12}\cdots a_{1n_1})(a_{21}\cdots a_{2n_2})\cdots(a_{s1}\cdots a_{sn_s}),$$

باشد، که در آن s، n_1، …، n_s اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری‌که $n_1 + \cdots + n_s = n$ و قرار می‌دهیم

$$\tau = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{sn_s} \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{sn_s} \end{pmatrix}.$$

در این صورت

$$\sigma^\tau = (b_{11}b_{12}\cdots b_{1n_1})(b_{21}\cdots b_{2n_2})\cdots(b_{s1}\cdots b_{sn_s})$$

شکل σ^τ به صورت حاصلضربی از دورهای مجزاست.

برهان به‌ازای هر $i = 1, \ldots, s$ و هر $j = 1, \ldots, n_i$،

$$b_{ij}\sigma^\tau = b_{ij}\tau^{-1}\sigma\tau = a_{ij}\sigma\tau = a_{i,j+1}\tau = b_{i,j+1}$$

(که در آن اگر $j = n_i$، به‌جای زیرنمایهٔ $i, j+1$ قرار می‌دهیم $i1$).

۲۷.۵ فرع فرض می‌کنیم n عددی صحیح مثبت باشد و $\sigma, \sigma' \in \Sigma_n$. در این صورت σ و σ' در Σ_n مزدوج‌اند اگر و تنها اگر σ و σ' دارای یک الگوی دوری باشند؛ یعنی، اگر و تنها اگر شکل‌های σ و σ' به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا، به‌ازای هر عدد صحیح m با $1 \leqslant m \leqslant n$، دارای یک تعداد دور به طول m باشند.

برهان فرض می‌کنیم شکل σ به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا به فرم

$$\sigma = (a_{11}a_{12}\cdots a_{1n_1})(a_{21}\cdots a_{2n_2})\cdots(a_{s1}\cdots a_{sn_s})$$

باشد، که در آن s، n_1، $\cdots$، n_s اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری‌که $n_1+\cdots+n_s=n$. هرگاه به‌ازای $\tau\in\Sigma_n$ی؛ $\sigma'=\sigma^\tau$؛ آنگاه ۲۶.۵ نشان می‌دهد که σ' دارای همان الگوی دوری σ است. به‌عکس، اگر σ' دارای همان الگوی دوری σ باشد، آنگاه شکل σ' به صورت حاصلضربی از دورهای مجزا به فرم زیر است

$$\sigma' = (b_{11}b_{12}\cdots b_{1n_1})(b_{21}\cdots b_{2n_2})\cdots(b_{s1}\cdots b_{sn_s}).$$

پس هرگاه قرار دهیم

$$\tau = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{sn_s}\\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{sn_s}\end{pmatrix}\in\Sigma_n,$$

۲۶.۵ نشان می‌دهد که $\sigma'=\sigma^\tau$، بنابراین σ و σ' در Σ_n مزدوج‌اند.

اشاره. از حکم اخیر نتیجه می‌شود که عدد ردهٔ Σ_n برابر است با تعداد افرازهای n (رک. ۵.۱).

به‌عنوان مثال، در Σ_4 الگوهای دوری ممکن عبارت‌اند از

$$(\times)(\times)(\times)(\times)\ ,(\times\times)(\times)(\times)\ و\ (\times\times)(\times\times)\ و\ (\times\times\times)\ ,\ (\times\times\times\times)$$

بنابراین عدد ردهٔ Σ_4 برابر است با ۵. تعداد اعضای این الگوها به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$۱\ ,\ \frac{۴\times۳}{۲}=۶\ ,\ \frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۲\times۲\times۲}=۳\ ,\ \frac{۴\times۳\times۲}{۳}=۸\ ,\ \frac{۴\times۳\times۲\times۱}{۴}=۶.$$

توجه داشته باشید که این اعداد همگی مقسوم‌علیه‌های $|\Sigma_4|=۲۴$ هستند، همچنان‌که بنابر ۲۶.۴ باید باشند، و

$$۱+۶+۳+۸+۶=۲۴.$$

۲۸۳. عدد ردهٔ Σ_5 را بیابید. تعداد اعضای رده‌های تزویجی اعضای Σ_5 را پیدا و تحقیق کنید که این عددها مقسوم‌علیه‌های ۱۲۰ هستند و حاصل‌جمع آنها ۱۲۰ است.

۲۸۴. دو عضو از A_4 را بیابید که در Σ_4 مزدوج باشند اما در A_4 مزدوج نباشند.

*۲۸۵. نشان دهید که به‌ازای هر عدد صحیح $n\geqslant ۳$، $Z(\Sigma_n)=۱$.

۲۸۶. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. تعداد رده‌های تزویجی متمایز اعضای مرتبهٔ ۲ در Σ_n اگر n زوج باشد برابر است با $n/۲$، و اگر n فرد باشد برابر است با $(n-۱)/۲$. (رک. ۲۱۳. راهنمایی. ۲۲ را ببینید.)

۲۸۷. قرار می‌دهیم $G=A_5$. فرض می‌کنیم $\{a,b,c,d,e\}=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$.

(i) تحقیق کنید که

$$(ab)(cd)=(acd)(acb)$$

و

$$(abcde)=(abc)(ade).$$

ازاین‌رو نشان دهید که $G=\langle x\rangle$، که در آن $X=\{x\in G: x^3=۱\}$.

(ii) فرض می‌کنیم $x\in G$ و $o(x)=۳$. ثابت کنید که $C_G(x)=\langle x\rangle$. نتیجه بگیرید که اعضای مرتبهٔ ۳، ردهٔ تزویجی واحدی از اعضای G را تشکیل می‌دهند. (راهنمایی. از ۲۶.۴ و ۲۶.۵ استفاده کنید.)

(iii) قرار می‌دهیم $u=(ab)(cd)$، $v=(abcde)$ و $g=(ab)(de)$. تحقیق کنید که

$$uu^g=(cde) \quad و \quad vv^g=(bec).$$

ازاین‌رو نشان دهید که هر زیرگروه نرمال نابدیهی G می‌بایست شامل عضوی از مرتبهٔ ۳ باشد.

(iv) نتیجه بگیرید که G ساده است.

*۲۸۸. تحقیق کنید که آنچه در ذیل آمده فهرست کاملی از رده‌های تزویجی زیرگروههای حقیقی نابدیهی A_4 است: (i) یک زیرگروه نرمالِ مرتبهٔ ۴، یکریخت با $C_2\times C_2$، (ii) رده‌ای از ۴ زیرگروه مرتبهٔ ۳، و (iii) رده‌ای از ۳ زیرگروهِ مرتبهٔ ۲. (راهنمایی. برای کنارگذاشتن این حالت که A_4 دارای زیرگروهی از مرتبهٔ ۶ است، ۱۸۵ را ببینید. راه دیگر، از قضیهٔ سیلو استفاده کنید.)

*۲۸۹. تحقیق کنید که آنچه در ذیل آمده فهرست کاملی از رده‌های تزویجیِ زیرگروههای حقیقی نابدیهی Σ_4 است: (i) A_4، یک زیرگروه نرمال از مرتبهٔ ۱۲، (ii) رده‌ای از ۳ زیرگروهِ مرتبهٔ ۸، یکریخت با D_8، (iii) رده‌ای از ۴ زیرگروه مرتبهٔ ۳، (iv) رده‌ای از ۴ زیرگروهِ مرتبهٔ ۶، یکریخت با Σ_3، (v) یک زیرگروه نرمالِ مرتبهٔ ۴، یکریخت با $C_2\times C_2$، (vi) رده‌ای از ۳ زیرگروه دوریِ مرتبهٔ ۴، (vii) رده‌ای از ۶ زیرگروهِ مرتبهٔ ۲، (viii) رده‌ای از ۳ زیرگروه مرتبهٔ ۲، و (ix) رده‌ای از ۳ زیرگروه نادوریِ مرتبهٔ ۴، یکریخت با $C_2\times C_2$. (راهنمایی. برای اینکه نشان دهید A_4 تنها زیرگروه Σ_4 از مرتبهٔ ۱۲ است، از ۱۸۵ استفاده کنید، همچنین ۲۲۹، ۲۵۰، ۲۶۱ و ۲۶۶ را ببینید.)

۲۸.۵ قضیه (۶۰.۳). A_n به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant ۵$ ساده است.

برهان اثبات با استقرا بر n صورت می‌گیرد. وقتی $n = ۵$، بنابر ۲۴.۵ حکم برقرار است. فرض می‌کنیم که $n > ۵$ و به استقرا $A_{n-۱}$ ساده است. قرار می‌دهیم $G = A_n$، و عمل طبیعی G را بر مجموعهٔ $X = \{۱, ۲, \cdots, n\}$ در نظر می‌گیریم. به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، قرار می‌دهیم $H_i = \mathrm{Stab}_G(i)$. توجه داشته باشید که G به‌طور ترایا بر X عمل می‌کند: توضیحات پس از ۱۲.۴ را ببینید. ازاین‌رو، بنابر ۱۸۷ (i)، $H_۱, \cdots, H_n$ همه به ردهٔ تزویجی واحدی از زیرگروههای G تعلق دارند. بدین‌ترتیب به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، $H_i \cong H_n \cong A_{n-۱}$ (۲۰.۲)، و در نتیجه H_i ساده است.

به‌عکس فرض می‌کنیم G دارای یک زیرگروه نرمال حقیقی نابدیهی K باشد. در این صورت به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، $H_i \cap K \trianglelefteq H_i$ بنابراین ازآنجاکه H_i ساده است، $H_i \cap K$ یا ۱ است یا H_i. در واقع، به‌ازای هر i، $H_i \cap K = ۱$. زیرا مثلاً فرض کنید یک j وجود داشته باشد به‌طوری‌که $H_j \cap K = H_j$، یعنی به‌طوری‌که $H_j \leqslant K$. در این صورت بنابر ملاحظات فوق، به‌ازای هر i، یک عضو $\gamma \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $H_i = H_j^\gamma$، و در نتیجه چون $K \trianglelefteq G$، $H_i \leqslant K^\gamma = K$. لذا K هر H_i را شامل خواهد بود. اما از اینجا نتیجه می‌شود که $K = G$، که یک تناقض است. زیرا اگر $\sigma \in G$، آنگاه یا $۱\sigma = ۱$، که در این حالت $\sigma \in H_۱ \leqslant K$، و یا به‌ازای یک $j \neq ۱$، $۱\sigma = j$. در حالت دوم، می‌توانیم $i \in X$ را که $i \neq ۱$ و $i \neq j$ انتخاب کنیم. در این صورت $(j\,۱\,i) \in G$ و $\sigma = \sigma(j\,۱\,i)(j\,۱\,i)^{-۱}$. اما $\sigma(j\,۱\,i)$ عضوی است از G که نقطهٔ ۱ را ثابت نگه می‌دارد، بنابراین $\sigma(j\,۱\,i) \in H_۱ \leqslant K$؛ و چون $|X| > ۳$، یک نقطه مانند $l \in X$ وجود دارد به‌قسمی‌که $(j\,۱\,i)^{-۱} = (i\,۱\,j) \in H_l \leqslant K$. ازاین‌رو $\sigma \in K$.

لذا به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, n$، $H_i \cap K = ۱$. اکنون فرض می‌کنیم $۱ \neq \sigma \in K$. بنابراین به‌ازای هر i، $\sigma \notin H_i$: یعنی σ هیچ نقطهٔ X را ثابت نگه نمی‌دارد. فرض می‌کنیم $a \in X$ و قرار می‌دهیم $a\sigma = b \neq a$. چون $|X| > ۳$، نقطه‌ای مانند $c \in X$ وجود دارد به‌قسمی‌که $c \neq a$ و $c \neq b$ و $c \neq a\sigma^{-۱}$. قرار می‌دهیم $c\sigma = d$: در این صورت چون σ جایگشتی است از X که c را ثابت نگه نمی‌دارد، d متمایز از a، b و c است. چون در واقع $|X| \geqslant ۶$، می‌توانیم دو نقطهٔ متمایز دیگر $e, f \in X$ را انتخاب کنیم، که هر دو از a، b، c، d متمایز باشند. اکنون قرار می‌دهیم

$$\tau = (ab)(cdef) \in G \quad \text{(بنابر ۵۹.۳)}.$$

در این صورت، چون σ، a را به b می‌برد و c را به d، ۲۶.۵ نشان می‌دهد که σ^τ، b را به a و d را به e می‌برد. علاوه‌براین $\sigma^\tau \in K$، زیرا $K \trianglelefteq G$. ازاین‌رو $\sigma\sigma^\tau \in K$ و $\sigma\sigma^\tau$، a را ثابت نگه

می‌دارد و c را به $e (\neq c)$ می‌برد. لذا $۱ \neq \sigma\sigma^\tau \in H_a \cap K$: که یک تناقض است. پس نتیجه می‌گیریم که G ساده است، و در نتیجه استدلال به استقرا خاتمه می‌یابد.

واضح است که به‌ازای هر عدد صحیح $n > ۲$، A_n دارای زیرگروههایی است یکریخت با $A_{n-۱}$؛ و این زیرگروهها در A_n دارای شاخص n هستند، زیرا $|A_n| = n|A_{n-۱}|$. اکنون به لم زیر توجه می‌کنیم.

۲۹.۵ لم فرض می‌کنیم n عدد صحیح دلخواهی باشد و $n > ۲$. در این صورت هر زیرگروه از شاخص n در A_n با $A_{n-۱}$ یکریخت است.

برهان هرگاه $n < ۵$ حکم واضح است، بنابراین فرض می‌کنیم که $n \geqslant ۵$. می‌گیریم $H < G = A_n$ با $|G : H| = n$. عمل G را با ضرب از راست بر مجموعهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G در نظر می‌گیریم. چون بنابر ۲۸.۵، G ساده است، این عمل صادق است. ازاین‌رو به‌موجب ۱۹۸ این عمل هم‌ارز است با عمل طبیعی زیرگروهی مناسب مانند J از Σ_n بر مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, n\}$. چون $|J| = |A_n|$ و A_n تنها زیرگروه از شاخص ۲ در Σ_n است (۲۹۰ (ii) را ببینید.)؛ ملاحظه می‌کنیم که $J = A_n$. عملهای مورد بحث ترایا هستند و در نتیجه بنابر ۱۹۹،

$$H = \mathrm{Stab}_G(H) \cong \mathrm{Stab}_{A_n}(n) \cong A_{n-۱}.$$

اکنون می‌توانیم برهان قضیهٔ زیر را کامل کنیم.

۳۰.۵ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ ناآبلی متناهی از مرتبهٔ حداکثر ۱۰۰ باشد. در این صورت $G \cong A_۵$.

برهان بنابر ۲۳.۵، $|G| = ۶۰$. فرض می‌کنیم n تعداد ۵ زیرگروههای سیلوی G باشد. بنابر ۱۵.۵، $n > ۱$، و بنابر قضیهٔ سیلو، G دارای زیرگروهی است از شاخص n که n، ۱۲ را می‌شمرد و $n \equiv ۱$ پیمانهٔ ۵. ازاین‌رو $n = ۶$. در این صورت چون G زیرگروهی از شاخص ۶ دارد و ساده است، از ۱۴.۴ نتیجه می‌شود که G را می‌توان در $\Sigma_۶$ نشاند. فرض می‌کنیم G^* زیرگروهی از $\Sigma_۶$ باشد، یکریخت با G. در این صورت، بنابر ۱۸۴، چون G^* ساده است نمی‌تواند شامل یک جایگشت فرد باشد: لذا $G^* \leqslant A_۶$. به‌علاوه $|G^*| = ۶۰$ و $|A_۶| = ۳۶۰$، در نتیجه $|A_۶ : G^*| = ۶$. ازاین‌رو ۲۹.۵ نشان می‌دهد که $G^* \cong A_۵$.

*۲۹۰. (i) به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant ۵$، A_n تنها زیرگروه نرمال حقیقی نابدیهی Σ_n است.

(راهنمایی. از ۱۱۹ و ۲۸۵ استفاده کنید.)

(ii) به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant 2$، A_n تنها زیرگروه از شاخص ۲ در Σ_n است.

(راهنمایی. در حالت $n = 4$، ۲۸۹ را ببینید.)

۲۹۱. فرض می‌کنیم $\mathbf{N}$ معرف مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت باشد. همچون ۱۴۸، می‌گیریم $G = \Sigma_{(\mathbf{N})}$، گروه متقارن محدود بر $\mathbf{N}$، و به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، فرض می‌کنیم

$$G_n = \{\sigma \in G : j\sigma = j \text{ ،} j > n \text{ با } j \in \mathbf{N} \text{ به‌ازای هر}\}.$$

لذا بنابر ۱۴۸، $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ و به‌ازای هر $n \in \mathbf{N}$، $G_n \cong \Sigma_n$.

حال فرض می‌کنیم $H_1 = 1$ و به‌ازای هر عدد صحیح $n > 1$، H_n را زیرگروه یکتایی از شاخص ۲ در G_n می‌گیریم: ۲۹۰ (ii) را ببینید. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح $n > 1$، $H_n \cong A_n$؛ و H_1، H_2، H_3، $\cdots$ یک دنبالهٔ صعودی است از زیرگروههای G.

فرض می‌کنیم $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \leqslant G$ (۳۴.۳). نشان دهید که $|G : H| = 2$ و H ساده است. به‌علاوه نشان دهید که H یک زیرگروه آبلی نامتناهی دارد.

(گروه سادهٔ نامتناهی H را با $A_{\mathbf{N}}$ نمایش می‌دهند. راهنمایی. ۱۵۵ را ببینید. برای اثبات وجود یک زیرگروه آبلی نامتناهی از H، توجه کنید که بنابر ۲۸.۲، کافی است نشان دهید که یک مجموعهٔ جابه‌جایی‌پذیر نامتناهی از اعضا در H وجود دارد. اشاره. (بنابر ۳۶.۳) گروه $A_{\mathbf{N}}$ متناهی مولد نیست. وجود گروههای سادهٔ نامتناهی متناهی مولد ابتدا توسط گ. هیگمن [a۵۷] ثابت شده است.)

۲۹۲. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 2$. در این صورت هر زیرگروه از شاخص n در Σ_n با Σ_{n-1} یکریخت است. (راهنمایی. به‌ازای $n \geqslant 5$، از استدلالی مشابه با استدلال ۲۹.۵ استفاده کنید. بنابر ۲۹۰ عمل مربوطه صادق است.)

۲۹۳. گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۲۰ وجود ندارد. (راهنمایی. نشان دهید که اگر چنین گروهی وجود داشته باشد، آن را می‌توان در Σ_6 نشانید، و سپس از ۲۹۲ استفاده کنید.)

۲۹۴. هرگاه G گروهی ساده از مرتبهٔ $12 \times p^m$ باشد، که p عددی است اول و m عدد صحیحی مثبت، آنگاه $G \cong A_5$. (راهنمایی. از ۲۷۲، ۲۷۳، ۲۷۹، ۲۲.۵ و ۳۰.۵ استفاده کنید.)

۲۹۵. فرض می‌کنیم گروه سادهٔ G از مرتبهٔ ۱۸۰ وجود داشته باشد و n_3 و n_5 را به‌ترتیب تعداد ۳ زیرگروههای سیلو و ۵ زیرگروههای سیلو از G می‌گیریم. در این صورت

(i) $n_3 = 10$ و n_5 یا ۶ است یا ۳۶.

(ii) هرگاه $n_5 = 6$، آنگاه G را می‌توان در A_6 نشانید؛ اما این امر با ساده‌بودن A_6 در

(iii) ازاین‌رو $n_5 = 36$ و هر ۵ زیرگروه سیلوی G بر نرمال‌سازش، در G منطبق است.

(iv) فرض می‌کنیم H_1 و H_2، ۳ زیرگروههای سیلوی متمایز G باشند و $J = \langle H_1, H_2 \rangle$ و $D = H_1 \cap H_2$. در این صورت $D \leqslant Z(J)$ و $|J : H_1| \geqslant 4$.

(v) هرگاه $D \neq 1$ آنگاه ۵، $|J|$ را نمی‌شمارد و $|J : H_1| = 4$؛ اما از اینجا نتیجه می‌شود که G را نمی‌توان در Σ_5 نشانید، و این هم غیرممکن است.

(vi) ازاین‌رو هر دو ۳ زیرگروه سیلوی G اشتراک بدیهی دارند. پس در G، ۱۴۴ عضو متمایز از مرتبهٔ ۵ و ۸۱ عضو متمایز از مرتبه‌ای که 3^2 را می‌شمارند وجود دارد. این تعداد عضو خیلی بیشتر از تعداد اعضای این گروه‌اند! حال نتیجه بگیرید که گروه ساده‌ای از مرتبهٔ ۱۸۰ وجود ندارد.

(راهنمایی. از ۹۹، ۱۸۴، ۱۴.۴، ۳۰.۴ و ۲۲.۵ استفاده کنید.)

۲۹۶. فرض کنید n عدد صحیحی باشد که $100 < n \leqslant 200$ و $n \neq 168$. در این صورت گروه سادهٔ ناآبلی از مرتبهٔ n وجود ندارد. (راهنمایی. مانند ۲۳.۵ استدلال کنید و از ۲۰۵، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۲، ۲۹۳، ۲۹۴ و ۲۹۵ استفاده کنید. اشاره. یک گروه ساده از مرتبهٔ ۱۶۸، یعنی گروه $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{Z}_7)$ وجود دارد: ۶۱.۳ را ببینید. این گروه در واقع با $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}_2)$ یکریخت است. ۳۸۵ را نیز ببینید.)

قضیهٔ سیلو هیچ اطلاعی از ساختار داخلی یک p گروه متناهی G به ما نمی‌دهد، زیرا در این حالت G خودش pزیرگروه سیلوی یکتای G است. ولی، این قضیه به ارزش بررسی p گروههای متناهی اشاره دارد؛ زیرا می‌توانیم انتظار داشته باشیم که ویژگیهای آنها ارتباط مهمی با ساختار گروههای متناهی در حالت کلی داشته باشند. با استفاده از استدلالهای عمل گروه، قبلاً برخی از ویژگیهای خاص p گروههای متناهی را ثابت کردیم. اگر G یک p گروه متناهی نابدیهی باشد، می‌دانیم که

(i) هرگاه $H < G$، $H < N_G(H)$ (۶.۵).

(ii) هرگاه $1 < H \trianglelefteq G$، $H \cap Z(G) \neq 1$ (۸.۵).

و به‌ویژه $Z(G) \neq 1$.

از p گروههای متناهی در فصل ۱۱ بیشتر صحبت خواهیم کرد. (برای اطلاعات بیشتر، گورنشتاین [b۱۳] فصل ۵؛ و هوپرت [b۲۱] فصل ۳ را ببینید.) این فصل را با اثبات حکم زیر که نشان می‌دهد یک p گروه متناهی دارای زیرگروههای نرمال از هر مرتبهٔ ممکن است خاتمه می‌دهیم.

۳۱.۵ قضیه فرض می‌کنیم G یک p گروه متناهی باشد با، مثلاً $|G| = p^m$. در این صورت

G زیرگروههای نرمالی مانند G_0، G_1، $\cdots$، G_m دارد به‌طوری‌که

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_{m-1} < G_m = G$$

و به‌ازای هر $i = 0, 1, \cdots, m$، $|G_i| = p^i$.

برهان با استقرا بر m استدلال می‌کنیم. هرگاه $m \leqslant 1$، حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم که $m > 1$، و به استقرا فرض می‌کنیم حکم برای هر گروه از مرتبهٔ p^{m-1} صادق است. بنابر ۸.۵، $Z(G) \neq 1$. فرض می‌کنیم $1 \neq z \in Z(G)$. در این صورت به‌ازای یک عدد صحیح $n > 0$، $o(z) = p^n$. قرار می‌دهیم $G_1 = \langle z^{p^{n-1}} \rangle \leqslant Z(G)$. بنابراین $|G_1| = p$ و (بنابر ۱۱۸) $G_1 \trianglelefteq G$. قرار می‌دهیم $\bar{G} = G/G_1$. در این صورت $|\bar{G}| = p^{m-1}$، و بنابر فرض استقرا $\bar{G}$ دارای زیرگروههای نرمالی است مانند $\bar{G}_i$ $(i = 0, 1, \cdots, m-1)$ به‌طوری‌که

$$1 = \bar{G}_0 < \bar{G}_1 < \cdots < \bar{G}_{m-1} = \bar{G} \qquad \text{و به‌ازای هر } i\text{،}\ |\bar{G}_i| = p^i$$

بنابر ۳۰.۳، هر $\bar{G}_i$ به شکل زیر است

$$\bar{G}_i = G_{i+1}/G_1,$$

که در آن $G_1 \leqslant G_{i+1} \trianglelefteq G$. به‌علاوه، بنابر ۲۹.۳،

$$G_1 < G_2 < \cdots < G_m = G,$$

و به‌ازای هر i، $|G_{i+1}| = |\bar{G}_i||G_1| = p^{i+1}$. حال (با $G_0 = 1$) زیرگروههای G_0، G_1، $\cdots$، G_m از G در شرط گفته شده صدق می‌کنند، و در نتیجه استدلال به استقرا خاتمه می‌یابد.

۳۲.۵ فرع (۶.۱). فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و همچنین p^m، که توانی از یک عدد اول است، مقسوم‌علیه $|G|$ باشد. در این صورت G دارای زیرگروهی است از مرتبهٔ p^m.

برهان فرض می‌کنیم H یک pزیرگروه سیلوی G باشد و مثلاً $|H| = p^l$. در این صورت $m \leqslant l$ و سرانجام بنابر ۳۱.۵؛ H دارای زیرگروهی است مانند J از مرتبهٔ p^m. بنابراین Jزیرگروه G از مرتبهٔ p^m خواهد بود.

اشاره. هرگاه p^m یک مقسوم‌علیه $|G|$ باشد، اما بزرگترین توان p که $|G|$ را می‌شمارد نباشد، آنگاه زیرگروههای مرتبهٔ p^m لزوماً ردهٔ تزویجی واحدی از زیرگروههای G را تشکیل نمی‌دهند: ۲۸۹ را

ببینید یا گروه $C_2 \times C_2$ را در نظر بگیرید. لذا درصورتی‌که ۳۲.۵ را تعمیم ۹.۵ (الف) در نظر بگیریم، تعمیم مشابهی برای ۹.۵ (ب) برقرار نخواهد بود. ولی، قسمتی از تعمیم مشابه ۹.۵ (ج) صادق می‌ماند: تعداد زیرگروههای متمایز G از مرتبهٔ p^m همنهشت ۱ است به پیمانهٔ p. برای اثبات این حکم (منسوب به ویلانت)؛ لدرمن [b۲۹] قضیهٔ ۲۷ را ببینید.

*۲۹۷. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) هرگاه G یک p گروه نابدیهی باشد، G دارای زیرگروه نرمالی است از شاخص p.

(ii) هرگاه G آبلی باشد و p، $|G|$ را بشمارد، G دارای زیرگروهی است از شاخص p. (راهنمایی. از ۱۳۵ استفاده کنید.)

(iii) در حالت کلی، G دارای زیرگروهی است نرمال از شاخص p اگر و تنها اگر p، $|G/G'|$ را بشمارد. (راهنمایی. ۵۲.۳ را ببینید.)

۲۹۸. فرض کنید l، m و n عددهای صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که $l \geqslant m \geqslant n$، همچنین P، گروهی از مرتبهٔ p^l باشد. اگر Rزیرگروه P از مرتبهٔ p^n باشد، زیرگروهی مانند Q از P، وجود دارد به‌طوری‌که $R \leqslant Q \leqslant P$ و $|Q| = p^m$.

۲۹۹. (i) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و p یک مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. اگر در G رده‌ای تزویجی از اعضا، شامل دقیقاً $|G|/p$ عضو، وجود داشته باشد p^2، $|G|$ را نمی‌شمارد.

(ii) عدد ردهٔ A_4 برابر است با ۴.

(iii) هرگاه G یک گروه متناهی از مرتبهٔ ۱۲ و عدد ردهٔ ۴ باشد، آنگاه $G \cong A_4$.

(راهنمایی. در مورد (i)، از ۲۹۸ و ۳۰.۴ استفاده کنید. در مورد (iii)، با استفاده از (i) نشان دهید که G دارای زیرگروه غیرنرمالی از مرتبهٔ ۳ است، و سپس از ۱۴.۴ و ۲۹۰ استفاده کنید.)

۳۰۰. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و p^m یک مقسوم‌علیه $|G|$ باشد. P را یک pزیرگروه سیلوی G می‌گیریم و فرض می‌کنیم تعداد زیرگروههای نرمال P از مرتبهٔ p^m، همنهشت با ۱ باشد به پیمانهٔ p. (این مطلب در واقع همیشه صادق است.) نتیجه بگیرید که تعداد زیرگروههای G از مرتبهٔ p^m همنهشت با ۱ است به پیمانهٔ p. (راهنمایی. فرض کنید P از راه تزویج بر مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای G از مرتبهٔ p^m عمل کند.)

۳۰۱. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد و $d(G)$ معرف کوچکترین عدد صحیح مثبت n، به‌طوری‌که G دارای یک مجموعهٔ n مولدی باشد. در این صورت.

(i) اگر $H \trianglelefteq G$ آنگاه $d(G) \leqslant d(H) + d(G/H)$.

(ii) هرگاه به‌ازای یک عدد صحیح مثبت m، $|G| = p^m$، آنگاه $d(G) \leqslant m$.

(توجه داشته باشید، همان‌گونه که به‌وسیلهٔ گروه جمعی یک فضای برداری به بعد m روی میدان $\mathbf{Z}_p$ نشان داده شده است، این کران نمی‌تواند بهبود یابد.)

(iii) اگر $|G| = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}$، که در آن s، m_1، $\cdots$، m_s اعداد صحیحی مثبت باشند و p_1، $\cdots$، p_s اعداد اول متمایز، آنگاه $d(G) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m_i \leqslant \log_2 |G|$.

(iv) به‌ازای هر عدد صحیح $n > 1$،

$$\nu(n) \leqslant (n!)^{\log_2 n} < n^{n \log_2 n}$$

(راهنمایی. در مورد (ii)، از ۳۱.۵ استفاده کنید؛ در مورد (iii)، توجه کنید که هرگاه P_i به‌ازای هر $i = 1, \cdots, s$ یک p_iزیرگروه سیلوی G باشد، آنگاه $G = \langle P_1, P_2, \cdots, P_m \rangle$؛ و در مورد (iv)، از قضیهٔ کیلی، ۲۴.۴، استفاده کنید.)

۶

گروههای زوج‌مرتبه

در سرتاسر این فصل، فرض می‌کنیم G گروه متناهی زوج‌مرتبه است. بنابراین به موجب ۱۳.۱ (یا ۱۱.۵) G دست‌کم یک برگشت دارد. فرض می‌کنیم که در G رویهم‌رفته n برگشت وجود داشته باشد و آنها را با

$$t_1, \dots, t_n$$

نشان می‌دهیم. k را عدد ردهٔ G می‌گیریم و از هر یک از k ردهٔ تزویجی یک عضو انتخاب می‌کنیم: فرض می‌کنیم

$$1 = x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$$

نمایش این اعضا باشند. به‌ازای $i = 0, 1, \dots, k-1$،
c_i را تعداد زوجهای مرتب (u, v) شامل برگشتهای G می‌گیریم به‌قسمی‌که

$$uv = x_i$$

پس c_i یک عدد صحیح نامنفی است.

ما قضیهٔ براوئر و ک.ا.فاولر را که در ۱۴.۱ گفته شده است، ثابت می‌کنیم. برای این منظور به چند قضیهٔ مقدماتی نیاز داریم

<u>۱.۶</u>

$$n^2 = \sum_{i=0}^{k-1} c_i |G : C_G(x_i)|\cdot$$

برهان n^2 حاصلضرب $t_j t_k$ $(j, k = 1, \ldots, n)$ را در نظر می‌گیریم. بنابر تعریف، دقیقاً c_i تا از این حاصلضربها با x_i برابرند. به‌ازای هر $g \in G$، t_j^g و t_k^g دو برگشت‌اند و $t_j t_k = x_i$ اگر و تنها اگر $t_j^g t_k^g = x_i^g$. ازاین‌رو دقیقاً c_i تا از این n^2 حاصلضرب با x_i^g برابرند. ازآنجاکه تعداد اعضای ردهٔ تزویجی x_i برابر است با $|G : C_G(x_i)|$ (۲۶.۴)، پس فرمول گفته‌شده صحیح است.

<u>۲.۶</u> (i) هرگاه $x_i^2 \neq 1$ آنگاه c_i برابر است با تعداد برگشتهای t_j به‌طوری‌که $x_i^{t_j} = x_i^{-1}$.

(ii) اگر x_i یک برگشت باشد، تعداد برگشتهای موجود در $C_G(x_i)$ برابر است با $c_i + 1$.

(iii) $c_0 = n$.

برهان فرض می‌کنیم (u, v) زوج مرتبی از برگشتهای G باشد به‌طوری‌که $uv = x_i$. در این صورت

$$x_i^u = (uv)^u = vu = v^{-1}u^{-1} = x_i^{-1}.$$

لذا می‌توانیم نگاشتی مانند

$$\varphi : (u, v) \mapsto u$$

از مجموعهٔ زوجهای مرتب برگشتهای (u, v) با $uv = x_i$، به مجموعهٔ برگشتهای u با $x_i^u = x_i^{-1}$ تعریف کنیم. نگاشت φ یک به یک است، زیرا اگر (u, v) و (u', v') دو زوج مرتب از برگشتها باشند، به‌طوری‌که $uv = x_i = u'v'$ و $u = u'$، آنگاه همچنین $v = v'$.

حال فرض می‌کنیم u برگشتی در G باشد به‌طوری‌که $x_i^u = x_i^{-1}$. قرار می‌دهیم $v = ux_i$. در این صورت

$$uv = x_i \quad \text{و} \quad v^2 = x_i^u x_i = 1.$$

لذا به شرط اینکه $v \neq 1$، (u, v) زوج مرتبی است از برگشتها که $uv = x_i$ و $(u, v)\varphi = u$. اگر $v = 1$ آنگاه $x_i = u$، که یک برگشت است. ازاین‌رو وقتی x_i یک برگشت نباشد، نگاشت φ دوسویی خواهد بود، و این (i) و (iii) را ثابت می‌کند. (در هر حالت، (iii) بدیهی است.)

اینک فرض می‌کنیم x_i یک برگشت باشد. پس $x_i = x_i^{-1}$، بنابراین هر برگشتِ u به‌قسمی‌که $x_i^u = x_i^{-1}$، باید به $C_G(x_i)$ تعلق داشته باشد. هر برگشت در $C_G(x_i)$، بجز خود x_i، به صورت نگارهٔ یک زوج بر اثر φ ظاهر می‌شود: زیرا اگر u چنین برگشتی باشد و قرار دهیم $v = ux_i$، آنگاه، چون u و x_i جابه‌جایی‌پذیرند، $v^2 = 1$ و چون $u \neq x_i$، $v \neq 1$؛ به‌علاوه در این صورت $uv = x_i$ و $(u, v)\varphi = u$. (توجه داشته باشید که هرگاه $u = x_i$ و $v \in G$ با $uv = x_i$ آنگاه $v = 1$، یعنی v یک برگشت نیست: این نشان می‌دهد که x_i در نگارهٔ φ ظاهر نمی‌شود.) این اثبات (ii) را تمام می‌کند.

<u>۳.۶ تعریف</u> فرض می‌کنیم $x \in G$. اگر x و x^{-1} در G مزدوج باشند، می‌گوییم x در G حقیقی است. (دلیل استفاده از کلمهٔ 'حقیقی' را در اینجا می‌توان در نظریهٔ سرشتها جستجو کرد: به‌عنوان مثال هوپرت [b21] ص ۵۳۷ را ببینید.) توجه داشته باشید که اگر $x^2 = 1$ آنگاه حقیقی‌بودن x بدیهی است. در حالت کلی ممکن است G اعضای حقیقی مانند x داشته باشد که $x^2 \neq 1$.

<u>۴.۶</u> فرض می‌کنیم $x \in G$ و قرار می‌دهیم

$N_G(\{x, x^{-1}\}) =$

$$C_G^*(x) = \{g \in G : \text{برابر است با } x \text{ یا } x^{-1} \;\; x^g\},$$

مرکزساز توسیع‌یافتهٔ x در G باشد (<u>۲۳۴</u>). در این صورت $C_G^*(x) \leqslant G$ و

(i) هرگاه $x^2 = 1$ یا x در G ناحقیقی باشد، آنگاه $C_G^*(x) = C_G(x)$.

(ii) هرگاه $x^2 \neq 1$ و x در G حقیقی باشد، آنگاه $|C_G^*(x) : C_G(x)| = 2$.

برهان تحقیق مستقیم درستی $C_G^*(x) \leqslant G$، ساده است. (یا از ۲۳۴ استفاده کنید.) حکم (i) بدیهی است. فرض می‌کنیم $x^2 \neq 1$ و x در G حقیقی باشد. در این صورت $x \neq x^{-1}$ و عضوی مانند $g \in G$ وجود دارد، به‌طوری‌که $x^g = x^{-1}$. بنابراین $g \in C_G^*(x) \backslash C_G(x)$. حال فرض می‌کنیم g' عضو دلخواهی از $C_G^*(x) \backslash C_G(x)$ باشد. در این صورت $x^{g'} = x^{-1} = x^g$ و در نتیجه $g'g^{-1} \in C_G(x)$، ازاین‌رو $g' \in C_G(x)g$. بنابراین $C_G^*(x) = C_G(x) \cup C_G(x)g$، و در نتیجه $|C_G^*(x) : C_G(x)| = 2$. این (ii) را ثابت می‌کند.

<u>۵.۶</u> فرض می‌کنیم $x \in G$. هرگاه x در G حقیقی باشد، تعداد اعضای $g \in G$ به‌طوری‌که $x^g = x^{-1}$ برابر است با $|C_G(x)|$.

برهان اگر $x^2 = 1$، قضیه واضح است. فرض می‌کنیم $x^2 \neq 1$. در این صورت مانند برهان ۴.۶، مجموعهٔ اعضای $g \in G$ به‌طوری‌که $x^g = x^{-1}$، یک هم‌مجموعهٔ $C_G(x)$ در $C_G^*(x)$ است، و بنابراین شامل $|C_G(x)|$ عضو خواهد بود. (این همان حالت خاص از ۲۱۰ است.)

۶.۶ به‌ازای هر $i = 0, 1, \ldots, k-1$، $c_i \leqslant |C_G(x_i)|$. به‌علاوه اگر x_i در G حقیقی نباشد، آنگاه $c_i = 0$، اما اگر x_i یک برگشت باشد، آنگاه $c_i \leqslant |C_G(x_i)| - 2$.

برهان این حقیقت که اگر x_i در G حقیقی نباشد، آنگاه $c_i = 0$، بی‌درنگ از ۲.۶(i) و ۳.۶ نتیجه می‌شود. حال فرض می‌کنیم که x_i در G حقیقی باشد، بنابر ۵.۶ تعداد اعضای $g \in G$ به‌طوری‌که $x_i^g = x_i^{-1}$ برابر است با $|C_G(x_i)|$. ازاین‌رو تعداد برگشتهای t_j به‌طوری‌که $x_i^{t_j} = x_i^{-1}$، حداکثر $|C_G(x_i)|$ است. پس اگر $x_i^2 \neq 1$، بنابر ۲.۶(i)، $c_i \leqslant |C_G(x_i)|$. درصورتی‌که x_i یک برگشت باشد، آنگاه بنابر ۲.۶(ii) و از آنجاکه $1 \in C_G(x_i)$ و ۱ یک برگشت نیست، $c_i \leqslant |C_G(x_i)| - 2$. بالاخره اگر $x_i = 1$ یعنی اگر $i = 0$، آنگاه بنابر ۲.۶ (iii)، $c_0 = n < |G| = |C_G(x_0)|$. بدین‌ترتیب تمام حالات دربرگرفته می‌شود.

۳۰۲. فرض می‌کنیم J گروهی متناهی باشد. هرگاه عضوی نابدیهی چون $x \in J$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که x و x^{-1} در J مزدوج باشند، آنگاه $|J|$ زوج است.

۳۰۳. فرض می‌کنیم H یک زیرگروه نرمال دوری G از مرتبهٔ ۴ باشد به‌طوری‌که $H \nleqslant Z(G)$. در این صورت هر عضو H در G حقیقی است.

۳۰۴. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت:

(i) هر عضو Σ_n حقیقی است.

(ii) فرض می‌کنیم $n \geqslant 3$. در این صورت هر عضو گروه دووجهی D_{2n} حقیقی است.

(iii) هر عضو گروه چهارتایی Q_8 (۱۸۱) نیز حقیقی است. (راهنمایی. از ۳۰۳ استفاده کنید.)

۳۰۵. در گروه متناوب A_4 از درجهٔ ۴ تنها اعضای x که حقیقی‌اند، آنهایی هستند که در رابطهٔ $x^2 = 1$ صدق می‌کنند. (راهنمایی. ۱۸۵ را ببینید.)

۳۰۶. فرمول ۱.۶ را در مورد هر یک از گروههای Σ_3، Q_8 و A_4 تحقیق کنید.

۳۰۷. فرض می‌کنیم $x \in G$. در این صورت x را در G قویاً حقیقی گوییم، اگر یک برگشت $t \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x^t = x^{-1}$.

(i) هرگاه $x^2 = 1$، x در G قویاً حقیقی است.

(ii) هرگاه $x \neq 1$، x در G حقیقی و $|C_G(x)|$ فرد باشد، آنگاه x در G قویاً حقیقی است.

(iii) به‌علاوه با نمادگذاری این فصل، اگر x_i در G قویاً حقیقی باشد، آنگاه یا $c_i > 0$ یا x_i یک برگشت و نیز تنها برگشت در $C_G(x_i)$ است.

(iv) اگر x_i در G قویاً حقیقی نباشد، آنگاه $c_i = 0$.

۳۰۸. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 2$. در این صورت:

(i) هر عضو Σ_n قویاً حقیقی است.

(ii) فرض می‌کنیم $n \geqslant 3$. در این صورت هر عضو D_{2n} قویاً حقیقی است.

(iii) تنها عضوهایی مثل x در Q_8 که قویاً حقیقی‌اند آنهایی هستند که در رابطهٔ $x^2 = 1$ صدق می‌کنند (رک. ۳۰۴).

۳۰۹. فرض می‌کنیم که G، n برگشت داشته باشد. به‌ازای هر زیرگروه H به‌طوری‌که $|H| > |G|/(n+1)$، یک عضو مانند $h \in H$ وجود دارد به‌قسمی‌که $h \neq 1$ و h در G قویاً حقیقی است. (راهنمایی. اگر $|H|$ فرد باشد، I را مجموعهٔ برگشتهای G بگیرید و نشان دهید که اعضای متمایز $x, y \in H$ وجود دارند به‌طوری‌که $(xI) \cap (yI) \neq \varnothing$.)

۳۱۰. قرار می‌دهیم $T = \{x \in G : x^2 = 1\}$ و فرض می‌کنیم T مجموعه‌ای جابه‌جایی‌پذیر از اعضا باشد. ثابت کنید که $T \trianglelefteq G$ و هیچ عضو $G \backslash T$ در G قویاً حقیقی نیست. با یک مثال نشان دهید که با این مفروضات ممکن است اتفاق بیفتد که $T < G$ و همهٔ اعضای G در G حقیقی باشند.

به‌علاوه ثابت کنید که اگر y عضوی از G باشد که در G حقیقی است، آنگاه $T \cap C_G(y) \neq 1$. (در مورد عکس این نتیجه ۳۱۶ را ببینید. راهنمایی. اگر y از مرتبهٔ فرد بزرگتر از ۱ باشد، از ۳۰۷ (ii) استفاده کنید.)

۷.۶ قضیه (ر. براوئر و ک. ا. فاولر [a8]، ۱۹۵۵) G را یک گروه زوج‌مرتبه می‌گیریم که دقیقاً n برگشت دارد و فرض می‌کنیم $|Z(G)|$ فرد است. قرار می‌دهیم $a = |G|/n$ (که در حالت کلی یک عدد صحیح نیست). در این صورت G یک زیرگروه حقیقی مانند H دارد به‌طوری‌که $|G:H| = 2$ یا $|G:H| < \frac{1}{2}a(a+1)$.

برهان می‌توانیم فرض کنیم که اعضای x_0، x_1، $\cdots$، x_{k-1} طوری علامت‌گذاری شده‌اند که x_1، $\cdots$، x_s برگشت هستند و x_{s+1}، $\cdots$، x_{r-1} در G حقیقی هستند اما برگشت نیستند، و x_r، $\cdots$، x_{k-1} در G حقیقی نیستند، s و r اعداد صحیح هستند، به‌طوری‌که

$$0 < s \leqslant r-1 \leqslant k-1.$$

چون هر یک از n برگشت در G فقط با یکی از $x_۱، \cdots، x_s$ در G مزدوج است و بنابر ۲۶.۴،

$$n=\sum_{i=۱}^{s}|G:C_G(x_i)|\cdot \qquad \text{(i)}$$

همچنین بنابر ۱.۶،

$$n^۲=\sum_{i=۰}^{k-۱} c_i|G:C_G(x_i)|\cdot$$

ازاین‌رو بنابر ۲.۶ (iii) و ۶.۶،

$$\begin{aligned} n^۲ &\leqslant n+\sum_{i=۱}^{s}(|C_G(x_i)-۲)|G:C_G(x_i)| + \sum_{i=s+۱}^{r-۱}|C_G(x_i)||G:C_G(x_i)| \\ &= n+(r-۱)|G|-۲\sum_{i=۱}^{s}|G:C_G(x_i)| \\ &= n+(r-۱)|G|-۲n, \quad \text{بنابر (i)} \end{aligned}$$

لذا

$$n^۲ \leqslant (r-۱)|G|-n\cdot \qquad \text{(ii)}$$

قرار می‌دهیم

$$j=\min\{|G:H| : H<G\}\cdot$$

اگر $j=۲$، قضیه اثبات شده است، بنابراین فرض می‌کنیم $j>۲$. چون $|Z(G)|$ فرد است، هیچ برگشتی در $Z(G)$ قرار ندارد و بنابراین

$$C_G(x_i)<G \qquad \text{به‌ازای } i=۱,\ldots,s\text{،}$$

ازاین‌رو،

$$j\leqslant |G:C_G(x_i)| \qquad \text{به‌ازای } i=۱,\ldots,s\text{،}$$

بنابراین، به‌موجب (i)

$$sj\leqslant n\cdot \qquad \text{(iii)}$$

به‌ازای $i=s+۱,\ldots,r-۱$، x_i در G حقیقی است و $x_i^۲\neq ۱$. از این‌رو بنابر ۴.۶،

$$|C_G^*(x_i):C_G(x_i)|=۲\cdot$$

چون $j>۲$، G هیچ زیرگروهی از شاخص ۲ ندارد و بنابراین

$$C_G^*(x_i)<G \qquad \text{به‌ازای } i=s+۱,\ldots,r-۱\text{،}$$

از این‌رو

$$j\leqslant|G:C_G^*(x_i)|,$$

یعنی،

$$j\leqslant \frac{۱}{۲}|G:C_G(x_i)| \qquad \text{به‌ازای } i=s+۱,\ldots,r-۱\text{،} \qquad \text{(iv)}$$

تعداد کل اعضای حقیقی در G چنین است

$$۱+n+\sum_{i=s+۱}^{r-۱}|G:C_G(x_i)|\leqslant|G|\cdot$$

ازاین‌رو بنابر (iv)،

$$۱+n+۲j(r-s-۱)\leqslant |G|\cdot \qquad \text{(v)}$$

به موجب (ii)،

$$\begin{aligned} n^۲ &\leqslant s|G|+(r-s-۱)|G|-n\\ &\leqslant \frac{n|G|}{j}+\frac{(|G|-۱-n)|G|}{۲j}-n, \qquad \text{(بنابر (iii) و (v))} \end{aligned}$$

لذا

$$n^۲\leqslant \frac{n|G|}{۲j}+\frac{|G|^۲}{۲j}-\frac{|G|}{۲j}-n\cdot$$

نابرابری اخیر را در $|G|/n^۲$ ضرب می‌کنیم. در این صورت با قراردادن $|G|/n=a$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}|G| &\leqslant \frac{|G|a}{۲j}+\frac{|G|a^۲}{۲j}-\frac{a^۲}{۲j}-a\\ &< \frac{|G|a}{۲j}+\frac{|G|a^۲}{۲j}\cdot\end{aligned}$$

ازاین‌رو

$$2j < a + a^2,$$

در نتیجه

$$j < \frac{1}{2}a(a+1),$$

آنچه مطلوب بود.

۸.۶ فرع فرض می‌کنیم G و a مانند ۷.۶ باشند. در این صورت G دارای یک زیرگروه نرمال حقیقی K است به‌طوری‌که یا $|G/K| = 2$ یا $|G/K| \leqslant [\frac{1}{2}a(a+1)]!$ (که در آن به‌ازای هر عدد حقیقی b، $[b]$ معرف بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از b است.)

برهان H را مانند قضیهٔ ۷.۶ می‌گیریم و فرض می‌کنیم $K = H_G$، مغز H در G. در این صورت K یک زیرگروه نرمال حقیقی G بوده و بنابر ۱۴.۴، G/K را می‌توان در $\Sigma_{|G:H|}$ نشانید، و به‌این‌ترتیب فرع نتیجه می‌شود.

۹.۶ فرع (۱۴.۱). فرض می‌کنیم G گروه ساده‌ای زوج‌مرتبه، از مرتبهٔ بزرگتر از ۲ باشد. t را برگشت دلخواهی در G انگاشته و قرار می‌دهیم $m = |C_G(t)|$. در این صورت $C_G(t) < G$ و

$$|G| \leqslant \left(\frac{1}{2}m(m+1)\right)!$$

برهان چون G سادهٔ زوج‌مرتبه، واز مرتبهٔ بزرگتر از ۲ است، G ناآبلی است. بنابراین $Z(G)$ یک زیرگروه نرمال حقیقی G است و در نتیجه $Z(G) = 1$. ازاین‌رو $C_G(t) < G$. اینک نمادگذاری برهان ۷.۶ را به‌کار می‌بریم. برگشت t با عضوی چون x_l که $1 \leqslant l \leqslant s$، در G مزدوج خواهد بود. پس

$$m = |C_G(t)| = |C_G(x_l)| \quad (۲۹۹).$$

چون

$$n = \sum_{i=1}^{s} |G : C_G(x_i)| \qquad \text{(i)}$$

(معادلهٔ (i) از اثبات ۷.۶) ، داریم

$$\frac{1}{a} = \frac{n}{|G|} = \sum_{i=1}^{s}\frac{1}{|C_G(x_i)|} \geqslant \frac{1}{|C_G(x_l)|} = \frac{1}{m}.$$

ازاین‌رو

$$a \leqslant m.$$

حال از ۸.۶ استفاده می‌کنیم. در واقع شرایط ۸.۶ برقرارند و چون K یک زیرگروه نرمال حقیقی G و G ساده است، $K = 1$. بنابراین چون $|G| > 2$،

$$|G| \leqslant \left[\frac{1}{2}a(a+1)\right]! \leqslant \left(\frac{1}{2}m(m+1)\right)!$$

استنتاج ۱۵.۱ را از ۱۴.۱ به‌یاد آورید.

۳۱۱. هنگامی که G عضوی حقیقی از مرتبهٔ بزرگتر از ۲ نداشته باشد یعنی وقتی $r = s + 1$، به‌طور ضمنی فرض می‌کنیم که اثبات ۷.۶ برقرار بماند. کل اثبات ۷.۶ را بررسی کرده نشان دهید که این اثبات نتیجهٔ دقیقتر زیر را در این حالت به‌دست می‌دهد:

فرض می‌کنیم G گروهی زوج‌مرتبه با دقیقاً n برگشت باشد و قرار می‌دهیم $a = |G|/n$. فرض می‌کنیم که $|Z(G)|$ فرد باشد و در G هیچ عضو حقیقی از مرتبهٔ بزرگتر از ۲ وجود نداشته باشد. در این صورت G یک زیرگروه حقیقی مانند H دارد به‌طوری که یا $|G : H| = 2$ یا $|G : H| < a$.

۳۱۲. (i) در گروه متناوب A_5 از درجهٔ ۵، درست ۱۵ برگشت وجود دارد.

(ii) فرض می‌کنیم G گروهی سادهٔ زوج‌مرتبه، از مرتبهٔ بزرگتر از ۲، و دارای n برگشت باشد. در این صورت $n < |G|/3$.

۳۱۳. فرض می‌کنیم G گروه ساده‌ای زوج‌مرتبه، از مرتبهٔ بزرگتر از ۲ باشد، و t را یک برگشت در G می‌گیریم. با استفاده از ۹.۶ نشان دهید $|C_G(t)| > 2$. (اشاره. یک نتیجهٔ قویتر از حکم اخیر را با روشهای دیگر در ۲۶۳ به‌دست آوردیم. ر.ک. ۲۸۷ (ii).)

یکی از جالبترین ویژگیهای اختصاصی گروههای زوج‌مرتبه این است که ساختار زیرگروههای تولیدشده بر اثر ۲ برگشت را می‌توان به‌طور دقیق مشخص کرد. در مورد زیرگروههای تولیدشده با اعضای بزرگتر از مرتبهٔ ۲ چیز قابل مقایسه‌ای وجود ندارد.

۱۰.۶ تعریف گروه D را از نوع دووجهی گوییم اگر ناآبلی باشد و مجموعه‌ای ۲مولدی چون $\{x,t\}$ داشته باشد به‌طوری‌که t یک برگشت باشد و $x^t = x^{-1}$.

توجه داشته باشید که به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant 3$، گروه دووجهی D_{2n} از مرتبهٔ $2n$ (که در ۲۴.۲ تعریف شد)، از نوع دووجهی است. اکنون به‌عکس نشان خواهیم داد که هر گروه متناهی از نوع دووجهی به‌ازای عدد صحیحی مانند $n \geqslant 3$ با D_{2n} یکریخت است. (بعلاوه توجه داشته باشید که گروه دووجهی نامتناهی D_∞ (۵۷) از نوع دووجهی است. به‌عکس، هر گروه نامتناهی از نوع دووجهی با D_∞ یکریخت است. ۳۱۴ را ببینید.)

۱۱.۶ D را یک گروه متناهی از نوع دووجهی می‌گیریم. در این صورت به‌ازای عدد صحیحی مانند $n \geqslant 3$، $D \cong D_{2n}$.

برهان بنابر تعریف، D ناآبلی است و اعضای $x, t \in D$ وجود دارند به‌طوری‌که $D = \langle x, t\rangle$، $o(t) = 2$ و $x^t = x^{-1}$. قرار می‌دهیم $o(x) = n$ و فرض می‌کنیم $X = \langle x \rangle$. چون D ناآبلی است $X < D$. از طرفی چون $D = \langle x, t\rangle$، و $x^t = x^{-1}$، واضح است که $X \trianglelefteq D$. به‌علاوه (بنابر ۱۰۸)

$$D/X = \langle xX, tX\rangle = \langle tX\rangle,$$

زیرا $x \in X$. چون $t \notin X$ اما $t^2 \in X$، در نتیجه $|D/X| = 2$. ازاین‌رو

$$|D| = 2|X| = 2n$$

و

$$D = \{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, t, xt, x^2t, \dots, x^{n-1}t\}.$$

چون D ناآبلی است، بنابر ۳۰.۴ (یا ۷۷)، $n \geqslant 3$.

حال قرار می‌دهیم $G = D_{2n}$، گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$. با نمادگذاری ۲۴.۲ داریم

$$G = \{1, \rho, \rho^2, \dots, \rho^{n-1}, \varepsilon, \rho\varepsilon, \rho^2\varepsilon, \cdots, \rho^{n-1}\varepsilon\},$$

که در آن $\rho^n = 1 = \varepsilon^2$ و $\rho^\varepsilon = \rho^{-1}$. اکنون به‌آسانی بررسی می‌شود که نگاشت

$$x^i t^j \mapsto \rho^i \varepsilon^j \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1)$$

یک یکریختی است از D بر روی G.

۱۲.۶ هر گروه D از نوع دووجهی می‌تواند با ۲ برگشت تولید شود.

برهان فرض می‌کنیم $D = \langle x, t\rangle$، که در آن t یک برگشت است و $x^t = x^{-1}$. در این صورت $D = \langle xt, t\rangle$، چرا که $x = (xt)t$. مسلماً $xt \neq 1$، زیرا D ناآبلی است، و

$$(xt)^2 = xx^t = 1.$$

لذا xt یک برگشت است.

نکتهٔ جالب توجه این است که عکس این حکم نیز صادق است. اثبات بسیار ساده است. (چرا؟)

۱۳.۶ قضیه فرض می‌کنیم D گروهی ناآبلی است که می‌تواند با ۲ برگشت تولید شود. در این صورت D از نوع دووجهی است.

برهان قرار می‌دهیم $D = \langle s, t\rangle$، که در آن $o(s) = 2 = o(t)$. در این صورت $D = \langle st, t\rangle$، چرا که $s = (st)t$. به‌علاوه

$$(st)^t = tst^2 = t^{-1}s^{-1} = (st)^{-1}.$$

ازاین‌رو D از نوع دووجهی است.

اشاره. هرگاه A گروهی آبلی باشد که بتواند با دو برگشت، مثلاً $A = \langle s, t\rangle$ تولید شود، که در آن $o(s) = 2 = o(t)$، آنگاه یا $s = t$ و $A = \langle s\rangle \cong C_2$ یا $s \neq t$ و

$$A = \{1, s, t, st\} \cong C_2 \times C_2.$$

۱۴.۶ فرع فرض می‌کنیم s و t برگشتهایی در G باشند. در این صورت یا s و t در G مزدوج‌اند، یا برگشتی مانند $u \in \langle s, t\rangle$ وجود دارد به‌طوری‌که u با هر دوی s و t جابه‌جایی‌پذیر است.

برهان قرار می‌دهیم $D = \langle s, t\rangle$. اگر D آبلی باشد، چیزی برای اثبات نداریم. پس فرض می‌کنیم که D ناآبلی باشد، در این صورت بنابر ۱۳.۶، D از نوع دووجهی است. قرار می‌دهیم $x = st$. چون G متناهی است، x مرتبهٔ متناهی، مثلاً n، دارد. مانند اثبات ۱۳.۶، $D = \langle x, t\rangle$ و $x^t = x^{-1}$ و مشابه اثبات ۱۱.۶، $|D| = 2n$. اگر n فرد باشد آنگاه $\langle s\rangle$ و $\langle t\rangle$، ۲ زیرگروه سیلو D هستند و بنابراین در D مزدوج‌اند. چون s و t به‌ترتیب تنها اعضای نابدیهی $\langle s\rangle$، $\langle t\rangle$ هستند، تزویج زیرگروههای $\langle s\rangle$، $\langle t\rangle$ تزویج اعضای s و t را ایجاب می‌کند.

حال فرض می‌کنیم که n زوج باشد و قرار می‌دهیم $u = x^{n/2}$. در این صورت $u \in D$ و $o(u) = 2$. چون

$$x^s = ts = x^{-1} \quad \text{و} \quad x^t = x^{-1},$$
$$(x^{n/2})^s = x^{-n/2} = (x^{n/2})^t,$$

یعنی،

$$u^s = u^{-1} = u = u^t.$$

لذا u با هر دوی s و t جابه‌جایی‌پذیر است.

ما این فرع را برای اثبات قضیهٔ زیر به‌کار می‌بریم

۱۵.۶ قضیه (ر. براوئر). فرض می‌کنیم G دست‌کم ۲ ردهٔ تزویجی از برگشتها دارد. t را برگشتی در G می‌گیریم به‌طوری‌که $|C_G(t)|$ تا حد ممکن بزرگ باشد. در این صورت

$$|G| < |C_G(t)|^3.$$

اشاره. البته این قضیه درصورتی‌که $|Z(G)|$ زوج باشد بدیهی است، زیرا در این صورت $C_G(t) = G$: اما اگر $|Z(G)|$ فرد باشد آنگاه $C_G(t) < G$.

برهان قرار می‌دهیم $|C_G(t)| = m$ و $|G : C_G(t)| = j$. در این صورت $|G| = mj$ و باید ثابت کنیم که $j < m^2$. بنابر فرض برگشتی مانند s در G وجود دارد که با t مزدوج نیست. فرض می‌کنیم

$$s = s_1, s_2, \dots, s_l,$$

برگشتهای متمایز $C_G(s)$ باشند. بنابر انتخاب t، به‌ازای هر $k = 1, \dots, l$،

$$|C_G(s_k)| \leqslant m.$$

به‌ویژه

$$l < |C_G(s)| \leqslant m.$$

ازاین‌رو تعداد اعضای متمایز نابدیهی در مجموعهٔ $\bigcup_{k=1}^{l} C_G(s_k)$ حداکثر برابر است با

$$\sum_{k=1}^{l} |C_G(s_k)| - 1 \leqslant lm - 1 < m^2.$$

بنابر ۲۶.۴، t دقیقاً j مزدوج متمایز در G دارد، مثلاً

$$t = t_1, t_2, \dots, t_j.$$

هر یک از این عضوها نابدیهی است و در نتیجه اگر ثابت کنیم که هر t_i در $\bigcup_{k=1}^{l} C_G(s_k)$ قرار دارد، نابرابری مطلوب یعنی $j < m^2$ نتیجه خواهد شد. چون هر t_i با t مزدوج است، اما t با s در G مزدوج نیست، t_i با s مزدوج نخواهد بود. ازاین‌رو بنابر ۱۴.۶، برگشتی مانند u_i در G وجود دارد که با هر دوی s و t_i جابه‌جایی‌پذیر است. لذا $u_i \in C_G(s)$ و بنابراین

$$u_i = s_k \quad \text{به‌ازای } k \text{ای که } 1 \leqslant k \leqslant l،$$

ازاین‌رو $t_i \in C_G(u_i) = C_G(s_k)$.

اشارات. نتیجهٔ ۱۵.۶، در حالت کلی برای یک گروه G با تنها یک ردهٔ تزویج از برگشتها برقرار نیست: ۳۱۸ را ببینید. ولی این درست است که به‌ازای گروه زوج‌مرتبهٔ دلخواه G از مرتبهٔ بزرگتر از ۲، یک زیرگروه حقیقیِ H از G وجود دارد به‌طوری‌که $|G| < |H|^3$: ۳۱۹ را ببینید. نتیجهٔ متناظری نیز برای گروههای فردمرتبه برقرار است. اگر K گروهی نابدیهیِ فردمرتبه باشد، و $|K|$ اول نباشد، آنگاه یک زیرگروه حقیقیِ L در K وجود دارد به‌طوری‌که $|K| < |L|^3$. در واقع، در این حالت حکم را می‌توان به صورت $|K| \leqslant |L|^2$ و حتی بیشتر به صورت $|K| < |L|^2$ اصلاح کرد مگر به‌ازای عدد اولی مانند p، $|K| = p^2$: ۵۰۳ و ۶۶۴ را ببینید. اما تنها اثباتهایی که برای این حقایق در مورد گروههای فردمرتبه می‌شناسیم، با استناد به قضیهٔ بسیار ژرف فایت‌ـتامپسن (۱۲.۱) صورت می‌گیرند. یافتن اثباتهایی مستقل از این قضیه جالب خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر راجع به گروههای زوج‌مرتبه به ر. براوئر ک. ا. فاولر [a۸] و فصل ۹ گورنشتاین [b۱۳] مراجعه کنید.

۳۱۴. فرض می‌کنیم D گروهی نامتناهی از نوع دووجهی باشد. در این صورت $D \cong D_\infty$. (۵۷ را ببینید. راهنمایی. مانند ۱۱.۶ استدلال کنید.)

۳۱۵. فرض می‌کنیم $G = A_5$ گروه متناوب از درجهٔ ۵ باشد. در این صورت عضوهای t، x و y در G وجود دارند به‌طوری‌که $o(t) = 2$ و $o(x) = 3 = o(y)$ و $G = \langle x, t\rangle = \langle x, y\rangle$. (ر.ک. ۱۳.۶ و ۱۷۹ راهنمایی. از ۲۵.۵ استفاده کنید.)

۳۱۶. فرض می‌کنیم که G دارای عضوی قویاً حقیقی از مرتبهٔ بزرگتر از ۲ نباشد. در این صورت مرتبهٔ همهٔ برگشتهای G مجموعهٔ جابه‌جایی‌پذیری از اعضا است. (راهنمایی. ۱۳.۶ را ببینید. اشاره. این نتیجه، عکس ۳۱۰ است.)

۳۱۷. T را یک ۲ زیرگروه سیلوی G می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $T \ntrianglelefteq G$ و درصورتی‌که $g \in G$ و $T^g \neq T$ آنگاه $T \cap T^g = 1$. در این صورت G تنها یک ردهٔ تزویجی شامل برگشتها دارد. (راهنمایی. از ۱۴.۶ استفاده کنید.)

۳۱۸. فرض می‌کنیم $G = D_{2n}$ گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$ باشد که در آن n یک عدد صحیح فرد است و $n \geqslant 3$. در این صورت

(i) G تنها یک ردهٔ تزویجی از برگشتها دارد. (رک. ۲۱۴)

(ii) فرض می‌کنیم t برگشتی در G باشد. در این صورت $C_G(t) = \langle t \rangle$. ازاین‌رو $|G| < |C_G(t)|^3$ اگر و تنها اگر $n = 3$.

(به‌علاوه توجه داشته باشید که $Z(G) = 1$: ۱۲۴ را ببینید، رک. ۱۵.۶)

۳۱۹. (الف) فرض کنید G تنها یک ردهٔ تزویجی از برگشتها دارد و $|Z(G)|$ فرد است. در این صورت یک عضو حقیقیِ $x \in G$ وجود دارد به‌طوری‌که $C_G(x) < G$ و $|G| < |C_G(t)|^3$. (راهنمایی. فرض کنید نمادگذاری مانند اثبات ۷.۶ باشد که در اینجا $s = 1$. تعریف کنید $m_1 = |C_G(x)|$، و اگر $r = 2$، $m = 0$، و اگر $r > 2$، $m = \max\{|C_G(x_i)| : i = 2, \ldots, r-1\}$. از ۱.۶، ۲.۶ و ۶.۶ استفاده کنید تا اینکه نشان دهید $n^2 \leqslant (m_1 - 1)n + (r-2)|G|$. با شمارش تعداد کل عضوهای حقیقی در G نشان دهید که $(r-2)|G| \leqslant m(|G| - 1 - n)$. از این دو نابرابری و این حقیقت که $|G| = m_1 n$، نتیجه بگیرید که $|G| < \max\{m_1^3, m^3\}$. بالاخره از ۴.۶ استفاده کنید.)

(ب) در مورد گروه دلخواه زوج مرتبهٔ G از مرتبهٔ زوج بزرگتر از ۲، یک زیرگروه حقیقیِ H وجود دارد به‌طوری‌که $|G| < |H|^3$. (راهنمایی. اثبات با استقرا بر $|G|$ است. اگر $|Z(G)|$ فرد باشد، از (الف) و ۱۵.۶ استفاده کنید. اگر $|Z(G)|$ زوج باشد، یک برگشت مانند $z \in Z(G)$ وجود خواهد داشت. سپس $\bar{G} = G/\langle z \rangle$ را در نظر بگیرید. اگر $|\bar{G}|$ زوج باشد، از فرض استقرا بر $\bar{G}$ استفاده کنید، و اگر $|\bar{G}|$ فرد باشد از ۲۰۵ و ۱۸۴).

۷

سریها

در این فصل نظریه‌ای را که در فصل ۳ برای ساختار نرمال گروه (جدا از ساختار حسابی مورد بحث در فصول ۴، ۵، ۶) معرفی کرده بودیم، بسط خواهیم داد. قضیهٔ ژوردان-هولدر، (۹.۱)، را ثابت و دو ردهٔ مهم از گروهها، ردهٔ گروههای پوچ‌توان و ردهٔ گروههای حل‌پذیر را معرفی خواهیم کرد.

گاهی مناسب به نظر می‌رسد که بنویسیم $H \geqslant G$، که همان معنی $H \leqslant G$ را دارد؛ و به‌همین‌نحو $H > G$ به‌جای $G < H$ و $H \trianglerighteq G$ به‌جای $G \trianglelefteq H$. همچنین با توجه به فصل ۱، خاطرنشان می‌کنیم که از نماد $K \lhd G$ به معنی 'K زیرگروه نرمال حقیقی G است' استفاده می‌کنیم.

۱.۷ تعاریف فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. همچنین فرض می‌کنیم یک دنبالهٔ متناهی $(H_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ از زیرگروههای G وجود دارد، به‌طوری‌که

$$H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1} \trianglelefteq H_n = G. \qquad \text{(الف)}$$

در این صورت (الف) را یک سری به طول n از H به G نامیم (درصورتی که بخواهیم این سری را به‌جای 'صعودی'، 'نزولی' تصور کنیم، ترجیحاً می‌گوییم از G به H). زیرگروههای

H_0، H_1، ...، H_n جملات این سری و گروههای خارج‌قسمتی H_i/H_{i-1} $(i = 1, \dots, n)$ عاملهای این سری نامیده می‌شوند. وقتی که به یک سری G (**بدون قید و شرط**) اشاره می‌کنیم، منظور یک سری از ۱ به G (یا از G به ۱) خواهد بود. (تذکر. **آنچه** در اینجا یک سری نامیده می‌شود، توسط بعضی از مؤلفان، برای مثال، مک‌دانلد [b۳۰]؛ یک 'سری نرمال' نامیده شده است. ولی ما نام اخیر را برای یک سری که هر جمله‌اش در گروه کلی نرمال باشد محفوظ نگه می‌داریم: ۳۳.۷ را ببینید.)

سری (الف) را حقیقی می‌نامیم هرگاه

$$H_{i-1} \lhd H_i \qquad \text{به‌ازای هر } i = 1, \dots, n$$

سری دیگر

$$H = J_0 \unlhd J_1 \unlhd \cdots \unlhd J_m = G \qquad \text{(ب)}$$

از H به G، یک تظریف (الف) نامیده می‌شود، اگر $n \leqslant m$ و اعداد صحیح نامنفی

$$j_0 < j_1 < \cdots < j_n \leqslant m$$

وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$H_i = J_{j_i} \qquad \text{به‌ازای } i = 0, 1, \dots, n$$

یعنی، اگر (الف) را بتوان از (ب) با حذف جملاتی از آن به‌دست آورد. سپس (ب) را یک تظریف حقیقی (الف) می‌خوانیم، اگر یک $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$H_i \neq J_j \qquad \text{به‌ازای } i = 0, 1, \dots, n$$

یک سری حقیقی G که هیچ تظریف حقیقی نداشته باشد، یک سری ترکیبی G نامیده می‌شود. عاملهای یک سری ترکیبی G، عاملهای ترکیبی G نامیده می‌شوند.

باید توجه داشت که هر گروه متناهی دارای یک سری ترکیبی است: ۸.۱ را ببینید. یک گروه نامتناهی لزوماً یک سری ترکیبی ندارد. برای مثال، گروه دوری نامتناهی $\mathbf{Z}^+$ ساده نیست و هر زیرگروه نابدیهی $\mathbf{Z}^+$ با $\mathbf{Z}^+$ یکریخت است (۲۵.۳)؛ بنابراین هر سری $\mathbf{Z}^+$ یک تظریف حقیقی دارد. از طرفی می‌دانیم که گروههایی نامتناهی وجود دارند که دارای سری ترکیبی هستند، زیرا می‌دانیم که گروههای سادهٔ نامتناهی وجود دارند: ۶۱.۳ و ۲۹۱ را ببینید.

۲.۷ (رک. ۱۰.۱). سری

$$1 = G_0 \unlhd G_1 \unlhd \cdots \unlhd G_n = G$$

از G یک سری ترکیبی G خواهد بود اگر و تنها اگر همهٔ عاملهای G_i/G_{i-1} $(i = 1, 2, \dots, n)$ ساده باشند.

برهان اگر سری مفروض یک سری ترکیبی G باشد، بنابر تعریف، یک سری حقیقی خواهد بود، و در نتیجه عاملهای G_i/G_{i-1} $(i = 1, \dots, n)$ جملگی نابدیهی‌اند. اگر عاملی مانند G_i/G_{i-1} ساده نباشد، این عامل یک زیرگروه نرمال نابدیهی حقیقی خواهد داشت؛ مثلاً H/G_{i-1}. اما در این صورت (بنابر ۳۰.۳) خواهیم داشت: $G_{i-1} \lhd H \lhd G_i$، و ازاین‌رو یک تظریف حقیقی از سری اولیه با درج H به‌عنوان یک جملهٔ خارجی بین G_{i-1} و G_i به‌دست خواهیم آورد. این با تعریف سری ترکیبی در تناقض است. بدین‌ترتیب عاملهای یک سری ترکیبی جملگی ساده‌اند.

از سویی، اگر سری مفروض یک سری ترکیبی نباشد، یا حقیقی نیست، که در این حالت یکی از عاملهایش بدیهی است و بنابراین ساده نیست، و یا حقیقی است و یک تظریف حقیقی مثل

$$1 = H_0 \unlhd H_1 \unlhd \cdots \unlhd H_m = G$$

دارد. در حالت دوم فرض می‌کنیم l بزرگترین عدد صحیح مثبتی باشد که برای آن H_l، با هیچ جمله‌ای از سری اولیه برابر نباشد. در این صورت $0 < l < m$ و به‌ازای عددی صحیح چون k، که $0 < k \leqslant m$، $H_{l+1} = G_k$. چون سری $(H_j)_{0 \leqslant j \leqslant m}$ یک تظریف $(G_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ است و به‌موجب انتخاب l خواهیم داشت

$$G_{k-1} < H_l \lhd H_{l+1} = G_k.$$

در این صورت بنابر ۳۰.۳، H_l/G_{k-1} یک زیرگروه نرمال نابدیهی حقیقی از G_k/G_{k-1} بوده و بنابراین عامل G_k/G_{k-1} ساده نیست.

۳۲۰. (i) گروه آبلی A یک سری ترکیبی دارد اگر و تنها اگر A متناهی باشد. (راهنمایی. از ۲.۷ استفاده کنید.)

(ii) هر زیرگروه گروهی که یک سری ترکیبی داشته باشد؛ لزوماً یک سری ترکیبی ندارد (۲۹۱ را ببینید.)

۳۲۱. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد.

(i) یک گروه دوری از مرتبهٔ p^n، فقط یک سری ترکیبی دارد.

(ii) حاصلضرب مستقیم n گروه از مرتبهٔ p، $\psi(p^n)$ سری ترکیبی متمایز دارد که در آن

$$\psi(p^n)=\frac{(p^n-1)(p^{n-1}-1)\cdots(p-1)}{(p-1)^n}.$$

۳۲۲. هر یک از گروههای Σ_3، A_4 و Σ_4، چند سری ترکیبی دارد؟

قضیهٔ مقدماتی زیر اغلب مفید واقع می‌شود.

۳.۷ (قاعدهٔ ددکیند[۱]) فرض می‌کنیم A، B و C زیرگروههایی از G باشند به‌طوری‌که $B\leqslant A$. در این صورت

$$A\cap(BC)=B(A\cap C).$$

(در اینجا نمی‌توانیم فرض کنیم که BC و $B(A\cap C)$ زیرگروههای G هستند.)

برهان محققاً $B(A\cap C)\subseteq A\cap(BC)$، زیرا $B\leqslant A$. فرض می‌کنیم $a\in A\cap(BC)$. در این صورت

به‌ازای $b\in B$ و $c\in C$، $a=bc$

پس $b^{-1}a=c\in A\cap C$ (زیرا $B\leqslant A$)

ازاین‌رو $a\in B(A\cap C)$

لذا $A\cap(BC)=B(A\cap C)$

در اثبات برخی از قضایای اصلی این فصل، به استنتاجهایی از ۴۰.۳ نیاز خواهیم داشت.

۴.۷ لم فرض می‌کنیم $B\trianglelefteq A\leqslant G$ و $C\leqslant G$. در این صورت

(i) $(B\cap C)\trianglelefteq(A\cap C)$ و $(A\cap C)/(B\cap C)\cong B(A\cap C)/B$.

(ii) اگر علاوه‌براین هرگاه $C\trianglelefteq G$، آنگاه $BC\trianglelefteq AC$ و $AC/BC\cong A/B(A\cap C)$.

برهان (i) چون $A\cap C\leqslant A$ و $B\trianglelefteq A$؛ می‌توانیم از ۴۰.۳ که در آن A به‌جای G، $A\cap C$ به‌جای H، و B به‌جای K، گذاشته شده استفاده کنیم. از اینجا نتیجه می‌شود

۱. Dedekind تلفظ صحیح آلمانی این نام دِدِکینت است. م.

$B\cap C=((A\cap C)\cap B)\trianglelefteq(A\cap C)$ و

$$(A\cap C)/(B\cap C)\cong(A\cap C)B/B=B(A\cap C)/B.$$

(ii) حال فرض می‌کنیم $C\trianglelefteq G$. بنابر ۳۸.۳؛ AC و BC زیرگروههای G هستند و بنابراین واضح است که $BC\leqslant AC$. چون A، B و C را به نرمال بدل می‌کند و C نیز هر زیرگروه G شامل C را به نرمال بدل می‌کند، نتیجه می‌شود که $BC\trianglelefteq AC$. محققاً $A\leqslant AC$. اکنون از ۴۰.۳ که در آن G به AC، H به A و K به BC بدل شده است، استفاده می‌کنیم. از اینجا نتیجه می‌شود که

$$A\cap(BC)\trianglelefteq A$$

و

$$A/(A\cap(BC))\cong A(BC)/BC.$$

اکنون با توجه به ۳.۷ و چون $A(BC)=AC$، لم نتیجه می‌شود.

۵.۷ لم (هـ. ی. زاسنهاوس [a۱۰۷]، ۱۹۳۴). فرض می‌کنیم $C_1\trianglelefteq A_1\leqslant G$ و $C_2\trianglelefteq A_2\leqslant G$. در این صورت

$$(A_1\cap C_2)C_1\trianglelefteq(A_1\cap A_2)C_1\quad,\quad(A_2\cap C_1)C_2\trianglelefteq(A_2\cap A_1)C_2$$

و

$$(A_1\cap A_2)C_1/(A_1\cap C_2)C_1\cong(A_2\cap A_1)C_2/(A_2\cap C_1)C_2.$$

برهان به‌موجب ۴۰.۳، داریم

$$A_1\cap C_2=((A_1\cap A_2)\cap C_2)\trianglelefteq(A_1\cap A_2),$$

و به‌طور مشابه

$$(A_2\cap C_1)\trianglelefteq(A_2\cap A_1)=A_1\cap A_2.$$

به‌موجب ۳۹.۳ فرض می‌کنیم

$$B = (A_۱ \cap C_۲)(A_۲ \cap C_۱) \trianglelefteq (A_۱ \cap A_۲).$$

اکنون به‌موجب ۴.۷ (ii) که در آن $A_۱$ به‌جای G گرفته شده است،

$$(A_۱ \cap C_۲)C_۱ = BC_۱ \trianglelefteq (A_۱ \cap A_۲)C_۱$$

و

$$(A_۱ \cap A_۲)C_۱/BC_۱ \cong (A_۱ \cap A_۲)/B(A_۱ \cap A_۲ \cap C_۱) = (A_۱ \cap A_۲)/B. \qquad \text{(i)}$$

به‌طور مشابه داریم

$$(A_۲ \cap C_۱)C_۲ = BC_۲ \trianglelefteq (A_۲ \cap A_۱)C_۲$$

و

$$(A_۲ \cap A_۱)C_۲/BC_۲ \cong (A_۲ \cap A_۱)/B. \qquad \text{(ii)}$$

حال یکریختی مطلوب از (i) و (ii) نتیجه می‌شود.

۳۲۳. فرض می‌کنیم $G = HK$، که در آن $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت

(i) $\{V : K \leqslant V \leqslant G\} = \{JK : J \leqslant H\}$

(ii) هر زیرگروه G/K با یک گروه خارج‌قسمتی از زیرگروه H یکریخت است.

***۳۲۴.** یک بخش از G، یک گروه A/B است اگر $B \trianglelefteq A \leqslant G$. یک زیرگروه C از G یک بخش A/B از G را می‌پوشاند، اگر $A \subseteq BC$، و C از A/B دور می‌شود اگر $A \cap C \leqslant B$.

فرض می‌کنیم A/B یک بخش از G باشد و $C \leqslant G$. در این صورت

(i) C هم A/B را می‌پوشاند و هم از آن دور می‌شود اگر و تنها اگر $A = B$.

(ii) هرگاه C، A/B را بپوشاند، آنگاه $(A \cap C)/(B \cap C) \cong A/B$، درحالی‌که اگر C از A/B دور شود، $(A \cap C)/(B \cap C)$ بدیهی است.

(iii) فرض می‌کنیم $C \trianglelefteq G$. هرگاه C، A/B را بپوشاند، AC/BC بدیهی است، درحالی‌که اگر C از A/B دور شود، $AC/BC \cong A/B$.

(iv) هرگاه $C \trianglelefteq G$ و A/B ساده باشد، آنگاه C، یا A/B را می‌پوشاند و یا از آن دور می‌شود.

۳۲۵. فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$، و G دارای یک سری ترکیبی باشد. در این صورت (۳۲۴ را ببینید)

(i) K یک سری ترکیبی دارد که در آن هر عامل، با یک عامل ترکیبی G که توسط K پوشانده می‌شود، یکریخت است. (ر.ک. ۳۲۰ (ii)) به‌علاوه، هر عامل ترکیبی G که توسط K پوشانده شود با یک عامل ترکیبی K یکریخت است.

(ii) G/K یک سری ترکیبی دارد، که در آن هر عامل با یک عامل ترکیبی G، که توسط K دور می‌شود یکریخت است. به‌علاوه هر عامل ترکیبی G، که توسط K دور شود، با یک عامل ترکیبی G/K یکریخت است.

۶.۷ تعریف دو سری G، مثلاً

$$۱ = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

و

$$۱ = H_۰ \trianglelefteq H_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G,$$

هم‌ارز گفته می‌شوند، اگر $m = n$، و یک جایگشت π از مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots n$ داشته باشیم

$$G_i/G_{i-۱} \cong H_{i\pi}/H_{i\pi-۱}.$$

روشن است که این رابطه معرف یک رابطهٔ هم‌ارزی بر مجموعهٔ سریهای G است.

به شکلی که در ۹.۱ بیان شده قضیهٔ ژوردان‌ـهولدر مدعی است که هر دو سری ترکیبی یک گروه متناهی هم‌ارزند. پیش از اینکه قضیه را در شکل نسبتاً کلیتری اثبات کنیم، ابتدا یک نتیجهٔ بنیادی و عمومی در مورد سریها را اثبات می‌کنیم، که در ۱۹۲۸ توسط شرایر ثابت شده است.

۷.۷ قضیه (اُ. شرایر [a۸۸]). هر دو سریِ G، دارای تظریفهای هم‌ارزند.

برهان دو سری از G، مثلاً

(الف) $$۱ = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

و

(ب) $$۱ = H_۰ \trianglelefteq H_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G$$

را در نظر می‌گیریم. یک تظریف (الف) را به این طریق می‌سازیم که $m-1$ زیرگروه G_{ij} $(j=1,\dots,m-1)$ را بین G_{i-1} و G_i به‌ازای هر $i=1,\dots,n$ درج می‌کنیم، و نیز یک تظریف از (ب)، با درج $n-1$ زیرگروه H_{ij} $(i=1,\dots,n-1)$ بین H_{j-1} و H_j به‌ازای هر $j=1,\dots,m$، می‌سازیم. در این صورت هر دو این تظریفها دارای mn عامل‌اند

$$1=G_0 \trianglelefteq G_{11} \trianglelefteq G_{12} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{1,m-1} \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_{21} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq F_{n,m-1} \trianglelefteq G_n=G$$
(ج)

و

$$1=H_0 \trianglelefteq H_{11} \trianglelefteq H_{21} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1,1} \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq H_{12} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1,m} \trianglelefteq H_m=G$$
(د)

حال ترتیبی می‌دهیم که (ج) و (د) هم‌ارز باشند.

برای این منظور به‌ازای هر $i=1,\dots,n$ و به‌ازای هر $j=1,\dots,m$ تعریف می‌کنیم

$$G_{ij}=(G_i\cap H_j)G_{i-1}$$

و

$$H_{ij}=(H_j\cap G_i)H_{j-1}.$$

ملاحظه می‌کنیم که بنابر ۳.۸.۳، G_{ij} و H_{ij} زیرگروههای Gاند، زیرا، برای مثال، $G_i\cap H_j\leqslant G_i$ و $G_{i-1}\trianglelefteq G_i$. همین‌طور ملاحظه می‌کنیم که

$$G_{im}=G_i \quad \text{و} \quad H_{nj}=H_j.$$

به‌ازای $i=1,\dots,n$ و $j=1,\dots,m$،

$$G_{i-1}\leqslant G_{i1}\leqslant G_{i2}\leqslant\cdots\leqslant G_{im}=G_i$$

و

$$H_{j-1}\leqslant H_{1j}\leqslant H_{2j}\leqslant\cdots\leqslant H_{nj}=H_j.$$

همچنین مناسب است که قرار دهیم

$$G_{i0}=G_{i-1}=(G_i\cap H_0)G_{i-1} \quad \text{و} \quad H_{0j}=H_{j-1}=(H_j\cap G_0)H_{j-1}.$$

اکنون از ۵.۷ با انتخاب

$$C_1=G_{i-1},\quad A_1=G_i,\quad C_2=H_{j-1},\quad A_2=H_j$$

استفاده می‌کنیم. سپس از ۵.۷ نتیجه می‌شود

$$G_{i,j-1}\trianglelefteq G_{ij},\quad H_{i-1,j}\trianglelefteq H_{ij}$$

و

$$G_{ij}/G_{i,j-1}\cong H_{ij}/H_{i-1,j}. \tag{†}$$

بدین‌ترتیب با توجه به تعاریف G_{ij} و H_{ij}، سریهای (ج) و (د) از G پیدا می‌شوند، و روشن است که این سریها به‌ترتیب تظریفهایی از (الف) و (ب) هستند. به‌علاوه، یکریختی (†) (که به‌ازای هر $i=1,\dots,n$ و $j=1,\dots,m$ برقرار است) نشان می‌دهد که (ج) و (د) سریهای هم‌ارزند.

حال به قضیهٔ زیر می‌پردازیم

۸.۷ هر سری از G که با یک سری ترکیبی از G هم‌ارز باشد؛ خود نیز یک سری ترکیبی از G است.

برهان این حکم بلافاصله از تعاریف 'هم‌ارزی' و 'سری ترکیبی' و نیز با درنظرگرفتن ۲.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ زیر که شامل نتیجهٔ بنیادی در سریهای ترکیبی است تا اندازه‌ای توسط ژوردان در ۱۸۶۹ و به‌طور کامل برای گروههای متناهی توسط هولدر در ۱۸۸۹ ثابت شده است.

۹.۷ قضیه فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی باشد.

(i) هر سری حقیقی از G دارای یک تظریف است که آن تظریف یک سری ترکیبی از G است.

(ii) (ک. ژوردان [a۶۶]، اُ. هولدر [a۵۹]؛ رک. ۹.۱) هر دو سری ترکیبی از G هم‌ارزند.

برهان یک سری حقیقیِ (a) و یک سری ترکیبیِ (c) از G را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه شرایر، ۷.۷، این دو سری به‌ترتیب دارای تظریفهای هم‌ارزی مانند (a*) و (c*) هستند. اکنون اگر از (a*) و (c*) عاملهای بدیهی را کنار بگذاریم، یعنی جملات تکراری را حذف کنیم، دو سری حقیقی هم‌ارز به‌ترتیب مانند (a′) و (c′) به‌دست می‌آوریم. چون (a) و (c) بنابر فرض سریهای حقیقی‌اند، (a′) و (c′) به‌ترتیب تظریفهای (a) و (c) هستند؛ و چون (c′) یک سری حقیقی است، و بنابر فرض (c) هیچ تظریف حقیقی ندارد، پس (c′) باید بر (c) منطبق باشد. بدین‌ترتیب (a′) با یک سری ترکیبی از G هم‌ارز است، ازاین‌رو بنابر (۸.۷)، (a′) خود نیز یک سری ترکیبی از G است. این اثبات (i) را تمام می‌کند.

اگر (a) نیز یک سری ترکیبی از G باشد، با استدلالی مشابه (a′) باید بر (a) منطبق باشد. در این صورت (a) و (c) هم‌ارزند. که به‌این‌ترتیب (ii) نیز ثابت می‌شود.

۱۰.۷ تعریف فرض می‌کنیم که G یک سری ترکیبی داشته باشد. در این صورت به‌ویژه از (۹.۷) (ii) نتیجه می‌شود که هر دو سری ترکیبی G، یک تعداد، مثلاً n عامل دارند. ما n را طول ترکیبی G می‌نامیم.

۳۲۶. فرض می‌کنیم که p و q اعداد اول متمایزی باشند. تظریفهای هم‌ارز دو سری زیر از $\mathbf{Z}^+$ را بیابید

$$0 \lhd p\mathbf{Z}^+ \lhd \mathbf{Z}^+ \quad \text{و} \quad 0 \lhd q\mathbf{Z}^+ \lhd \mathbf{Z}^+.$$

(توجه داشته باشید که در قضیهٔ شرایر ۷.۷ به این فرض که G یک سری ترکیبی دارد، نیازی نیست.)

۳۲۷. (i) هر عامل ترکیبی از یک گروه آبلی متناهی، دارای مرتبهٔ اول است.

(ii) هر عامل ترکیبی از یک p گروه متناهی، دارای مرتبهٔ p است.

۳۲۸. (i) هر گروه آبلی از مرتبهٔ $\prod_{j=1}^{s} p_j^{m_j}$ دارای طول ترکیبی $\sum_{j=1}^{s} m_j$ است (که در آن s، m_1، ...، m_s اعداد صحیح مثبت و p_1، ...، p_s اعداد اول متمایزند).

(ii) هرگروه از مرتبهٔ p^n دارای طول ترکیبی n است (که در آن n یک عدد صحیح مثبت است.)

(iii) مثالی از یک گروه متناهیِ G ارائه دهید که طول ترکیبی‌اش با حاصل جمع توانهای اعداد اول متمایز واقع در تجزیهٔ $|G|$، به صورت حاصلضربی از توانهای اعداد اول، برابر نباشد.

۳۲۹. فرض می‌کنیم که G یک سری ترکیبی دارد و طول ترکیبی G برابر با ۲ است. ثابت کنید که G یا فقط یک سری ترکیبی دارد و یا با حاصلضرب مستقیمی ازگروههای ساده یکریخت است.

نشان دهید که هیچ کران بالایی برای تعداد سریهای ترکیبی متمایزی که G می‌تواند داشته باشد، وجود ندارد.

ثابت شده است که تعمیم زیر از مفهوم زیرگروه نرمال، از اهمیت زیادی برخوردار است.

۱۱.۷ تعریف فرض می‌کنیم که $H \leqslant G$. می‌گوییم H زیرگروه زیرنرمال G است، اگر یک سری از H به G وجود داشته باشد.

مسلماً هر زیرگروه نرمال G یک زیرگروه زیرنرمال است؛ عکس این مطلب در حالت کلی صادق نیست که با ۱۴.۳ نشان داده شده است. در واقع تعریف حالت زیرنرمالی، دقیقاً به منظور رفع نقص رابطهٔ ترایایی نداشتنِ حالت نرمال ساخته شده است. بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شود که حالت زیرنرمالی، ترایاست.

۱۲.۷ فرض می‌کنیم که $K \leqslant H \leqslant G$. هرگاه K در H زیرنرمال و H در G زیرنرمال باشد آنگاه K در G زیرنرمال است.

روشن است که هر جمله از یک سری G، باید جمله‌ای از یک سری حقیقی G باشد. با درنظرگرفتن ۹.۷ (i) خواهیم داشت

۱۳.۷ فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و نیز G یک سری ترکیبی داشته باشد. در این صورت H در G زیرنرمال است اگر و تنها اگر H جمله‌ای از یک سری ترکیبی G باشد.

حال نتیجهٔ زیر از ۶.۵، را مورد توجه قرار می‌دهیم

۱۴.۷ فرض می‌کنیم G، p گروهی متناهی باشد. در این صورت هر زیرگروه G در G زیرنرمال است.

برهان فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. با استقرا بر $|G:H|$، ثابت می‌کنیم که H در G زیرنرمال است. اگر $|G:H| = 1$ آنگاه $H = G$ و حکم بدیهی است. بنابراین فرض می‌کنیم که $|G:H| > 1$، و به استقرا چنین می‌انگاریم که وقتی $K \leqslant G$ و $|G:K| < |G:H|$، K در G زیرنرمال باشد. در این صورت $H < G$ و در نتیجه بنابر ۶.۵، $H < N_G(H) \leqslant G$. ازاین‌رو $|G:N_G(H)| < |G:H|$ و در نتیجه به موجب فرض استقرا $N_G(H)$ در G زیرنرمال است. چون $H \lhd N_G(H)$، نتیجه می‌شود که H در G زیرنرمال است و اثبات به استقرا کامل می‌شود.

نخستین بسط نظام‌مند نظریهٔ زیرگروههای زیرنرمال، به‌وسیلهٔ هـ. ویلانت [a۱۰۰] انجام شد. ما تعدادی از قضایای وی را در اینجا می‌گنجانیم.

۱۵.۷ (رک. ۴۰.۳) فرض می‌کنیم $H,K \leqslant G$. هرگاه K در G زیرنرمال باشد، آنگاه $H\cap K$ در H زیرنرمال است.

برهان بنابه فرض، زیرگروههای K_i $(i=0,1,\dots,n)$ از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$K = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m = G.$$

در این صورت مسلماً

$$H\cap K = H\cap K_0 \leqslant H\cap K_1 \leqslant\cdots\leqslant H\cap K_n = H.$$

به‌علاوه به‌ازای $i=1,\dots,n$

$$H\cap K_{i-1} = ((H\cap K_i)\cap K_{i-1}) \trianglelefteq (H\cap K_i),$$

زیرا $K_{i-1}\trianglelefteq K_i$. بنابراین $H\cap K$ در H زیرنرمال است.

۱۶.۷ فرض می‌کنیم $K\leqslant H\leqslant G$. اگر K در G زیرنرمال باشد، K در H زیرنرمال است.

برهان حکم بلافاصله از ۱۵.۷ نتیجه می‌شود.

۱۷.۷ فرض می‌کنیم $K,H \leqslant G$. اگر H و K هر دو در G زیرنرمال باشند در این صورت $H\cap K$ در G زیرنرمال است.

برهان حکم بلافاصله از ۱۵.۷ و ۱۲.۷ نتیجه می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که هرگاه $H\leqslant G$ و $K\trianglelefteq G$ آنگاه $HK\leqslant G$ (۳۸.۳)؛ و در این صورت بدیهی است که $HK=\langle H,K\rangle$ (۷۱ و ۹۵ را ببینید). اکنون با یک مثال نشان می‌دهیم که وقتی H و K زیرگروههای زیرنرمال G باشند، HK لزوماً یک زیرگروه G نیست.

۱۸.۷ فرض می‌کنیم، n یک عدد صحیح باشد، $n\geqslant 3$ و $G=D_{2^n}$، گروه دووجهی از مرتبهٔ 2^n. بنابر ۱۲.۶ برگشتهایی مانند h و k در G وجود دارند به‌طوری‌که $G=\langle h,k\rangle$.

قرار می‌دهیم $H=\langle h\rangle \leqslant G$ و $K=\langle k\rangle\leqslant G$. در این صورت $|H|=|K|=2$ و $HK: HK=\{1,h,k,hk\}$ زیرگروه G نیست، زیرا کوچکترین زیرگروه G شامل هم H و هم K، خود G است و $|G|=2^n\geqslant 8$. از طرفی بنابه ۱۴.۷؛ H و K هر دو در G زیرنرمال‌اند.

ولی ما حکمی نظیر ۳۹.۳ را ثابت می‌کنیم بدین‌طریق که نشان می‌دهیم هرگاه H و K زیرگروههای زیرنرمال گروه G با یک سری ترکیبی باشند، آنگاه $\langle H,K\rangle$ در G زیرنرمال است. اثبات را با یک حالت خاص شروع می‌کنیم، حالتی که برای آن فرض دارابودن یک سری ترکیبی برای G، ضروری نیست.

۱۹.۷ لم هرگاه H یک زیرگروه زیرنرمال G باشد و $K\trianglelefteq G$، آنگاه HK در G زیرنرمال است.

برهان بنابه فرض؛ یک سریِ

$$H=H_0\trianglelefteq H_1 \trianglelefteq\cdots\trianglelefteq H_n=G$$

از H به G وجود دارد. در این صورت، بنابر ۴.۷ (ii)،

$$HK=H_0K\trianglelefteq H_1K\trianglelefteq\cdots\trianglelefteq H_nK=G.$$

این، یک سری از HK به G است. بنابراین HK در G زیرنرمال است.

*۳۳۰. فرض می‌کنیم $H<G$. همچنین فرض می‌کنیم که G یک سری ترکیبی دارد و H در G زیرنرمال است. در این صورت H دارای یک سری ترکیبی است. به‌علاوه اگر G دارای طول ترکیبی n باشد و H دارای طول ترکیبی m، آنگاه $m<n$. (رک. ۳۲۰ (ii).)

۳۳۱. فرض می‌کنیم $H\leqslant G$.

(i) دنبالهٔ زیر از زیرگروههای G را در نظر می‌گیریم:

$$G=J_0\geqslant J_1\geqslant J_2\geqslant\cdots,$$

که در آن به‌ازای هر عدد صحیح $i>0$،

$$J_i = H^{J_{i-1}},$$

بستار نرمال H در J_{i-1} است (۱۸۰ را ببینید.) در این صورت H در G زیرنرمال است اگر و تنها اگر یک عدد صحیح نامنفیِ n وجود داشته باشد به‌طوری‌که $J_n=H$.

اگر H در G زیرنرمال باشد و n کوچکترین عدد صحیح، به‌طوری‌که $J_n = H$، آنگاه

$$G = J_0 \trianglerighteq J_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq J_n = H$$

سری استانده از G به H نامیده می‌شود.

(ii) فرض می‌کنیم که H در G زیرنرمال باشد. کاستی (یا شاخص زیرنرمالی) H در G کوچکترین عدد صحیح نامنفی n تعریف می‌شود که برای آن یک سری به طول n از H به G وجود داشته باشد. پس کاستی H در G برابر است با طول سری استانده از G به H.

(iii) فرض می‌کنیم که H در G زیرنرمال باشد و $H \leqslant L \leqslant G$. در این صورت کاستی H در L، از کاستی H در G بزرگتر نیست.

۳۳۲. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 2$، و فرض می‌کنیم $G = D_{2^{n+1}}$، گروه دووجهی از مرتبهٔ 2^{n+1} باشد. در این صورت اعضای $x, t \in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $G = \langle x, t\rangle$، $x^{2^n} = 1 = t^2$ و $x^t = x^{-1}$: ۲۴.۲، ۱۰.۶ و ۱۱.۶ را ببینید. گیریم $H = \langle t\rangle$. بنابر ۱۴.۷، H در G زیرنرمال است.

فرض می‌کنیم $J = H^G$، بستار نرمال H در G است. ثابت کنید که $J = \langle x^2, t\rangle$. ازاین‌رو ثابت کنید که کاستی H در G، برابر است با n. (۳۳۱ را ببینید).

۳۳۳. فرض می‌کنیم $G = \Sigma_4$. زیرگروه زیرنرمال H از G را طوری بیابید که $N_G(H)$ یک ۲ زیرگروه سیلوی G باشد.

(اشاره. توجه می‌کنیم که $N_G(N_G(H)) = N_G(H)$. این مثال نشان می‌دهد که برای $H \leqslant G$، دنبالهٔ صعودیِ زیرگروههای G که از H با گرفتن نرمال‌سازهای متوالی در G تشکیل شده است، لزوماً به G نمی‌رسد، ولو اینکه H در G زیرنرمال باشد: رک. ۳۳۱. راهنمایی. ۲۸۹ را ببینید.).

۳۳۴. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت H در G، هم نرمال‌گرا است و هم زیرنرمال، اگر و تنها اگر $H \trianglelefteq G$. به‌ویژه، هرگاه G متناهی و H یک زیرگروه سیلوی نرمال G باشد، آنگاه $H \trianglelefteq G$. (۲۶۸ را ببینید. راهنمایی. با استقرا بر طول یک سری از H به G استدلال کنید.)

***۳۳۵.** فرض می‌کنیم H یک زیرگروه زیرنرمال G باشد. در این صورت به‌ازای هر همریختی φ از G به روی یک گروه مانند $\bar{G}$، $H\varphi$ یک زیرگروه زیرنرمال $\bar{G}$ است. به‌ویژه به‌ازای هر $g \in G$، H^g در G زیرنرمال است.

۳۳۶. فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ رده‌هایی از گروهها با دو ویژگی زیر باشند.

(i) هر زیرگروه نرمال از هر $\mathfrak{X}$ گروه یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد.

(ii) هر $\mathfrak{X}$ گروه دارای یک $\mathfrak{Y}$ رادیکال باشد. (۴۵.۳ را ببینید.)

در این صورت اگر G یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد، هر $\mathfrak{Y}$ زیرگروه زیرنرمال H از G در $\mathfrak{Y}$ رادیکال G قرار دارد.

به‌ویژه، اگر G یک گروه متناهی دلخواه باشد، هر ϖ زیرگروه زیرنرمال G در $O\varpi(G)$ قرار دارد. (راهنمایی. با استقرا بر روی طول یک سری از H به G استدلال کنید و از ۱۶۰ استفاده کنید.)

۳۳۷. فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ رده‌هایی از گروهها با سه ویژگی زیر باشند

(i) هر زیرگروه نرمال از هر $\mathfrak{X}$ گروه یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد.

(ii) هر $\mathfrak{X}$ گروه دارای یک $\mathfrak{Y}$ مانده باشد. (۴۵.۳ را ببینید.)

(iii) هرگاه $J \trianglelefteq G$، و J و G/J هر دو $\mathfrak{Y}$ گروه باشند، G نیز یک $\mathfrak{Y}$ گروه باشد.

فرض می‌کنیم G یک $\mathfrak{X}$ گروه و G/K، $\mathfrak{Y}$ ماندهٔ G باشد، همچنین H یک زیرگروه زیرنرمال G باشد به‌طوری‌که یک سری از H به G وجود داشته باشد، که عاملهایش همه $\mathfrak{Y}$ گروه باشند. در این صورت $K \leqslant H$.

به‌ویژه، اگر H یک زیرگروه زیرنرمال گروه متناهی G باشد به‌طوری‌که یک سری از H به G وجود داشته باشد که تمام عاملهایش ϖ گروه باشند، آنگاه $O_\varpi(G) \leqslant H$. (۱۶۰ را ببینید.)

به منظور اثبات نتیجهٔ کلی، بهتر است به یک زیرگروه زیرنرمال H در گروه G با یک سری ترکیبی، یک عدد صحیح نامنفی $j(G:H)$ را، که هم‌اکنون تعریف می‌کنیم، وابسته سازیم.

۲۰.۷ تعریف فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، و همچنین G دارای یک سری ترکیبی است و H در G زیرنرمال. در این صورت H یک جمله از یک سری ترکیبی G است (۱۳.۷). فرض می‌کنیم

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G \qquad \text{(الف)}$$

یک سری ترکیبی از G باشد، که H یک جملهٔ آن است: مثلاً

$$G_k = H,$$

که $0 \leqslant k \leqslant n$.

اکنون یک سری ترکیبی دیگر از G را در نظر می‌گیریم که H یک جملهٔ آن نیز باشد. فرض می‌کنیم یک قسمت این سری از H به G به صورت زیر باشد

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_m = G.$$

پس بنابر ۲.۷، سری

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_k \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_m = G \qquad \text{(ب)}$$

نیز یک سری ترکیبی G است. ازاین‌رو بنابر قضیهٔ ژوردان-هولدر، (۹.۷)، سریهای (الف) و (ب) هم‌ارزند. به‌ویژه،

$$n = k + m.$$

اکنون تعریف می‌کنیم $j(G:H) = n-k$. به عبارت دیگر، $j(G:H)$ همان تعداد عاملهای ترکیبی بالای H در هر سری ترکیبی دلخواهی از G است که H یک جملهٔ آن است. استدلال فوق نشان می‌دهد که این، خوشتعریف است. توجه کنید که $j(G:1)$ طول ترکیبی G است.

ویژگیهای زیر بلافاصله از تعریف به همراه ۱۶.۷ و ۹.۷ (i) نتیجه می‌شوند. (همین‌طور ۳۳۰ را ببینید.)

۲۱.۷ فرض می‌کنیم $K \leqslant H \leqslant G$. همچنین فرض می‌کنیم G دارای یک سری ترکیبی است و H, K در G زیرنرمال هستند. در این صورت

$$j(G:K) = j(G:H) + j(H:K), \qquad \text{(i)}$$

$$j(G:H) = 0 \ \text{اگر و تنها اگر}\ H = G \qquad \text{(ii)}$$

۲۲.۷ قضیه (ه. ویلانت [a۱۰۰]). فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی باشد. اگر H و K زیرگروههای زیرنرمال G باشند، $\langle H,K\rangle$ در G زیرنرمال است.

برهان اثبات با استقرا روی مثلاً $j(G:K) = n$ صورت می‌گیرد.

اگر $K \trianglelefteq G$ آنگاه $\langle H,K\rangle = HK$ و حکم در لم ۱۹.۷ ثابت شده است. به‌ویژه اگر $n \leqslant 1$، این لم حکم را به‌دست می‌دهد.

اکنون فرض می‌کنیم که $K \ntrianglelefteq G$. در این صورت $n > 1$. یک سری مانند

$$K = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_{n-1} \lhd K_n = G$$

از K به G وجود دارد، که قسمتی از یک سری ترکیبی G است. فرض می‌کنیم $G_1 = \langle H, K_1\rangle$. بنابر ۲۱.۷؛ $j(G:K_1) = n-1$ و در نتیجه بنابر فرض استقرا G_1 در G زیرنرمال است. ازاین‌رو G_1 دارای یک سری ترکیبی است (۳۳۰). بنابر ۱۶.۷، H و K زیرگروههای زیرنرمال G_1اند.

اگر $G_1 < G$، بنابر ۲۱.۷، $j(G_1:K) < n$. پس مطابق فرض استقرا، $\langle H,K\rangle$ در G_1 زیرنرمال است؛ ازاین‌رو به موجب ۱۲.۷، $\langle H,K\rangle$ در G نیز زیرنرمال است.

اکنون فرض می‌کنیم که $G_1 = G$. اگر

$$K^h \leqslant K \qquad \text{به‌ازای هر}\ h \in H$$

آنگاه در واقع

$$K^h = K \qquad \text{به‌ازای هر}\ h \in H$$

۱۷۵ یا ۲۴.۷ (ii) را ببینید.

پس

$$N_G(K) \geqslant \langle H, K_1\rangle = G.$$

این رابطه با فرض $K \ntrianglelefteq G$ در تناقض است.

بنابراین

$$K^h \nleqslant K \qquad \text{برای}\ h \in H\ \text{ی}$$

قرار می‌دهیم

$$K^* = \langle K, K^h\rangle > K.$$

اما K^h در G زیرنرمال است (۳۳۵). به‌علاوه

$$K^h \leqslant K^h_{n-1} = K_{n-1}$$

زیرا $K_{n-1} \lhd G$، و همین‌طور، بنابر ۱۶.۷، K^h در K_{n-1} زیرنرمال است. محققاً K_{n-1} دارای یک سری ترکیبی است (۳۳۰). چون $j(K_{n-1}:K) = n-1$؛ بنابر فرض استقرا نتیجه می‌شود که K^* در K_{n-1} زیرنرمال است. ازاین‌رو K^* در G نیز زیرنرمال خواهد بود. از آنجایی‌که $K^* > K$، به‌موجب ۲۱.۷ نتیجه می‌شود که $j(G:K^*) < n$. لذا، بنابر فرض استقرا $\langle H,K^*\rangle$ در G زیرنرمال است. ولی $K^h \leqslant \langle H,K\rangle$ و در نتیجه

$$\langle H,K^*\rangle = \langle H,K,K^h\rangle = \langle H,K\rangle,$$

که اثبات به استقرا را کامل می‌کند.

اشاره. بدون این شرط که G دارای یک سری ترکیبی است، قضیهٔ اخیر برقرار نخواهد بود. زاسنهاوس

مثالی از یک گروه با زیرگروههای زیرنرمال H و K ارائه داده است، به‌طوری‌که $\langle H,K\rangle$ در G زیرنرمال نیست ([b۴۱] ص ۲۳۵، مثال ۲۳). همین‌طور ۳۴۵ را ببینید.

۳۳۸. فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای زیرنرمال یک گروه متناهی G باشند. هرگاه $(|H|,|K|)=1$، آنگاه $\langle H,K\rangle = HK \cong H\times K$. (ر.ک. ۱۸.۷. راهنمایی. از ۳۳۶، ۵۳.۳ و ۵۴.۳ استفاده کنید.)

۳۳۹. (i) فرض می‌کنیم $H,K \leqslant G$، که G یک گروه متناهی است و $\langle H,K\rangle = G$. فرض می‌کنیم که K در G زیرنرمال باشد و مرتبهٔ هر عامل ترکیبی G، بالای K عدد اول باشد. در این صورت

$$j(H:H\cap K)\leqslant j(G:K).$$

(ر.ک. ۱۵.۷. اشاره. در حالت کلی، اگر مرتبهٔ هر عامل ترکیبی G، بالای K، عدد اول نباشد این نابرابری برقرار نخواهد بود. برای یک مثال ۵۳۲ را ببینید.)

(ii) با یک مثال نشان دهید که به‌ازای هر عدد صحیح $n>1$، ممکن است که همهٔ شرایط (i) برقرار باشند و داشته باشیم: $j(H:H\cap K)=1$ و $j(G:K)=n$.

ما این گزیده از قضیه‌ها را با اثبات قضیه‌ای مشابه با جزء یکریختی قضیه ۴۰.۳ به پایان می‌بریم. آنچه نشان خواهیم داد، این است که اگر H و K زیرگروههای زیرنرمال G باشند و G یک سری ترکیبی داشته باشد، آنگاه مجموعهٔ انواع عاملهای ترکیبی G بین $H\cap K$ و H با مجموعهٔ انواع عاملهای ترکیبی G بین K و $\langle H,K\rangle$ یکی است.

۲۳.۷ تعریف فرض می‌کنیم که G یک سری ترکیبی دارد و H یک زیرگروه زیرنرمال G است. در این صورت H جمله‌ای است از یک سری ترکیبی G (۱۳.۷). مجموعهٔ عاملهای ترکیبی G بالای H را که در آن عاملهای همنوع یکی گرفته می‌شوند با $\mathscr{K}(G,H)$ نمایش می‌دهیم. به‌این‌ترتیب $\mathscr{K}(G,H)$ مجموعهٔ گروههای سادهٔ دوبه‌دو نایکریخت است؛ در این مجموعه درجهٔ تکرار وقوع یک گروه سادهٔ خاص در یک سری ترکیبی G به حساب نمی‌آید.

با بحثی مشابه با آنچه که در ۲۰.۷ برای توجیه تعریف $j(G:H)$ به‌کار رفت، نشان داده می‌شود که $\mathscr{K}(G,H)$ با عاملهای واقع در هر سری ترکیبی خاص G که H را در بردارد مشخص می‌شود.

اگر علاوه‌براین K زیرگروه زیرنرمال G هم باشد که $K\leqslant H$، آنگاه بنابر ۱۶.۷ و ۹.۷ (i)،

یک سری ترکیبی از G وجود دارد که هم H و هم K را در بردارد و در این صورت روشن است که

$$\mathscr{K}(G,K)=\mathscr{K}(G,H)\cup\mathscr{K}(H,K).$$

داریم $\mathscr{K}(G,H)=\varnothing$ اگر و تنها اگر $H=G$.

از لم زیر استفاده می‌کنیم.

۲۴.۷ لم فرض می‌کنیم G دارای یک سری ترکیبی است، H یک زیرگروه زیرنرمال G است و $g\in G$. در این صورت

(i) H^g در G زیرنرمال است و $j(G:H)=j(G:H^g)$.

(ii) اگر $H\neq H^g$، آنگاه $H^g \not\leqslant H$ (ر.ک. ۱۷۴ و ۱۷۵).

(iii) $\mathscr{K}(H,H\cap H^g)=\mathscr{K}(H^g,H\cap H^g)$.

برهان می‌توانیم فرض کنیم که $H\neq H^g$. قرار می‌دهیم $j(G:H)=n$. در این صورت یک سری مانند

$$H=H_0\lhd H_1\lhd\cdots\lhd H_n=G$$

از H به G وجود دارد، که جزئی از یک سری ترکیبی G است. از ۲۹.۳ نتیجه می‌شود که

$$H^g=H_0^g\lhd H_1^g\lhd\cdots\lhd H_n^g=G$$

که به‌ازای هر $i=1,\dots,n$،

$$H_i^g/H_{i-1}^g\cong H_i/H_{i-1}. \qquad (\dagger)$$

اکنون به‌موجب ۲.۷، (i) نتیجه می‌شود.

اگر $H^g\leqslant H$، آنگاه از (i) و ۲۱.۷ نتیجه می‌شود که

$$j(G:H)=j(G:H^g)=j(G:H)+j(H:H^g),$$

ازاین‌رو

$$j(H:H^g)=0.$$

لذا

$$H = H^g,$$

که با فرض در تناقض است، بنابراین نتیجه می‌گیریم که $H^g \not\leqslant H$، که اثبات (ii) است.

قرار می‌دهیم $L = H \cap H^g$. بنابر (i) و ۱۵.۷، L هم در H و هم در H^g زیرنرمال است. به‌موجب ۹.۷ (i) یک سری ترکیبی از G به شکل

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_l \lhd G_{l+1} \lhd \cdots \lhd G_m \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_n = G \qquad \text{(الف)}$$

وجود دارد که در آن $0 \leqslant l < m$، $G_l = L$ و $G_m = H$. در این صورت یک سری ترکیبی از G به شکل

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_l \lhd G^*_{l+1} \lhd \cdots \lhd G^*_{m^*} \lhd H^g_1 \lhd \cdots \lhd H^g_n = G \qquad \text{(ب)}$$

نیز وجود دارد که در آن $l < m^*$ و $G^*_{m^*} = H^g$. بنابر قضیهٔ ژوردان‌ـهولدر، سریهای (الف) و (ب) هم‌ارزند. ازاین‌رو $m = m^*$، و با درنظرگرفتن (†) باید داشته باشیم

$$\mathscr{K}(H, L) = \mathscr{K}(H^g, L).$$

۳۴۰. فرض می‌کنیم که φ یک یکریختی از G_1 بر روی G_2 است، G_1 دارای یک سری ترکیبی است و H_1 یک زیرگروه زیرنرمال G_1 است، و قرار می‌دهیم $H_2 = H_1\varphi \leqslant G_2$. در این صورت G_2 دارای یک سری ترکیبی است، H_2 در G_2 زیرنرمال است؛ $\mathscr{K}(G_1, H_1) = \mathscr{K}(G_2, H_2)$ و $\mathscr{K}(H_1, 1) = \mathscr{K}(H_2, 1)$.

۳۴۱. (i) فرض می‌کنیم $H, K \leqslant G$؛ که G یک گروه متناهی است. فرض می‌کنیم که K در G زیرنرمال باشد و مرتبهٔ هر عامل ترکیبی G بالای K عدد اول باشد. در این صورت

$$\mathscr{K}(H, H\cap K) \subseteq \mathscr{K}(G, K).$$

(ii) قرار می‌دهیم $G = A_4$، گروه متناوب از درجهٔ ۴. در این صورت مرتبهٔ هر عامل ترکیبی G عدد اول است و زیرگروههای H و K از G وجود دارند به‌طوری‌که $\langle H, K\rangle = G$، K در G زیرنرمال است و $\mathscr{K}(H, H\cap K) \neq \mathscr{K}(G, K)$ (ر.ک. ۳۳۹).

۳۴۲. فرض می‌کنیم G دارای یک سری ترکیبی است که هیچ دو عامل متمایز آن یکریخت نیستند. در این صورت

(i) هیچ دو زیرگروه نرمال متمایز G یکریخت نیستند.

(راهنمایی. توجه کنید که اگر H و K زیرگروههای نرمال یکریخت G باشند، آنگاه

$$\mathscr{K}(H, H\cap K) = \mathscr{K}(K, H\cap K).$$

اگر $H \neq K$ یک سری ترکیبی G را در نظر بگیرید که $H\cap K$، K و HK را در برداشته باشد و با فرضی که بر روی G کرده‌اید به تناقض برسید.)

(ii) هر زیرگروه نرمال G در G مشخصه است.

(iii) هر زیرگروه زیرنرمال G در G نرمال (و ازاین‌رو در G مشخصه) است.

(راهنمایی. با استقرا بر طول یک سری از H به G استدلال کنید.)

۲۵.۷ قضیه (هـ. ویلانت [a۱۰۰]). فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی است و H و K زیرگروههای زیرنرمال G هستند. در این صورت $\mathscr{K}(H, H\cap K) = \mathscr{K}(\langle H, K\rangle, K)$.

برهان بنابر ۱۵.۷ و ۱۶.۷؛ $H\cap K$ در H زیر نرمال است و K در $\langle H, K\rangle$. چون H و $\langle H, K\rangle$ هر دو در G زیرنرمال‌اند (به‌موجب ۲۲.۷)؛ H و $\langle H, K\rangle$ هر دو دارای سری ترکیبی هستند (۳۳۰). بنابراین حکم قضیه با معنی است. به‌علاوه؛ بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که $\langle H, K\rangle = G$.

ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\mathscr{K}(H, H\cap K) = \mathscr{K}(G, K). \qquad \text{(i)}$$

فرض می‌کنیم

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G \qquad \text{(الف)}$$

یک سری ترکیبی از G باشد، که K یک جملهٔ آن است: مثلاً

$$G_m = K,$$

که $0 \leqslant m \leqslant n$. بنابر ۴.۷ (i)،

$$1 = (G_0\cap H) \trianglelefteq (G_1 \cap H) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq (G_n\cap H) = H, \qquad \text{(ب)}$$

و به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$،

$$(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H) \cong G_{i-1}(G_i \cap H)/G_{i-1}.$$

بنابر ۱۵.۷، $G_i \cap H$ در G_i زیرنرمال است. بنابراین، چون $G_i \cap H$ به‌وسیلهٔ همریختی طبیعی از G_i بر روی G_i/G_{i-1} بر $G_{i-1}(G_i \cap H)/G_{i-1}$ نگاشته می‌شود، $G_{i-1}(G_i \cap H)/G_{i-1}$ در G_i/G_{i-1} زیرنرمال است (۳۳۵). اما G_i/G_{i-1} ساده است (۲.۷) و ازاین‌رو به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$،

یا $(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H)$ بدیهی است

یا $(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H) \cong G_i/G_{i-1}$

لذا بنابر ۲.۷، اگر از سری (ب) جملات تکراری را حذف کنیم، یک سری ترکیبی (ج) از H به‌دست می‌آوریم. به‌علاوه، $H \cap K$ یک جملهٔ (ج) است و هر عامل (ج) بالای $H \cap K$ با یک عامل (الف) بالای K یکریخت است و (i) ثابت می‌شود.

اکنون نشان می‌دهیم که

$$\mathscr{K}(G,K) \subseteq \mathscr{K}(H, H \cap K). \qquad \text{(ii)}$$

ابتدا فرض می‌کنیم که $H \trianglelefteq G$. سپس یک عامل ترکیبی دلخواه A/B از G بالای K را در نظر می‌گیریم: لذا

$$K \leqslant B \lhd A \leqslant G,$$

A و B در G زیرنرمال‌اند و A/B ساده است. بنابر ۴.۷ (i)، $(B \cap H) \trianglelefteq (A \cap H)$ و

$$(A \cap H)/(B \cap H) \cong B(A \cap H)/B.$$

چون $H \trianglelefteq G$، $BH \leqslant G$. بنابراین، چون $BH \geqslant \langle H, K \rangle = G$،

$$BH = G.$$

پس به‌موجب ۳.۷،

$$B(A \cap H) = A \cap (BH) = A.$$

ازاین‌رو

$$(A \cap H)/(B \cap H) \cong A/B.$$

لذا $(A \cap H)/(B \cap H)$ ساده و بنابراین یک عامل ترکیبی G است، زیرا، بنابر ۱۷.۷، $A \cap H$ در G زیرنرمال است. ازاین‌رو هر عامل ترکیبی G بالای K با یک عامل ترکیبی G بین $H \cap K$ و H یکریخت است. پس (ii) در این حالت خاص ثابت می‌شود.

برای حالت کلی، با استقرا بر مثلاً $j(G:H) = m$، استدلال می‌کنیم. اگر $m \leqslant 1$، آنگاه $H \trianglelefteq G$ و چیز دیگری برای اثبات وجود ندارد. بنابراین، فرض می‌کنیم که $m > 1$ و همین‌طور $H \ntrianglelefteq G$. در این صورت یک سری مانند

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_{m-1} \lhd H_m = G$$

از H به G وجود دارد که جزئی از یک سری ترکیبی G است. قرار می‌دهیم $L = H_{m-1} \cap K$. در این صورت

$$H \cap K \leqslant L \trianglelefteq K.$$

فرض می‌کنیم که $L \nleqslant H$. سپس قرار می‌دهیم

$$J = \langle H, L \rangle\rangle H.$$

بنابر ۱۷.۷، و ۲۲.۷؛ J در G زیرنرمال است و به‌موجب ۲۱.۷،

$$j(G:J) < j(G:H) = m.$$

محققاً $G = \langle H, K \rangle = \langle J, K \rangle$. بنابراین، به‌موجب فرض استقرا

$$\mathscr{K}(G,K) \subseteq \mathscr{K}(J, J \cap K). \qquad \text{(iii)}$$

چون

$$L \leqslant J \cap K \leqslant J,$$

و همهٔ این زیرگروهها در G زیرنرمال‌اند،

$$\mathscr{K}(J,L) = \mathscr{K}(J, J \cap K) \cup \mathscr{K}(J \cap K, L). \qquad \text{(iv)}$$

اما $J \leqslant H_{m-1} \lhd G$، و ازاین‌رو بنابر ۲۱.۷،

$$j(J:H) < j(G:H) = m.$$

مسلماً $H \cap L = H \cap K$، و واضح است که H و L در $J = \langle H, L\rangle$ زیرنرمال‌اند. لذا بنابر فرضِ استقرا،

$$\mathscr{K}(J,L) \subseteq \mathscr{K}(H, H\cap K). \qquad \text{(v)}$$

حال (ii) از (iii)، (iv) و (v) نتیجه می‌شود.

از طرفی فرض می‌کنیم که $L \leqslant H$. در این صورت

$$L = H \cap K,$$

و در نتیجه

$$H \cap K \trianglelefteq K.$$

چون $H \ntrianglelefteq G = \langle H, K\rangle$، $K \nleqslant N_G(H)$. بنابراین

به‌ازای عضوی چون $k \in K$ $\quad H^k \neq H$

ازاین‌رو، مطابق ۲۴.۷ (ii)،

$$H^k \nleqslant H.$$

پس فرض می‌کنیم

$$H^* = \langle H, H^k\rangle > H.$$

چون (بنابر ۳۳۵ یا ۲۴.۷ (i)) H^k در G زیرنرمال است، به‌موجب ۲۲.۷، H^* در G زیرنرمال خواهد بود؛ و بنابر ۲۱.۷،

$$j(G:H^*) < j(G:H) = m.$$

محققاً $\langle H^*, K\rangle = \langle H, K\rangle = G$. ازاین‌رو بنابر فرض استقرا

$$\mathscr{K}(G,K) \subseteq \mathscr{K}(H^*, H^* \cap K). \qquad \text{(vi)}$$

اما

$$H \cap K \leqslant H \leqslant H^*, \quad \text{و} \quad H \cap K \leqslant H^* \cap K \leqslant H^*$$

و همهٔ این زیرگروهها در G زیرنرمال‌اند. بنابراین

$$\mathscr{K}(H^*, H\cap K) = \mathscr{K}(H^*, H^*\cap K) \cup \mathscr{K}(H^*\cap K, H\cap K) \qquad \text{(vii)}$$
$$= \mathscr{K}(H^*, H) \cup \mathscr{K}(H, H\cap K). \qquad \text{(viii)}$$

پس H^k و H در H^* زیرنرمال‌اند. به‌علاوه، چون $H \leqslant H_{m-1} \lhd G$، $H^* \leqslant H_{m-1}$ و ازاین‌رو بنابر ۲۱.۷ و ۲۴.۷ (i)،

$$j(H^*:H^k) < j(G:H^k) = m.$$

لذا، بنابر فرض استقرا که به‌جای H و K بر H^* و K^* اِعمال شده و ۲۴.۷ (ii)،

$$\mathscr{K}(H^*, H) \subseteq \mathscr{K}(H^k, H\cap H^k) = \mathscr{K}(H, H\cap H^k). \qquad \text{(ix)}$$

چون در وضعیت فعلی $H \cap K \trianglelefteq K$،

$$H\cap K = (H\cap K)^k \leqslant H \cap H^k \leqslant H.$$

این زیرگروهها در G زیرنرمال‌اند، و در نتیجه

$$\mathscr{K}(H, H\cap K) = \mathscr{K}(H, H\cap H^k) \cup \mathscr{K}(H\cap H^k, H\cap K). \qquad \text{(x)}$$

اکنون (ii) از (vi)، (vii)، (viii)، (ix) و (x) نتیجه می‌شود.

این اثبات (ii) را در همهٔ حالات کامل می‌کند. به همراه (i)، اثبات قضیه به‌دست می‌آید.

۲۶.۷ فرع فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی است و H و K زیرگروههای زیرنرمال G هستند. در این صورت

$$\mathscr{K}(G, H\cap K) = \mathscr{K}(G,H) \cup \mathscr{K}(G,K).$$

برهان به‌موجب ۱۷.۷ و ۲۲.۷، $H \cap K$ و $\langle H, K\rangle$ در G زیرنرمال‌اند. چون

$$H \cap K \leqslant H \leqslant G,$$

$$\mathscr{K}(G,H\cap K)=\mathscr{K}(G,H)\cup\mathscr{K}(H,H\cap K), \qquad \text{(i)}$$

و چون $K\leqslant \langle H,K\rangle \leqslant G$،

$$\mathscr{K}(G,K)=\mathscr{K}(G,\langle H,K\rangle)\cup\mathscr{K}(\langle H,K\rangle,K) \qquad \text{(ii)}$$

به‌علاوه؛ چون $H\leqslant\langle H,K\rangle$،

$$\mathscr{K}(G,\langle H,K\rangle)\subseteq\mathscr{K}(G,H)\cdot \qquad \text{(iii)}$$

بنابر (i) و ۲۵.۷،

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(G,H\cap K)&=\mathscr{K}(G,H)\cup\mathscr{K}(\langle H,K\rangle,K)\\&=\mathscr{K}(G,H)\cup\mathscr{K}(G,\langle H,K\rangle)\cup\mathscr{K}(\langle H,K\rangle,K)\quad (\text{به‌موجب (iii)})\\&=\mathscr{K}(G,H)\cup\mathscr{K}(G,K)\quad(\text{بنابر (ii)})\end{aligned}$$

۳۴۳. فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی است و H و K زیرگروههای زیرنرمال G هستند، در این صورت

(i) $\mathscr{K}(\langle H,K\rangle,1)=\mathscr{K}(H,1)\cup\mathscr{K}(K,1)$ (ر.ک. ۲۶.۷)

(ii) اگر H و K متناهی باشند، آنگاه $\langle H,K\rangle$ متناهی است (ر.ک. ۷۱ (ii)). اشاره. حکم (ii)، در واقع بدون این شرط که G یک سری ترکیبی دارد، نیز صادق است. ۳۴۴ و ۳۴۵ را ببینید.)

۳۴۴. فرض می‌کنیم که $H,K\leqslant G$ با $G=\langle H,K\rangle$.

(i) فرض می‌کنیم $J=H^G$، بستار نرمال H در G (۱۸۰). نشان دهید که

$$J=\langle H^k:k\in K\rangle\cdot$$

(راهنمایی. نشان دهید که $K\leqslant N_G(J)$).

(ii) ثابت کنید که اگر H و K هر دو متناهی باشند و H در G زیرنرمال باشد، آنگاه G متناهی است. (ر.ک. ۷۱ و ۳۴۳. همچنین ۳۴۵ را ببینید. راهنمایی. با استقرا بر کاستی H در G استدلال کنید: ۳۳۱ را ببینید. برای اینکه نشان دهید H^G متناهی است، از (i) و استقرا استفاده کنید.)

۳۴۵. فرض می‌کنیم $H,K\leqslant G$.

(i) ثابت کنید که اگر H در G زیرنرمال باشد و $K\leqslant N_G(H)$، آنگاه K هر جملهٔ سری استانده از G به H را به صورت نرمال بدل می‌کند. (۳۳۱ را ببینید. راهنمایی. از یک استدلال استقرایی استفاده کنید.)

(ii) ثابت کنید که اگر H و K هر دو زیرگروههای زیرنرمال متناهی G باشند، آنگاه $\langle H,K\rangle$ نیز یک زیرگروه زیرنرمال متناهی G است. (ر.ک. ۲۲.۷؛ ۳۴۳، ۳۴۴. راهنمایی. فرض کنید $L=\langle H,K\rangle$. با استقرا بر کاستی H در L، مثلاً n، استدلال کنید. اگر $n\leqslant 1$، از (i) استفاده کنید. به‌ازای $n>1$ با استفاده از ۳۴۴ و استقرا، نشان دهید که H^L زیرگروه زیرنرمال متناهی G است. همچنین توجه داشته باشید که $L=H^LK$.)

۳۴۶. فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی است و H، H^*، K و K^* زیرگروههای زیرنرمال G هستند با $H^*\leqslant H$ و $K^*\leqslant K$. در این صورت

$$\mathscr{K}(\langle H,K\rangle,\langle H^*,K^*\rangle)\subseteq\mathscr{K}(H,H^*)\cup\mathscr{K}(K,K^*)\cdot$$

(راهنمایی. توجه کنید که $\langle H^*,K^*\rangle\leqslant\langle H,K^*\rangle\leqslant\langle H,K\rangle$ و از ۲۵.۷ دوبار استفاده کنید.)

۳۴۷. فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای زیرنرمال گروه متناهی G باشند. در این صورت

$$O^\varpi(\langle H,K\rangle)=\langle O^\varpi(H),O^\varpi(K)\rangle\cdot$$

(این مسأله تعمیم مسألهٔ ۱۵۹ (ii) است. راهنمایی. از ۱۵۷، ۳۳۷ و ۳۴۶ استفاده کنید.)

۳۴۸. فرض می‌کنیم K زیرگروه زیرنرمال گروه متناهی G باشد، و قرار می‌دهیم $J=K^G$، بستار نرمال K در G (۱۸۰)، و $L=K_G$، مغز K در G (۹۰).

(i) ثابت کنید که $\mathscr{K}(J,1)=\mathscr{K}(K,1)$ و $\mathscr{K}(G,K)=\mathscr{K}(G,L)$.

(راهنمایی. از ۳۴۰، ۳۴۳ و ۲۶.۷ استفاده کنید.)

(ii) با یک مثال نشان دهید که، ممکن است چنین نیز اتفاق بیفتد

$\mathscr{K}(K,1)\neq\mathscr{K}(L,1)$ و $\mathscr{K}(G,J)\neq\mathscr{K}(G,K)\cdot$

۳۴۹. فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای زیرنرمال گروه متناهی G باشند و همچنین

$$\mathscr{K}(H,1)\cap\mathscr{K}(K,1)=\varnothing\cdot$$

در این صورت $\langle H,K\rangle=HK\cong H\times K$.

(این مسأله تعمیم مسألهٔ ۳۳۸ است. راهنمایی. از ۳۴۸، ۵۳.۳ و ۵۴.۳ استفاده کنید.)

گام بعدی ما در بسط نظریهٔ ساختار نرمال، ملاحظهٔ این مطلب است که، بسیاری از قضایای به‌دست‌آمده در حالت کلی، به صورت کلیتر، برای گروههای با عملگرها برقرارند.

۲۷.۷ تعاریف یک‌گروه با عملگرها متشکل است از یک‌گروه G و یک مجموعهٔ Ω (حوزهٔ عملگر) به‌طوری‌که به‌ازای هر $g \in G$ و هر $\omega \in \Omega$؛ عضو یکتای $g^\omega \in G$ متناظر می‌شود، به‌قسمی‌که

به‌ازای هر $g_1, g_2 \in G$ و $\omega \in \Omega$، $\quad (g_1 g_2)^\omega = g_1^\omega g_2^\omega$

در این صورت می‌گوییم G یک Ω گروه است.

فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. می‌گوییم H زیرگروه پایدار (یا مجاز)، و یا به‌طور صریح H یک Ω زیرگروه است، اگر

به‌ازای هر $h \in H$ و $\omega \in \Omega$ $\quad h^\omega \in H$

توجه کنید که هرگاه H زیرگروه پایدار Ωگروه G باشد، آنگاه Ω برای H نیز یک حوزهٔ عملگر است.

۲۸.۷ اشارات و مثالها (۱) اگر G یک Ω گروه باشد، آنگاه برای هر $\omega \in \Omega$، نگاشت

$$g \mapsto g^\omega,$$

که به‌ازای هر $g \in G$ تعریف می‌شود؛ یک درونریختی از G است (۱۸.۲).

اگر بتوان نتیجه گرفت که زیرگروه بدیهی ۱ پایدار است، جود G نیز مسلماً پایدار است.

روشن است که هر مجموعه از درونریختیهای G یک حوزهٔ عملگر مناسب برای G است. به‌هرحال، در ۲۷.۷ Ω را مقید نکرده‌ایم که مجموعه‌ای از درونریختیها باشد، زیرا می‌خواهیم امکان دهیم که عضوهای متمایز ω_1 و ω_2 از Ω وجود داشته باشند که به یک طریق بر G عمل کنند؛ یعنی به‌ازای هر $g \in G$، $g^{\omega_2} = g^{\omega_1}$. (این وضع شبیه وضعیتی است که در فصل ۴ داشتیم که با درنظرگرفتن عمل یک‌گروه G بر یک مجموعهٔ X، G را مقید نکردیم که زیرگروهی از Σ_X باشد.)

هرگاه G یک Ω گروه باشد و $\varnothing \subset \Omega \subseteq \mathrm{Aut}\, G$، آنگاه زیرگروههای پایدارِ G دقیقاً زیرگروههای Ω ناوردا به معنی ۱.۳ هستند.

(۲) بدیهی است که می‌توانیم هرگروه G را به‌عنوان یک Ω گروه با $\Omega = \varnothing$ در نظر بگیریم. در این صورت هر زیرگروه G پایدار است و به‌سادگی دیده می‌شود که نظریهٔ Ω گروه G همان نظریهٔ آشنای G به‌عنوان یک گروه بدون عملگرهاست.

(۳) وقتی G بر خودش با تزویج مانند ۲۵.۴ عمل کند، G برای خودش یک حوزهٔ عملگر است. به‌ازای هر $x \in G$ و هر $g \in G$ عضوی از G که با عمل g روی x متناظر است x^g است، مزدوج x بر اثر g. در این حالت زیرگروههای پایدار G دقیقاً زیرگروههای نرمال Gاند.

(۴) فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R یک حوزهٔ عملگر برای R^+، گروه جمعی R (۱۱.۲)، بر اثر ضرب از راست است: زیرا مطابق اصول موضوعهٔ حلقه به‌ازای هر $x_1, x_2 \in R^+$ و $a \in R$،

$$(x_1 + x_2)a = x_1 a + x_2 a\cdot$$

پس زیرگروههای پایدار R^+ دقیقاً ایده‌الهای راست حلقهٔ R هستند.

همچنین، R یک حوزهٔ عملگر برای R^+ بر اثر ضرب از چپ است، و در این حالت زیرگروههای پایدار ایده‌الهای چپ حلقهٔ R هستند.

(۵) فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی میدان F باشد. در این صورت F یک حوزهٔ عملگر برای V^+، گروه جمعی V (۱۵.۲)، بر اثر ضرب عددی است: زیرا بنابر اصول موضوعهٔ فضای برداری، به‌ازای هر $v_1, v_2 \in V^+$ و $a \in F$،

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2\cdot$$

بنابراین زیرگروههای پایدار دقیقاً زیرفضاهای V هستند.

۲۹.۷ تعریف فرض می‌کنیم G و H گروههایی با یک حوزهٔ عملگر Ω باشند. در این صورت همریختی $\varphi : G \to H$، یک Ω همریختی خوانده می‌شود، اگر به‌ازای هر $g \in G$ و هر $\omega \in \Omega$،

$$(g^\omega)\varphi = (g\varphi)^\omega\cdot$$

از این تعریف بلافاصله نتیجه می‌شود که $\mathrm{Ker}\,\varphi$ یک زیرگروه نرمال پایدار G است و $\mathrm{Im}\,\varphi$ یک زیرگروه پایدار H.

۳۰.۷ فرض می‌کنیم که G یک Ωگروه باشد و K یک زیرگروه نرمال پایدار G. در این صورت Ω به طریقی طبیعی، یک حوزهٔ عملگر برای گروه خارج‌قسمتی G/K است: تعریف می‌کنیم

$$(gK)^\omega = g^\omega K$$

(به‌ازای هر $g \in G$ و هر $\omega \in \Omega$).

این تعریف خوشتعریف است؛ زیرا اگر $g_1, g_2 \in G$ و $g_1K = g_2K$، آنگاه به‌ازای مقداری $k \in K$ چون

$$g_1 = g_2 k,$$

ازاین‌رو

$$g_1^\omega K = g_2^\omega k^\omega K = g_2^\omega K,$$

زیرا $k^\omega \in K$.

باید توجه داشت که این تعریف از G/K به‌عنوان یک Ω گروه، همریختی طبیعی

$$\nu : G \to G/K$$

را به یک Ω همریختی تبدیل می‌کند.

حال ثابت می‌کنیم که قضیهٔ بنیادی همریختیها برای گروههایِ با عملگرها برقرار می‌ماند.

۳۱.۷ (ر.ک. ۲۴.۳) فرض می‌کنیم مجموعهٔ Ω یک حوزه عملگر برای گروههای G و H است و $\varphi : G \to H$ یک Ω همریختی، $K = \operatorname{Ker}\varphi$ و $\nu : G \to G/K$ همریختی طبیعی است. در این صورت K پایدار است، G/K به‌طریقی طبیعی، یک Ω گروه است، ν یک Ω همریختی است و Ω همریختی یک به یکِ $\psi : G/K \to H$ وجود دارد به‌طوری‌که $\varphi = \nu\psi$. به‌ویژه، $\operatorname{Im}\varphi$ و $G/\operatorname{Ker}\varphi$، Ω گروههایی Ω یکریخت‌اند.

برهان با درنظرگرفتن اشارات فوق کافی است ثابت کنیم که همریختی یک به یکِ $\psi: G/K \to H$ که در ۲۴.۳ تعریف شده، یک Ω همریختی است. فرض می‌کنیم $g \in G$ و $\omega \in \Omega$. بنابه تعریف

$$(gK)\psi = g\varphi,$$

و در نتیجه

$$(gK)^\omega\psi = (g^\omega K)\psi = g^\omega\varphi = (g\varphi)^\omega,$$

زیرا φ یک Ω همریختی است، یعنی

$$(gK)^\omega\psi = ((gK)\psi)^\omega.$$

لذا ψ یک Ω همریختی است.

۳۵۰. فرض می‌کنیم G یک Ω گروه باشد. اگر H و K زیرگروههای پایداری از G باشند، آنگاه $H \cap K$ و $\langle H, K\rangle$ و $[H, K]$ نیز زیرگروههای پایدارند.

۳۵۱. اگر H زیرگروه پایداری از Ω گروه G باشد، $N_G(H)$ لزوماً پایدار نیست (ر.ک. ۱۷۶). این مطلب را با مثال زیر ثابت کنید.

قرار دهید $G = \Sigma_4$ و G را به‌عنوان یک Ω گروه در نظر بگیرید که در آن $\Omega = \{\omega\}$ و ω یک درونریختی از G است به‌قسمی‌که $\operatorname{Ker}\omega = A_4$. فرض کنید H یک ۳ زیرگروه سیلوی مناسب از G باشد.

۳۵۲. فرض می‌کنیم G یک Ω گروه است. اگر H یک زیرگروه پایدار باشد و K یک زیرگروه نرمال پایدار G، آنگاه HK زیرگروه پایداری از G است. به‌علاوه، $H \cap K$ زیرگروه نرمال پایداری از H است و Ω گروههای $H/H\cap K$ و HK/K، Ω یکریخت‌اند. (۴۰.۳ را ببینید).

۳۵۳*. (i) فرض می‌کنیم که G یک Ω گروه است. در این صورت مجموعهٔ همهٔ Ω درونریختیهای G یک زیرنیم‌گروه S از نیم‌گروه متشکل از همهٔ درونریختیهای G تشکیل می‌دهد (۱۸.۲ را ببینید). S دارای عضو همانی است و گروه یکه‌های S شامل همهٔ Ω درونریختیهای G است. این گروه را با $\operatorname{Aut}_\Omega(G)$ نمایش می‌دهیم.

(ii) G را به صورت یک G گروه، مانند ۲۸.۷ (۳)، در نظر می‌گیریم. در این ~~صورت~~

$$\operatorname{Aut}_G(G) = C_{\operatorname{Aut} G}(\operatorname{Inn} G) \qquad (\text{ر.ک. ۲۴۵})$$

۳۲.۷ اشارات و تعاریف (۱) اثبات اینکه تمام قضایای اصلی دربارهٔ ساختار نرمال گروهها، برای گروههای با عملگرها نیز برقرار می‌مانند، ساده است: لذا ۲۹.۳، ۳۰.۳، ۳۸.۳، ۳۹.۳، ۴۰.۳، ۷.۷ و ۹.۷ صادق‌اند، اگر در احکام و براهین آنها، گروهها را با Ω گروهها، زیرگروهها را با زیرگروههای پایدار، همریختیها را با Ω همریختیها و یکریختیها را با Ω یکریختیها تعویض کنیم. (برای مثال، ۳۵۲ را ببینید.) ما ذیلاً براهین صریح آنها را نخواهیم آورد؛ اما از حالا به بعد هر وقت که به این قضایا احتیاج داشته باشیم، صورتهای عملگر آنها را به‌کار خواهیم برد.

(۲) احتمالاً باید چیزهای بیشتری دربارهٔ تعبیر صادق ۷.۷ و ۹.۷ برای گروههای با عملگرها بگوییم. فرض می‌کنیم G یک Ω گروه باشد. در این صورت یک Ω سری از G یک سری از G است که جملاتش زیرگروههای پایدار G باشند. تعریفهای 'حقیقی'، 'تظریف' و 'تظریف حقیقی' که در ۱.۷ آمده‌اند؛ بدون تغییر به‌کار برده می‌شوند. یک سری Ω ترکیبی از G یک Ω سری حقیقی G است که تظریفی حقیقی (به صورت یک Ω سری) نداشته باشد. تعریف 'هم‌ارزی' دو Ω سری

G دقیقاً مانند ۶.۷ است، البته با این شرط اضافی که عاملهای متناظر صرفاً یکریخت نیستند، بلکه Ω یکریخت‌اند. حال صورتهای ۷.۷ و ۹.۷ در مورد Ω گروهها واضح‌اند.

(۳) یک Ωگروه نابدیهی G را Ω ساده گوییم، اگر ۱ و G، تنها زیرگروههای نرمال پایدار G باشند.

فرض می‌کنیم G، Ω گروه دلخواهی باشد. با توجه به اشارات قبل، می‌دانیم که عاملهای یک Ω سری از G، به طریقی طبیعی Ω گروه هستند. بنابراین اگر اثبات ۲.۷ را تکرار کنیم؛ نشان می‌دهد که یک Ω سری G، یک Ω سری ترکیبی G است اگر و تنها اگر عاملهای این سری همه Ω ساده باشند.

(۴) یک Ωگروه ساده مسلماً Ω ساده است. ولی، یک Ω گروه Ω ساده لزوماً یک گروه ساده نیست. برای مثال، فرض می‌کنیم V یک فضای برداری $\neq 0$ روی میدان F باشد و V^+ را به صورت یک F گروه مانند ۲۸.۷ (۵) در نظر می‌گیریم. چون V^+ آبلی است، تمام زیرگروههایش نرمال‌اند. زیرگروههای پایدار زیرفضاهای V هستند. لذا F گروه V^+، F ساده است اگر و تنها اگر تنها زیرفضاهای V، ۰ و V باشند؛ یعنی، اگر و تنها اگر V دارای بعد ۱ باشد. چون V^+ آبلی است، V^+ یک گروه ساده است اگر و تنها اگر V^+ متناهی و مرتبه‌اش عدد اول باشد (۶.۳). ازاین‌رو، اگر V دارای بعد ۱ باشد، آنگاه V^+ یک F گروه F ساده است، که یک گروه ساده نیست مگر اینکه به‌ازای عدد اول p، $F = \mathbf{Z}_p$.

اتفاقاً ملاحظه می‌کنید که برای یک فضای برداریِ متناهی بعد V روی F، F گروه V^+ دارای یک سری F ترکیبی است و طول هر سری Fترکیبی V^+ برابر است با بعد V. زیرا، قضیهٔ ژوردان-هولدر برای گروههای با عملگرها روشی به‌دست می‌دهد که ثابت کنیم تعداد اعضای هر دو پایه از یک فضای برداری متناهی بعد، یکی است.

(۵) به‌عنوان مثال دیگر، دوباره فضای برداری $V \neq 0$ روی میدان F را در نظر می‌گیریم. نگاشتهای خطی از V به توی خودش مسلماً درونریختیهای V^+ هستند. بنابراین حلقهٔ $\mathscr{L}(V)$ متشکل از تمام نگاشتهای خطی از V به توی خودش، یک حوزهٔ عملگر برای V^+ است. V^+ به‌عنوان یک $\mathscr{L}(V)$ گروه، $\mathscr{L}(V)$ ساده است، یا به بیان دیگر چون V^+ آبلی است، تنها زیرگروههای پایدار $\mathscr{L}(V)$گروه V^+، عبارت‌اند از ۰ و V^+. برای پی‌بردن به این مطلب، زیرگروه پایدار نابدیهی دلخواه W از V^+ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $0 \neq w \in W$. در این صورت به‌ازای هر $v \in V$، یک نگاشت خطی $\theta : V \to V$ وجود دارد به‌طوری‌که $v = w\theta$. چون W یک $\mathscr{L}(V)$ زیرگروه V^+ است، در نتیجه $v \in W$. ازاین‌رو $W = V^+$.

توجه داشته باشید که V^+ بدون هیچ شرطی دربارهٔ بعد V، $\mathscr{L}(V)$ ساده است، درحالی‌که V^+ یک گروه ساده است اگر و تنها اگر V دارای بعد ۱ باشد و به‌ازای یک عدد اول p، $F = \mathbf{Z}_p$.

۳۳.۷ تعاریف مهمترین حالت خاص برای نظریهٔ گروههای یک گروه با عملگرها، زمانی پیش می‌آید که G به‌عنوان یک G گروه، مشابه ۲۸.۷ (۳)، در نظر گرفته شود. برای این حالت یک اصطلاح علمی خاص وجود دارد.

یک G سریِ G، یک سری نرمال G نامیده می‌شود. لذا یک سری نرمال G صرفاً یک سری G است که هر جمله‌اش در G نرمال است.

یک سری G ترکیبی از G یک سری اصلی (یا سری مهم) G نامیده می‌شود. عاملهای یک سری اصلی G عاملهای اصلی G نامیده می‌شوند.

بنابر قضیهٔ شرایر برای گروههای با عملگرها، هر دو سری نرمال G دارای تظریفهای هم‌ارزند: اینها سریهای نرمالی از G هستند که عاملهایشان دوبه‌دو G یکریخت‌اند. همچنین، اگر G دارای یک سری اصلی باشد، هر سری نرمال حقیقی G تظریفی دارد که یک سری اصلی G است؛ و بنابر قضیهٔ ژوردان-هولدر در مورد گروههای با عملگرها؛ هر دو سری اصلی G هم‌ارزند.

توجه داشته باشید که هرگروه متناهیِ G دارای یک سری اصلی است. دلیل آن واضح است، زیرا اگر G متناهی باشد؛ فرایند تظریف‌سازی یک سری نرمال حقیقی G باید بعد از تعداد متناهی مرحله، به یک سری اصلی G منجر شود.

۳۴.۷ برخلاف عاملهای ترکیبی، عاملهای اصلی یک گروه لزوماً گروههای ساده نیستند. برای مثال، فرض می‌کنیم $G = A_4$، گروه متناوب از درجه ۴. تنها زیرگروه نرمال حقیقی نابدیهی G زیرگروه یکتای V از مرتبهٔ ۴ است: ۱۸۵ و ۲۸۸ را ببینید. لذا

$$1 < V < G$$

یک سری اصلی G است. در این مثال، عامل اصلی G/V از G ساده است، اما عامل اصلی $V/1$ ساده نیست.

۳۵۴. فرض می‌کنیم که G یک سری اصلیِ

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G,$$

دارد که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت G_n/G_{n-1} ساده است (اگرچه عاملهای G_i/G_{i-1} به‌ازای $0 < i < n$ لزوماً ساده نیستند: ۳۴.۷ را ببینید.)

۳۵۵. اگر G یک سری ترکیبی داشته باشد، یک سری اصلی دارد.

(راهنمایی. هر سری نرمال حقیقی G طولی حداکثر برابر با طول سری ترکیبی G دارد. اشاره. این مطلب که اگر G یک سری اصلی داشته باشد، یک سری ترکیبی دارد، صادق نیست: ۵۳۴ را ببینید.)

۳۵۶. فرض می‌کنیم H/J و K/L عاملهای G یکریختی از سری نرمال G باشند. اگر $H/J \leqslant Z(G/J)$، آنگاه $K/L \leqslant Z(G/L)$.

ما به اطلاعاتی از ساختار عاملهای اصلی گروههای متناهی نیاز خواهیم داشت. در اینجا به چند نتیجهٔ مقدماتی اشاره می‌کنیم.

۳۵.۷ تعریف فرض می‌کنیم $1 < K \trianglelefteq G$. در این صورت K زیرگروه نرمال مینیمال G خوانده می‌شود؛ اگر هیچ زیرگروه نرمالی مانند L از G وجود نداشته باشد که $1 < L < K$. (این تعریف را با تعریف 'زیرگروه ماکسیمال' در ۱۴۰ مقایسه کنید. صادق همچنان‌که یک زیرگروه ماکسیمال در بین زیرگروههای حقیقی، زیرگروهی است ماکسیمال، یک زیرگروه نرمال مینیمال نیز در بین تمام زیرگروههای نرمال نابدیهی زیرگروه نرمالی است مینیمال.)

۳۶.۷ فرض می‌کنیم G دارای یک سری اصلی باشد، H و K زیرگروههای نرمال G باشند با $K < H$. در این صورت H/K یک عامل اصلی G است اگر و تنها اگر H/K یک زیرگروه نرمال مینیمال G/K باشد.

برهان اگر H/K یک عامل اصلی G باشد؛ بلافاصله از ۳۰.۳ نتیجه می‌شود که H/K یک زیرگروه نرمال مینیمال G/K است.

به‌عکس فرض می‌کنیم که H/K زیرگروه نرمال مینیمالی از G/K باشد. بنابر همتای ۹.۷ (i) برای گروههای با عملگرها، یک سری اصلی برای G وجود دارد که هم H و هم K جملاتی از آن هستند. بنابر ۳۰.۳؛ هیچ جمله‌ای از این سری اصلی به‌طور اکید بین K و H قرار نمی‌گیرد. بنابراین H/K یک عامل اصلی G است.

۳۷.۷ تعریف گروه نابدیهی G را مشخصه‌یی‌ـساده گوییم اگر ۱ و G تنها زیرگروههای مشخصهٔ آن باشند.

گروههای ساده به‌طور مسلم مشخصه‌یی‌ـساده‌اند؛ اما چنان‌که در زیر نشان خواهیم داد یک گروه مشخصه‌یی‌ـساده لزوماً ساده نیست.

۳۸.۷ فرض می‌کنیم که K زیرگروه نرمال مینیمال G باشد. در این صورت K یک گروه مشخصه‌یی‌ـساده است. به‌ویژه (بنابر ۳۶.۷)، اگر G دارای یک سری اصلی باشد، هر عامل اصلی G مشخصه‌یی‌ـساده است.

برهان فرض می‌کنیم L یک زیرگروه مشخصه‌یی‌ـسادهٔ K باشد. در این صورت بنابر ۱۵.۳، $L \trianglelefteq G$. بنابراین، چون $L \leqslant K$ و K در G نرمال مینیمال است، یا $L = 1$ یا $L = K$. بدین‌ترتیب K مشخصه‌یی‌ـساده است.

ما قضایای اصلی مربوط به ساختار گروههای مشخصه‌یی‌ـساده را به فصل بعدی (۱۰.۸ را ببینید) موکول می‌کنیم. در اینجا به شرح گروههای آبلی متناهی مشخصه‌یی‌ـساده می‌پردازیم.

۳۹.۷ تعریف گروه آبلی A را مقدماتی می‌گویند، اگر یک عدد اول مانند p وجود داشته باشد به‌قسمی‌که به‌ازای هر $a \in A$، $a^p = 1$.

۴۰.۷ فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی باشد. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) A مقدماتی است.

(ii) عدد اولی مانند p و فضایی برداری مانند V روی $\mathbf{Z}_p$ وجود دارد، به‌قسمی‌که $A \cong V^+$.

برهان فرض می‌کنیم A مقدماتی است: لذا عدد اولی مانند p وجود دارد به‌قسمی‌که به‌ازای هر $a \in A$، $a^p = 1$. فضای برداری V روی $\mathbf{Z}_p$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (ر.ک. ۴۲). اعضای V همان اعضای A هستند. حاصل جمع برداری دو عضو V، حاصلضرب همان دو عضو در A تعریف می‌شود. اعضای $\mathbf{Z}_p$ رده‌های مانده‌یی اعداد صحیح به پیمانهٔ p هستند. فرض می‌کنیم $\bar{n} \in \mathbf{Z}_p$ و n یک عدد صحیح در ردهٔ مانده‌یی $\bar{n}$ باشد. در این صورت به‌ازای هر $a \in A$، حاصلضرب عددی $\bar{n}a$ را عضو $a^n \in A$ تعریف می‌کنیم. این تعریف به انتخاب n در ردهٔ مانده‌یی $\bar{n}$ بستگی ندارد زیرا $a^p = 1$. حال این بررسی که V یک فضای برداری روی $\mathbf{Z}_p$ است ساده است؛ و روشن است که، به‌عنوان گروهها

$$A \cong V^+.$$

به‌عکس، فرض می‌کنیم V یک فضای برداری روی $\mathbf{Z}_p$ باشد. در این صورت V^+ گروهی است آبلی. به‌علاوه، چون به‌ازای هر $v \in V$، $pv = 0$؛ لذا V^+ مقدماتی است. ازاین‌رو اگر $A \cong V^+$، آنگاه A مقدماتی است.

۴۱.۷ فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی متناهی باشد، $A \neq ۱$. در این صورت A مشخصه‌یی‌ـساده است اگر و تنها اگر مقدماتی باشد.

برهان فرض کنید A مقدماتی باشد. به‌موجب ۴۰.۷، می‌توانیم فرض کنیم که $A = V^+$؛ که V یک فضای برداری روی $\mathbf{Z}_p$ است، به‌ازای یک p و چون A متناهی است، V متناهی بعد است. فرض می‌کنیم که W یک زیرگروه مشخصه نابدیهی V^+ باشد و $۰ \neq w \in W$. فرض می‌کنیم $۰ \neq v \in V^+$. در این صورت v و w اعضای پایه‌ای از V هستند. ازاین‌رو نگاشت خطی وارون‌پذیر $\theta : V \to V$ وجود دارد به‌قسمی $v = w\theta$. بنابراین چون $\theta \in \mathrm{Aut}\, V^+$ و W در V^+ مشخصه است، پس $v \in W$. ازاین‌رو $W = V^+$. لذا V^+ مشخصه‌یی‌ـساده است.

به‌عکس فرض می‌کنیم که A مشخصه‌یی‌ـساده باشد. p را مقسوم‌علیه اولی از $|A|$ می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$B = \{a \in A : a^p = ۱\}.$$

چون A آبلی است، واضح است که $B \leqslant A$. فرض می‌کنیم $b \in B$ و $\alpha \in \mathrm{Aut}\, A$. دراین صورت

$$(b^\alpha)^p = (b^p)^\alpha = ۱.$$

در نتیجه

$$b^\alpha \in B.$$

ازاین‌رو B در A مشخصه است. بنابر ۱۰۷ یا ۱۱.۵، عضوی مانند a از مرتبهٔ p در A وجود دارد. در این صورت

$$۱ \neq a \in B.$$

بنابراین $B \neq ۱$. چون A مشخصه‌یی‌ـساده است، نتیجه می‌شود که

$$B = A.$$

لذا A مقدماتی است.

۳۵۷. فرض کنید که K زیرگروه نرمال مینیمال G باشد. در این صورت یا K آبلی است یا $Z(K) = ۱$.

۳۵۸. فرض می‌کنیم که K و L زیرگروههای نرمال مینیمال متمایزی از G باشند. در این صورت

$$KL \cong K \times L.$$

(راهنمایی. ۵۴.۳ را ببینید.)

۳۵۹. فرض می‌کنیم $G = HK$، که $H < G$، و K یک زیرگروه نرمال مینیمال آبلی G است. در این صورت H یک زیرگروه ماکسیمال G است (۱۴۰ را ببینید) و $H \cap K = ۱$. به‌علاوه اگر $K \leqslant Z(G)$، آنگاه $H \lhd G$ و $G \cong H \times K$.

(راهنمایی. اگر $H \leqslant J \leqslant G$؛ از قاعدهٔ ددکیند استفاده کنید و نشان دهید که $J \cap K \trianglelefteq G$.)

۳۶۰. $\mathbf{Z}^+$ زیرگروه نرمال مینیمال ندارد.

***۳۶۱.** (i) فرض می‌کنیم F میدان دلخواهی باشد. در این صورت گروه آبلی F^+ مشخصه‌یی‌ـساده است. (راهنمایی. ۱۱.۲ را ببینید.)

(ii) $\mathbf{Z}^+$ مشخصه‌یی‌ـساده نیست.

۳۶۲. فرض می‌کنیم که G مشخصه‌یی‌ـساده است. دراین‌صورت $G \times G$ نیز مشخصه‌یی‌ـساده است. (راهنمایی. فرض کنید K یک زیرگروه مشخصهٔ $G \times G$ باشد و فرض کنید $G_1 = G \times ۱$ و $G_2 = ۱ \times G$. نشان دهید که $K \cap G_1$ در G_1 مشخصه است: ۹۴ را ببینید. اگر $G_1 \leqslant K$، آنگاه $K = G \times G$؛ ۱۲.۳ را ببینید. پس می‌توان فرض کرد که $K \cap G_1 = ۱ = K \cap G_2$. فرض کنید π_1، تصویر $G \times G \to G$ باشد با $\mathrm{Ker}\, \pi_1 = G_2$: ۱۱.۳ را ببینید. فرض کنید $K_1 = K\pi_1$. نشان دهید که K_1 در G مشخصه است. اگر $K_1 = ۱$، آنگاه $K = ۱$. نشان دهید که اگر $K_1 = G$، آنگاه $\mathrm{Aut}\, G = ۱$. سپس از نتیجهٔ مذکور در ۵۲ استفاده کنید.)

۳۶۳. فرض می‌کنیم $L \lhd G$. در این صورت L را زیرگروه نرمال ماکسیمال G می‌گوییم اگر یک زیرگروه نرمال K از G وجود نداشته باشد، به‌قسمی‌که $L < K < G$ (ر.ک. ۱۴۰، ۳۵.۷).

(الف) ثابت کنید که زیرگروه نرمال L از G یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G است اگر و تنها اگر G/L ساده باشد.

(ب) فرض می‌کنیم که L یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G باشد. همچنین فرض می‌کنیم که یک زیرگروه زیرنرمال H از G وجود داشته باشد به‌قسمی‌که

(i) $H \nleqslant L$ و

(ii) هر وقت که J یک زیرگروه زیرنرمال G باشد به‌قسمی‌که $J < H$، آنگاه $J \leqslant L$.

(اشاره. اگر G متناهی باشد، چنین زیرگروهی مانند H وجود دارد.) ثابت کنید که $H \cap L$ زیرگروه نرمال ماکسیمال یکتای H است.

اکنون رده‌های گروههای پوچ‌توان و حل‌پذیر را معرفی می‌کنیم.

۴۲.۷ تعاریف (i) عامل H/K از یک سری G را عامل مرکزی G می‌نامیم، اگر K در G نرمال باشد و $H/K \leqslant Z(G/K)$.

(ii) G را پوچ‌توان می‌گوییم، اگر یک سری داشته باشد که تمام عاملهایش، عاملهای مرکزی G باشند. یک‌چنین سری را یک سری مرکزی می‌نامیم.

(iii) G را حل‌پذیر می‌گوییم، اگر یک سری داشته باشد که همهٔ عاملهایش آبلی باشند. یک چنین سری را سری آبلی خواهیم نامید. گروههایی را که حل‌پذیر نیستند، حل‌ناپذیر می‌گوییم.

توجه کنید که یک سری مرکزی لزوماً یک سری نرمال است. یک سری آبلی لزوماً یک سری نرمال نیست.

مفهوم حل‌پذیری گروهها در مراحل ابتدایی گسترش نظریهٔ گروهها، به‌وسیلهٔ گالوا بیان شد. در حقیقت نام 'حل‌پذیر' بر می‌گردد به ارتباط نزدیک بین حل معادلهٔ چندجمله‌یی به‌وسیلهٔ رادیکالها و حل‌پذیری (به تعبیر مذکور در فوق) گروههای وابسته به این معادلات که گالوا کاشف آنها بود. (مراجع مربوط به نظریهٔ گالوا را که در ۲۵.۲ معرفی شدند، ببینید.)

۴۳.۷ همهٔ گروهها حل‌پذیر نیستند، زیرا واضح است که گروههای سادهٔ ناآبلی، حل‌ناپذیرند.

یک سری مرکزی مسلماً یک سری آبلی است و بنابراین همهٔ گروههای پوچ‌توان حل‌پذیرند. ولی، گروههای حل‌پذیر لزوماً پوچ‌توان نیستند. برای مثال؛ فرض می‌کنیم که $G = \Sigma_۳$ و نیز فرض می‌کنیم K زیرگروه یکتای G از مرتبهٔ ۳ باشد (۷.۳ را ببینید). در این صورت

$$۱ \lhd K \lhd G$$

یک سری آبلی از G است و ازاین‌رو $\Sigma_۳$ حل‌پذیر است. از طرفی $\Sigma_۳$ پوچ‌توان نیست، زیرا $Z(\Sigma_۳) = ۱$ و بنابراین $\Sigma_۳$ نمی‌تواند یک سری مرکزی داشته باشد.

روشن است که همهٔ گروههای آبلی پوچ‌توان‌اند. ولی گروههای پوچ‌توان ناآبلی نیز وجود دارند، بدین‌منظور هم‌اکنون نشان می‌دهیم که تمام p گروههای متناهی پوچ‌توان‌اند.

۴۴.۷ قضیه فرض می‌کنیم که G یک p گروه متناهی باشد. در این صورت G پوچ‌توان است.

برهان با استقرا بر $|G|$ استدلال می‌کنیم. اگر $|G| = ۱$؛ حکم بدیهی است. ازاین‌رو فرض می‌کنیم که $G \neq ۱$، و به استقرا فرض می‌کنیم که همهٔ p گروههایی که مرتبهٔ کمتر از G دارند

پوچ‌توان باشند. بنابر ۲۸.۴، $Z(G) \neq ۱$. بنابراین $|G/Z(G)| < |G|$. چون $G/Z(G)$ یک p گروه متناهی است، بنابر فرض استقرا نتیجه می‌شود که $G/Z(G)$ پوچ‌توان است. اکنون بنابر ۳۰.۳، واضح است که G پوچ‌توان است، و اثبات به استقرا کامل می‌شود.

۴۵.۷ لم یک سری از G، مانند

$$۱ = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

یک سری مرکزی است اگر و تنها اگر، به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$،

$$[G_i, G] \leqslant G_{i-۱}$$

(ر.ک. ۱۶۲)

برهان اگر سری مفروض یک سری مرکزی باشد، به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$،

$$G_{i-۱} \trianglelefteq G \quad \text{و} \quad G_i/G_{i-۱} \leqslant Z(G/G_{i-۱}).$$

پس به‌ازای هر $x \in G_i$ و هر $y \in G$،

$$(xG_{i-۱})(yG_{i-۱}) = (yG_{i-۱})(xG_{i-۱}),$$

یعنی

$$xyG_{i-۱} = yxG_{i-۱}.$$

ازاین‌رو

$$[x, y] \in G_{i-۱}.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$[G_i, G] \leqslant G_{i-۱}.$$

به‌عکس فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$،

$$[G_i, G] \leqslant G_{i-۱}.$$

فرض می‌کنیم $x \in G_i$ و $y \in G$. در این صورت

$$x^{-1}x^y = [x, y] \in G_{i-1}.$$

به‌ویژه چون $G_{i-1} \leqslant G_i$، هر گاه $x \in G_{i-1}$، آنگاه $x^y \in G_{i-1}$. لذا $G_{i-1} \trianglelefteq G$. به‌علاوه به‌ازای هر $x \in G_i$ و $y \in G$،

$$xyG_{i-1} = yxG_{i-1},$$

و در نتیجه

$$G_i/G_{i-1} \leqslant Z(G/G_{i-1}).$$

لذا این سری یک سری مرکزی است.

۴۶.۷ قضیه (i) اگر G پوچ‌توان باشد، همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G نیز پوچ‌توان‌اند.

(ii) اگر G حل‌پذیر باشد، همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G نیز حل‌پذیرند.

برهان یک سری از G، مانند

(الف) $$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت بنابر ۴.۷ (i)،

(ب) $$1 = (G_0 \cap H) \trianglelefteq (G_1 \cap H) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq (G_n \cap H) = H$$

و بنابر ۴.۷ (ii) و ۳۰.۳،

(ج) $$K/K = G_0K/K \trianglelefteq G_1K/K \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_nK/K = G/K$$

ابتدا فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان و (الف) یک سری مرکزی باشد. در این صورت بنابر ۴۵.۷ به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$[G_i, G] \leqslant G_{i-1}.$$

ازاین‌رو

$$[G_i \cap H, H] \leqslant H \cap [G_i, G] \leqslant H \cap G_{i-1},$$

و بنابر ۱۶۴،

$$[G_iK/K, G/K] = [G_i, G]K/K \leqslant G_{i-1}K/K.$$

بنابراین به‌موجب ۴۵.۷، (ب) و (ج) سریهای مرکزی‌اند، در نتیجه H و G/K پوچ‌توان‌اند.

حال فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر و (الف) یک سری آبلی باشد. در این صورت بنابر ۴.۷ (i)، به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H) \cong G_{i-1}(G_i \cap H)/G_{i-1}, \leqslant G_i/G_{i-1},$$

در نتیجه $(G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H)$ آبلی است. همین‌طور بنابر ۳۰.۳ و ۴.۷ (ii)،

$$G_iK/K \Big/ G_{i-1}K/K \cong G_iK/G_{i-1}K \cong G_i/G_{i-1}(G_i \cap K)$$

که با گروه خارج‌قسمتی G_i/G_{i-1} یکریخت است، در نتیجه $G_iK/K \Big/ G_{i-1}K/K$ آبلی است. لذا (ب) و (ج) سریهای آبلی‌اند و ازاین‌رو H و G/K حل‌پذیرند.

ردهٔ گروههای حل‌پذیر این ویژگی مهم را دارد که هر 'توسیع' یک گروه حل‌پذیر به‌وسیلهٔ گروهی حل‌پذیر باز هم حل‌پذیر است. این ویژگی شامل حالِ ردهٔ گروههای پوچ‌توان نمی‌شود.

۴۷.۷ قضیه فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. هرگاه K و G/K حل‌پذیر باشند، G حل‌پذیر است.

برهان فرض می‌کنیم که K و G/K حل‌پذیرند. در این صورت K یک سری آبلی مانند $1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m = K$, دارد. و G/K دارای یک سری آبلی است مانند

$$K/K = G_0/K \trianglelefteq G_1/K \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n/K = G/K.$$

در این صورت بنابر ۳۰.۳،

$$1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

و چون به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $G_i/G_{i-1} \cong G_i/K \Big/ G_{i-1}/K$، این سری، یک سری آبلی G است. ازاین‌رو G حل‌پذیر است.

اشاره. یک گروه غیر پوچ‌توان مانند G ممکن است یک زیرگروه نرمال مانند K داشته باشد، به‌طوری‌که K و G/K هر دو پوچ‌توان باشند. برای مثال، قرار دهید $G = \Sigma_3$ و فرض کنید که K زیرگروه یکتای G از مرتبهٔ ۳ باشد. در این صورت K و G/K هر دو آبلی‌اند، پس پوچ‌توان‌اند؛ اما همان‌گونه که در ۴۳.۷، ملاحظه کردیم G پوچ‌توان نیست.

۴۸.۷ فرع (i) فرض کنید که H و K زیرگروههای نرمال حل‌پذیر G باشند. در این صورت HK زیرگروه نرمال حل‌پذیر G است.

(ii) هر گروه متناهی دارای یک رادیکال حل‌پذیر است (۴۵.۳ را ببینید.)

برهان (i) بنابر ۳۹.۳، $HK \trianglelefteq G$ و بنابر ۴۰.۳،

$$HK/K \cong H/H \cap K.$$

چون H حل‌پذیر است، بنابر ۴۶.۷، $H/H \cap K$ حل‌پذیر است. بنابراین، چون K و HK/K حل‌پذیرند، ۴۷.۷ نشان می‌دهد که HK حل‌پذیر است.

(ii) فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی و K زیرگروه نرمال حل‌پذیر G از بزرگترین مرتبهٔ ممکن باشد. در این صورت، اگر H زیرگروه نرمال حل‌پذیر دلخواهی از G باشد،

$$K \leqslant HK,$$

و بنابر (i)، HK زیرگروه نرمال حل‌پذیر G است. ازاین‌رو به‌موجب انتخاب K، $K = HK$ و بنابراین $H \leqslant K$. لذا K این ویژگی را داراست که رادیکال حل‌پذیر G باشد.

اگر به‌جای 'حل‌پذیر'، 'پوچ‌توان' بگذاریم، استدلال فوق برقرار نخواهد بود. مع‌هذا گروههای متناهی قطعاً دارای رادیکالهای پوچ‌توان‌اند. این حکم از ۴۸.۷ ژرفتر است و ما اثباتش را تا ۶۳.۷ به تعویق می‌اندازیم.

***۳۶۴.** فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این صورت Σ_n حل‌پذیر است، اگر $n \leqslant 4$، و حل‌ناپذیر است اگر $n \geqslant 5$.

۳۶۵. گروههای $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_2)$ و $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$ حل‌پذیرند.

(راهنمایی. ۴۴ و ۱۹۳ را ببینید. اشاره. فرض کنید n یک عدد صحیح باشد، $n > 1$ و F یک میدان. چون گروه $\mathrm{GL}_n(F)$ دارای بخشی است یکریخت با $\mathrm{PSL}_n(F)$، از ۶۱.۳ و ۴۶.۷ نتیجه می‌شود که هرگاه $n > 2$، $\mathrm{GL}_n(F)$ حل‌ناپذیر است و همچنین است هنگامی‌که $n = 2$ و $|F| > 3$.)

۳۶۶. (الف) هر گروه پوچ‌توان نابدیهی مرکز نابدیهی دارد. (ر.ک. ۲۸.۴)

(ب) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G پوچ‌توان است.

(ii) هر گروه خارج‌قسمتی نابدیهی G، مرکز نابدیهی دارد.

۳۶۷. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت زوج باشد. در این صورت هر گروه از مرتبهٔ n پوچ‌توان است اگر و تنها اگر n توانی از ۲ باشد. (راهنمایی. ۱۲۴ را ببینید.)

۳۶۸. (i) هر گروه خارج‌قسمتی از یک گروه حل‌پذیر متناهی مولد؛ متناهی مولد و حل‌پذیر است.

(ii) فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$. اگر K و G/K هر دو متناهی مولد و حل‌پذیر باشند، G متناهی مولد و حل‌پذیر است.

(iii) یک زیرگروه نرمال از یک گروه حل‌پذیر متناهی مولد لزوماً متناهی مولد نیست. (راهنمایی. ۳۷.۳، ۱۴۵ و ۱۴۶ را ببینید.)

۳۶۹. فرض می‌کنیم که $\mathfrak{X}$ رده‌ای از گروهها با دو ویژگی زیر باشد.

(i) هر گروه خارج‌قسمتی از یک $\mathfrak{X}$ گروه، یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد.

(ii) هرگاه $J \trianglelefteq H$ و هم J و هم H/J، $\mathfrak{X}$ گروه باشند، H یک $\mathfrak{X}$ گروه است.

در این صورت حاصلضرب دو $\mathfrak{X}$ زیرگروه نرمال G یک $\mathfrak{X}$ زیرگروه نرمال G بوده؛ و هر گروه متناهی دارای یک $\mathfrak{X}$ رادیکال است.

۳۷۰. فرض می‌کنیم که $\mathfrak{X}$ معرف ردهٔ تمام گروههای با مرکز بدیهی باشد.

(i) ثابت کنید که اگر $J \trianglelefteq H$ و هم J و هم H/J، $\mathfrak{X}$ گروه باشند آنگاه H یک $\mathfrak{X}$ گروه است.

(ii) فرض می‌کنیم $G = \Sigma_3 \times G_2$. نشان دهید که $|O^2(G)| = 3$ و G دقیقاً سه زیرگروه از شاخص ۲ دارد، که یکی با C_6 یکریخت است و حال آنکه دوتای دیگر با Σ_3 یکریخت‌اند. ازاین‌رو نشان دهید که G دارای $\mathfrak{X}$ زیرگروههای نرمال H و K است به‌طوری‌که $G = HK$، اما G یک $\mathfrak{X}$ گروه نیست.

(اشاره. این حکم نشان می‌دهد که ویژگی (i) در ۳۶۹ لازم است. راهنمایی. ۶۰ را ببینید.)

۳۷۱. فرض می‌کنیم که $H \leqslant G$. فرض می‌کنیم که H یک زیرگروه حل‌پذیر ماکسیمال G باشد، یعنی، H حل‌پذیر باشد و هیچ زیرگروه حل‌پذیری از G وجود نداشته باشد که به‌طور حقیقی H را شامل باشد. (ر.ک. ۲۳۵ (ii)). در این صورت $N_G(H) = H$.

۴۹.۷ قضیه فرض می‌کنیم که $G = H \times K$.

(i) اگر H و K هر دو پوچ‌توان باشند، G پوچ‌توان است.

(ii) اگر H و K هر دو حل‌پذیر باشند، G حل‌پذیر است.

برهان (i) اگر H و K هر دو پوچ‌توان باشند، آنگاه سریهای مرکزی

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = H$$

و

$$1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_n = K$$

وجود دارند. با درج تکراری جملات در صورت لزوم، می‌توانیم بی‌آنکه از کلیت کاسته شود، فرض کنیم $m = n$. در این صورت، بنابر ۱۱۱،

$$1 = (H_0 \times K_0) \trianglelefteq (H_1 \times K_1) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq (H_n \times K_n) = G,$$

و بنابر ۱۶۵ و ۴۵.۷، به‌ازای هر $i = 1, \ldots, n$،

$$[H_i \times K_i, G] = ([H_i, H] \times [K_i, K]) \leqslant (H_{i-1} \times K_{i-1})\cdot$$

ازاین‌رو، بنابر ۴۵.۷، G پوچ‌توان است.

(ii) فرض می‌کنیم که H و K هر دو حل‌پذیرند. با استدلالی مشابه (i) می‌توانیم حکم را نتیجه بگیریم. یا اینکه می‌توانیم ۴۸.۷ را به‌کارگیریم: زیرا بنابر ۳۳.۲ و ۱۲.۳،

$$H \cong (H \times 1) \trianglelefteq G \quad \text{و} \quad K \cong (1 \times K) \trianglelefteq G,$$

و روشن است که

$$G = (H \times 1)(1 \times K)\cdot$$

۵۰.۷ قضیه فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای نرمال G هستند.

(i) اگر G/H و G/K هر دو پوچ‌توان باشند، $G/(H \cap K)$ پوچ‌توان است.

(ii) اگر G/H و G/K هر دو حل‌پذیر باشند، $G/(H \cap K)$ حل‌پذیر است.

(iii) هر گروه متناهی یک ماندهٔ پوچ‌توان و یک ماندهٔ حل‌پذیر دارد (۴۵.۳ را ببینید).

برهان (i) بنابر ۱۰۹، $G/(H \cap K)$ می‌تواند در $(G/H) \times (G/K)$ نشانده شود. ازاین‌رو اگر G/H و G/K هر دو پوچ‌توان باشند، آنگاه از ۴۹.۷ و ۴۶.۷ نتیجه می‌شود که $G/(H \cap K)$ پوچ‌توان است.

(ii) استدلالی مشابه با (i) را می‌توان به‌کارگرفت. به‌طور دیگر، می‌توانیم همانند زیر استدلال کنیم. بنابر ۴۰.۳

$$H/(H \cap K) \cong HK/K \leqslant G/K\cdot$$

ازاین‌رو، اگر G/K حل‌پذیر باشد، از ۴۶.۷ نتیجه می‌شود که $H/(H \cap K)$ حل‌پذیر است. درصورتی‌که G/H نیز حل‌پذیر باشد؛ ۳۰.۳ و ۴۷.۷ نشان می‌دهند که $G/(H \cap K)$ حل‌پذیر است.

(iii) فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی و K زیرگروه نرمال G ازکوچکترین مرتبهٔ ممکن باشد، به‌طوری که G/K پوچ‌توان باشد. در این صورت؛ اگر $H \trianglelefteq G$ و G/H پوچ‌توان باشد،

$$H \cap K \leqslant K$$

و بنابر (i)، $G/(H \cap K)$ پوچ‌توان است. ازاین‌رو، با توجه به انتخاب K، $H \cap K = K$ و در نتیجه $K \leqslant H$. لذا G/K ماندهٔ پوچ‌توان G است. استدلالی دقیقاً مشابه همین استدلال و استفاده از (ii) نشان می‌دهد که G دارای ماندهٔ حل‌پذیر است.

نشان می‌دهیم که در میان تمام سریهای آبلیِ یک گروه حل‌پذیر، یک سری وجود دارد که به‌طور سریع کاهش می‌یابد، و نیز در میان تمام سریهای مرکزیِ یک گروه پوچ‌توان، یک سری وجود دارد که خیلی سریعتر از همه کاهش می‌یابد و یکی دیگر که خیلی سریعتر از همه افزایش پیدا می‌کند.

۵۱.۷ تعریف زیرگروههای $G^{(n)}$ از G را به‌ازای هر عدد صحیح نامنفیِ n، به‌طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$G^{(0)} = G,$$

و به‌ازای هر عدد صحیح $n > 0$،

$$G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}] = (G^{(n-1)})'\cdot$$

بدین‌ترتیب $G^{(1)} = G'$. معمول است که می‌نویسند $G^{(2)} = G''$ و $G^{(3)} = G'''$.

هر $G^{(n)}$ در G مشخصه است: این مطلب از ۵۱.۳ با استقرا بر n نتیجه می‌شود. بنابه تعریف

$$G = G^{(0)} \geqslant G^{(1)} \geqslant G^{(2)} \geqslant \cdots$$

این دنبالهٔ نزولی از زیرگروههای مشخصهٔ G سری مشتق[1] G نامیده می‌شود.

اگر به‌ازای مقداری از n؛ $G^{(n)} = G^{(n+1)}$ آنگاه روشن است که به‌ازای هر عدد صحیح $r \geqslant n$، $G^{(n)} = G^{(r)}$. در این حالت می‌گوییم که سری مشتق مختوم است. سری مشتق یک گروه متناهی باید مختوم باشد؛ اما اگر G نامتناهی باشد، سری مشتق G لزوماً مختوم نیست و بنابراین اکیداً یک سری به مفهوم ۱.۷ نیست. ولی، ما نشان می‌دهیم که اگر G حل‌پذیر باشد، سری مشتق G به ۱ مختوم است.

۵۲.۷ قضیه (i) G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر به‌ازای عدد صحیحی چون n، $G^{(n)} = 1$.

(ii) گیریم که G حل‌پذیر است و فرض می‌کنیم n کوچکترین عدد صحیحی باشد که $G^{(n)} = 1$. در این صورت n را طول مشتق G می‌نامیم. به‌ازای هر سری آبلی G، مثلِ

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_r = 1$$

برای هر $i = 0, 1, \ldots, r$ داریم

$$G_i \geqslant G^{(i)}$$

به‌ویژه $r \geqslant n$.

برهان اگر به‌ازای مقداری از n، $G^{(n)} = 1$، آنگاه

$$G = G^{(0)} \geqslant G^{(1)} \geqslant \cdots \geqslant G^{(n)} = 1$$

یک سری G است، در واقع یک سری نرمال G؛ و بنابر ۵۲.۳، هر عامل $G^{(i-1)}/G^{(i)}$ آبلی است $(i = 1, \ldots, n)$. ازاین‌رو G حل‌پذیر است.

به‌عکس فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر است و فرض می‌کنیم

$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq G_r = 1$$

۱. توجه خوانندگان را به این نکته جلب می‌کنیم که در اینجا منظور از مشتق، دیفرانسیل نیست. م.

یک سری آبلی G باشد. با استقرا بر i ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $i = 0, 1, \ldots, r$

$$G_i \geqslant G^{(i)}.$$

این حکم برای $i = 0$ بدیهی است. فرض می‌کنیم که $i > 0$ و به استقرا داشته باشیم

$$G_{i-1} \geqslant G^{(i-1)}.$$

چون $G_{i-1} \trianglerighteq G_i$ و G_{i-1}/G_i آبلی است، ۵۲.۳ نشان می‌دهد که

$$G_i \geqslant G'_{i-1} \geqslant (G^{(i-1)})' = G^{(i)}.$$

بنابراین اثبات به استقرا پایان می‌یابد. به‌ویژه، چون $G^{(r)} \geqslant G_r = 1$، $G^{(r)} = 1$.

اشارات. حکم (ii) به‌طور خلاصه با این ملاحظه بیان می‌شود که سری مشتق یک گروه حل‌پذیر، یک سری آبلی است که از همهٔ سریهای آبلی آن سریعتر کاهش می‌یابد. توجه داشته باشید که حکم اخیر نشان می‌دهد که یک گروه حل‌پذیر، که بنا به تعریف گروهی است با یک سری آبلی، عملاً یک سری نرمال آبلی دارد. همین‌طور توجه داشته باشید که گروههای حل‌پذیر با طول مشتق ۱ دقیقاً گروههای آبلی نابدیهی‌اند. در ۲۳.۹ نشان خواهیم داد که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، گروههایی حل‌پذیر با طول مشتق n وجود دارند.

۳۷۲. طول مشتق‌های Σ_3، A_4 و Σ_4 را بیابید (۳۶۴ و ۴۶.۷ را ببینید).

***۳۷۳.** فرض می‌کنیم که m و n اعداد صحیح مثبتی باشند.

(i) فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر است با طول مشتق n. در این صورت طول مشتق هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتیِ G حداکثر برابر با n است.

(ii) فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$. فرض کنید که K حل‌پذیر است، با طول مشتق n، و G/K حل‌پذیر است، با طول مشتق m. در این صورت طول مشتق G حداکثر برابر با $n + m$ است.

(iii) فرض کنید که $G = H \times K$. گیریم H حل‌پذیر باشد، با طول مشتق m، و K حل‌پذیر باشد، با طول مشتق n. در این صورت طول مشتق G برابر است با $\max\{m, n\}$. (۴۶.۷، ۴۷.۷ و ۴۹.۷ را ببینید.)

***۳۷۴.** (الف) هر گروه حل‌پذیر نابدیهی، یک زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی دارد و نیز دارای یک گروه خارج‌قسمتیِ آبلی نابدیهی است.

(ب) فرض کنید که G یک گروه متناهی باشد. در این صورت سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G حل‌پذیر است.

(ii) هر زیرگروه نرمال نابدیهی G دارای یک گروه خارج‌قسمتی آبلی نابدیهی است.
(iii) هر گروه خارج‌قسمتی از G دارای یک زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی است. (ر.ک. ۳۶۶)

۳۷۵. فرض می‌کنیم که $H \leqslant G$.
(i) در این صورت $H^GG' = HG'$، که H^G بستار نرمال H در G است. (۱۸۰ را ببینید.)
(ii) فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر است. در این صورت $H^G = G$ اگر و تنها اگر $HG' = G$.

۵۳.۷ تعاریف زیرگروههای $\Gamma_n(G)$ و $Z_n(G)$ را به‌طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم که $\Gamma_1(G) = G$ و $Z_0(G) = 1$. سپس به‌ازای هر عدد صحیح $n > 1$،

$$\Gamma_n(G) = [\Gamma_{n-1}(G), G]$$

و به‌ازای هر عدد صحیح $n > 0$،

$$Z_n(G)/Z_{n-1}(G) = Z(G/Z_{n-1}(G)).$$

در این صورت

(الف) $$G = \Gamma_1(G) \geqslant \Gamma_2(G) \geqslant \Gamma_3(G) \geqslant \cdots$$

و

(ب) $$1 = Z_0(G) \leqslant Z_1(G) \leqslant Z_2(G) \leqslant \cdots$$

دنبالهٔ نزولی (الف) را سری مرکزی پایینی G و دنبالهٔ صعودی (ب) را سری مرکزی بالایی G می‌نامیم.

جملات (الف) و (ب) زیرگروههای مشخصهٔ G هستند: این مطلب با استقرا بر n و با استفاده از ۵۱.۳ برای (الف) و استفاده از ۱۱۸ و ۱۳۶ برای (ب)، ثابت می‌شود. عاملهای (الف) و (ب) جملگی مرکزی‌اند، به‌موجب ۱۶۲ برای (الف) و بلافاصله توسط تعریفِ (ب). اما اگر G غیر پوچ‌توان باشد، به مفهوم ۴۲.۷، (الف) و (ب) سریهای مرکزی G نیستند، زیرا به‌ترتیب به ۱ و G مختوم نیستند (و در حقیقت اگر G نامتناهی باشد لزومی ندارد مختوم باشند.). اما اگر G پوچ‌توان باشد مختوم‌اند؛ همان‌گونه که اکنون نشان می‌دهیم.

توجه داشته باشید که شماره‌گذاری جملات (الف) از ۱ شروع می‌شود، ولی شماره‌گذاری جملات (ب) از ۰: این قراردادی است. همین‌طور توجه داشته باشید که بنابه تعریف $\Gamma_2(G) = G'$، ولی غالباً $\Gamma_3(G) \neq G''$: ۳۷۶ را ببینید.

۵۴.۷ قضیه (الف) سه حکم زیر هم‌ارزند:
(i) G پوچ‌توان است.
(ii) برای یک عدد صحیح n، $\Gamma_n(G) = 1$.
(iii) برای یک عدد صحیح n، $Z_n(G) = G$.
(ب) فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان باشد. در این صورت برای هر سری مرکزی G مثلاً

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G,$$

برای $i = 0, 1, \ldots, r$ داریم:

$$\Gamma_{r-i+1}(G) \leqslant G_i \leqslant Z_i(G)$$

به‌علاوه کوچکترین عدد صحیح c به‌طوری‌که $\Gamma_{c+1}(G) = 1$، برابر است با کوچکترین عدد صحیح c به‌طوری‌که $Z_c(G) = G$: این عدد صحیح c را ردهٔ پوچ‌توانی گروه G می‌نامیم.

برهان اگر برای مقداری از n، $\Gamma_n(G) = 1$، آنگاه

$$G = \Gamma_1(G) \geqslant \Gamma_2(G) \geqslant \cdots \geqslant \Gamma_n(G) = 1$$

یک سری مرکزی G است، در نتیجه G پوچ‌توان است.
همچنین، اگر به‌ازای مقداری از n، $Z_n(G) = G$، آنگاه

$$1 = Z_0(G) \leqslant Z_1(G) \leqslant \cdots \leqslant Z_n(G) = G$$

یک سری مرکزی G است، و در نتیجه G پوچ‌توان است.
اکنون به‌عکس فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان باشد و

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G$$

یک سری مرکزی G باشد. ابتدا با استقرا بر i ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $i = 0, 1, \ldots, r$،

$$G_i \leqslant Z_i(G).$$

این مطلب برای $i = 0$ بدیهی است. فرض می‌کنیم که $i > 0$ و به استقرا داشته باشیم

$$G_{i-1} \leqslant Z_{i-1}(G).$$

در این صورت

$$G_{i-1}Z_{i-1}(G) = Z_{i-1}(G).$$

بنابه فرض $G_i/G_{i-1} \leqslant Z(G/G_{i-1})$. ازاین‌رو به‌موجب ۱۵۱،

$$G_iZ_{i-1}(G)/Z_{i-1}(G) \leqslant Z(G/Z_{i-1}(G)) = Z_i(G)/Z_{i-1}(G).$$

بنابراین

$$G_i \leqslant Z_i(G).$$

بدین‌ترتیب اثبات به استقرا پایان می‌یابد. به‌ویژه، چون $G = G_r \leqslant Z_r(G)$، $Z_r(G) = G$.
حال با استقرا بر j ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر $j = 0, 1, \dots, r$

$$\Gamma_{j+1}(G) \leqslant G_{r-j}.$$

این حکم برای $j = 0$ بدیهی است. فرض می‌کنیم که $j > 0$ و به استقرا داشته باشیم

$$\Gamma_j(G) \leqslant G_{r-j+1}.$$

بنابر ۴۵.۷

$$[G_{r-j+1}, G] \leqslant G_{r-j}.$$

ازاین‌رو

$$\Gamma_{j+1}(G) = [\Gamma_j(G), G] \leqslant [G_{r-j+1}, G] \leqslant G_{r-j}.$$

بار دیگر اثبات به استقرا به پایان می‌رسد. به‌ویژه، چون $\Gamma_{r+1}(G) \leqslant G_0 = 1$، $\Gamma_{r+1}(G) = 1$.
فرض می‌کنیم c کوچکترین عدد صحیحی باشد که $Z_c(G) = G$. در این صورت می‌توانیم به‌ازای $i = 0, 1, \dots, c$ چنین انتخاب کنیم که $G_i = Z_i(G)$ و $r = c$. به‌موجب آنچه ثابت کردیم، نتیجه می‌شود که $\Gamma_{c+1}G = 1$. ادعا می‌کنیم که اگر $c > 0$، $\Gamma_c(G) \neq 1$. برخلاف این ادعا، فرض کنیم که $\Gamma_c(G) = 1$. بنابراین می‌توانیم به‌ازای $i = 0, 1, \dots, c-1$، چنین انتخاب کنیم که $G_i = \Gamma_{c-i}(G)$ و $r = c-1$. اما در این صورت؛ به‌موجب آنچه ثابت کردیم نتیجه

می‌شود که $Z_{c-1}(G) = G$؛ و این مطلب با تعریف c در تناقض است. به‌این‌ترتیب $\Gamma_c(G) \neq 1$ و c کوچکترین عدد صحیحی است که $\Gamma_{c+1}(G) = 1$.
اشارات. این قضیه نشان می‌دهد که اگر G گروهی پوچ‌توان باشد، سری مرکزی پایینی G، سریعترین سری مرکزی کاهش یابنده است و سری مرکزی بالایی G، سریعترین سری مرکزی افزایش یابنده است. توجه داشته باشید که گروههای پوچ‌توان با ردهٔ ۱، گروههای آبلی نابدیهی‌اند.

۳۷۶*. (i) به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $G^{(n-1)} \leqslant \Gamma_n(G)$.
(ii) مثالی از یک گروه مانند G ارائه دهید به‌طوری‌که $G'' < \Gamma_3(G)$.

۳۷۷. (i) فرض می‌کنیم که $|G| = p^n$، که n یک عدد صحیح است و $n \geqslant 2$. در این صورت G پوچ‌توان از ردهٔ حداکثر $n-1$ است.
(ii) فرض می‌کنیم n عددی صحیح باشد، $n \geqslant 3$. در این صورت گروه دووجهی D_{2^n} با مرتبهٔ 2^n دارای ردهٔ $n-1$ است. (راهنمایی. ۱۲۴ را ببینید.)

۳۷۸. فرض می‌کنیم m و n اعداد صحیح مثبتی باشند.
(i) فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان از ردهٔ n است. در این صورت هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتیِ G دارای ردهٔ حداکثر n است.
(ii) فرض می‌کنیم $G = H \times K$ و H پوچ‌توان از ردهٔ m و K پوچ‌توان از ردهٔ n است. در این صورت ردهٔ G برابر است با $\max\{m, n\}$. (۴۶.۷ و ۴۹.۷ را ببینید: رک. ۳۷۳)

حال عاملهای ترکیبی و اصلی گروههای پوچ‌توان و حل‌پذیر متناهی را در نظر می‌گیریم.

۵۵.۷ (رک. ۶.۳) تنها گروههای سادهٔ حل‌پذیر گروههایی هستند که مرتبهٔ آنها عدد اول است.

برهان فرض می‌کنیم که G یک گروه سادهٔ حل‌پذیر باشد. چون $G \neq 1$، ۵۲.۷ نشان می‌دهد که $G' < G$. در این صورت، چون $G' \lhd G$ و G ساده است، $G' = 1$. بنابراین G آبلی است. حال از ۶.۳ نتیجه می‌شود که G متناهی و مرتبهٔ آن عدد اول است.

۵۶.۷ قضیه فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد. در این صورت سه حکم زیر هم‌ارزند:
(i) G حل‌پذیر است.
(ii) مرتبهٔ هر عامل ترکیبی G عدد اول است.
(iii) هر عامل اصلی G آبلی مقدماتی است.

برهان گیریم G حل‌پذیر است. عامل ترکیبی H/J از G، یک گروه خارج‌قسمتی از یک زیرگروه G است و ازاین‌رو بنابر ۴۶.۷؛ حل‌پذیر است. اما گذشته از این به‌موجب ۲.۷، H/J ساده است. بنابراین؛ مطابق ۵۵.۷، مرتبهٔ H/J عدد اول است.

فرض می‌کنیم که n طول مشتق G باشد. در این صورت سری مشتق G،

$$1 = G^{(n)} \lhd G^{(n-1)} \lhd \cdots \lhd G' \lhd G$$

سری نرمال حقیقی G است، که می‌تواند به یک سری اصلی G تظریف شود (مطابق شرح ویژهٔ ۹.۷ برای گروههای با عملگرها). چون عاملهای سری مشتق آبلی‌اند، در نتیجه عاملهای این سری اصلی نیز چنین‌اند. به‌علاوه، بنابر قضیهٔ ژوردان-هولدر، هر عامل اصلی G با یکی از عاملهای این سری اصلی خاص یکریخت است. بدین‌ترتیب تمام عاملهای اصلی G آبلی‌اند. بنابر ۳۸.۷، این عاملها همچنین مشخصه‌یی-ساده‌اند. ازاین‌رو، بنابر ۴۱.۷، مقدماتی‌اند.

به‌عکس فرض می‌کنیم که یا مرتبهٔ هر عامل ترکیبی G عدد اول باشد و یا هر عامل اصلی G آبلی مقدماتی باشد. در این صورت یا یک سری ترکیبی یا یک سری اصلی G یک سری آبلی G خواهد بود. بنابراین G حل‌پذیر است.

اشارات. این قضیه به‌ویژه نشان می‌دهد که یک گروه حل‌پذیر متناهی دارای یک سری است که تمام عاملهایش دوری‌اند. این امر در حالت کلی برای گروههای حل‌پذیر نامتناهی صادق نیست: ۳۸۷ را ببینید.

یک گروه حل‌پذیر متناهی در حالت کلی فاقد سری نرمالی است که تمام عاملهایش دوری باشند: ۳۴.۷ این موضوع را نشان می‌دهد. به‌علاوه ۳۸۹ را ببینید.

۵۷.۷ فرض می‌کنیم که G یک سری اصلی دارد. در این صورت هر عامل اصلی مرکزی G متناهی و مرتبهٔ آن عدد اول است.

برهان با توجه به ۳۶.۷، کافی است یک زیرگروه نرمال مینیمال L از G را در نظر بگیریم به‌طوری‌که $L \leqslant Z(G)$ و نشان دهیم که برای یک عدد اول p، $|L| = p$. چون $L \leqslant Z(G)$، هر زیرگروه L در G نرمال است (۱۱۸). بنابراین، چون L در G نرمال مینیمال است، تنها زیرگروههای L عبارت‌اند از ۱ و L. ازاینجا نتیجه می‌شود (۲۹) که به‌ازای یک عدد اول p، $|L| = p$.

۵۸.۷ قضیه فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G پوچ‌توان است.

(ii) هر عامل اصلی G مرکزی است.

برهان فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان است. چون گروههای خارج‌قسمتی گروههای پوچ‌توان پوچ‌توان‌اند (۴۶.۷)، کافی است بنابر ۳۶.۷ ثابت می‌کنیم که هر زیرگروه نرمال مینیمال G در مرکز G قرار دارد. فرض می‌کنیم که L یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد. در این صورت بنابر ۵۱.۳ و ۵۳.۳،

$$[L,G] \trianglelefteq G \quad \text{و} \quad [L,G] \leqslant L.$$

چون L در G نرمال مینیمال است، نتیجه می‌شود که

$$[L,G] = 1 \quad \text{یا} \quad [L,G] = L.$$

فرض می‌کنیم که $[L,G] = L$. در این صورت با استقرا بر n نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$L \leqslant \Gamma_n(G).$$

این مطلب برای $n = 1$ بدیهی است. فرض می‌کنیم که $n > 1$ و به استقرا داشته باشیم که

$$L \leqslant \Gamma_{n-1}(G).$$

در این صورت

$$L = [L,G] \leqslant [\Gamma_{n-1}(G), G] = \Gamma_n(G) \qquad \text{بنابر تعریف}$$

که اثبات به استقرا را کامل می‌کند. چون G پوچ‌توان است، ۵۴.۷ نشان می‌دهد که برای مقداری از n،

$$\Gamma_n(G) = 1.$$

ازاین‌رو نتیجه می‌شود که $L = 1$ و این با تعریف L در تناقض است. بنابراین $[L,G] = 1$؛ یعنی، $L \leqslant Z(G)$، آنچه مطلوب بود.

اگر به‌عکس هر عامل اصلی G مرکزی باشد آنگاه سری اصلی G، یک سری مرکزی G خواهد بود و در نتیجه G پوچ‌توان است.

اشارات. بنابر ۵۷.۷ و ۵۸.۷ مرتبهٔ هر عامل اصلی از یک گروه پوچ‌توان متناهی عددی اول است. ولی چنین نیست که اگر مرتبهٔ هر عامل اصلی گروه متناهی G عدد اول باشد، G پوچ‌توان است:

برای مثال، فرض می‌کنیم که $G = \Sigma_3$ و ۴۳.۷ را ببینید. استلزام (ii) ⇒ (i) در ۵۸.۷ را همین‌طور می‌توان با به‌کاربردن قضیهٔ ژوردان-هولدر برای سریهای اصلی، به اضافهٔ **۳۵۶** ثابت کرد.

۳۷۹. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد و $|G| = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$، که s، m_1، $\cdots$، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند و p_1، $\cdots$، p_s اعداد اول متمایز. در این صورت G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر طول ترکیبی G برابر $\sum_{j=1}^{s} m_j$ باشد.

۳۸۰. فرض می‌کنیم که G یک گروه حل‌پذیر باشد. در این صورت G دارای یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر G متناهی باشد (رک. **۳۲۰**)

***۳۸۱.** فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(الف) اگر G حل‌پذیر و نابدیهی باشد آنگاه مقسوم‌علیه‌های اولی چون p و q متعلق به $|G|$ وجود دارند به‌طوری‌که $1 < O_p(G)$ و $O^q(G) < G$. (ممکن است $p = q$.)

(ب) سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G حل‌پذیر است.

(ii) برای هر زیرگروه نرمال حقیقی K از G، یک مقسوم‌علیه اول p از $|G/K|$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$K/K < O_p(G/K).$$

(iii) برای هر زیرگروه مشخصهٔ نابدیهی K از G، مقسوم‌علیه اول q از $|K|$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$O^q(K) < K.$$

(راهنمایی. برای اینکه نشان دهید (i) ⇒ (ii) و (i) ⇒ (iii) با استقرا بر $|G|$ استدلال کنید. از ۹۳ و ۱۵۶ استفاده کنید.)

۳۸۲. فرض می‌کنیم p و q اعداد اول متمایزی باشند و فرض می‌کنیم $\varpi = \{p, q\}$. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) تنها ϖ گروههای سادهٔ متناهی، گروههای از مرتبه‌های p و q اند.

(ii) هر ϖ گروه متناهی حل‌پذیر است.

(اشاره. این حکمها هر دو صادق‌اند. آنها بیانهای هم‌ارزی از قضیهٔ برنساید هستند که پس از ۲۹.۴ توضیح داده شده است.)

***۳۸۳.** دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) هر گروه سادهٔ متناهی ناآبلی زوج‌مرتبه است.

(ii) هر گروه فردمرتبه حل‌پذیر است.

(اشاره. این حکمها هر دو صادق‌اند. آنها بیانهای هم‌ارزی از قضیهٔ فایت و تامپسن هستند که در ۱۲.۱ بیان شده است.)

۳۸۴. اگر G حل‌ناپذیر باشد و $|G| \leqslant 100$، آنگاه $G \cong A_5$. (راهنمایی. از ۳۰.۵ استفاده کنید.)

۳۸۵. فرض می‌کنیم که $G = \mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}_2)$.

(i) در این صورت $|G| = 168 = 2^3 \times 3 \times 7$. (۱۶.۲ و ۱۷.۲ را ببینید.)

(ii) هر گروه مرتبهٔ ۱۶۸ که ساده نباشد باید حل‌پذیر باشد. (راهنمایی. از ۳۸۴ استفاده کنید.)

(iii) اعضای مرتبهٔ ۳ و ۷ از G را بیابید. نشان دهید که G نمی‌تواند زیرگروه نرمالی از مرتبهٔ ۳ یا ۷ داشته باشد. نتیجه بگیرید که اگر G حل‌پذیر باشد، آنگاه G یک ۲ زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی مانند A دارد. (راهنمایی. توجه داشته باشید که اگر G زیرگروه نرمالی از مرتبهٔ ۳ داشته باشد، آن زیرگروه ۳ زیرگروه سیلو یکتای G خواهد بود: به‌همین‌نحو است با ۷ به‌جای ۳.)

(iv) فرض می‌کنیم که

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

از (iii) نتیجه بگیرید که اگر G حل‌پذیر باشد، $g \in A$. نشان دهید که g با هر مزدوج g در G جابه‌جایی‌پذیر نیست. (راهنمایی. ۱۲۰، ۲۵۲ (iv)، ۲۶۰ و ۸.۵ را ببینید.)

(v) نتیجه بگیرید که G ساده است.

۳۸۶. (i) اگر G حل‌ناپذیر باشد و $|G| \leqslant 200$، آنگاه $|G| = 60$ یا ۱۲۰ یا ۱۶۸ یا ۱۸۰. (راهنمایی. ۲۹۶ و ۳۸۴ را ببینید.)

(ii) گروههایی حل‌ناپذیر از مرتبه‌های ۶۰، ۱۲۰، ۱۶۸ و ۱۸۰ وجود دارند.

۳۸۷. یک گروه را 'چنددوری' گوییم اگر یک سری داشته باشد که همهٔ عاملهایش دوری باشند. ازاین‌رو هر گروه چنددوری حل‌پذیر است و بنابر ۵۶.۷ هر گروه حل‌پذیر متناهی، چنددوری است.

(i) فرض می‌کنیم که G یک گروه چنددوری باشد. فرض می‌کنیم که G یک سری به طول n دارد، به‌طوری‌که همهٔ عاملهایش دوری‌اند، و n یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت G یک گروه n مولدی است. به‌علاوه هر زیرگروه و هر گروه خارج‌قسمتیِ G یک سری به طول

n دارد که همهٔ عاملهایش دوری‌اند. بدین‌ترتیب همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G، گروههای چنددوری n مولدی هستند.

(ii) فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$. اگر K و G/K هر دو چنددوری باشند، G چند دوری است.

(iii) چنین نیست که هرگروه حل‌پذیر متناهی مولد چنددوری باشد (راهنمایی. ۳۶۸ را ببینید.)

۳۸۸. (الف) فرض می‌کنیم که G یک گروه آبلی n مولدی باشد، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت G چنددوری است (۳۸۷) و تمام زیرگرههای G، گروههایی n مولدی هستند.

(ب) سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) هر زیرگروه نرمال G متناهی مولد و حل‌پذیر است.

(ii) G چنددوری است.

(iii) هر زیرگروه G متناهی مولد و حل‌پذیر است.

(راهنمایی. برای اثبات (i) $\Rightarrow$ (ii)؛ سری مشتق G را در نظر بگیرید و از (الف) و ۳۸۷ (ii) استفاده کنید.)

۳۸۹*. یک گروه را زَبَرحل‌پذیر می‌گوییم اگر یک سری نرمال داشته باشد که همهٔ عاملهایش دوری باشند. بدین‌ترتیب یک گروه زَبَرحل‌پذیر به‌خصوص چنددوری است (۳۸۷)؛ ولی عکس آن برقرار نیست، همچنان‌که ۳۴.۷ نشان می‌دهد.

(i) اگر G زَبَرحل‌پذیر باشد، همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G زَبَرحل‌پذیرند.

(ii) فرض می‌کنیم که $G = H \times K$. اگر H و K هر دو زَبَرحل‌پذیر باشند، G زَبَرحل‌پذیر است.

(iii) با یک مثال نشان دهید که یک گروه نازَبَرحل‌پذیر G می‌تواند یک زیرگروه نرمال K داشته باشد به‌طوری‌که K و G/K هر دو زَبَرحل‌پذیر باشند.

(iv) هر گروه پوچ‌توان متناهی زَبَرحل‌پذیر است. با یک مثال نشان دهید که چنین نیست که هر گروه زَبَرحل‌پذیر متناهی پوچ‌توان باشد.

(v) فرض می‌کنیم که G متناهی است. در این صورت G زَبَرحل‌پذیر است اگر و تنها اگر مرتبهٔ هر عامل اصلی G عددی اول باشد.

۳۹۰*. (i) فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$ و $K \leqslant H \leqslant G$. مرکزساز H/K در G، بنابه تعریف، زیرگروه J از G است به‌طوری‌که $K \leqslant J$ و $J/K = C_{G/K}(H/K)$. می‌نویسیم $J = C_G(H/K)$. در این صورت همچنین $C_G(H/K) = \{g \in G : [g,h] \in K, \text{به‌ازای هر } h \in H\}$ (رک. ۱۶۲) به‌علاوه، اگر $H \trianglelefteq G$ آنگاه $C_G(H/K) \trianglelefteq G$ و $G/C_G(H/K)$ را می‌توان در $\mathrm{Aut}(H/K)$ نشانید. (راهنمایی. از ۳۰.۳ و ۳۶.۴ استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم که یک سری نرمال از G، مثل

$$G = G_0 \geqslant G_1 \geqslant \cdots \geqslant G_r = 1,$$

وجود داشته باشد به‌طوری‌که $G_1 = G'$ و به‌ازای هر $i \geqslant 1$، G_i/G_{i+1} دوری باشد. در این صورت G' پوچ‌توان است. (راهنمایی. از (i)، ۳۸.۴، ۵۲.۳ و ۴۵.۷ استفاده کنید.)

(iii) اگر G زَبَرحل‌پذیر باشد (۳۸۹)، G' پوچ‌توان است. (راهنمایی. از قضیهٔ شرایر برای گروههای با عملگرها و (ii) استفاده کنید.)

ساختار حسابی گروههای پوچ‌توان و حل‌پذیر متناهی را در فصل ۱۱ مطالعه خواهیم کرد.

۵۹.۷ قضیه فرض می‌کنیم که G یک گروه پوچ‌توان باشد و c ردهٔ G باشد. در این صورت به‌ازای هر زیرگروه H از G، یک سری به طول c از H به G وجود دارد. به‌ویژه هر زیرگروه G در G زیرنرمال است. (توجه کنید که این قضیه به اتفاق ۴۴.۷، اثبات دیگری از ۱۴.۷ را به‌دست می‌دهد.)

برهان برای هر عدد صحیح $i \geqslant 0$، فرض می‌کنیم $Z_i = Z_i(G)$. در این صورت (۵۴.۷ را ببینید.)

$$1 = Z_0 < Z_1 < \cdots < Z_c = G.$$

این سری یک سری نرمال از G است، در نتیجه بنابر ۳۸.۳،

$$H = HZ_0 \leqslant HZ_1 \leqslant \cdots \leqslant HZ_c = G. \qquad \text{(الف)}$$

چون مرکز هرگروه هر زیرگروه آن را به نرمال بدل می‌کند و چون بنابه تعریف به‌ازای هر $i = 1, \ldots, c$،

$$Z_i/Z_{i-1} = Z(G/Z_{i-1})$$

داریم

$$Z_i/Z_{i-1} \leqslant N_{G/Z_{i-1}}(HZ_{i-1}/Z_{i-1}).$$

ازاین‌رو

$$HZ_{i-1}/Z_{i-1} \trianglelefteq (HZ_{i-1}/Z_{i-1})(Z_i/Z_{i-1}) = HZ_i/Z_{i-1},$$

و در نتیجه بنابر ۳۰.۳، به‌ازای هر $i = 1, \ldots, c$،

$$HZ_{i-1} \trianglelefteq HZ_i.$$

بدین‌ترتیب (الف) یک سری به طول c از H به G است.

۶۰.۷ می‌توان به‌عکس پرسید که آیا گروهی که هر زیرگروهش زیرنرمال است لزوماً پوچ‌توان است. در ۳.۱۱ ثابت خواهیم کرد که این مطلب برای گروههای متناهی صادق است. این سئوال کلی به مدت زیادی حل نشده مانده بود تا اینکه در ۱۹۶۸ عدم وجود آن به‌وسیلهٔ هـ. هاینکن و ی. ج. محمد [a۵۴] ثابت شد. آنها ثابت کردند که گروههای حل‌پذیر نامتناهی G از طول مشتق ۲ با $Z(G) = 1$ وجود دارند، که بدین‌ترتیب پوچ‌توان نیستند، ولی همهٔ زیرگروههای حقیقی در G پوچ‌توان و زیرنرمال‌اند.

همهٔ زیرگروههای هر گروه آبلی A در A نرمال‌اند. همچنین می‌دانیم که گروهی ناآبلی وجود دارد که همهٔ زیرگروههایش نرمال‌اند، یعنی گروه چهارگان Q_8: ۱۸۱ را ببینید. یک قضیه کلاسیک منسوب به ددکیند وجود دارد که شرح کاملی از گروههایی ناآبلی که تمام زیرگروههایشان نرمال‌اند به‌دست می‌دهد: هوپرت [b۲۱] ص ۳۰۸، قضیهٔ ۱۲.۷.۳، یا شنکمن [b۳۵] ص ۱۹۵، قضیهٔ g.۴.۶ یا اسکات [b۳۶] ص ۲۵۳ قضیهٔ ۴.۷.۹، یا زاسنهاوس [b۴۱] ص ۱۵۹، بخش ۶.۴ را ببینید. چنین گروههایی پوچ‌توان‌اند از ردهٔ ۲. با تکیه بر این قضیه، ج. ی. رُز بلید [a۸۱] ثابت کرد که اگر G گروهی باشد که برای آن یک عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر زیرگروه H از G یک سری به طول n از H به G وجود داشته باشد آنگاه G پوچ‌توان است و ردهٔ G به‌وسیلهٔ تابعی از n از بالاکراندار است. این قضیه بخشی از تعمیم قضیه‌ای است که باید در ۳.۱۱ ثابت شود.

۶۱.۷ تعریف به منظور اثبات قضیه مهم بعدی، مناسب است جابه‌جاگرهای بالاتر را تعریف کنیم. اگر H، J و K زیرگروههایی از G باشند آنگاه ممکن است داشته باشیم

$$[[H, J], K] \neq [H, [J, K]]$$

۳۹۳ را ببینید. در این مرحله برای سادگی نمادگذاری ما این قرارداد را قبول می‌کنیم که

$$[H, J, K] = [[H, J], K].$$

این قراردادی است معمول.

فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و فرض می‌کنیم G_1، G_2، $\cdots$، G_n زیرگروههای (نه لزوماً متمایز) G باشند. در این صورت چنین تعریف می‌کنیم

$$[G_1, G_2, \dots, G_n] = \begin{cases} G_1, & \text{اگر } n = 1 \\ [[\cdots[[G_1, G_2], G_3], \dots, G_{n-1}], G_n], & \text{اگر } n \geqslant 2 \end{cases}$$

به‌عنوان مثال، با این نمادگذاری برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\Gamma_n(G) = [G, G, \dots, G],$$

که در آن G در سمت راست nبار ظاهر شده است.

۶۲.۷ لم فرض می‌کنیم که r و s اعداد صحیح مثبتی باشند به‌طوری‌که $r \leqslant s$، و فرض می‌کنیم G_1، G_2، $\cdots$، G_s و H و K زیرگروههای نرمال G باشند. در این صورت

$$\begin{aligned}&[G_1, G_2, \dots, G_{r-1}, HK, G_{r+1}, \dots, G_s]\\ &= [G_1, \dots, G_{r-1}, H, G_{r+1}, \dots, G_s][G_1, \dots, G_{r-1}, K, G_{r+1}, \dots, G_s].\end{aligned}$$

برهان اگر $r = s = 1$، حکم بدیهی است. ابتدا فرض می‌کنیم که $r = s > 1$ و $J = [G_1, G_2, \dots, G_{r-1}]$. در این صورت

$$\begin{aligned}[G_1, G_2, \dots, G_{r-1}, HK] &= [J, HK] && \text{(بنابر تعریف)}\\ &= [J, H][J, K] && \text{(بنابر ۴۹.۳ و ۱۶۹)}\\ &= [G_1, \dots, G_{r-1}, H][G_1, \dots, G_{r-1}, K], && \text{(i)}\end{aligned}$$

بعد فرض می‌کنیم که $r = 1 < s$. در این صورت

$$\begin{aligned}K, G_2, G_3, \dots, G_s] &= [[HK, G_2], G_3, \dots, G_s] && \text{(بنابر تعریف)}\\ &= [[H, G_2][K, G_2], G_3, \dots, G_s] && \text{(بنابر ۱۶۹)}\\ &= [[H, G_2, G_3][K, G_2, G_3], \dots, G_s] && \text{(به‌طور مشابه)}\\ &= \cdots\\ &= [H, G_2, \dots, G_s][K, G_2, \dots, G_s]. && \text{(ii)}\end{aligned}$$

اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم. بنابر (i) و (ii) می‌توانیم فرض کنیم که $1 < r < s$.

در این صورت

$$[G_1,\dots,G_{r-1},HK,G_{r+1},\dots,G_s]$$
$$=[[G_1,\dots,G_{r-1},HK],G_{r+1},\dots,G_s] \qquad (\text{بنابر تعریف})$$
$$=[[G_1,\dots,G_{r-1},H][G_1,\dots,G_{r-1},K],G_{r+1},\dots,G_s] \qquad (\text{بنابر (i)})$$
$$=[[G_1,\dots,G_{r-1},H],G_{r+1},\dots,G_s]$$
$$[[G_1,\dots,G_{r-1},K],G_{r+1},\dots,G_s] \qquad (\text{بنابر (ii)})$$
$$=[G_1,\dots,G_{r-1},H,G_{r+1},\dots,G_s][G_1,\dots,G_{r-1},K,G_{r+1},\dots,G_s].$$

قضیهٔ مهم زیر توسط فیتینگ در ۱۹۳۸ به اثبات رسیده بود.

۶۳.۷ قضیه (هـ. فیتینگ [a۲۷]). (i) فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای نرمال پوچ‌توان G باشند. در این صورت HK زیرگروه نرمال پوچ‌توان G خواهد بود. به‌علاوه، اگر H، K و HK به‌ترتیب دارای رده‌های a، b و c باشند آنگاه $c \leqslant a+b$.

(ii) هر گروه متناهی یک رادیکال پوچ‌توان دارد. —

برهان (i) بنابر فرض (۵۴.۷ را ببینید.)،

$$\Gamma_{a+1}(H)=1=\Gamma_{b+1}(K).$$

می‌خواهیم نشان دهیم که $\Gamma_{a+b+1}(HK)=1$. بنابر ۶۲.۷، برای هر عدد صحیح مثبت n،

$$\Gamma_n(HK)=[HK,HK,\dots,HK]$$
$$=[H,HK,\dots,HK][K,HK,\dots,HK]$$
$$=\cdots.$$

بدین‌ترتیب، با استفادهٔ مکرر از ۶۲.۷؛ $\Gamma_n(HK)$ می‌تواند به شکل حاصلضرب 2^n جابه‌جاگر $[L_1,L_2,\dots,L_n]$ بیان شود، که به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، L_i یا H است و یا K.

فرض می‌کنیم که r یک عدد صحیح مثبت باشد. چون $H \trianglelefteq G$ و $\Gamma_r(H)$ در H مشخصه است، بنابر ۱۵.۳، $\Gamma_r(H)\trianglelefteq G$. ازاین‌رو بنابر ۵۳.۳،

$$[\Gamma_r(H),K]\leqslant\Gamma_r(H).$$

فرض می‌کنیم که در یک جابه‌جاگر خاص $[L_1,L_2,\dots,L_n]$، r تا L_i برابر با H و $n-r$ تای دیگر برابر با K باشند. در این صورت به‌موجب شمول قبلی نتیجه می‌شود که

$$[L_1,L_2,\dots,L_n]\leqslant\Gamma_r(H).$$

به‌همین‌نحو اگر $r<n$ آنگاه

$$[L_1,L_2,\dots,L_n]\leqslant\Gamma_{n-r}(K).$$

اکنون چنین انتخاب می‌کنیم $n=a+b+1$. در این صورت برای هر $[L_1,L_2,\dots,L_n]$ خاص، یا $r\geqslant a+1$ و یا $n-r\geqslant b+1$. در حالت نخست $\Gamma_r(H)=1$، حال آنکه در حالت دوم $\Gamma_{n-r}(K)=1$. ازاین‌رو در هر حالت

$$[L_1,L_2,\dots,L_n]=1.$$

این مطلب برای هر یک از 2^n جابه‌جاگرِ عبارت حاصلضرب برای $\Gamma_n(HK)=\Gamma_{a+b+1}(HK)$ صادق است. لذا

$$\Gamma_{a+b+1}(HK)=1,$$

و بنابراین HK پوچ‌توان از ردهٔ حداکثر $a+b$ است.

(ii) این حکم دقیقاً از (i) با استدلالی مشابه با استنتاج (ii) از (i) در ۴۸.۷، که در آن به‌جای 'حل‌پذیر' 'پوچ‌توان' گذاشته شده باشد نتیجه می‌شود.

۶۴.۷ تعریف رادیکال پوچ‌توان گروه متناهی G با $F(G)$ نشان داده می‌شود و زیرگروه فیتینگ G نامیده می‌شود. توجه کنید که $F(G)$ زیرگروه مشخصهٔ G است: ۱۶۰ را ببینید.

۳۹۱. فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان است.

(i) اگر $H<G$ آنگاه $H<N_G(H)$ (رک ۶.۵)

(ii) اگر $1<K\trianglelefteq G$ آنگاه $[K,G]<K$ و $K\cap Z(G)\neq 1$ (رک. ۸.۵. راهنمایی. زیرگروههای K_n را در نظر بگیرید، که برای آن $K_1=K$ و برای هر عدد صحیح $n>1$، $K_n=[K_{n-1},G]$.)

۳۹۲. فرض می‌کنیم که A یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمالِ گروه پوچ‌توان G است. در این صورت A یک زیرگروه آبلی ماکسیمال G است.

(۲۳۵ و ۲۵۱ را ببینید. راهنمایی. ۳۹۱ (ii) را به‌جای ۸.۵ به‌کار ببرید.)

*۳۹۳. فرض می‌کنیم $G = \Sigma_3$. نشان دهید که زیرگروههای H و J و K از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$[[H,J],K] \neq [H,[J,K]].$$

۳۹۴. اگر G دارای زیرگروههای نرمال آبلی H و K باشد به‌طوری‌که $G = HK$، آنگاه G پوچ‌توان از ردهٔ حداکثر ۲ است. (اشاره. G لزوماً آبلی نیست: ۱۷۱ و ۱۸۱ را ببینید.)

۳۹۵. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) اگر $K \trianglelefteq G$ آنگاه $F(K) \leqslant F(G)$.

(ii) با یک مثال نشان دهید که برای هر زیرگروه H از G، $F(G)$ لزوماً شامل $F(H)$ نیست.

۳۹۶. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد.

(i) نشان دهید که اگر G حل‌پذیر باشد و $G \neq 1$، آنگاه $F(G) \neq 1$.

(ii) زیرگروههای $F_n(G)$ را به‌طور بازگشتی به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $F_0(G) = 1$ و به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، فرض می‌کنیم

$$F_n(G)/F_{n-1}(G) = F(G/F_{n-1}(G))$$

در این صورت

$$1 = F_0(G) \leqslant F_1(G) \leqslant F_2(G) \leqslant \cdots,$$

و این دنبالهٔ صعودی را، سری پوچ‌توان بالایی (یا سری فیتینگ بالایی) G می‌نامیم. ثابت کنید که G حل‌پذیر است اگر و تنها اگر برای مقداری از n، $F_n(G) = G$.

(iii) فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر است. کوچکترین عدد صحیح n راکه برای آن $F_n(G) = G$ طول پوچ‌توانی (یا بلندی فیتینگ) G می‌نامیم.

فرض می‌کنیم که

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_r = G$$

سری دلخواهی از G باشد که عاملهایش همگی پوچ‌توان‌اند. ثابت کنید که برای هر $i = 0, 1, \ldots, r$، $G_i \leqslant F_i(G)$. به‌ویژه، طول مشتق G کوچکتر از طول پوچ‌توانی آن نیست. (راهنمایی. با استقرا بر i استدلال کنید. توجه داشته باشید که بنابر ۳۳۶، هر زیرگروه زیرنرمال پوچ‌توان از گروه متناهی H در $F(H)$ واقع است.)

این فصل را با چند ویژگی $F(G)$ به پایان می‌بریم.

۶۵.۷ لم فرض کنید G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. در این صورت $C_G(F(G))$ شامل هر زیرگروه نرمال مینیمال G است.

برهان فرض می‌کنیم $K = F(G)$ و $H = C_G(K)$. فرض می‌کنیم که L یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد. اگر $L \nleqslant K$ آنگاه، چون $K \cap L < L$ و $K \cap L \trianglelefteq G$، $K \cap L = 1$. در این صورت بنابر ۵۳.۳، $[K,L] = 1$. بدین‌ترتیب $L \leqslant H$.

اگر از طرفی $L \leqslant K$ آنگاه، چون $1 < L \trianglelefteq K$، باید زیرگروه نرمال مینیمالی مانند M از K وجود داشته باشد که $M \leqslant L$. چون K پوچ‌توان است، بنابر ۵۸.۷؛ $M \leqslant Z(K)$. بدین‌ترتیب $Z(K) \cap L \neq 1$. اما $Z(K) \trianglelefteq G$ (۱۲۱). لذا $Z(K) \cap L \trianglelefteq G$ و بنابراین، چون L در G نرمال مینیمال است، $Z(K) \cap L = L$. در نتیجه $L \leqslant Z(K) \leqslant H$، که اثبات را کامل می‌کند.

۶۶.۷ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. در این صورت، برای هر سری اصلی G مثلاً

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G,$$

داریم

$$F(G) = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(G_i/G_{i-1})$$

(۳۹۰ را ببینید.)

برهان فرض می‌کنیم که $K = F(G)$ و $L = \bigcap_{i=1}^{n} C_G(G_i/G_{i-1})$. در این صورت $L \trianglelefteq G$. لذا در این مرحله برای اینکه نشان دهیم $L \leqslant K$، کافی است نشان دهیم که L پوچ‌توان است. برای هر $i = 1, \ldots, n$، $L \leqslant C_G(G_i/G_{i-1})$، و در نتیجه بنابر ۳۹۰،

$$[L, G_i] \leqslant G_{i-1}.$$

ازاین‌رو

$$[L \cap G_i, L] = [L, L \cap G_i] \leqslant L \cap G_{i-1}.$$

بنابراین؛ مطابق ۴۵.۷، سری

$$1 = (L \cap G_0) \trianglelefteq (L \cap G_1) \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq (L \cap G_n) = L$$

یک سری مرکزی L است، و در نتیجه L پوچ‌توان است. ازاین‌رو $L \leqslant K$.

برای کامل‌کردن اثبات، کافی است نشان دهیم که برای هر $i = 1, \ldots, n$، $K \leqslant C_G(G_i/G_{i-1})$. در حال حاضر، بنابر ۳۰.۳، ۳۹.۳، ۴۰.۳ و ۴۶.۷،

$$KG_{i-1}/G_{i-1} \trianglelefteq G/G_{i-1}$$

و

$$KG_{i-1}/G_{i-1} \cong K/(K \cap G_{i-1}),$$

که این هم پوچ‌توان است. بدین‌ترتیب

$$KG_{i-1}/G_{i-1} \leqslant F(G/G_{i-1}).$$

چون G_i/G_{i-1} یک زیرگروه نرمال مینیمال G/G_{i-1} است (۳۶.۷)، از ۶۵.۷ نتیجه می‌شود که $F(G/G_{i-1})$، G_i/G_{i-1} را به مرکز بدل می‌کند؛ و به این دلیل است که

$$KG_{i-1}/G_{i-1} \leqslant C_{G/G_{i-1}}(G_i/G_{i-1}).$$

بنابراین (۳۹۰ را ببینید)،

$$K \leqslant C_G(G_i/G_{i-1}).$$

این مطلب برای هر $i = 1, \ldots, n$ صادق است. بنابراین $K = L$.

۶۷.۷ قضیه فرض می‌کنیم که G یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد. در این صورت

$$C_G(F(G)) \leqslant F(G).$$

برهان فرض می‌کنیم $K = F(G)$ و $H = C_G(K)$. در این صورت بنابر ۳۶.۴، $H \trianglelefteq G$. برخلاف آنچه می‌خواهیم نشان دهیم؛ فرض می‌کنیم که $H \not\leqslant K$. در این صورت

$$H \cap K < H \quad \text{و} \quad H \cap K \trianglelefteq G.$$

همچنین یک سری اصلی از G وجود دارد که هم $H \cap K$ و هم H جملات آن هستند. فرض می‌کنیم $J/(H \cap K)$ یک عامل اصلی G باشد با $J \leqslant H$.

چون G حل‌پذیر است، بنابر ۵۶.۷، $J/(H \cap K)$ آبلی است. ازاین‌رو (۵۲.۳)،

$$J' \leqslant H \cap K \leqslant K.$$

بنابراین

$$\Gamma_3(J) = [J, J, J] = [J', J] \leqslant [K, H] = 1,$$

زیرا $H = C_G(K)$. لذا بنابر ۵۴.۷، J یک زیرگروه نرمال پوچ‌توانِ G است و بنابراین $J \leqslant K$. ازاین‌رو $J \leqslant H \cap K$ و این یک تناقض است، زیرا بنابر تعریفِ J، $H \cap L < J$. بدین‌ترتیب نتیجه می‌گیریم که $H \leqslant K$.

*۳۹۷. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت $S(G)$، یعنی سکوی G، بنابر تعریف حاصلضرب تمام زیرگروههای نرمال مینیمال G است اگر $G \neq 1$ و $S(G) = 1$، اگر $G = 1$.

(i) $S(G)$ زیرگروه مشخصهٔ G است.

(ii) $F(G) \leqslant C_G(S(G))$.

(iii) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت $C_G(K) = 1$ اگر و تنها اگر $Z(K) = 1$ و $S(G) \leqslant K$.

۳۹۸. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی نابدیهی باشد.

(i) اگر

$$1 = G_0 < G_1 < \cdots < G_n = G$$

یک سری اصلی G باشد، آنگاه $G/F(G)$ می‌تواند در حاصلضرب مستقیمی از n گروه $\mathrm{Aut}(G_i/G_{i-1})$، $i = 1, \ldots, n$، نشانیده شود. (راهنمایی. از ۶۶.۷ و ۳۹۰ و تعمیم بدیهی ۱۰۹ به n زیرگروه نرمال G استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم که G زَبَرحل‌پذیر است (۳۸۹). در این صورت $G/F(G)$ آبلی است. (راهنمایی. از (i) و ۳۸.۴ (i) استفاده کنید. اشاره. این اثبات دیگری است برای گروههای زَبَرحل‌پذیر متناهی از حکمِ واقع در ۳۹۰ (iii).)

(iii) فرض می‌کنیم که G زَبَرحل‌پذیر است. در این صورت برای هر مقسوم‌علیه اول q از $|G/F(G)|$ یک مقسوم‌علیه اول p از $|G|$ وجود دارد به‌طوری‌که $p \equiv 1$ پیمانه q. ازاین‌رو

بزرگترین مقسوم‌علیه اول $|G|$، $|G/F(G)|$ را نمی‌شمارد. (راهنمایی. از (i) و ۳۸.۴ (ii) استفاده کنید. همین‌طور ۶۰۹ را ببینید.)

۳۹۹. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد. در این صورت $|G|$

$$|Z(F(G))|\cdot|\mathrm{Aut}(F(G))|$$

را می‌شمارد (راهنمایی. از ۳۶.۴ و ۶۷.۷ استفاده کنید.)

۴۰۰. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی است و $F(G)$ آبلی است. در این صورت $F(G)$ زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال یکتای G است. به‌علاوه، اگر G حل‌پذیر باشد آنگاه $F(G)$ یک زیرگروه آبلی ماکسیمال G است (۲۳۵ و ۲۵۱ را ببینید. همچنین ۶۴۴ و ۶۴۵ را.)

۴۰۱. (i) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی حل‌پذیر است. اگر $F(G)$ دوری باشد، G زَبَرحل‌پذیر است (۳۸۹). (راهنمایی. از ۳۶.۴، ۳۸.۴ (i) و ۶۷.۷ استفاده کنید.)

(ii) مثالی از یک گروه زَبَرحل‌پذیر متناهی G ارائه دهید که برای آن $F(G)$ دوری نباشد.

۸

حاصلضربهای مستقیم و ساختار گروههای آبلی متناهی مولد

در بررسی برنامه‌های ممکن برای رده‌بندی گروهها، می‌توانیم دو مسألهٔ کلی به هم مرتبط را تمیز دهیم. از یک سو، مسألهٔ ساخت را خواهیم داشت: با شروع از گردایه‌ای از گروههای معلوم، می‌خواهیم گروههای دیگری از این گروهها با روشهای صریح بسازیم. از سوی دیگر، مسألهٔ تجزیه وجود دارد: می‌خواهیم بدانیم که یک گروه دلخواه مفروض چگونه با این روشها از مؤلفه‌های 'ساده‌تر' ساخته شده است.

ساده‌ترین روش ساختن حاصلضرب مستقیم است که در ۳۱.۲ و ۳۶.۲ معرفی شده. در ۳۴.۲ و ۵۴.۳ ملاکی برای یک گروه به‌دست آوردیم، تا به شکل حاصلضرب مستقیم دو گروه قابل تجزیه باشد. در فصل حاضر، این روش را با جزئیات بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم و سرانجام نشان خواهیم داد که این روش برای بیان ساختار گروههای آبلی متناهی مولد مناسب است.

با قراردادی شروع می‌کنیم که نمادگذاری را ساده‌تر خواهد کرد.

۱.۸ فرض می‌کنیم $G = H \times K$. در این صورت با توجه به ۳۳.۲ می‌دانیم که نگاشت

$$h \mapsto (h, 1) \quad (\text{تعریف‌شده به‌ازای هر } h \in H)$$

یک یکریختی است از H به روی $H \times 1$، و نگاشت

$$k \mapsto (1, k) \quad (\text{تعریف‌شده به‌ازای هر } k \in K)$$

نیز یک یکریختی است از K به روی $1 \times K$. مشروط بر اینکه گروههای H و K تنها در عضو همانی ۱ مشترک باشند، ما با یکی‌انگاشتن اعضای h و $(h, 1)$ به‌ازای هر $h \in H$، H را با زیرگروه $H \times 1$ از G یکی می‌گیریم، و به‌همین‌نحو با یکی‌انگاشتن اعضای k و $(1, k)$ به‌ازای هر $k \in K$، K را با زیرگروه $1 \times K$ یکی خواهیم گرفت. در این صورت به‌موجب ۳۳.۲ و ۱۱.۳،

$$H \trianglelefteq G, \quad K \trianglelefteq G, \quad G = HK \text{ و } \quad H \cap K = 1.$$

بنابراین هر عضو (h, k) از G با حاصلضرب hk در G، مرکب از اعضای $h \in H$ و $k \in K$، یکی گرفته می‌شود، و البته $hk = kh$. (توجه داشته باشید که در این یکی گرفتنها گروههای $H \times K$ و $K \times H$ را نیز یکی می‌گیریم؛ رک. ۳۵.۲.)

با این قرارداد، می‌توان عکس قضیه‌ای را که در ۵۴.۳ آمده است چنین بیان کرد

۲.۸ فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = HK$ و $H \cap K = 1$. در این صورت $G = H \times K$.

تعمیم این قضیه را برای هر تعداد متناهی از سازه‌های مستقیم ثابت می‌کنیم. ابتدا قراردادی را معرفی می‌کنیم.

۳.۸ اگر H و K زیرگروههای نرمال G باشند آنگاه به‌سادگی مشاهده می‌شود که $HK = KH$ (رک. ۳۸.۳ و ۹۵). بنابراین اگر G_1، G_2، $\cdots$، G_n زیرگروههای نرمال G باشند، حاصلضرب G_1، G_2، $\cdots$، G_n به‌ترتیب سازه‌ها بستگی ندارد. گاهی اوقات نماد $\prod_{i=1}^{n} G_i$ (و عبارتهای مشابه) را برای این حاصلضرب به‌کار می‌بریم. توجه کنید که بنابر ۳۹.۳، $\prod_{i=1}^{n} G_i \trianglelefteq G$.

واضح است که قرارداد ۱.۸ را می‌توان به حاصلضرب مستقیم هر تعداد متناهی از گروهها گسترش داد. گاهی حاصلضرب مستقیم گروههای G_1، G_2، $\cdots$، G_n را (به‌جای $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$) با $\mathrm{Dr} \prod_{i=1}^{n} G_i$ نمایش می‌دهیم. اگر $n = 1$ بدیهی است که $\mathrm{Dr} \prod_{i} G_i = G_1$.

۴.۸ قضیه فرض می‌کنیم G_1، G_2، $\cdots$، G_n زیرگروههای نرمال G باشند، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) $G = \mathrm{Dr} \prod_{i=1}^{n} G_i$.

(ii) هر عضو g از G نمایش یکتایی به صورت $g = g_1 g_2 \cdots g_n$ خواهد داشت که به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $g_i \in G_i$.

(iii) $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$ و، به‌ازای هر عدد صحیح m که $1 < m \leqslant n$،

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} G_i\right) \cap G_m = 1.$$

برهان $\text{(ii)} \Leftarrow \text{(i)}$ اگر $G = \mathrm{Dr} \prod_{i=1}^{n} G_i$ آنگاه مسلماً هر عضو G به صورت $g_1 g_2 \cdots g_n$ نشان داده می‌شود که به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $g_i \in G_i$. به‌علاوه؛ بنابر تعریف حاصلضرب مستقیم این عبارت یکتاست.

$\text{(iii)} \Leftarrow \text{(ii)}$ بلافاصله از فرض (ii) نتیجه می‌شود که $G = \prod_{i=1}^{n} G_i$. فرض می‌کنیم که m یک عدد صحیح باشد به‌طوری‌که $1 < m \leqslant n$، و نیز

$$g_m \in \left(\prod_{i=1}^{m-1} G_i\right) \cap G_m.$$

در این صورت اعضایی مانند $g_1 \in G_1$، $g_2 \in G_2$، $\cdots$، $g_{m-1} \in G_{m-1}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$g_m^{-1} = g_1 g_2 \cdots g_{m-1}.$$

ازاین‌رو

$$1 = g_1 g_2 \cdots g_{m-1} g_m g_{m+1} \cdots g_n$$

که در آن اگر $m < n$، $g_{m+1} = \cdots = g_n = 1$. پس به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $g_i \in G_i$ و بنابراین از فرض یکتایی نتیجه می‌شود که به‌ازای هر i، $g_i = 1$؛ به‌ویژه $g_m = 1$. بدین‌ترتیب

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} G_i\right) \cap G_m = 1.$$

$\text{(i)} \Leftarrow \text{(iii)}$ به‌ازای هر عدد صحیح $m = 1, \cdots, n$، قرار می‌دهیم

$$J_m = \prod_{i=1}^{m} G_i.$$

در این صورت $J_m \trianglelefteq G$ و بنابر فرض، $J_n = G$. با استقرا بر m نشان می‌دهیم که به‌ازای هر $m = ۱, \cdots, n$،

$$J_m = \mathrm{Dr} \prod_{i=۱}^{m} G_i.$$

اگر $m = ۱$، حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم $m > ۱$ و به استقرا

$$J_{m-۱} = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{m-۱} G_i.$$

در این صورت بنابر تعریف $J_m = J_{m-۱}G_m$.
چون $J_{m-۱}$ و G_m در G نرمال‌اند، مسلماً در J_m نیز نرمال خواهند بود؛ و بنابر فرض

$$J_{m-۱}\cap G_m = ۱.$$

بنابراین (۲.۸)

$$J_m = J_{m-۱}\times G_m = \left(\mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{m-۱} G_i\right)\times G_m = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{m} G_i.$$

بدین‌ترتیب استدلال به استقرا پایان می‌یابد. ازاین‌رو

$$G = J_n = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{n} G_i.$$

۵.۸ هشدار فرض می‌کنیم نمادگذاری مانند ۴.۸ باشد. برای اثبات $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{n} G_i$، در حالت کلی کافی نیست که نشان دهیم $G = \prod_{i=۱}^{n} G_i$ و هرگاه $i \neq j$، $G_i \cap G_j = ۱$. به‌عنوان مثال گروه

$$G = C_۲ \times C_۲,$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم a و b دو عضو نابدیهی متمایز G باشند. در این صورت $G = \{۱, a, b, ab\}$. فرض می‌کنیم

$$A = \langle a\rangle,\quad B = \langle b\rangle,\quad C = \langle ab\rangle.$$

در این صورت A و B و C زیرگروههای متمایز G از مرتبهٔ ۲ هستند. این زیرگروهها مسلماً در G نرمال‌اند. به‌علاوه

$$G = ABC \quad \text{و} \quad A\cap B = B\cap C = C\cap A = ۱.$$

اما $G \neq A\times B\times C$، زیرا $|G| = ۴$ درحالی‌که $|A\times B\times C| = ۸$.

۶.۸ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد و نیز $p_۱, \cdots, p_s$ مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند، که s یک عدد صحیح مثبت است. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, s$، G دارای یک p_i زیرگروه سیلوی نرمال P_i باشد. در این صورت $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{s} P_i$ و G پوچ‌توان است.

برهان به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, s$، فرض می‌کنیم $|P_i| = p_i^{n_i}$. در این صورت

$$|G| = \prod_{i=۱}^{s} p_i^{n_i}.$$

به‌ازای هر $m = ۱, \cdots, s$، قرار می‌دهیم

$$J_m = \prod_{i=۱}^{m} P_i \trianglelefteq G.$$

با استقرا بر m نشان می‌دهیم که

$$|J_m| = \prod_{i=۱}^{m} p_i^{n_i}.$$

اگر $m = ۱$، حکم بدیهی است، زیرا $J_۱ = P_۱$. فرض می‌کنیم که $m > ۱$ و به استقرا

$$|J_{m-۱}| = \prod_{i=۱}^{m-۱} p_i^{n_i}.$$

در این صورت طبق قضیهٔ لاگرانژ $J_{m-۱} \cap P_m = ۱$. ازاین‌رو بنابر ۴۰.۳،

$$|J_m| = |J_{m-۱}P_m| = |J_{m-۱}||P_m| = \prod_{i=۱}^{m} p_i^{n_i}.$$

بدین‌ترتیب استدلال به استقرا تمام می‌شود. به‌ویژه

$$|J_s| = \prod_{i=1}^{s} p_i^{n_i} = |G|,$$

در نتیجه

$$G = J_s.$$

علاوه‌براین چون هرگاه $1 < m \leqslant s$، $J_{m-1} \cap P_m = 1$، به‌موجب ۴.۸ نتیجه می‌شود که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{s} P_i.$$

مطابق ۴۴.۷، به‌ازای هر $i = 1, \cdots, s$، P_i پوچ‌توان است. ازاین‌رو با استفادهٔ مکرر از ۴۹.۷ (i)، نتیجه می‌گیریم که G پوچ‌توان است.

اشارات. این قضیه نشان می‌دهد که یک گروه آبلی متناهی نابدیهی حاصلضرب مستقیم زیرگروههای متمایز سیلو خودش است. در ۳.۱۱ ثابت خواهیم کرد که اگر G گروه پوچ‌توان متناهی نابدیهی دلخواهی باشد، هر زیرگروه سیلو G در G نرمال است، ازاین‌رو، به‌موجب ۶.۸، G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای متمایز سیلو خودش خواهد بود.

*۴۰۲. فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای نرمالی از G باشند به‌طوری‌که $G = H \times K$. هرگاه $H \leqslant J \leqslant G$ آنگاه $J = H \times (J \cap K)$؛ و $J \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $J \cap K \trianglelefteq K$.
(راهنمایی. از قاعدهٔ ددکیند ۳.۷ استفاده کنید.)

۴۰۳. اگر H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $HK = G$، آنگاه

$$G/(H\cap K) = H/(H\cap K)\times K/(H\cap K) \cong (G/H)\times(G/K) \quad (\text{ر.ک. } 109)$$

۴۰۴. (i) ثابت کنید که G دارای یک سری ترکیبی است اگر و تنها اگر تنها تعداد متناهی زیرگروه زیرنرمال متمایز داشته باشد. (راهنمایی. برای اثبات اینکه اگر G دارای یک سری ترکیبی باشد، آنگاه دارای تنها تعداد متناهی زیرگروه زیرنرمال متمایز است، با استقرا بر طول ترکیبی G، مثلاً s، استدلال کنید. برای $s > 1$، توجه داشته باشید که هر زیرگروه زیرنرمال حقیقی G در یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G قرار دارد. (۳۶۳ را ببینید). ازاین‌رو، به کمک فرض استقرا کافی است نشان دهید که G تنها تعداد متناهی زیرگروه نرمال ماکسیمال متمایز دارد. فرض کنید K یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G باشد. با استفاده از فرض استقرا نشان دهید که تنها تعداد متناهی زیرگروه

نرمال ماکسیمال از G وجود دارد که با K اشتراک نابدیهی دارند. تنها باقی می‌ماند این امکان را در نظر بگیرید که یک زیرگروه نرمال ماکسیمال L از G وجود دارد به‌طوری‌که $K \cap L = 1$، در یک چنین حالتی $G = K \times L$، و K و L هر دو ساده‌اند. سپس $C_G(K)$ و $C_G(L)$ را در نظر بگیرید و ۶.۳ را ببینید.)

(ii) از (i) نتیجه بگیرید که یک گروه نمی‌تواند تعداد نامتناهی سری ترکیبی متمایز داشته باشد.

(iii) تحقیق کنید که استدلال در (i) را می‌توان اصلاح کرد تا ثابت کنیم که G دارای یک سری اصلی است اگر و تنها اگر دارای تنها تعداد متناهی زیرگروه نرمال متمایز باشد.

(اشاره. یک گروه G با یک حوزهٔ عملگر Ω می‌تواند یک سری Ω ترکیبی داشته باشد اما درعین‌حال دارای تعداد نامتناهی Ω زیرگروه زیرنرمال متمایز باشد. برای مثال، یک فضای برداری V از بعد ۲ روی میدان نامتناهی F را در نظر بگیرید، و F را به‌عنوان یک حوزهٔ عملگر برای V^+، همچون در ۲۸.۷ (۵)، مورد توجه قرار دهید. در این صورت Fگروه V^+ دارای یک سری Fترکیبی است (از طول ۲): ۳۲.۷ (۴) را ببینید. F زیرگروههای V^+ زیرفضاهای V هستند؛ و اینها زیرگروههای نرمال V^+ هستند، زیرا V^+ آبلی است. ازآنجاکه F نامتناهی است، V تعداد نامتناهی زیرفضای ۱بعدی متمایز دارد.)

۴۰۵. قرار می‌دهیم $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i$، که n عدد صحیحی مثبت. به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، فرض کنید G_i دارای یک سری ترکیبی بوده و s_i طول ترکیبی G_i باشد. در این صورت G دارای یک سری ترکیبی است و طول ترکیبی G برابر است با $\sum_{i=1}^{n} s_i$.

*۴۰۶. فرض می‌کنیم $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i$، که n یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت

$$Z(G) = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} Z(G_i).$$

*۴۰۷. فرض می‌کنیم که n یک عدد صحیح مثبت است و $G_1, G_2, \cdots, G_n$ زیرگروههای نرمال G هستند، به‌طوری‌که $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i$. فرض می‌کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$. در این صورت همچنین $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i^{\alpha}$.

۴۰۸. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد و $n > 1$.

(i) فرض می‌کنیم $K_1, K_2, \cdots, K_n$ زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $\bigcap_{i=1}^{n} K_i = 1$ و، به‌ازای هر عدد صحیح m که $1 < m \leqslant n$، $G = (\bigcap_{i=1}^{m-1} K_i)K_m$.

در این صورت

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{n} G_i,$$

که به‌ازای هر $i = ۱,\dots,n$،

$$G_i = \bigcap_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{n} K_j.$$

(ر ک. ۴.۸. راهنمایی. برای اینکه نشان دهید $\prod_{i=۱}^{n} G_i = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{n} G_i$، از ۴.۸ استفاده کنید. با استقرا بر m، ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح $m = ۲,\dots,n$،

$$G = \prod_{i=۱}^{m}\left(\bigcap_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{m} K_j\right).$$

(ii) فرض می‌کنیم $G_۱$، $G_۲$، $\dots$، G_n زیرگروههای نرمال G هستند به‌طوری‌که $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{n} G_i$. به‌ازای هر $j = ۱,۲,\dots,n$، قرار می‌دهیم

$$K_j = \prod_{\substack{j=۱\\ i\neq j}}^{n} G_i.$$

در این صورت $K_۱$، $K_۲$، $\dots$، K_n در مفروضات (i) صدق می‌کنند؛ و به‌ازای هر $i = ۱,\dots,n$

$$\bigcap_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{n} K_j = G_i.$$

۴۰۹. یک گروه G ممکن است دارای زیرگروههای نرمالی مانند $G_۱$، $G_۲$، $G_۳$ باشد به‌طوری‌که
(i) $G = G_۱G_۲G_۳$
(ii) $G_۱G_۲$، $G_۲G_۳$، $G_۳G_۱$ زیرگروههای حقیقی G هستند
(iii) $G_۱\cap G_۲ = G_۲\cap G_۳ = G_۳\cap G_۱ = ۱$؛ و
(iv) $G \neq G_۱\times G_۲\times G_۳$ (ر ک. ۴.۸ و ۵.۸).
مسأله را با درنظرگرفتن گروه آبلی مقدماتی G از مرتبهٔ $p^۵$ و سه زیرگروه مناسب G از مرتبهٔ $p^۲$ ثابت کنید.

*۴۱۰. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. در این صورت G دوری است اگر و تنها اگر هر زیرگروه سیلو آن دوری باشد.

۴۱۱. فرض می‌کنیم $G_۱$، $G_۲$، $\dots$، G_n زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = \prod_{i=۱}^{n} G_i$، که n یک عدد صحیح مثبت است. فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی است. در این صورت

(i) هر عامل ترکیبی G با یک عامل ترکیبی از یکی از زیرگروههای $G_۱$، $G_۲$، $\dots$، G_n یکریخت است.

(ii) فرض می‌کنیم که هر وقت $i,j\in\{۱,۲,\dots,n\}$ با $i\neq j$، هیچ عامل ترکیبی G_i با یک عامل ترکیبی G_j یکریخت نباشد. در این صورت $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{n} G_i$.

۷.۸ قضیه (ر. ریماک [a۷۹]، ۱۹۳۰). فرض می‌کنیم $K_۱$، $K_۲$، $\dots$، K_n زیرگروههای نرمال مینیمال G باشند، که n یک عدد صحیح مثبت است، و قرار می‌دهیم $K = \prod_{j=۱}^{n} K_j$. در این صورت یک زیرمجموعهٔ $\{i_۱,\dots,i_m\}$ از $\{۱,\dots,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$K = \mathrm{Dr}\prod_{j=۱}^{m} K_{i_j}.$$

برهان فرض می‌کنیم $\mathscr{S}$ معرف مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی $\{i_۱,\dots,i_m\}$ از $\{۱,\dots,n\}$ باشد به‌طوری‌که $i_۱$، $\dots$، i_m متمایز باشند و $\prod_{j=۱}^{m} K_{i_j} = \mathrm{Dr}\prod_{j=۱}^{m} K_{i_j}$. کاملاً واضح است که به‌ازای هر $j = ۱,\dots,n$، $\{j\}\in\mathscr{S}$.

حال $\{i_۱,\dots,i_m\}\in\mathscr{S}$ را طوری انتخاب می‌کنیم که در آن m تا حد ممکن بزرگ باشد و قرار می‌دهیم

$$L = \prod_{j=۱}^{m} K_{i_j} = \mathrm{Dr}\prod_{j=۱}^{m} K_{i_j}.$$

به‌موجب ۳۹.۳، K و L زیرگروههای نرمال G هستند و محققاً $L\leqslant K$.

اگر $K\neq L$، آنگاه یک عدد صحیح مانند $l\in\{۱,\dots,n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $K_l\not\leqslant L$. چون K_l در G نرمال مینیمال است و $L\trianglelefteq G$، نتیجه می‌شود که

$$K_l\cap L = ۱.$$

پس $K_lL\trianglelefteq G$ و بنابر ۲.۸،

$$K_lL = K_l\times L.$$

قرار می‌دهیم $i_{m+۱} = l$. چون به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, m$، $K_{i_j} \leqslant L$، $i_{m+۱}$ از $i_۱$، $\cdots$، i_m متمایز بوده و

$$\prod_{j=۱}^{m+۱} K_{i_j} = LK_l = L \times K_l = \mathrm{Dr} \prod_{j=۱}^{m+۱} K_{i_j}.$$

لذا $\{i_۱, \cdots, i_m, i_{m+۱}\} \in \mathscr{S}$. اما این با انتخاب m در تناقض است.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $K = L$ و اثبات قضیه کامل می‌شود.

اشاره. به‌ویژه، اگر G یک گروه متناهی نابدیهی باشد و $S(G)$ معرف حاصلضرب تمام زیرگروههای نرمال مینیمال G (به اصطلاح سکوی G: ۳۹۷ را ببینید) باشد، آنگاه $S(G)$ حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروههای نرمال مینیمال G است.

۸.۸ تعریف G را کاملاً تحویل‌پذیر گوییم اگر یا $G = ۱$ یا G حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی گروه ساده باشد.

به‌ویژه، هر گروه ساده کاملاً تحویل‌پذیر است.

۹.۸ لم (ریماک). فرض می‌کنیم G یک گروه کاملاً تحویل‌پذیر متناهی نابدیهی، مثل

$$G = \mathrm{Dr} \prod_{j=۱}^{n} K_j$$

است که به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, n$، K_j یک زیرگروه نرمال سادهٔ G است. اگر $Z(G) = ۱$، آنگاه $K_۱$، $\cdots$، K_n تنها زیرگروههای نرمال مینیمال G خواهند بود و هر زیرگروه نرمال نابدیهی G حاصلضرب مستقیم تعدادی از $K_۱$، $\cdots$، K_n است.

برهان به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, n$، K_j یک زیرگروه نرمال سادهٔ G بوده و بنابراین K_j در G نرمال مینیمال است.

حال فرض می‌کنیم $Z(G) = ۱$ و برخلاف آنچه که می‌خواهیم نشان دهیم فرض می‌کنیم یک زیرگروه نرمال مینیمال L از G متمایز از $K_۱$، $\cdots$، K_n وجود داشته باشد. در این صورت به‌ازای هر $j = ۱, \cdots, n$،

$$K_j \cap L = ۱,$$

و در نتیجه، بنابر ۵۳.۳، $[K_j, L] = ۱$. ازاین‌رو

$$C_G(L) \geqslant \prod_{j=۱}^{n} K_j = G,$$

یعنی $L \leqslant Z(G) = ۱$، که یک تناقض است. بنابراین $K_۱$، $\cdots$، K_n تنها زیرگروههای نرمال مینیمال G هستند.

فرض می‌کنیم $۱ < K \trianglelefteq G$. می‌توانیم نمادها را طوری برگزینیم که $K_۱$، $\cdots$، K_m زیرگروههای نرمال مینیمال G باشند که در K قرار دارند، همچنین $K_{m+۱}$، $\cdots$، K_n (هرگاه $m < n$) زیرگروههای نرمال مینیمال G باشند که در K قرار ندارند. قرار می‌دهیم

$$H = \prod_{j=۱}^{m} K_j \quad \text{و} \quad J = \prod_{j=m+۱}^{n} K_j \quad (\text{که هرگاه } m = n\text{،} J = ۱).$$

در این صورت

$$H \leqslant K \leqslant G = H \times J,$$

از این نیز نتیجه می‌شود (۴۰۲)

$$K = H \times (J \cap K).$$

به‌علاوه $J \cap K \trianglelefteq G$ و $J \cap K \leqslant J$، بنابراین اگر $J \cap K \neq ۱$، آنگاه $J \cap K$ یک زیرگروه نرمال مینیمال K_j از G را شامل است که برای آن $j > m$. اما در این صورت K_j در K قرار خواهد داشت، که با انتخاب m در تناقض است. ازاین‌رو $J \cap K = ۱$ و

$$K = H = \mathrm{Dr} \prod_{j=۱}^{m} K_j.$$

اشارات. (۱) با نمادگذاری ۹.۸، چون $Z\left(\mathrm{Dr} \prod_{j=۱}^{n} K_j\right) = \mathrm{Dr} \prod_{j=۱}^{n} Z(K_j)$ (۴۰۶)، داریم $Z(G) = ۱$ اگر و تنها اگر هر K_j یک گروه سادهٔ ناآبلی باشد.

(۲) با حذف شرط $Z(G) = ۱$، قضیهٔ ۹.۸ در حالت کلی برقرار نخواهد بود. برای نمونه، در مثال ۵.۸، $G = A \times B \cong C_۲ \times C_۲$، بنابراین G کاملاً تحویل‌پذیر است و A و B زیرگروههای نرمال مینیمال G هستند، اما علاوه‌براین یک زیرگروه نرمال مینیمال سوم از G مانند C متمایز از A و B وجود دارد.

(۳) با حذف شرط متناهی‌بودن G، ۹.۸ باز هم برقرار باقی می‌ماند: ۴۱۶ را ببینید.

۴۱۲. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد. $S_1(G)$ را حاصلضرب تمام زیرگروههای نرمال مینیمال آبلی G تعریف می‌کنیم (و اگر G دارای هیچ زیرگروه نرمال مینیمال آبلی نباشد قرار می‌دهیم $S_1(G) = 1$)؛ همچنین $S_2(G)$ را حاصلضرب تمام زیرگروههای نرمال مینیمال ناآبلی G تعریف می‌کنیم (اگر G دارای هیچ زیرگروه نرمال مینیمال ناآبلی نباشد، قرار می‌دهیم $S_2(G) = 1$). فرض می‌کنیم $S(G)$ معرف سکوی G باشد: ۳۹۷ را ببینید. در این صورت

(i) $S_1(G)$ و $S_2(G)$ زیرگروههای مشخصهٔ G هستند.

(ii) $S_1(G)$ آبلی است (ر.ک. ۱۷۱).

(iii) $Z(S_2(G)) = 1$ و اگر $S_2(G) \neq 1$، $S_2(G)$ حاصلضرب مستقیم همهٔ زیرگروههای نرمال مینیمالی است که G شامل آنهاست. (راهنمایی. ۳۵۷ را ببینید. قسمتی از برهان ۹.۸ را دنبال کنید.)

(iv) $S(G) = S_1(G) \times S_2(G)$.

۴۱۳. فرض می‌کنیم که G یک گروه کاملاً تحویل‌پذیر متناهی است.

(i) به‌ازای هر زیرگروه نرمال دلخواهِ H از G، یک زیرگروه نرمال کاملاً تحویل‌پذیرِ K از G وجود دارد به‌طوری‌که $G = H \times K$. (راهنمایی. اگر $H < G$، فرض می‌کنیم $\{K_1, \dots, K_m\}$ معرف مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای نرمال مینیمال G باشد که در H قرار ندارند؛ توجه داشته باشید که این مجموعه ناتهی است. سپس فرض می‌کنیم $\mathscr{S}$ معرف مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی مانند $\{i_1, \dots, i_l\}$ از $\{1, \dots, m\}$ باشد به‌طوری‌که در آن i_1، ...، i_l متمایزند و

$$H\left(\prod_{j=1}^{l} K_{i_j}\right) = H \times \mathrm{Dr} \prod_{j=1}^{l} K_{i_j}.$$

توجه کنید که به‌ازای هر $j = 1, \dots, m$، $\{j\} \in \mathscr{S}$. سپس با به‌کاربردن استدلالی نظیر آنچه در برهان ۷.۸ آمد، نشان دهید که زیرمجموعه‌ای چون $\{i_1, \dots, i_l\}$ از $\{1, \dots, m\}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$G = H \times \mathrm{Dr} \prod_{j=1}^{l} K_{i_j}.$$

بالاخره نشان دهید که هر K_{i_j} به‌ازای $j = 1, \dots, l$ ساده است.)

(ii) هر گروه خارج‌قسمتی و هر زیرگروه نرمال G کاملاً تحویل‌پذیر است.

(اشاره. با حذف شرط متناهی‌بودن G این احکام باز هم برقرار باقی می‌مانند: ۴۱۶ را ببینید.)

۴۱۴. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی و L حاصلضرب زیرگروههای نرمال مینیمالی از G باشد. فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$ که $H \leqslant L$. در این صورت یک زیرگروه نرمال K از G وجود دارد به‌طوری‌که $K \leqslant L$ و $L = H \times K$. (راهنمایی. برهان ۴۱۳ (i) را تغییر دهید.)

۴۱۵. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی با این ویژگی باشد که، به‌ازای هر زیرگروه نرمال H از G، یک زیرگروه نرمالِ K از G وجود داشته باشد به‌طوری‌که $G = H \times K$. در این صورت G کاملاً تحویل‌پذیر است. (راهنمایی. اثبات به استقرا است. با استفاده از ۴۰۲ نشان دهید که هر زیرگروه نرمال G همین ویژگی G را داراست. اشاره. حکم اخیر عکس حکم ۴۱۳ (i) است.)

۴۱۶. (i) فرض می‌کنیم که G کاملاً تحویل‌پذیر (اما نه لزوماً متناهی) است. ثابت کنید که G دارای یک سری اصلی است.

(ii) ثابت کنید که حکمهای ۹.۸ و ۴۱۳ با حذف فرض متناهی‌بودن G، صادق باقی می‌مانند. همچنین ثابت کنید که هرگاه فرض متناهی‌بودن G با این فرض که G دارای یک سری اصلی است عوض شود ۴۱۵ برقرار باقی می‌ماند. (راهنمایی. ۴۰۴ (iii) را ببینید.)

۴۱۷. فرض می‌کنیم که G کاملاً تحویل‌پذیر است. در این صورت هر زیرگروه نرمال نابدیهی G حاصلضرب مستقیمی است از زیرگروههای نرمال مینیمال G. (راهنمایی. ۷.۸، ۴۰۲، ۴۰۴ (iii)، ۴۱۳ و ۴۱۶ را ببینید.)

۴۱۸. (i) فرض می‌کنیم که H یک زیرگروه نرمال کاملاً تحویل‌پذیر نابدیهی G است به‌طوری‌که $Z(H) = 1$. در این صورت H حاصلضرب مستقیمی است از زیرگروههای نرمال مینیمال G. (راهنمایی. اثبات، با استقرا بر طول یک سری اصلی H است: ۴۱۶ (i) را ببینید. نشان دهید که H یک زیرگروه نرمال مینیمال G، مانند K را شامل است و $H = K \times C_H(K)$.)

(ii) بدون این فرض که $Z(H) = 1$، در حالت کلی حکم (i) صادق نیست. این ادعا را با درنظرگرفتن یک زیرگروه نرمال مناسب از گروه دووجهی D_8 ثابت کنید. (راهنمایی. ۸.۵ و ۱۲۴ را ببینید.)

۴۱۹. (i) فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال کاملاً تحویل‌پذیر G باشند که

$$Z(H) = 1 = Z(K).$$

در این صورت HK یک زیرگروه نرمال کاملاً تحویل‌پذیر G است که برای آن $Z(HK) = 1$. (راهنمایی. ۷.۸، ۹.۸، ۴۱۶ و ۴۱۸ را ببینید.)

(ii) هر گروه متناهی یک $\mathfrak{X}$ رادیکال دارد، که در آن $\mathfrak{X}$، ردهٔ همهٔ گروههای کاملاً تحویل‌پذیر با مرکز بدیهی است. (۴۲۶ را نیز ببینید.)

(iii) یک گروه متناهی لزوماً دارای یک $\mathfrak{D}$ رادیکال نیست، که در آن $\mathfrak{D}$، ردهٔ همهٔ گروههای کاملاً تحویل‌پذیر است. این حکم را با درنظرگرفتن گروه دووجهی D_8 ثابت کنید.

۴۲۰. فرض می‌کنیم که G کاملاً تحویل‌پذیر است. در این صورت هر زیرگروه زیرنرمال H از G در G نرمال است. (راهنمایی. اثبات با استقرا بر طول یک سری از H به G است، همچنین ۴۱۳ و ۴۱۶ را ببینید.)

۴۲۱. (i) فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی مانند

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G,$$

است و فرض می‌کنیم که عدد صحیحی چون m وجود ندارد به‌طوری‌که $m < n$، $G_{m-1} \lhd G_{m+1}$ و G_{m+1}/G_{m-1} با حاصلضرب مستقیم دو گروه ساده یکریخت باشد. در این صورت هر زیرگروه زیرنرمال G مانند H در G نرمال است. (رک. ۳۴۲، ۴۲۰. راهنمایی. اثبات با استقرا بر $j(G:H)$ است: ۲۰.۷ را ببینید. ۲۴.۷ (i)، ۱۱۵ (i) و ۴۰۳ را به‌کار ببرید.)

(ii) فرض می‌کنیم که G متناهی است و همهٔ زیرگروههای سیلو آن دوری‌اند. در این صورت هر زیرگروه زیرنرمال G در G نرمال است. (راهنمایی. نشان دهید که تمامی بخشهای G، در همین مفروضات مانند G صدق می‌کنند، ازاین‌رو هیچ بخشی از G با $C_p \times C_p$ به‌ازای عدد اول دلخواه p، یکریخت نیست. ۱۱.۵ را ببینید و (i) را به‌کار ببرید.
اشاره. ۲۶.۱۰ را نیز ببینید.)

اکنون می‌توانیم قضیهٔ اصلی دربارهٔ ساختار گروههای مشخصه‌یی‌ـسادهٔ متناهی را ثابت کنیم. (۳۷.۷ را ببینید.)

۱۰.۸ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. دراین صورت G مشخصه‌یی‌ـساده است اگر و تنها اگر G حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی نسخه‌های یکریخت یک گروه ساده باشد.

برهان ابتدا فرض می‌کنیم که G مشخصه‌یی‌ـساده است. K_1 را یک زیرگروه نرمال مینیمال G می‌گیریم. به‌ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}\,G$، ۲۹.۳ نشان می‌دهد که K_1^α یک زیرگروه نرمال مینیمال G است و $K_1^\alpha \cong K_1$. چون G متناهی است، تنها تعداد متناهی زیرگروه متمایز به شکل K_1^α با $\alpha \in \mathrm{Aut}\,G$، مثلاً nتا زیرگروه وجود دارد: فرض می‌کنیم که این زیرگروهها

$K_1, K_2, \cdots, K_n$ باشند. قرار می‌دهیم

$$K = \prod_{j=1}^{n} K_j.$$

حال فرض می‌کنیم $\gamma \in \mathrm{Aut}\,G$. به‌ازای هر $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$، K_j به‌ازای عضوی از $\alpha \in \mathrm{Aut}\,G$ برابر است با K_1^α، و بنابراین چون $\alpha\gamma \in \mathrm{Aut}\,G$، به‌ازای عددی چون $l \in \{1, 2, \cdots, n\}$، $K_j^\gamma = K_1^{\alpha\gamma} = K_l$. به‌علاوه، اگر $i, j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ و $i \neq j$ آنگاه $K_i^\gamma \neq K_j^\gamma$. ازاین‌رو

$$\{K_1^\gamma, \cdots, K_n^\gamma\} = \{K_1, \cdots, K_n\},$$

و بنابراین

$$K^\gamma = \prod_{j=1}^{n} K_j^\gamma = \prod_{j=1}^{n} K_j = K.$$

این تساوی به‌ازای هر $\gamma \in \mathrm{Aut}\,G$ برقرار است، و در نتیجه K در G مشخصه است. چون $1 < K_1 \leqslant K$ و $\cancel{G}$ مشخصه‌یی‌ـساده است، نتیجه می‌شود که

$$K = G.$$

بنابر ۷.۸، نتیجه می‌شود که G حاصلضرب مستقیم تعدادی از زیرگروههای $K_1, \cdots, K_n$ است. می‌توانیم نمادها را طوری برگزینیم که، وقتی $m \leqslant n$،

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{m} K_j.$$

اکنون به‌سادگی دیده می‌شود که هر زیرگروه نرمال دلخواه از K_1 در G نرمال است (رک. ۱۱۱). بنابراین چون K_1 در G نرمال مینیمال است، نتیجه می‌شود که K_1 ساده است. لذا چون به‌ازای هر $j = 1, 2, \cdots, m$، $K_j \cong K_1$، G حاصلضرب مستقیم m نسخهٔ یکریخت گروه سادهٔ K_1 است.

به‌عکس فرض می‌کنیم که G حاصلضرب مستقیم m نسخهٔ یکریخت با K_1 است، که در آن m یک عدد صحیح مثبت است و K_1 یک گروه ساده مثلاً

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{m} K_j,$$

که در آن به‌ازای هر $j = 1, \cdots, m$، $K_j \cong K_1$.

هرگاه K_1 آبلی باشد آنگاه به‌ازای عدد اولی مانند p، $|K_1| = p$ (۶.۳). در این صورت به‌ازای هر $j = 1, \cdots, m$، $|K_j| = p$ و G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبهٔ p^m است و بنابر ۴۱.۷، G مشخصه‌یی‌ـساده است.

اگر K_1 ناآبلی باشد آنگاه G حاصلضرب مستقیمی از گروههای سادهٔ ناآبلی است و در نتیجه $Z(G) = 1$ (۴۰۶). K را یک زیرگروه مشخصهٔ نابدیهی G می‌گیریم. در این صورت K شامل یک زیرگروه نرمال مینیمال G است و در نتیجه بنابر ۹.۸، به‌ازای عددی چون $i \in \{1, \cdots, m\}$، $K \geqslant K_i$. بدون آنکه از کلیت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که

$$K \geqslant K_1.$$

اگر $m > 1$، فرض می‌کنیم $j \in \{2, \cdots, m\}$. در این صورت یک یکریختی مانند

$$\varphi : K_1 \mapsto K_j$$

وجود دارد. هر عضو G دارای نمایش یکتایی به شکل $k_1 k_2 \cdots k_m$ است، که به‌ازای هر $i = 1, \cdots, m$، $k_i \in K_i$. پس می‌توانیم نگاشت $\alpha : G \to G$ را به‌ازای هر $k_1 \in K_1$، …، $k_m \in K_m$ با ضابطهٔ

$$\alpha : k_1 k_2 \cdots k_{j-1} k_j k_{j+1} \cdots k_m \mapsto k_j^{\varphi^{-1}} k_2 \cdots k_{j-1} k_1^{\varphi} k_{j+1} \cdots k_m$$

تعریف کنیم. به‌سادگی تحقیق می‌شود که α یک خودریختی از G است، و نیز واضح است که

$$K_1^{\alpha} = K_j.$$

چون K در G مشخصه است،

$$K = K^{\alpha} \geqslant K_1^{\alpha} = K_j.$$

بدین‌ترتیب به‌ازای هر $j = 1, \cdots, m$،

$$K \geqslant K_j,$$

و در نتیجه

$$K = G.$$

ازاین‌رو K مشخصه‌یی‌ـساده است، و برهان کامل می‌شود.

اشارات. (۱) بویژه نتیجه می‌شود که هر گروه مشخصه‌یی‌ـسادهٔ متناهی، کاملاً تحویل‌پذیر است.

(۲) با حذف شرط متناهی‌بودن G، قضیهٔ فوق برقرار نخواهد بود: به‌عنوان مثال، به‌موجب ۳۶۱ گروههای آبلی نامتناهی مشخصه‌یی‌ـساده وجود دارند، و این گروهها نمی‌توانند حاصلضرب تعداد متناهی نسخهٔ یکریخت گروههای ساده باشند، زیرا بنابر ۶.۳، گروههای سادهٔ آبلی متناهی‌اند. باوجوداین، اگر فرض متناهی‌بودن G با این فرض که G دارای یک سری اصلی است تعویض شود، قضیه برقرار باقی می‌ماند: ۴۲۳ را ببینید.

۱۱.۸ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد. در این صورت هر حاصلضرب زیرگروههای نرمال مینیمال G کاملاً تحویل‌پذیر است.

برهان فرض می‌کنیم K حاصلضربی از زیرگروههای نرمال مینیمال G باشد. در این صورت، بنابر ۷.۸ زیرگروههای نرمال مینیمال K_1، …، K_m از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$K = \mathrm{Dr} \prod_{j=1}^{m} K_j.$$

بنابر ۳۸.۷، به‌ازای هر $j = 1, \cdots, m$، K_j مشخصه‌یی‌ـساده است. ازاین‌رو، به‌موجب ۱۰.۸ به‌ازای هر $j = 1, \cdots, m$، K_j کاملاً تحویل‌پذیر است. از اینجا نتیجه می‌شود که K کاملاً تحویل‌پذیر است.

۴۲۲. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) فرض می‌کنیم که یک مقسوم‌علیه اولِ p از $|G|$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که p^2، $|G|$ را نشمارد. در این صورت به‌ازای هر زیرگروه نرمال مینیمال K از G، یا K ساده است یا p، $|K|$ را نمی‌شمارد. (راهنمایی. از ۱۰.۸ استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم که G دارای یک زیرگروه H باشد به‌طوری‌که $|G : H| = p$ و $H_G = 1$. در این صورت G دارای یک زیرگروه نرمال مینیمال یکتای K بوده و K ساده است. (۶۵۲ را نیز ببینید. راهنمایی. از ۱۴.۴، (i) و ۳۵۸ استفاده کنید.)

۴۲۳. تحقیق کنید که هرگاه فرض متناهی‌بودن G با این فرض که G دارای یک سری اصلی است، عوض شود، ۱۰.۸ برقرار می‌ماند. (راهنمایی. ۴۰۴ (iii) و ۴۱۶ را ببینید.)

۴۲۴. فرض می‌کنیم که G دارای یک سری ترکیبی است، و قرار می‌دهیم

$$\mathscr{K}(G, 1) = \{L_1, L_2, \cdots, L_s\},$$

که در آن s یک عدد صحیح مثبت است. توجه داشته باشید که (بنابر ۳۵۵ یا ۴۰۴) G دارای یک سری اصلی نیز هست. در این صورت

(i) هر عامل اصلی G حاصلضرب مستقیمی از تعداد متناهی نسخهٔ یکریخت با L_j است، به‌ازای مقداری از $j \in \{1, 2, \cdots, s\}$. به‌علاوه، به‌ازای هر $j \in \{1, 2, \cdots, s\}$، در هر سری اصلی G حداقل یک عامل وجود دارد که حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی نسخهٔ یکریخت با L_j است (راهنمایی. ۴۲۳ را ببینید.)

(ii) فرض می‌کنیم که در یک سری ترکیبی G تنها یک عامل یکریخت با L_1 وجود داشته باشد. در این صورت در هر سری اصلی G یک عامل وجود دارد که با L_1 یکریخت است؛ و هیچ عامل دیگری از این سری حاصلضرب مستقیم نسخه‌های یکریخت با L_1 نیست.

۴۲۵. (الف) فرض می‌کنیم که L_1، L_2، $\cdots$، L_n زیرگروههای نرمال ماکسیمال G باشند (۳۶۳ را ببینید)، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، و قرار می‌دهیم $L = \bigcap_{j=1}^{n} L_j$. در این صورت G/L کاملاً تحویل‌پذیر است. (رک. ۱۱.۸. راهنمایی. اثبات با استقرا بر n است، همچنین از ۳۶۳ و ۴۰۳ استفاده کنید.)

(ب) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. اگر $G \neq 1$، $R(G)$ را اشتراک تمام زیرگروههای نرمال ماکسیمال G تعریف می‌کنیم؛ و اگر $G = 1$، $R(G) = 1$. مانند قبل، $S(G)$ معرف سکوی G است (۳۹۷). در این صورت سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) $R(G) = 1$.

(ii) G کاملاً تحویل‌پذیر است.

(iii) $S(G) = G$.

۴۲۶. فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ معرف ردهٔ همهٔ گروههای کاملاً تحویل‌پذیر با مرکز بدیهی باشد. G را یک گروه متناهی بگیرید. در این صورت $\mathfrak{X}$ رادیکال G (۴۱۹ را ببینید) عبارت است از زیرگروه $S_2(G)$ از G، که در ۴۱۲ تعریف شده است. (راهنمایی. ۴۱۸ را ببینید.)

۱۲.۸ مسألهٔ توسیع گروهها را، که در فصل ۱ بدان اشاره شد، یادآوری می‌کنیم: گروههای K و Q مفروض‌اند، گروههایی مانند G را به‌دست آورید که برای آنها $K \trianglelefteq G$ و $G/K \cong Q$. این موضوع ممکن است به‌عنوان تعریف یک شیوهٔ ساخت در نظر گرفته شود؛ هرچند آن‌گونه که خاطرنشان کردیم، برخلاف ساخت حاصلضرب مستقیم، این شیوه در حالت کلی از K و Q به یک نوع گروه یکتای G منجر نمی‌شود. (توجه داشته باشید که $K \times Q$ نوعی گروه است که از این شیوهٔ توسیع به‌دست می‌آید.)

شیوهٔ تجزیهٔ متناظر برای یک گروه متناهی G به مفهوم یک سری ترکیبی G منجر می‌شود: گروه G با این شیوه از عاملهای ترکیبی‌اش که گروههای ساده‌اند (۲.۷) و دیگر نمی‌توانند تجزیه شوند، ساخته می‌شود.

برای چنین تجزیه‌هایی قضیهٔ ژوردان‌ـهولدر (۹.۷) یک قضیهٔ یکتایی فراهم آورد. هر چند یک گروه متناهیِ G ممکن است چند سری ترکیبی مختلف داشته باشد، اما هر دو سری از این سریها یک طول دارند و گروههای ساده‌ای را به صورت عاملهایی دقیقاً از یک نوع با یک درجهٔ تکرار شامل‌اند.

این سؤال ممکن است مطرح شود، که آیا یک‌چنین قضیهٔ یکتایی برای تجزیهٔ گروهها به صورت حاصلضربهای مستقیم سازه‌های تجزیه‌ناپذیر نیز برقرار است؟ (خاطرنشان می‌کنیم که G را تجزیه‌پذیر خوانند اگر دارای زیرگروههای حقیقی H و K باشد به‌طوری‌که $G = H \times K$؛ و در غیر این صورت G را تجزیه‌ناپذیر می‌گویند (۸۱)). جواب این است که یک‌چنین قضیه‌ای برای گروههای متناهی وجود دارد؛ و همین‌طور برای گروههای نامتناهی تحت شرایط معینی، اما نه در حالت کلی. این قضیه، قضیهٔ کرول‌ـریماک‌ـاشمیت نامیده می‌شود و در مورد یک گروه متناهی G ادعا می‌کند که هرگاه

$$G = H_1 \times \cdots \times H_m = K_1 \times \cdots \times K_n,$$

که در آن H_1، $\cdots$، H_m و K_1، $\cdots$، K_n نابدیهی و تجزیه‌ناپذیر باشند، آنگاه $m = n$ و با زیرنمایه‌گذاری مجدد در صورت لزوم

$$H_i \cong K_i \quad \text{به‌ازای هر} \quad i = 1, \cdots, n$$

در واقع این قضیه حتی اطلاعاتی بیشتر از اینها به ما می‌دهد. در این کتاب قضیهٔ کلی کرول‌ـریماک‌ـاشمیت را ثابت نمی‌کنیم: برای اثبات هوپرت [b۲۱] ص. ۶۰، قضیهٔ ۳.۱۲.۱، یا روتمن [b۳۴] ص. ۸۰ قضیهٔ ۳۶.۴، یا اسکات [b۳۶] ص. ۸۳، قضیهٔ ۲.۶.۴، یا زاسنهاوس [b۴۱] ص. ۱۱۴، قضیهٔ ۷ را ببینید. بااین‌وجود ما در ۱۸.۸ حالت خاصی را که در فصل ۹ به‌کار گرفته خواهد شد ثابت می‌کنیم.

ما به چند قضیهٔ مقدماتی نیاز داریم. با نتیجه‌ای معروف به لم فیتینگ شروع می‌کنیم. یادآور می‌شویم که درونریختیهای یک گروه نسبت به ترکیب نگاشتها تشکیل یک نیم‌گروه می‌دهند (۱۸.۲). بدین‌ترتیب، برای هر درونریختی φ از G و هر عدد صحیح مثبت k، یک درونریختی متناظر φ^k از G وجود دارد.

۱۳.۸ لم (فیتینگ [a۲۶]، ۱۹۳۴) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. G را به صورت یک حوزهٔ عملگر برای G، همچون در ۲۸.۷ (۳)، در نظر می‌گیریم، و فرض می‌کنیم φ یک Gدرونریختی از G باشد (۲۹.۷ را ببینید). در این صورت:

(i) عدد صحیح مثبتی چون k وجود دارد به‌طوری‌که

$$G = \mathrm{Ker}\,\varphi^k \times \mathrm{Im}\,\varphi^k.$$

(ii) هرگاه G تجزیه‌ناپذیر باشد آنگاه یا $\varphi \in \mathrm{Aut}\,G$، یا، به‌ازای یک عدد صحیح مثبت k، φ^k درونریختی بدیهی G است.

برهان به‌ازای هر عدد صحیح مثبت j، قرار می‌دهیم

$$K_j = \mathrm{Ker}\,\varphi^j.$$

در این صورت واضح است که

$$K_۱ \leqslant K_۲ \leqslant K_۳ \leqslant \cdots \leqslant G.$$

چون G متناهی است، نتیجه می‌گیریم که عدد صحیح مثبتی مانند k وجود دارد به‌طوری‌که

$$K_k = K_{k+۱}.$$

همچنین با استقرا بر l، ثابت می‌کنیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت l،

$$K_k = K_{k+l}.$$

این تساوی برای $l = ۱$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم که $l > ۱$ و به استقرا $K_k = K_{k+l-۱}$، و همچنین فرض می‌کنیم $g \in K_{k+l}$. در این صورت

$$(g\varphi^{l-۱})\varphi^{k+۱} = g\varphi^{k+l} = ۱,$$

بنابراین

$$g\varphi^{l-۱} \in K_{k+۱} = K_k.$$

ازاین‌رو

$$g\varphi^{k+l-۱} = ۱,$$

لذا به‌موجب فرض استقرا

$$g \in K_{k+l-۱} = K_k.$$

به‌علاوه چون $K_k \leqslant K_{k+l}$، این نشان می‌دهد که

$$K_k = K_{k+l}.$$

بدین‌ترتیب برهان به استقرا تمام می‌شود.

حال قرار می‌دهیم $K = K_k$ و $L = \mathrm{Im}\,\varphi^k$. در این صورت $K \trianglelefteq G$ و چون φ^k یک G درونریختی G است (۳۵۳)، L یک G زیرگروه G خواهد بود: یعنی $L \trianglelefteq G$. فرض می‌کنیم $x \in K \cap L$. در این صورت به‌ازای مقداری چون $y \in G$،

$$x\varphi^k = ۱ \quad \text{و} \quad x = y\varphi^k.$$

بدین‌ترتیب

$$y\varphi^{۲k} = ۱,$$

بنابراین به‌موجب بند قبل $y \in K_{۲k} = K_k$. ازاین‌رو

$$x = y\varphi^k = ۱.$$

لذا

$$K \cap L = ۱.$$

از اینجا نتیجه می‌شود (۴۰.۳) که

$$L \cong KL/K.$$

اما همچنین، بنابر قضیهٔ بنیادی همریختیها

$$L \cong G/K.$$

بنابراین، چون $KL \leqslant G$ و G متناهی است، به‌دست می‌آوریم

$$G = KL.$$

ازاین‌رو بنابر ۲.۸،

$$G = K \times L.$$

اکنون فرض می‌کنیم که G تجزیه‌ناپذیر است. در این صورت یا $K = G$ و $L = 1$ یا $K = 1$ و $L = G$. در حالت اول؛ φ^k درونریختی بدیهی G است. در حالت دوم $\varphi^k \in \text{Aut } G$ و این مطلب ایجاب می‌کند که φ یک دوسویی باشد، بنابراین $\varphi \in \textbf{Aut } G$.

۱۴.۸ تعریف برای بیان لم بعدی که استنتاجی از لم فیتینگ است، معرفی حاصل‌جمع همریختیها را لازم می‌داریم (رک. ۳۳).

فرض می‌کنیم φ و ψ همریختیهایی از G به توی H باشند (که G و H گروههای دلخواه‌اند). نگاشت

$$\varphi + \psi : G \to H$$

را به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$\varphi + \psi : g \mapsto (g\varphi)(g\psi)$$

تعریف می‌کنیم. در حالت کلی $\varphi+\psi$ یک همریختی نیست و $\varphi+\psi \neq \psi+\varphi$ (هر چند که اگر $\varphi+\psi$ همریختی باشد آنگاه $\varphi+\psi = \psi+\varphi$؛ ۴۳۰ را ببینید.) بااین‌وجود، ما در ۱۵.۸ با وضعیت خاصی سروکار خواهیم داشت که در آن حاصل‌جمع همریختیها باز هم همریختی خواهد بود.

این تعریف به طریق طبیعی به حاصل‌جمعهای متناهی دلخواه همریختیها گسترش می‌یابد. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت و همچنین $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ همریختیهایی از G به توی H باشند. در این صورت نگاشت

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i : G \to H$$

را به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i : g \mapsto (g\varphi_1)(g\varphi_2)\cdots(g\varphi_n)$$

تعریف می‌کنیم.

۴۲۷. (i) H و K را زیرگروههای نرمال G می‌گیریم به‌طوری‌که $G = H \times K$. فرض می‌کنیم π تصویر متناظر از G به روی H (۱۱.۳ را ببینید.) باشد و ι نگاشت شمول از H به توی G. قرار می‌دهیم $\varphi = \pi\iota$. در این صورت φ یک درونریختی G است و $\varphi^2 = \varphi$. به‌علاوه هرگاه H و K زیرگروههای حقیقی G باشند (بنابراین G تجزیه‌پذیر باشد) آنگاه φ یک خودریختی از G نخواهد بود و یک عدد صحیح مثبت k نیز وجود نخواهد داشت به‌طوری‌که φ^k درونریختی بدیهی G باشد (رک. ۱۳.۸ (ii)).

(ii) فرض می‌کنیم φ یک درونریختی G باشد به‌طوری‌که $\varphi^2 = \varphi$. قرار می‌دهیم $H = \text{Im } \varphi$ و $K = \text{Ker } \varphi$. در این صورت $G = H \times K$ و $\varphi = \pi\iota$، که در آن π تصویر متناظر از G به روی H و ι نگاشت شمول از H به توی G است.

۴۲۸. (i) فرض می‌کنیم φ یک درونریختی G باشد و قرار می‌دهیم $J = \text{Im } \varphi$. در این صورت φ یک درونریختی G است اگر و تنها اگر به‌ازای هر $g \in G$، $(g\varphi)g^{-1} \in C_G(J)$ (رک. ۲۴۵ و ۳۵۳ (ii)).

(ii) فرض می‌کنیم که G تجزیه‌ناپذیر است و $Z(G) = 1$. در این صورت تنها درونریختیهای G عبارت‌اند از خودریختی همانی G و درونریختی بدیهی G (رک. ۱۳.۸ (ii)). راهنمایی. فرض کنید φ یک درونریختی G باشد و $J = \text{Im } \varphi$. با استفاده از (i) و ۲.۸ نشان دهید که $G = C_G(J) \times J$).

۴۲۹. (i) هر درونریختی φ از G به‌طوری‌که $\text{Im } \varphi \leqslant Z(G)$ یک درونریختی G است (۴۲۸ (i) را ببینید.)

(ii) G را یک گروه ناآبلی متناهی می‌گیریم. فرض می‌کنیم که G دارای هیچ سازهٔ مستقیم آبلی نابدیهی نیست. در این صورت به‌ازای هر درونریختی φ از G به‌طوری‌که $\text{Im } \varphi \leqslant Z(G)$، یک عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌قسمی‌که φ^k درونریختی بدیهی G است.

۴۳۰. (i) فرض می‌کنیم φ و ψ همریختیهایی از G به توی H باشند. در این صورت $\varphi + \psi$ یک همریختی است اگر و تنها اگر $[\text{Im } \varphi, \text{Im } \psi] = 1$. بویژه، اگر $\varphi + \psi$ یک همریختی باشد آنگاه $\varphi + \psi = \psi + \varphi$.

(ii) هرگاه G ناآبلی و α خودریختی دلخواهی از G باشد، آنگاه $\alpha + \alpha$ درونریختی G نخواهد بود.

۴۳۱. فرض می‌کنیم که G یک گروه آبلی باشد. در این صورت هنگامی که جمع همچون در ۱۴.۸ و ضرب با ترکیب نگاشتها تعریف شود، مجموعهٔ همهٔ درونریختیهای G تشکیل یک حلقه می‌دهد. (۱۸.۲ را ببینید.). ما این حلقه را با $\text{End } G$ نمایش می‌دهیم. عضو صفر $\text{End } G$، درونریختی

بدیهی G است؛ و $\operatorname{End} G$ یک عضو واحد ضربی دارد، که خودریختی همانی G است.

۴۳۲. فرض کنید R یک حلقه با عضو واحد ضربی ۱ باشد. در این صورت R (به‌عنوان یک حلقه) با زیرحلقه‌ای از $\operatorname{End} R^+$ یکریخت است. (رک. ۴۶ (i) و ۲۴.۴. راهنمایی. به‌ازای هر $a \in R$، فرض کنید ρ_a همچون در ۱۱.۲ تعریف شود. تحقیق کنید که نگاشت $a \mapsto \rho_a$ یک همریختی حلقه‌ای یک به یک از R به توی $\operatorname{End} R^+$ است.)

۴۳۳. حلقه‌های $\mathbf{Z}^+$ و $\operatorname{End} \mathbf{Z}^+$ یکریخت‌اند، و به‌ازای هر عدد صحیح مثبتِ n، حلقه‌های $\mathbf{Z}_n$ و $\operatorname{End} \mathbf{Z}_n^+$ نیز یکریخت‌اند (رک. ۴۶ (ii)).

۱۵.۸ لم G را یک گروه تجزیه‌ناپذیر متناهی نابدیهی می‌گیریم. فرض می‌کنیم که $\varphi_۱$، $\varphi_۲$، ...، φ_n درونریختیهای G هستند به‌طوری‌که به‌ازای هر $j = ۱, \dots, n$، $\sum_{i=۱}^{j} \varphi_i$ یک درونریختی G است و $\sum_{i=۱}^{n} \varphi_i = ۱$ خودریختی همانی G. در این صورت دست‌کم یکی از $\varphi_۱$، ...، φ_n، یک خودریختی از G است.

برهان حکم را با استقرا بر n ثابت می‌کنیم. هرگاه $n = ۱$، نتیجه بدیهی است. حال فرض می‌کنیم که $n = ۲$. در این صورت $\varphi_۱ + \varphi_۲ = ۱$، لذا بنابر تعریف ترکیب نگاشتها و نیز ازآنجاکه $\varphi_۱$ یک درونریختی G است،

$$\begin{aligned}\varphi_۱ &= \varphi_۱(\varphi_۱ + \varphi_۲) = \varphi_۱^۲ + \varphi_۱\varphi_۲ \\ &= (\varphi_۱ + \varphi_۲)\varphi_۱ = \varphi_۱^۲ + \varphi_۲\varphi_۱.\end{aligned}$$

ازاین‌رو، چون G یک گروه است،

$$\varphi_۱\varphi_۲ = \varphi_۲\varphi_۱.$$

فرض می‌کنیم ζ معرف درونریختی بدیهی G باشد. اگر هیچ‌یک از $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$، خودریختی از G نباشد، آنگاه بنابر لم فیتینگ (۱۳.۸)، اعداد صحیح مثبت $k_۱$ و $k_۲$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\varphi_۱^{k_۱} = \varphi_۲^{k_۲} = \zeta.$$

بنابراین، چون $\varphi_۱ + \varphi_۲ = ۱$ و $\varphi_۱\varphi_۲ = \varphi_۲\varphi_۱$، داریم

$$۱ = (\varphi_۱ + \varphi_۲)^{k_۱+k_۲} = \sum_{i=۰}^{k_۱+k_۲} \binom{k_۱+k_۲}{i} \varphi_۱^{k_۱+k_۲-i}\varphi_۲^{i},$$

(که در آن $\varphi_۱^۰ = \varphi_۲^۰ = ۱$).

وقتی که $۰ \leqslant i \leqslant k_۲$، داریم $k_۱ + k_۲ - i \geqslant k_۱$ و در نتیجه $\varphi_۱^{k_۱+k_۲-i} = \zeta$. ازاین‌رو $\varphi_۱^{k_۱+k_۲-i}\varphi_۲^{i} = \zeta$، زیرا $\varphi_۲^{i}$ یک درونریختی G است. هنگامی که $k_۲ < i \leqslant k_۱ + k_۲$ داریم $\varphi_۲^{i} = \zeta$، و در نتیجه $\varphi_۱^{k_۱+k_۲-i}\varphi_۲^{i} = \zeta$. بنابراین از معادلهٔ فوق به‌دست می‌آوریم

$$۱ = \zeta.$$

اما این یک تناقض است، زیرا $G \neq ۱$. در این صورت نتیجه می‌گیریم که یا $\varphi_۱$ باید یک خودریختی G باشد و یا $\varphi_۲$.

بالاخره؛ فرض می‌کنیم که $n > ۲$. قرار می‌دهیم

$$\psi = \sum_{i=۱}^{n-۱} \varphi_i.$$

بنابر فرض، ψ و φ_n درونریختیهای G هستند و $\psi + \varphi_n = ۱$. ازاین‌رو، مطابق آنچه در بالا ثابت کردیم، یا ψ یک خودریختی G است و یا φ_n. اگر $\varphi_n \in \operatorname{Aut} G$، برهان تمام است. پس فرض می‌کنیم که $\psi \in \operatorname{Aut} G$. در این صورت $\psi^{-۱} \in \operatorname{Aut} G$ و

$$۱ = \sum_{i=۱}^{n-۱} \varphi_i\psi^{-۱}.$$

به سادگی تحقیق می‌شود که $\varphi_۱\psi^{-۱}$، ...، $\varphi_{n-۱}\psi^{-۱}$ درونریختیهای G هستند (۳۵۳ را ببینید.) و به‌ازای هر $j = ۱, \dots, n-۱$، $\sum_{i=۱}^{j} \varphi_i\psi^{-۱}$ یک درونریختی G است. پس بنابر فرض استقرا، به‌ازای عددی چون $i \in \{۱, \dots, n-۱\}$، $\varphi_i\psi^{-۱} \in \operatorname{Aut} G$. بنابراین $\varphi_i = (\varphi_i\psi^{-۱})\psi \in \operatorname{Aut} G$. این اثبات به استقرا را کامل می‌کند.

۱۶.۸ فرض می‌کنیم که $G_۱$، $G_۲$، ...، G_n زیرگروههای نرمال G هستند به‌طوری‌که $G = \operatorname{Dr} \prod_{j=۱}^{n} G_j$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. در این صورت هر عضو G به‌طور یکتا به شکل $g_۱g_۲\cdots g_n$ قابل بیان است، که در آن به‌ازای هر $j = ۱, \dots, n$، $g_j \in G_j$. بنابراین به‌ازای هر $i = ۱, \dots, n$، می‌توانیم نگاشت

$$\pi_i : G \to G_i$$

را (به‌ازای هر $g_۱ \in G_۱$، $g_۲ \in G_۲$، ...، $g_n \in G_n$) با ضابطهٔ $\pi_i : g_۱g_۲\cdots g_n \mapsto g_i$ تعریف کنیم. در این صورت π_i تصویر G بر روی G_i نسبت به تجزیهٔ $G = G_۱ \times \cdots \times G_n$ نامیده می‌شود (رک. ۱۱.۳).

حال G_i یک G زیرگروه G است، و به سادگی تحقیق می‌شود که π_i یک G همریختی است. فرض می‌کنیم γ_i معرف نگاشت شمول از G_i به توی G باشد؛ در این صورت روشن است که یک G همریختی نیز خواهد بود. لذا $\pi_i\gamma_i$ یک G درونریختی G است، و به‌ازای هر n، $j = 1, \cdots, n$، نگاشت $\sum_{i=1}^{j} \pi_i\gamma_i$، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\sum_{i=1}^{j}\pi_i\gamma_i : g_1g_2\cdots g_jg_{j+1}\cdots g_n \mapsto g_1g_2\cdots g_j$$

(به‌ازای هر $g_1 \in G_1$، $g_2 \in G_2$، $\cdots$، $g_n \in G_n$).
بنابراین $\sum_{i=1}^{j}\pi_i\gamma_i$ یک G درونریختی G است، و

$$\sum_{i=1}^{n}\pi_i\gamma_i = 1$$

خودریختی همانی G.

۱۷.۸ فرض می‌کنیم G گروه متناهی نابدیهی دلخواهی باشد. در این صورت زیرگروههای نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی G_1، G_2، $\cdots$، G_n از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{n} G_j.$$

برهان قضیه را با استقرا بر $|G|$ ثابت می‌کنیم. اگر G خود تجزیه‌ناپذیر باشد، قرار می‌دهیم $n = 1$ و $G_1 = G$: در این صورت چیزی برای اثبات نمی‌ماند. فرض می‌کنیم G تجزیه‌پذیر باشد: در این صورت زیرگروههای حقیقی H و K از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$G = H \times K.$$

پس H و K نابدیهی‌اند و $|H| < |G|$ و $|K| < |G|$. ازاین‌رو به‌موجب فرض استقرا زیرگروههای نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی G_1، $\cdots$، G_m از H و G_{m+1}، $\cdots$، G_n از K وجود دارند به‌طوری‌که

$$H = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{m} G_j \quad \text{و} \quad K = \mathrm{Dr}\prod_{j=m+1}^{n} G_j.$$

در این صورت G_1، G_2، $\cdots$، G_n زیرگروههای نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی G بوده و

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{m} G_j \times \mathrm{Dr}\prod_{j=m+1}^{n} G_j = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{n} G_j,$$

و اثبات به استقرا کامل می‌شود.

۴۳۴. فرض می‌کنیم $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$.
(i) هرگاه α یک G خودریختی G باشد، آنگاه G درونریختی یکتای φ از G وجود دارد به‌طوری‌که

$\alpha + \varphi = 1$، خودریختی همانی G

به‌علاوه، اگر G ناآبلی باشد آنگاه $\varphi \notin \mathrm{Aut}\, G$ (ر.ک. ۱۵.۸).
(ii) هرگاه α، G خودریختی از G نباشد، آنگاه هیچ درونریختی φ از G وجود ندارد به‌طوری‌که

$$\alpha + \varphi = 1.$$

(راهنمایی. ۲۴۵ و ۳۵۳ (ii) و ۴۲۹ (i) را ببینید.)
۴۳۵. (i) تحقیق کنید که اگر به جای فرض متناهی‌بودن G، فرضِ G دارای یک سری اصلی است، گذاشته شود ۱۷.۸ باز هم صادق خواهد بود.
(ii) مثالی از یک گروه تجزیه‌ناپذیر ارائه دهید که دارای سری اصلی نباشد.

اکنون حالت خاصی از قضیهٔ کرول-ریماک-اشمیت را ثابت می‌کنیم، یعنی ثابت می‌کنیم که یک گروه متناهی نابدیهی با مرکز بدیهی تنها یک تجزیه به شکل حاصلضربی از زیرگروههای نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی دارد. (یعنی یکتا سوای ترتیب عاملها).

۱۸.۸ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد با $Z(G) = 1$. قرار می‌دهیم

$$G = H_1 \times \cdots \times H_m = K_1 \times \cdots \times K_n,$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبت‌اند و H_1، $\cdots$، H_m و K_1، $\cdots$، K_n زیرگروههای نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی G می‌باشند. در این صورت $m = n$ و با زیرنمایه‌گذاری مجدد به اندازهٔ کافی، اگر لازم باشد، به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $H_i = K_i$.

برهان قضیه را با استقرا بر n ثابت می‌کنیم. هرگاه $n = 1$، آنگاه چون K_1 تجزیه‌ناپذیر است و $H_1, \cdots, H_m$ نابدیهی‌اند، خواهیم داشت $m = 1$ و $H_1 = K_1$. لذا می‌توانیم فرض کنیم که $n > 1$. این هم، به دلیل مشابه، ایجاب می‌کند که $m > 1$.

فرض می‌کنیم π_1 معرف تصویر G بر روی H_1 نسبت به تجزیهٔ $G = H_1 \times \cdots \times H_m$ باشد و به‌ازای هر $i = 1, \cdots, n$، ρ_i معرف تصویر G بر روی K_i نسبت به تجزیهٔ $G = K_1 \times \cdots \times K_n$ باشد. به‌علاوه فرض می‌کنیم κ_i معرف نگاشت شمول از K_i به توی G باشد، و قرار دهیم

$$\pi_i^* = \kappa_i \pi_1 = \pi_1|_{K_i} : K_i \to H_1 \quad \text{و} \quad \rho_i^* = \rho_i|_{H_1} : H_1 \to K_i.$$

هر $\rho_i^* \pi_i^*$ یک G درونریختی H_1 است، پس یک H_1 درونریختی H_1 نیز خواهد بود.

علاوه‌براین، به‌ازای هر $j = 1, \cdots, n$، $\sum_{i=1}^{j} \rho_i \kappa_i$ معین و یک G درونریختی G است (۱۶.۸ را ببینید). بنابراین چون π_1 یک G همریختی از G به توی H_1 است $\left(\sum_{i=1}^{j} \rho_i \kappa_i\right) \pi_1$ نیز چنین است و روشن است که

$$\left(\sum_{i=1}^{j} \rho_i \kappa_i\right) \pi_1 = \sum_{i=1}^{j} \rho_i \pi_i^*.$$

تحدید این همریختی به H_1، $\sum_{i=1}^{j} \rho_i^* \pi_i^*$ است که بنابراین یک G درونریختی H_1 است، ازاین‌رو یک H_1 درونریختی H_1 است. به‌ازای هر $h \in H_1$،

$$\begin{aligned} h = h\pi_1 &= ((h\rho_1)(h\rho_2)\cdots(h\rho_n))\pi_1 \\ &= (h\rho_1^*\pi_1^*)(h\rho_2^*\pi_2^*)\cdots(h\rho_n^*\pi_n^*), \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i^* \pi_i^* = 1, \quad (\text{خودریختی همانی } H_1)$$

بنابراین، چون H_1 نابدیهی و تجزیه‌ناپذیر است، ۱۵.۸ نشان می‌دهد که به‌ازای مقداری چون i، $\rho_i^* \pi_i^* \in \operatorname{Aut} H_1$. می‌توانیم فرض کنیم که این نمادگذاری انتخاب‌شده طوری باشد که $\rho_1^* \pi_1^* \in \operatorname{Aut} H_1$. بویژه از اینجا نتیجه می‌شود که ρ_1^* یک به یک است.

قرار می‌دهیم $J = H_2 \times \cdots \times H_m$ و $L = K_2 \times \cdots \times K_n$. در این صورت $G = H_1 \times J = K_1 \times L$.

چون $Z(G) = 1$، در نتیجه (۴۰۶)

$$Z(H_1) = Z(J) = Z(K_1) = Z(L) = 1.$$

اما

$$J \leqslant C_G(H_1) \leqslant G = H_1 \times J,$$

و در نتیجه (بنابر ۴۰۲)

$$C_G(H_1) = (H_1 \cap C_G(H_1)) \times J = J,$$

زیرا $Z(H_1) = 1$. با استدلالهایی دقیقاً مشابه به‌دست می‌آوریم

$$C_G(J) = H_1, C_G(K_1) = L \;\text{ و }\; C_G(L) = K_1.$$

اما $L = \operatorname{Ker} \rho_1$. بنابراین چون ρ_1^* یک به یک است،

$$1 = \operatorname{Ker} \rho_1^* = H_1 \cap \operatorname{Ker} \rho_1 = H_1 \cap L.$$

ازاین‌رو بنابر ۵۳.۳، $H_1 \leqslant C_G(L)$. لذا

$$H_1 \leqslant K_1 \leqslant G = H_1 \times J,$$

و در نتیجه (بار دیگر بنابر ۴۰۲)

$$K_1 = H_1 \times (K_1 \cap J).$$

چون K_1 تجزیه‌ناپذیر است و $H_1 \neq 1$، نتیجه می‌شود که

$$K_1 = H_1.$$

ازاین‌رو

$$J = C_G(H_1) = C_G(K_1) = L.$$

لذا خواهیم داشت

$$J = H_2 \times \cdots \times H_m = K_2 \times \cdots \times K_n.$$

چون $Z(J) = 1$، پس فرض استقرا ایجاب می‌کند که $m = n$ و، با انتخاب مناسب نماد به‌ازای هر $i = 2, \cdots, m$،

$$H_i = K_i.$$

لذا اثبات به استقرا کامل می‌شود.

۴۳۶. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد با $Z(G) = 1$. در این صورت، بنابر ۱۷.۸ و ۱۸.۸ تجزیهٔ یکتایی از G مانند

$$G = G_1 \times \cdots \times G_n,$$

وجود دارد به‌طوری‌که G_1، $\cdots$، G_n زیرگروههای نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی Gاند. فرض می‌کنیم که هیچ دو گروهی از گروههای G_1، $\cdots$، G_n یکریخت نباشند. در این صورت G_1، $\cdots$، G_n زیرگروههای مشخصهٔ G بوده و

$$\mathrm{Aut}\, G \cong \mathrm{Aut}\, G_1 \times \cdots \times \mathrm{Aut}\, G_n.$$

(رک. ۳۴۲؛ همین‌طور ۹۴ را ببینید.)

۴۳۷. مثالی از یک گروه آبلی متناهی مانند G بیاورید به‌طوری‌که $G = A \times B$، که A و B زیرگروههای تجزیه‌ناپذیر نابدیهی نایکریخت G باشند، و به‌علاوه G زیرگروههای A^* و B^* متمایز از A و B داشته باشد با $G = A^* \times B^*$ (رک. ۱۸.۸).

اکنون قضیه‌ای را دربارهٔ زیرگروههای حاصلضرب مستقیم دو گروه ثابت می‌کنیم. این قضیه را در فصل ۹ برای مسألهٔ توسیع به‌کار خواهیم برد: ۲۸.۹ را ببینید.

۱۹.۸ قضیه (ریماک [a۸۰]، کلاین، فریکه [b۲۶]). فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = H \times K$، و همچنین π و ρ به‌ترتیب تصاویر متناظرِ G بر H و K باشند. فرض می‌کنیم $L \leqslant G$. در این صورت

(i) $(H \cap L) \trianglelefteq L\pi \leqslant H$، $(K \cap L) \trianglelefteq L\rho \leqslant K$ و $L\pi/(H \cap L) \cong L\rho/(K \cap L)$.

(ii) $L = (H \cap L) \times (K \cap L)$ اگر و تنها اگر $L\pi = H \cap L$ (یا اگر و تنها اگر $L\rho = K \cap L$).

برهان (i) می‌دانیم که π و ρ همریخت‌اند (۱۱.۳).
چون $H \trianglelefteq G$، $(H \cap L) \trianglelefteq L \leqslant G$. بنابراین (۸۷)

$$(H \cap L)\pi \trianglelefteq L\pi \leqslant G\pi = H.$$

بنابر تعریف، $\pi|_H$ نگاشت همانی بر H است.
پس

$$(H \cap L)\pi = H \cap L.$$

ازاین‌رو

$$(H \cap L) \trianglelefteq L\pi \leqslant H.$$

به‌همین‌نحو

$$(K \cap L) \trianglelefteq L\rho \leqslant K.$$

اکنون نگاشت

$$\varphi : L\pi \to L\rho/(K \cap L),$$

را تعریف می‌کنیم. به‌ازای هر عضو $h \in L\pi$، عضو $k \in K$ وجود دارد به‌طوری‌که $hk \in L$. پس $k \in L\rho$ و تعریف می‌کنیم

$$h\varphi = k(K \cap L).$$

لازم نیست عضو k به‌وسیلهٔ h به‌طور یکتا مشخص شود، در نتیجه باید تحقیق کنیم که این تعریف $h\varphi$ به انتخاب k بستگی ندارد. همچنین اگر $k' \in K$ با $hk' \in L$ آنگاه

$$k^{-1}k' = (hk)^{-1}(hk') \in K \cap L,$$

و در نتیجه

$$k'(K\cap L) = k(K\cap L).$$

لذا φ خوشتعریف است.

فرض می‌کنیم $h_1, h_2 \in L\pi$ و همچنین $k_1, k_2 \in K$ با $h_1k_1, h_2k_2 \in L$. در این صورت $h_1h_2 \in L\pi$، $k_1k_2 \in K$ و چون $[H,K]=1$،

$$(h_1h_2)(k_1k_2) = (h_1k_1)(h_2k_2) \in L.$$

بنابراین

$$(h_1h_2)\varphi = k_1k_2(K\cap L) = (h_1\varphi)(h_2\varphi).$$

بدین‌ترتیب φ یک همریختی است. φ پوشا نیز هست، زیرا به‌ازای هر $k \in L\rho$، عضوی چون $h \in H$ وجود دارد به‌طوری‌که $hk \in L$، و در این صورت $h \in L\pi$ و $h\varphi = k(K\cap L)$. به‌علاوه

$$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{h \in L\pi : hk \in L \text{ ،} k \in K\cap L \text{ به‌ازای عضوی مانند}\}$$
$$= \{h \in L\pi : h \in L\}|H\cap L \quad (\text{زیرا } (H\cap L)\pi = H\cap L)$$

ازاین‌رو، بنابر قضیهٔ بنیادی همریختیها

$$L\pi/(H\cap L) = L\pi/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi = L\rho/(K\cap L).$$

(ii) روشن است که

$$(H\cap L)\times(K\cap L) \leqslant L \leqslant L\pi \times L\rho.$$

هرگاه $L\pi = H\cap L$، آنگاه به‌موجب (i) نتیجه می‌شود که $L\rho = K\cap L$. در این صورت شمولهای فوق ایجاب می‌کنند که $L = (H\cap L)\times(K\cap L)$.

به‌عکس هرگاه

$$L = (H\cap L)\times(K\cap L)$$

آنگاه مطابق تعاریف π و ρ واضح است که

$$L\pi = H\cap L \quad \text{و} \quad L\rho = K\cap L.$$

۲۰.۸ فرع قرار می‌دهیم $G = H\times K$. فرض می‌کنیم که G متناهی است و $(|H|,|K|) = 1$. در این صورت به‌ازای هر زیرگروه L از G،

$$L = (H\cap L)\times(K\cap L).$$

برهان فرض می‌کنیم $L \leqslant G$ و نیز π و ρ مانند ۱۹.۸ تعریف شده باشند. در این صورت $L\pi \leqslant H$ و $L\rho \leqslant K$. ازاین‌رو بنابر فرض

$$(|L\pi|, |L\rho|) = 1.$$

به‌موجب ۱۹.۸ (i)، چون $L\pi/(H\cap L) \cong L\rho/(K\cap L)$، این رابطه ایجاب می‌کند که $|L\pi/(H\cap L)| = 1$، بنابراین $L\pi = H\cap L$. لذا بنابر ۱۹.۸ (ii)، خواهیم داشت

$$L = (H\cap L)\times(K\cap L).$$

اشاره. البته این فرع در حالت کلی بدون شرط $(|H|,|K|) = 1$ صادق نیست. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ که $o(a) = o(b) = 2$. در این صورت $\langle ab\rangle$ یک زیرگروه G از مرتبهٔ ۲ است، اما $\langle a\rangle \cap \langle ab\rangle = 1 = \langle b\rangle \cap \langle ab\rangle$.

۴۳۸. فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = H\times K$، و همچنین π و ρ به‌ترتیب تصاویر متناظر G بر H و K باشند. فرض می‌کنیم که

$$H_2 \trianglelefteq H_1 \leqslant H, K_2 \trianglelefteq K_1 \leqslant K \quad \text{و} \quad H_1/H_2 \cong K_1/K_2.$$

θ را یکریختی دلخواهی از H_1/H_2 به‌روی K_1/K_2 می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$L = \{hk : h \in H_1, k \in K_1 \ \text{و}\ (hH_2)\theta = kK_2\}.$$

در این صورت $L \leqslant G$ و

$$H\cap L = H_2, \quad L\pi = H_1, \quad K\cap L = K_2, \quad L\rho = K_1.$$

۴۳۹. فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = H\times K$، و همچنین π تصویر متناظر G بر H باشد. فرض می‌کنیم $L \leqslant G$ و قرار می‌دهیم $J = (H\cap L)\times(K\cap L)$. در این صورت $J \trianglelefteq L$ و

$$L/J \cong L\pi/(H\cap L).$$

۱۹.۸) را ببینید. راهنمایی. فرض کنید $\pi_1 : L \to L\pi$ بوسیلهٔ تحدید π تعریف شده باشد، و فرض کنید $\nu : L\pi \to L\pi/(H\cap L)$ همریختی طبیعی باشد. نگاشت $\pi_1\nu$ را در نظر بگیرید.)

۴۴۰. (ریماک [a۸۰]). فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = H\times K$، و همچنین π و ρ به‌ترتیب تصاویر متناظرِ G بر H و K باشند. فرض می‌کنیم $L \leqslant G$. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) $L \trianglelefteq G$.

(ii) $(H\cap L) \trianglelefteq H$، $(K\cap L)\trianglelefteq K$، $L\pi/(H\cap L) \leqslant Z(H/(H\cap L))$ و $L\rho/(K\cap L) \leqslant Z(K/(K\cap L))$.

(راهنمایی. در مورد اثبات (ii) ⇐ (i)، قرار دهید $J = (H\cap L)\times(K\cap L)$. توجه داشته باشید که $J \trianglelefteq G$ و برای اینکه نشان دهید $L/J \leqslant Z(G/J)$ از ۱۵۱ استفاده کنید.)

۴۴۱. فرض کنید H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = H\times K$، و همچنین π و ρ به‌ترتیب تصاویر متناظرِ G بر H و K باشند. یک زیرگروه L از G حاصلضرب زیرمستقیم H و K خوانده می‌شود اگر $L\pi = H$ و $L\rho = K$.

(i) فرض می‌کنیم $L \leqslant G$. در این صورت L حاصلضرب زیرمستقیمِ H و K است اگر و تنها اگر $HL = G = KL$.

(ii) فرض می‌کنیم L حاصلضرب زیرمستقیمِ H و K باشد. در این صورت $L \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر $G' \leqslant L$. (راهنمایی. از ۱۶۵ و ۴۴۰ استفاده کنید.)

(iii) فرض می‌کنیم که G متناهی باشد و $(|H/H'|, |K/K'|) = 1$. در این صورت هیچ زیرگروه نرمال حقیقی G حاصلضرب زیرمستقیمِ H و K نیست. (راهنمایی. از (i) و ۱۹.۸ استفاده کنید.)

۴۴۲. فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. تحقیق کنید که همریختی ψ، تعریف شده در ۱۰۹، $G/(H\cap K)$ را بر یک حاصلضرب زیرمستقیمِ G/H و G/K می‌نگارد. (۴۴۱ را ببینید.)

۴۴۳. فرض می‌کنیم H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری‌که $G = H\times K$. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) L حاصلضرب زیرمستقیمِ H و K است (۴۴۱).

(ii) به‌ازای گروهی مانند J، همریختیهای $\varphi : H\to J$ و $\psi : K \to J$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$L = \{hk : h\in H, k\in K \quad \text{و} \quad h\varphi = k\psi\}.$$

(راهنمایی. برای اثبات (i) ⇐ (ii)، اثبات ۱۹.۸ را ببینید.)

بجاست حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی نسخه ازگروه G را به شکل گروهی از نگاشتها از یک مجموعهٔ مناسب به توی G مورد توجه قرار دهیم. این گروه از نگاشتها را در اینجا معرفی و در فصل ۹ بار دیگر به آن مراجعه خواهیم کرد. این تعریف ممکن است برای حاصلضربهای مستقیم دلخواه نیز تعمیم داده شود: ۴۴۴ و ۴۴۵ را ببینید.

۲۱.۸ لم X را یک مجموعهٔ متناهی ناتهی می‌گیریم و فرض می‌کنیم G^X معرف مجموعهٔ همهٔ نگاشتها از X به توی گروه G باشد. به‌ازای هر $f_1, f_2 \in G^X$ فرض می‌کنیم $f_1f_2 \in G^X$ به‌ازای هر $x\in X$ با ضابطهٔ

$$(f_1f_2)(x) = f_1(x)f_2(x)$$

تعریف شده باشد.

(تذکر. این عمل ضرب ترکیب نگاشتها نیست، و در حال حاضر ما نگاشتها را در سمت چپ اعضایی که این نگاشتها بر آنها اثر می‌کنند می‌نویسیم. اسکات درکتابش نماد f_1+f_2 را برای نگاشتی که ما در اینجا به f_1f_2 نمایش می‌دهیم به‌کار می‌برد: [b۳۶]، ص. ۱۴، مثال ۱۱ را ببینید. این نمادگذاری اسکات با ۱۴.۸ مطابقت دارد، ولی ما از نمادی پیروی می‌کنیم که در متن کنونی متداولتر است). نسبت به این عمل ضرب، G^X ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد که ما آن را به $\mathrm{Dr}\ G^X$ نمایش می‌دهیم.

به‌ازای هر $x\in X$، قرار می‌دهیم

$$G_x = \{f\in G^X : f(y) = 1 \quad \text{هرگاه} \quad x\neq y\in X\}.$$

در این صورت

$$G \cong G_x \trianglelefteq \mathrm{Dr}\ G^X$$

و

$$\mathrm{Dr}\, G^X = \mathrm{Dr}\prod_{x\in X} G_x.$$

بدین‌ترتیب $\mathrm{Dr}\ G^X$ حاصلضرب مستقیم $|X|$ نسخهٔ یکریخت با G است.

برهان روشن است که G^X ناتهی است و نسبت به ضرب تعریف‌شده در فوق بسته است. چون ضرب در G شرکت‌پذیر است، نتیجه می‌شود که ضرب در G^X نیز شرکت‌پذیر است. یک عضو

همانی نیز برای G^X وجود دارد، یعنی نگاشت

$$e : X \to G$$

که به‌ازای هر $x \in X$ با ضابطهٔ

$$e(x) = ۱$$

تعریف می‌شود. به‌علاوه هر عضو $f \in G^X$ وارونی مثل $f^{-۱} \in G^X$ دارد، که به‌ازای هر $x \in X$ با ضابطهٔ

$$f^{-۱}(x) = f(x)^{-۱}$$

تعریف می‌شود.
ازاین‌رو نسبت به ضرب تعریف‌شده در فوق G^X یک گروه است. ما این گروه را با $\mathrm{Dr}\ G^X$ نشان می‌دهیم.

حال فرض می‌کنیم $x \in X$، و قرار می‌دهیم $G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$. سپس نگاشت

$$\varphi_x : G \to G^*,$$

را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: به‌ازای هر $g \in G$،

$$\varphi_x : g \mapsto g_x,$$

که در آن g_x نگاشتی از X به توی G است، که به‌ازای هر $y \in X$ با ضابطهٔ

$$g_x(y) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } y \neq x \\ g & \text{اگر } y = x \end{cases}$$

تعریف می‌شود. در این صورت به‌ازای هر $g, g' \in G$،

$$(gg')_x = g_x g'_x,$$

بنابراین φ_x یک همریختی است. به‌علاوه،

$$\operatorname{Ker}\varphi_x = \{g \in G : g_x = e\} = ۱,$$

و، بنابر تعریف،

$$\operatorname{Im}\varphi_x = G_x.$$

لذا

$$G \cong G_x \leqslant G^*.$$

هرگاه $g \in G$ و $f \in G^*$، آنگاه هروقت $x \neq y \in X$،

$$\begin{aligned}(f^{-۱}g_x f)(y) &= f(y)^{-۱}g_x(y)f(y)\\ &= f(y)^{-۱}f(y) \qquad (\text{زیرا } x \neq y)\\ &= ۱\end{aligned}$$

بنابراین $f^{-۱}g_x f \in G_x$. ازاین‌رو $G_x \trianglelefteq G^*$.
بالاخره، باید نشان دهیم که

$$G^* = \cancel{\mathrm{Dr}} \prod_{x\in X} G_x.$$

اگر $|X| = ۱$ حکم بدیهی است. فرض می‌کنیم که $|X| > ۱$. در این صورت به‌ازای هر $x \in X$، هر عضو دلخواه $\prod_{y\neq x} G_y$، x را به ۱ می‌نگارد، در نتیجه

$$G_x \cap \prod_{y\neq x} G_y = ۱.$$

به‌علاوه

$$G^* = \prod_{x\in X} G_x$$

زیرا اگر $f \in G^*$، آنگاه f را می‌توانیم به شکل

$$f = \prod_{x\in X} (f(x))_x,$$

بیان کنیم (که در آن ترتیب اعضا در حاصلضرب سمت راست مهم نیست، زیرا هر دو عضو از این اعضا جابه‌جایی‌پذیرند). اکنون بنابر ۴.۸ حکم نتیجه می‌شود.

۴۴۴. فرض می‌کنیم X یک مجموعهٔ متناهی ناتهی باشد. به هر $x \in X$ گروه دلخواهی مانند G^x وابسته می‌کنیم. (در اینجا لزومی ندارد که گروههای G^x متمایز باشند.) فرض می‌کنیم D معرف مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای f از X به توی مجموعهٔ $\bigcup_{x\in X} G^x$ باشد که به‌ازای هر $x \in X$ در شرط

$$f(x) \in G^x$$

صدق می‌کنند. به‌ازای هر $f_1, f_2 \in D$، می‌توانیم نگاشت حاصلضرب $f_1 f_2 \in D$ را به‌ازای هر $x \in X$ با ضابطهٔ

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

تعریف کنیم.

در این صورت D نسبت به این عملِ ضرب ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد.

به‌ازای هر $x \in X$، قرار می‌دهیم

$$G_x = \{f \in D : f(y) = 1 \text{ ،} x \neq y \in X \text{ هرگاه}\}.$$

در این صورت

$$G^x \cong G_x \trianglelefteq D.$$

به‌علاوه

$$D = \mathrm{Dr} \prod_{x \in X} G_x.$$

(اشارات. ۲۱.۸ حالت خاصی است که در آن به‌ازای هر $x \in X$، $G^x = G$. این نمایش از حاصلضرب مستقیم یک گردایهٔ متناهی از گروهها، که در بالا ارائه شد پایه‌ای است مناسب برای تعمیم تعریف حاصلضربهای مستقیم گردایه‌های نامتناهی ممکن از گروهها: ۴۴۵ را نیز ببینید.)

*۴۴۵. X را مجموعه‌ای ناتهی (احتمالاً نامتناهی) می‌گیریم و مانند ۲۱.۸ فرض می‌کنیم G^X معرف مجموعهٔ همهٔ نگاشتها از X به توی گروه G باشد.

(i) فرض می‌کنیم ضرب اعضای G^X همچون در ۲۱.۸ تعریف شده باشد. نشان دهید که G^X نسبت به این عمل ضرب، ساختار یک گروه را به خود می‌گیرد: این گروه را توان دکارتی (یا توان مستقیم نامحدود) G با مجموعهٔ اندیس‌گذار X می‌نامند و به صورت $\mathrm{Cr}\ G^X$ نمایش می‌دهند. قرار می‌دهیم $C = \mathrm{Cr}\ G^X$.

به‌ازای هر $f \in C$، مجموعهٔ

$$s(f) = \{x \in X : f(x) \neq 1\} \subseteq X$$

محمل f تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم $f, f' \in C$. نشان دهید که (رک. ۱۱۰)

(ii) $s(f^{-1}) = s(f)$.

(iii) $s(ff') \subseteq s(f) \cup s(f')$.

(iv) $s(f^{-1}f'f) = s(f')$.

(v) هرگاه $s(f) \cap s(f') = \varnothing$، ثابت کنید که $ff' = f'f$.

(vi) قرار می‌دهیم $D = \{f \in C : |s(f)| < \infty\}$. ثابت کنید که $D \trianglelefteq C$. گروه D توان مستقیم (یا توان مستقیم محدود) از G با مجموعهٔ اندیس‌گذار X نامیده می‌شود و با $\mathrm{Dr}\ G^X$ نمایش داده می‌شود. توجه داشته باشید که این نماد با نماد در ۲۱.۸ سازگار است: در واقع هرگاه $G \neq 1$، آنگاه $D = C$ اگر و تنها اگر $|X| < \infty$.

(vii) به‌ازای هر $x \in X$، قرار می‌دهیم

$$G_x = \{f \in C : f(y) = 1 \text{ ،} x \neq y \in X \text{ هرگاه}\}.$$

ثابت کنید که $G \cong G_x \trianglelefteq C$، $G_x \leqslant D$ و هرگاه x و y اعضای متمایزی از X باشند، $[G_x, G_y] = 1$. به‌علاوه هر عضو D قابل بیان به شکل $\prod_{x \in X} f_x$ است، که در آن به‌ازای هر $x \in X$، $f_x \in G_x$، و به‌ازای همهٔ مقادیر x به‌جز تعداد متناهی از x، $f_x = e$ عضو همانی C و نیز سوایِ ترتیب سازه‌ها این نمایش یکتاست.

(البته وقتی که این عضو نابدیهی است، 'حاصلضرب' $\prod_{x \in X} f_x$ به‌عنوان حاصلضرب تعداد متناهی f_x متمایز از e تعبیر می‌شود. حاصلضربهای تعداد نامتناهی عضو، در حالت کلی تعریف نمی‌شوند.)

(viii) فرض می‌کنیم Y مجموعه‌ای ناتهی باشد به‌قسمی‌که یک نگاشت یک به یک از Y به توی X وجود داشته باشد. نشان دهید که $\mathrm{Cr}\ G^Y$ را می‌توان در $\mathrm{Cr}\ G^X$ نشانید و همچنین $\mathrm{Cr}\ G^Y/\mathrm{Dr}\ G^Y$ را نیز می‌توان در $\mathrm{Cr}\ G^X/\mathrm{Dr}\ G^X$ نشانید.

(ix) فرض می‌کنیم که X نامتناهی باشد و $G \neq 1$. ثابت کنید که $\mathrm{Cr}\ G^X/\mathrm{Dr}\ G^X$ نامتناهی است. (راهنمایی. می‌توان فرض کرد که نگاشتی یک به یک از مجموعهٔ $\mathbf{N}$، مرکب از همهٔ اعداد صحیح مثبت به توی X وجود دارد. ازاین‌رو، بنابر (viii)، کافی است ثابت کنید که $\mathrm{Cr}\ G^{\mathbf{N}}/\mathrm{Dr}\ G^{\mathbf{N}}$ نامتناهی است.)

در باقی این فصل توجهمان را به گروههای آبلی معطوف می‌کنیم. با گروههای دوری، که با ساختارشان قبلاً آشنا شده‌ایم، شروع می‌کنیم (۲۵.۳، ۳۱.۳، ۳۲.۳ را ببینید)، می‌توانیم به سادگی با استفاده از ساختمان حاصلضرب مستقیم، بسیاری از گروههای آبلی دیگر را بسازیم. هر گروهی که حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی گروه دوری باشد، مطمئناً آبلی است؛ و همین‌طور متناهی مولد است (۱۰۸ را ببینید.) ما یک قضیهٔ ساختاری بنیادی را ثابت خواهیم کرد که، به‌عکس، ادعا می‌کند هر گروه آبلی متناهی مولد، حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی زیرگروه دوری است. این قضیه، یکی از دستاوردهای بزرگ و برجسته دورهٔ کلاسیک نظریهٔ گروههاست: در مورد گروههای متناهی، گاوس تا حدی از این قضیه آگاه بوده است و آن‌گونه که فعلاً در دسترس است به‌طور کامل به‌وسیلهٔ فروبنیوس و ل. استیکلبرگر [a۳۳] در ۱۸۷۹ ثابت شده است. همچنین نشان خواهیم داد که می‌توان با مقایسهٔ برخی دستگاههای اعداد صحیح در ارتباط با گروهها، تعیین کرد که آیا دو گروه آبلی متناهی مولد از یک نوع‌اند یا نه.

قبل از اثبات این احکام، اشاراتی به نمادها می‌کنیم.

۲۲.۸ گروههای آبلی در چارچوب کلی جبر به طریقی طبیعی به صورت گروههای جمعی حلقه‌ها ظاهر می‌شوند (۱۱.۲ را ببینید.). شاید دلیلش این باشد که در بسط نظریهٔ گروههای آبلی آن‌گونه که مرسوم است، عمل گروهی را به‌جای ضرب به شکل جمع می‌نویسند. این قرارداد پی‌آمدهای نمادی متفاوتی دارد. عضو همانی یک گروه آبلی را عضو صفر می‌نامند و با ۰ نمایش می‌دهند. به‌جای حاصلضرب دو زیرگروه H و K، از یک گروه آبلی G، به حاصل‌جمع آنها اشاره می‌شود، و به‌جای HK می‌نویسند $H+K$. هرگاه G حاصل‌جمع مستقیم H و K باشد (یعنی، اگر $G=H+K$ و $H\cap K=0$) می‌نویسند $G=H\oplus K$. شاید غیرمنطقی باشد، اما با این‌وجود از گروههای خارج‌قسمتی یک گروه آبلی صحبت می‌کنیم و آنها را مانند قبل نمایش می‌دهیم. بنابراین، به‌عنوان مثال، قضیهٔ یکریختی ۴۰.۳، در مورد یک گروه آبلی G بدین‌صورت بیان می‌شود که: هرگاه H و K زیرگروههای G باشند، آنگاه

$$H/(H\cap K)\cong (H+K)/K.$$

ولی در این کتاب ما از قراردادهای فوق پیروی نمی‌کنیم. چون نظریهٔ گروههای آبلی، تنها قسمت کوچکی از موضوعات مطرح‌شده در این کتاب را تشکیل می‌دهد، و به نظر می‌رسد طبیعی‌تر و به صرفه‌تر آن است که قراردادهای نمادی قبلی را که در صفحات گذشته مطرح شده‌اند، محفوظ نگهداریم.

اینک به اثبات قضیهٔ ساختاری در مورد گروههای آبلی متناهی مولد می‌رسیم. چند روش مختلف برای اثبات در کتابها آورده شده‌اند. از دیدگاه وسیعتر روشن‌کننده‌تر این است که این قضیهٔ ساختاری را در زمینهٔ کلیتر قضایای مدولها روی حلقه‌ها مطالعه کنیم: به عنوان مثال هارتلی و هوکس [b۱۸] و روتمن [b۳۴] فصول ۴ و ۹ را ببینید. در خصوص اهداف محدود این فصل، اثبات ابتکاری و کوتاه منسوب به ر. رادو [a۷۷] را دنبال می‌کنیم. روش دیگری در مورد گروههای آبلی متناهی در ۴۴۸ـ۴۵۲ به‌طور خلاصه آمده است: این روش براساس قضایای مربوط به فوکس [b۱۱] بخش ۱، پایه‌ریزی شده است.

کار را با یک لم شروع می‌کنیم. در ۲۳.۸ و ۲۴.۸ ما نماد

$$(m_1,m_2,\cdots,m_s)$$

را برای نمایش بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دنبالهٔ اعداد صحیح m_1، m_2، $\cdots$، m_s که همهٔ آنها صفر نیستند و s یک عدد صحیح مثبت است، به‌کار می‌بریم. توجه کنید که

$$(m_1,m_2,\cdots,m_s)=(m_{i_1},m_{i_2},\cdots,m_{i_k}),$$

که در آن m_{i_1}، $\cdots$، m_{i_k} آن اعداد صحیح m_1، $\cdots$، m_s هستند که مخالف صفرند.

۲۳.۸ لم H را یک گروه آبلی متناهی مولد می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\{x_1,x_2,\cdots,x_s\}$ یک مجموعه از مولدهای H باشد، که در آن s یک عدد صحیح مثبت است. فرض می‌کنیم m_1، m_2، $\cdots$، m_s اعداد صحیح نامنفی باشند که همهٔ آنها صفر نیستند، به‌طوری‌که $(m_1,m_2,\cdots,m_s)=1$. در این صورت یک مجموعه مولد مانند $\{y_1,y_2,\cdots,y_s\}$ از H وجود دارد به‌طوری‌که

$$y_1=\prod_{i=1}^{s}x_i^{m_i}.$$

برهان فرض می‌کنیم $m=\sum_{i=1}^{s}m_i$، یک عدد صحیح مثبت است. ما حکم را با استقرا بر m ثابت می‌کنیم. هرگاه $m=1$، آنگاه برای تنها یک مقدار i، $m_i\neq 0$؛ بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که $m_1\neq 0$، و بنابراین $m_1=1$. در این حالت حکم بدیهی است.

حال فرض می‌کنیم که $m>1$. در این صورت چون $(m_1,m_2,\cdots,m_s)=1$؛ برای دست‌کم دو مقدار i داریم: $m_i\neq 0$. می‌توانیم فرض کنیم که

$$m_1\geqslant m_2>0.$$

بنابراین $m_۱ - m_۲$، $m_۲$، $m_۳$، $\cdots$، m_s اعداد صحیح نامنفی‌اند که همهٔ آنها صفر نیستند و

$$(m_۱ - m_۲, m_۲, m_۳, \cdots, m_s) = ۱.$$

به‌علاوه $\{x_۱, x_۱x_۲, x_۳, \cdots, x_s\}$ یک مجموعه از مولدهای H است، زیرا $x_۲ = x_۱^{-۱}(x_۱x_۲)$. می‌توانیم فرض استقرا را بر هر مجموعهٔ مناسب از مولدهای H به‌کار گیریم. بنابراین، چون

$$m_۱ - m_۲ + \sum_{i=۲}^{s} m_i = m - m_۲ < m,$$

از فرض استقرا نتیجه می‌شود که یک مجموعه از مولدها مانند $\{y_۱, y_۲, \cdots, y_s\}$ از H وجود خواهد داشت به‌طوری‌که

$$y_۱ = x_۱^{m_۱-m_۲}(x_۱x_۲)^{m_۲}x_۳^{m_۳}\cdots x_s^{m_s}$$
$$= \prod_{i=۱}^{s} x_i^{m_i}$$
(زیرا H آبلی است).

این، اثبات به استقرا را کامل می‌کند.

۴۴۶. با درنظرگرفتن گروه $\Sigma_۳$ نشان دهید که ۲۳.۸ در حالت کلی برای گروههای ناآبلی برقرار نیست.

۴۴۷. با درنظرگرفتن گروه $C_۶$ نشان دهید که در ۲۳.۸ در حالت کلی نمی‌توانیم $\{y_۲, \cdots, y_s\}$ را یک زیرمجموعه از $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_s\}$ انتخاب کنیم.

۲۴.۸ قضیهٔ ساختاری برای گروههای آبلی متناهی مولد فرض می‌کنیم r یک عدد صحیح مثبت و G یک گروه آبلی r مولدی باشد. در این صورت عضوهای $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_r از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{r}\langle x_i\rangle.$$

برهان اگر $r = ۱$، G دوری است و اثبات بسیار ساده است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $r > ۱$. مجموعهٔ $\mathscr{R}$ متشکل از همهٔ مجموعه‌های مرتب

$$(x_۱, x_۲, \cdots, x_r)$$

از اعضای G را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که

$$o(x_۱) \leqslant o(x_۲) \leqslant \cdots \leqslant o(x_r) \qquad \text{(i)}$$

و

$$\langle x_۱, x_۲, \cdots, x_r\rangle = G.$$

در اینجا لزوماً همهٔ اعضای $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_r متمایز نیستند؛ و نیز در نابرابری (i)، ∞ را به صورت یک 'عدد' که از هر عدد صحیح مثبت بزرگتر است، تلقی می‌کنیم. روشن است که هر مجموعه از r مولد G می‌تواند طوری مرتب شود (احتمالاً با چندین راه مختلف) که عضوی از $\mathscr{R}$ شود. لذا $\mathscr{R} \neq \varnothing$.

ما عضوی از $\mathscr{R}$ را بر می‌گزینیم که در برخی شرطهای مینیمال‌بودن در مرتبهٔ اعضا صدق کند. برای تمام عضوهایی مانند $(x_۱, x_۲, \cdots, x_r)$ از $\mathscr{R}$، فرض می‌کنیم $N_۱$ کوچکترین مقدار برای $o(x_۱)$ باشد، بدین‌ترتیب $N_۱$ یا یک عدد صحیح مثبت است یا ∞. سپس برای تمام عضوهایی چون $(x_۱, x_۲, \cdots, x_r)$ از $\mathscr{R}$ که $o(x_۱) = N_۱$، فرض می‌کنیم $N_۲$ کوچکترین مقدار برای $o(x_۲)$ باشد. همین‌طور برای تمام عضوهایی مانند $(x_۱, x_۲, \cdots, x_r)$ از $\mathscr{R}$ که $o(x_۱) = N_۱$ و $o(x_۲) = N_۲$، فرض می‌کنیم $N_۳$ کوچکترین مقدار برای $o(x_۳)$ باشد. و به همین قیاس.

اکنون عضوی مانند

$$(x_۱, x_۲, \cdots, x_r) \in \mathscr{R}$$

را انتخاب می‌کنیم که به‌ازای هر $i = ۱, \cdots, r$،

$$o(x_i) = N_i.$$

در این صورت $\{x_۱, x_۲, \cdots, x_r\}$ یک مجموعه از r مولد G با این ویژگی است که: هرگاه $\{y_۱, y_۲, \cdots, y_r\}$ نیز یک مجموعه از r مولد G و j یک عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری‌که (هرگاه $j > ۱$)،

و به‌ازای هر $i < j$ $\qquad o(x_i) = o(y_i)$

آنگاه

به‌ازای هر $i \geqslant j$ $\qquad o(x_i) \leqslant o(y_i)$

چون G آبلی است، هر عضو G به‌ازای اعداد صحیح مناسب n_1، n_2، $\cdots$، n_r به شکل

$$\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}$$

قابل بیان است. (۶۹)؛ و به‌ازای هر $i=1,\cdots,r$،

$$\langle x_i\rangle \trianglelefteq G.$$

ازاین‌رو

$$G=\prod_{i=1}^{r}\langle x_i\rangle.$$

حال ادعا می‌کنیم که

$$G=\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i\rangle.$$

برخلاف، فرض می‌کنیم تساوی برقرار نباشد. در این صورت به سادگی از ۴.۸ نتیجه می‌شود که اعداد صحیح n_1، n_2، $\cdots$، n_r وجود دارند به‌طوری‌که

$$\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}=1$$

و به‌ازای مقداری از i، $x_i^{n_i}\neq 1$. بی‌آنکه از کلیت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که n_1، n_2، $\cdots$، n_r همگی نامنفی‌اند: زیرا اگر به‌عنوان مثال $n_j<0$، آنگاه در اثبات فوق می‌توانیم به‌جای x_j، x_j^{-1} را بگذاریم و به‌جای n_j، $-n_j$ را. (چون $o(x_j)=o(x_j^{-1})$، این جای‌گذاری تغییری در شرایط به‌دست‌آمدهٔ فوق نمی‌دهد.)

حال اعداد صحیح l_1، l_2، $\cdots$، l_r را طوری مشخص می‌کنیم که به‌ازای هر $i=1,\cdots,r$،

$$0\leqslant l_i<o(x_i)\quad \text{و}\quad x_i^{l_i}=x_i^{n_i}.$$

این کار ممکن است به شکل زیر انجام شود.

هرگاه $o(x_i)<\infty$، آنگاه بنابر الگوریتم تقسیم، اعداد صحیحی مانند q_i و s_i وجود دارند به‌طوری‌که

$$n_i=q_io(x_i)+s_i\quad \text{و}\quad 0\leqslant s_i<o(x_i).$$

در این صورت $x_i^{n_i}=x_i^{s_i}$، و قرار می‌دهیم $l_i=s_i$.

هرگاه $o(x_i)=\infty$ آنگاه قرار می‌دهیم $l_i=n_i$. (در بالا ترتیبی داده‌ایم که n_i نامنفی باشد.)

چون بنابر فرض به‌ازای مقداری از i، $x_i^{n_i}\neq 1$؛ پس به‌ازای مقداری از i، $l_i>0$. فرض می‌کنیم j کوچکترین عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری‌که $l_j>0$: لذا، اگر $j>1$، به‌ازای هر $i<j$، $l_i=0$.

حال قرار می‌دهیم

$$d=(l_1,l_2,\cdots,l_r),$$

و به‌ازای هر $i=1,\cdots,r$، فرض می‌کنیم

$$m_i=l_i/d.$$

در این صورت m_1، m_2، $\cdots$، m_r اعداد صحیح نامنفی هستند به‌طوری‌که

$$(m_1,m_2,\cdots,m_r)=1.$$

چون به‌ازای هر $i<j$، $m_i=0$،

$$(m_j,m_{j+1},\cdots,m_r)=1.$$

فرض می‌کنیم

$$H=\langle x_j,x_{j+1},\cdots,x_r\rangle\leqslant G.$$

در این صورت بنابر ۲۳.۸ یک مجموعه از مولدها مانند $\{y_j,y_{j+1},\cdots,y_r\}$ از H وجود خواهد داشت به‌طوری‌که

$$y_j=\prod_{i=j}^{r} x_i^{m_i}.$$

ازاین‌رو

$$\begin{aligned}
y_j^d&=\prod_{i=j}^{r} x_i^{l_i}\\
&=\prod_{i=1}^{r} x_i^{l_i}\qquad (\text{زیرا هنگامی‌که } i<j\text{، } l_i=0)\\
&=\prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}\qquad (\text{بنابر تعریف } l_1\text{، }\cdots\text{، } l_r)\\
&=1.
\end{aligned}$$

اما در این صورت

$$G = \langle x_1, \cdots, x_{j-1}, y_j, y_{j+1}, \cdots, y_r\rangle$$

و

$$o(y_j) \leqslant d \leqslant l_j < o(x_j)$$

که با انتخاب $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ متناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i\rangle.$$

۴۴۸. (i) فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد و x عضوی از G، از بزرگترین مرتبهٔ ممکن، مثلاً n. در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، $g^n = 1$.
(راهنمایی. با استفاده از ۶ نشان دهید که اگر یک عضو $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $g^n \neq 1$، آنگاه به‌ازای اعداد صحیح مثبت مناسب j و k، $o(g^j x^k) > n$.)
(ii) با یک مثال نشان دهید که حکم (i) در حالت کلی بدون شرط آبلی‌بودن G برقرار نخواهد بود.

۴۴۹. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، که G یک گروه آبلی متناهی است. K را زیرگروهی از G می‌گیریم که با شرط $H \cap K = 1$ ماکسیمال باشد. فرض می‌کنیم که $g \in G$ و به‌ازای عدد اولی چون p، $g^p \in K$. در این صورت (بنابر ۲.۸، $g \in HK\ (= H \times K)$. (راهنمایی. اگر $g \notin K$، نشان دهید که اعضای $h \in H$ و $k \in K$ وجود دارند به‌طوری‌که $h = kg^r$، که r عددی است صحیح که بر p بخش‌پذیر نیست.)

۴۵۰. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، که G یک گروه آبلی متناهی است. K را زیرگروهی از G می‌گیریم که با شرط $H \cap K = 1$ ماکسیمال باشد. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:
(i) $G = H \times K$.
(ii) به‌ازای هر عدد اولِ p و اعضای $g \in G$، $h \in H$ و $k \in K$ به‌قسمی که $g^p = hk$، یک عضو $h' \in H$ وجود دارد به‌طوری‌که $h = (h')^p$.
(راهنمایی. برای اثبات (ii) ⇐ (i)؛ فرض کنید که $(H \times K) < G$، سپس عضوی از مرتبهٔ عدد اول در $G/(H \times K)$ در نظر بگیرید و از ۴۴۹ استفاده کنید.)

۴۵۱. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد و x عضوی از G، از بزرگترین مرتبهٔ ممکن، مثلاً n. در این صورت $\langle x\rangle$ یک سازهٔ مستقیم G است.

(راهنمایی. قرار دهید $H = \langle x\rangle \leqslant G$، و فرض کنید K همچون در ۴۵۰ تعریف شده است. با استفاده از ۴۴۸ و ۴۵۰ نشان دهید که $G = H \times K$. حالتهایی که p، n رامی‌شمارد و p، n را نمی‌شمارد جداگانه مورد بررسی قرار دهید.)

۴۵۲. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی نابدیهی باشد. در این صورت عضوهای نابدیهی x_1، x_2، $\cdots$، x_r از G وجود دارند به‌طوری‌که $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i\rangle$ و (اگر $r > 1$) به‌ازای هر $i = 1, \cdots, r-1$، $o(x_i)$ بر $o(x_{i+1})$ بخش‌پذیر است (راهنمایی. با استقرا بر $|G|$ استدلال کنید و از ۴۴۸ و ۴۵۱ استفاده کنید. اشاره. در ۴۶۳، مشاهده خواهیم کرد که دنبالهٔ اعداد صحیح مثبت r، $o(x_1)$، $o(x_2)$، $\cdots$، $o(x_r)$ به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ G مشخص می‌شوند.)

۴۵۳. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد و n یک عدد صحیح مثبت. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:
(i) G آبلی است و به‌ازای هر $g \in G$، $g^n = 1$.
(ii) G حاصلضرب مستقیم زیرگروههای دوری است که مرتبهٔ هر یک از آنها شمارندهٔ n است.

۴۵۴. (i) قرار دهید $G = H \times K$ و A را یک گروه آبلی بگیرید. در این صورت

$$\mathrm{Hom}(G, A) \cong \mathrm{Hom}(H, A) \times \mathrm{Hom}(K, A)$$ (۳۳ را ببینید).

(ii) هرگاه J یک گروه دوری متناهی باشد، آنگاه $\mathrm{Hom}(J, \mathbf{C}^\times) \cong J$.
(iii) نتیجه بگیرید که اگر G یک گروه آبلی متناهی باشد آنگاه $\mathrm{Hom}(G, \mathbf{C}^\times) \cong G$ (رک. ۴۱ (ii)).

۲۵.۸ طبیعی است که بپرسیم آیا یک قضیهٔ یکتایی در مورد تجزیهٔ یک گروه آبلی متناهی مولد، به صورت حاصلضرب مستقیم گروههای دوری، وجود دارد یا نه (رک. ۱۲.۸). اثبات ۲۴.۸ این امکان را می‌پذیرد که یک یا چند عضو از عضوهای x_1، $\cdots$، x_r بتواند برابر با عضو همانی ۱ باشد. جالبتر اینکه لازم نیست سازه‌های مستقیم $\langle x_i\rangle$ در ۲۴.۸ تجزیه‌ناپذیر باشند: به‌عنوان مثال، اگر $o(x_i) = 6$، آنگاه $\langle x_i\rangle = \langle x_i^2\rangle \times \langle x_i^3\rangle$ (۸۱ را ببینید).

حتی اگر سازه‌های مستقیم واقع در ۲۴.۸، نابدیهی و تجزیه‌ناپذیر باشند، نمی‌توانیم انتظار داشته باشیم که یک چنین قضیهٔ یکتایی قوی، همچون در ۱۸.۸ به‌دست آوریم. برای مثال، بار دیگر گروه $G = C_2 \times C_2$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم A، B و C سه زیرگروه متمایز G از مرتبهٔ ۲ باشند (۵.۸ را ببینید). در این صورت:

$$G = A \times B = B \times C = C \times A,$$

و این تجزیه‌ها اصولاً تجزیه‌های مختلف G به صورت حاصلضرب مستقیم زیرگروههای تجزیه‌ناپذیر نابدیهی‌اند. ولی مشابه این مثال، ثابت خواهیم کرد که در هر دو تجزیهٔ یک گروه آبلی متناهی مولد G، به صورت حاصلضرب مستقیم گروههای تجزیه‌ناپذیر نابدیهی، تعداد سازه‌ها در هر دو تجزیه یکی است و سازه‌های یک تجزیه ممکن است به‌طور یکریخت جفتِ سازه‌های تجزیهٔ دیگر باشد.

این موضوع را به‌وسیلهٔ چند نتیجه که نقش واسطه دارند، ثابت خواهیم کرد. ابتدا توجه می‌کنیم که هر گروه آبلی متناهی مولد نابدیهی تجزیه‌ای به صورت حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی زیرگروه تجزیه‌ناپذیر دارد.

۲۶.۸ (رک. ۸۱ و ۱۳۲) فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد باشد. در این صورت G تجزیه‌ناپذیر است اگر و تنها اگر G دوری و مرتبه‌اش یا توانی از یک عدد اول است و یا نامتناهی است.

برهان فرض می‌کنیم G تجزیه‌ناپذیر است. در این صورت، بنابر ۲۴.۸، G دوری است. اگر G متناهی باشد، آنگاه به‌موجب ۶.۸ نتیجه می‌گیریم که مرتبهٔ G توانی از یک عدد اول است.

به‌عکس فرض می‌کنیم که G دوری است و مرتبهٔ آن توانی از یک عدد اول و یا نامتناهی است. اگر $|G| = p^m$، که m یک عدد صحیح مثبت است، آنگاه، بنابر ۳۲.۳، هر زیرگروه نابدیهی G شامل زیرگروه یکتای G از مرتبهٔ p است، و در نتیجه هر دو زیرگروه نابدیهی از G اشتراک نابدیهی دارند؛ بدین‌ترتیب G تجزیه‌ناپذیر است. اگر G نامتناهی باشد آنگاه از ۲۵.۳ نتیجه می‌شود که هر دو زیرگروه نابدیهی از G بار دیگر اشتراک نابدیهی دارند، بنابراین G تجزیه‌ناپذیر است.

۲۷.۸ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد نابدیهی باشد. در این صورت G حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی زیرگروه تجزیه‌ناپذیر است.

برهان بنابر ۲۴.۸،زیرگروههای H و K از G وجود دارند به‌طوری‌که

$$G = H \times K,$$

که در آن H متناهی است و همچنین یا $K = 1$ یا K حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی زیرگروه دوری نامتناهی از G است. اکنون حکم از ۱۷.۸ و ۲۶.۸ نتیجه می‌شود.

۲۸.۸ تعاریف (i) G را دوره‌یی (یا گروهی تابدار) می‌خوانیم اگر مرتبهٔ هر عضو آن متناهی باشد. هر گروه متناهی دوره‌یی است؛ و گروههای نامتناهی دوره‌یی نیز مانند $\mathbf{Q}^+/\mathbf{Z}^+$ (۱۹۵)، وجود دارند.

(ii) G را بی‌تاب (غیردوره‌یی یا موضعاً نامتناهی) می‌خوانیم اگر مرتبهٔ هر عضو نابدیهی آن نامتناهی باشد. به‌عنوان مثال، گروههای $\mathbf{Z}^+$، $\mathbf{Q}^+$، $\mathbf{R}^+$، $\mathbf{C}^+$، $\mathbf{Q}^\times_{\mathrm{pos}}$ و $\mathbf{R}^\times_{\mathrm{pos}}$ بی‌تاب‌اند. تنها گروهی که هم‌دوره‌یی است و هم بی‌تاب، گروه بدیهی (از مرتبهٔ ۱) است.

(iii) در حالت کلی یک گروه نامتناهی ممکن است اعضای نابدیهی از مرتبهٔ متناهی داشته باشد و نیز اعضایی از مرتبهٔ نامتناهی. یک چنین گروهی را مختلط می‌خوانیم. به‌عنوان مثال، گروههای $\mathbf{Q}^\times$، $\mathbf{R}^\times$، $\mathbf{C}^\times$ گروههایی مختلط‌اند.

۲۹.۸ در اینجا به یک مسألهٔ معروفِ برنساید اشاره می‌کنیم. روشن است که هر گروه متناهی هم متناهی مولد است و هم دوره‌یی. در ۱۹۰۲، برنساید به عکس، این سؤال را مطرح کرد: آیا یک گروه که هم متناهی مولد باشد و هم دوره‌یی لزوماً متناهی است؟ جواب این سؤال در مورد گروههای حل‌پذیر مثبت است (۴۵۵ را ببینید). این سؤال در حالت کلی بدون جواب باقی مانده بود تا ۱۹۶۴، که ی. س. گولود و ای. ر. شافارویچ ([a۴۲]، [a۴۱])، نشان دادند که به‌ازای هر عدد اول p، یک گروه نامتناهی ۳ مولدی وجود دارد که مرتبهٔ هر عضوش توانی از p است؛ بدین‌ترتیب جواب پرسش برنساید منفی بود. (در ارتباط با این موضوع فصل ۸ هرشتاین [b۲۰] را ببینید.)

در مثالهای گولود‌ـشافارویچ برای مرتبه‌های اعضا هیچ کران بالای متناهی وجود ندارد. از طرفی در هر گروه متناهی G، هر عضو x در معادلهٔ $x^{|G|} = 1$ صدق می‌کند. بنابراین ممکن است این سؤال مطرح شود که اگر گروه G متناهی مولد باشد و عدد صحیح n نیز وجود داشته باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر $x \in G$، $x^n = 1$، آیا لزوماً G گروهی است متناهی؟ این پرسشی است که از همان زمانِ طرح به‌وسیلهٔ برنساید سخت مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌سادگی نشان داده می‌شود که اگر $n = 2$، G باید متناهی باشد (۳ و ۶۹ را ببینید)؛ همچنین ثابت شده است که اگر $n = 3$، G متناهی است (برنساید [a۱۰] و ف. و. لوی و ب. ل. واندرودرن [a۷۰]؛ هوپرت [b۲۱] ص. ۲۹۰، قضیهٔ ۶.۶.۳ را ببینید) یا اگر $n = 4$ (ای. ن. سانوف [a۸۲]) یا اگر $n = 6$ (م. هال [a۴۶]) باز هم G متناهی است. در حالت $n = 6$، جواب، از مفاهیم مقالهٔ اثرگذار ف. هال و گ. هیگمن [a۵۲] نتیجه می‌شود: این مقاله همچنین تأثیر ژرفی بر تحقیقات بعدی در گروههای سادهٔ متناهی داشته است.

ولی، در ۱۹۶۸؛ پ. س. نوویکوف و س. ای. آدیان ([a۷۵]) ثابت کردند که به‌ازای هر عدد صحیح فرد $n \geqslant 4381$، یک گروه نامتناهی ۲ مولدی مانند G وجود دارد که به‌ازای هر $x \in G$، $x^n = 1$.

۴۵۵. یک گروه حل‌پذیر دوره‌یی متناهی مولد، لزوماً متناهی است. (راهنمایی. با استقرا بر طول مشتق استدلال و از ۱۰۸، ۱۹۵ و ۱۹۶ استفاده کنید.)

اکنون نشان می‌دهیم که هر گروه آبلی دارای 'رادیکال دوره‌یی' است (۴۵.۳ را ببینید).

۳۰.۸ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی باشد و H مجموعهٔ همهٔ اعضای آن که مرتبه‌های متناهی دارند. در این‌صورت H یک زیرگروه دوره‌یی G است، و G/H بی‌تاب است. H را زیرگروه تابدار G می‌نامیم و می‌نویسیم $H = T(G)$.

برهان محققاً $۱ \in H$، بنابراین $H \neq \varnothing$. فرض می‌کنیم $h_۱, h_۲ \in H$، و قرار می‌دهیم

$$o(h_۱) = n_۱, \qquad o(h_۲) = n_۲.$$

پس $n_۱$ و $n_۲$ اعداد صحیحی هستند مثبت، و چون G آبلی است،

$$(h_۱ h_۲^{-۱})^{n_۱ n_۲} = (h_۱^{n_۱})^{n_۲}(h_۲^{n_۲})^{-n_۱} = ۱.$$

بنابراین، چون $n_۱ n_۲$ یک عدد صحیح مثبت است، $o(h_۱ h_۲^{-۱}) < \infty$، و در نتیجه $h_۱ h_۲^{-۱} \in H$. به این ترتیب $H \leqslant G$، و بنابر تعریف، H دوره‌ای است.

چون G آبلی است می‌توانیم گروه خارج‌قسمتی G/H را تشکیل دهیم. فرض می‌کنیم $g \in G$، و gH عضوی از مرتبهٔ متناهی n در G/H باشد. در این صورت، بنابر فرض،

$$g^n H = (gH)^n = H,$$

بنابراین

$$g^n \in H.$$

از این‌رو $o(g^n) < \infty$: مثلاً $o(g^n) = m$. در این‌صورت

$$g^{nm} = ۱,$$

و nm عدد صحیحی است مثبت. بنابراین $o(g) < \infty$ و در نتیجه $g \in H$. لذا

$$gH = H.$$

از این‌رو G/H بی‌تاب است.

اشاره. در گروه ناآبلی G، مجموعهٔ همهٔ اعضایی که مرتبه‌شان متناهی است لزوماً زیرگروهی از G تشکیل نمی‌دهند: ۴۵ و ۱۴۲ را ببینید. همین‌طور ۴۸۵ را.

۳۱.۸ لم فرض می‌کنیم G گروهی آبلی باشد. $G_۰$ را یک زیرگروه دوره‌یی G می‌گیریم طوری که $G/G_۰$ بی‌تاب باشد. در این‌صورت $G_۰ = T(G)$.

برهان چون $G_۰$ دوره‌یی است، $G_۰ \leqslant T(G)$. پس $T(G)/G_۰$ زیرگروهی دوره‌یی از $G/G_۰$ است. چون $G/G_۰$ بی‌تاب است، نتیجه می‌شود که $G_۰ = T(G)$.

۳۲.۸ لم فرض می‌کنیم G و H گروههایی آبلی باشند. هرگاه $G \cong H$ آنگاه $T(G) \cong T(H)$ و $G/T(G) \cong H/T(H)$.

برهان فرض می‌کنیم φ یک یکریختی از G بر روی H باشد. هرگاه $x \in T(G)$، آنگاه به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون n، $x^n = ۱$. از این‌رو $(x\varphi)^n = x^n\varphi = ۱$، بنابراین $x\varphi \in T(H)$. به این ترتیب $T(G)\varphi \leqslant T(H)$. هر عضو H به شکل $y\varphi$، که $y \in G$، قابل بیان است. اگر $y\varphi \in T(H)$، آنگاه به‌ازای عدد صحیح مثبتی چون n؛ $(y\varphi)^n = ۱$. از این‌رو $y^n\varphi = ۱$ و در نتیجه، چون φ یک یکریختی است، $y^n = ۱$. بنابراین $y \in T(G)$ و $y\varphi \in T(G)\varphi$. لذا $T(G)\varphi = T(H)$؛ در نتیجه φ، $T(G)$ را به‌طور یکریخت بر روی $T(H)$ می‌نگارد. حال بنابر ۲۹.۳ نتیجه می‌شود که $G/T(G) \cong H/T(H)$.

۴۵۶. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، که G یک گروه آبلی است. نشان دهید که

(i) $T(H) = H \cap T(G)$.

(ii) $T(G)/T(H) \cong HT(G)/H \leqslant T(G/H)$

با یک مثال نشان دهید که ممکن است داشته باشیم $HT(G)/H < T(G/H)$.

۴۵۷. نشان دهید که $T(\mathbf{Q}^\times) = C_۲ = T(\mathbf{R}^\times)$ و $T(\mathbf{C}^\times) = V$ گروه ضربی همهٔ ریشه‌های مختلط ۱ است (۱۳۱)، و

$$\mathbf{Q}^\times/T(\mathbf{Q}^\times) \cong \mathbf{Q}^\times_{\mathrm{pos}}, \qquad \mathbf{R}^\times/T(\mathbf{R}^\times) \cong \mathbf{R}^\times_{\mathrm{pos}},$$
$$\mathbf{C}^\times/T(\mathbf{C}^\times) \cong \mathbf{R}^\times_{\mathrm{pos}} \times (\mathbf{R}^+/\mathbf{Q}^+).$$

۴۵۸. فرض می‌کنیم G یک گروه (نه لزوماً آبلی) باشد، که در آن مجموعهٔ همهٔ اعضایی که مرتبهٔ متناهی دارند، زیرگروهی مانند H از G را تشکیل می‌دهد. در این‌صورت H یک زیرگروه مشخصهٔ دوره‌یی از G است، و G/H بی‌تاب است.

۴۵۹. قرار می‌دهیم $U(G) = \{x \in G : o(x) = \infty \text{ یا } x = ۱\}$.

(i) فرض می‌کنیم که G آبلی است. نشان دهید که $U(G)$ یک زیرگروه از G است اگر و تنها اگر $U(G)=1$ یا $U(G)=G$؛ یعنی اگر و تنها اگر G یا دوره‌یی باشد یا بی‌تاب.

(ii) با یک مثال نشان دهید که اگر G ناآبلی باشد $U(G)$ ممکن است یک زیرگروه حقیقی نابدیهی از G باشد.

۳۳.۸ لم فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و G و H گروههایی آبلی باشند.

(i) قرار می‌دهیم $G^n=\{g^n : g\in G\}$. در این‌صورت $G^n\leqslant G$.

(ii) هرگاه $G\cong H$، آنگاه $G^n\cong H^n$ و $G/G^n\cong H/H^n$.

برهان چون G آبلی است، نگاشت $\lambda_n : g\longmapsto g^n$ که به‌ازای هر $g\in G$ تعریف می‌شود، یک درونریختی از G است. پس $G^n=\mathrm{Im}\lambda_n\leqslant G$.

حال فرض می‌کنیم φ یک یکریختی از G بر روی H باشد. به‌ازای هر $x\in G$، $x^n\varphi=(x\varphi)^n\in H^n$. به این ترتیب $G^n\varphi\leqslant H^n$. از طرفی هر عضو H را می‌توان به شکل $y\varphi$ که $y\in G$ بیان کرد و $(y\varphi)^n=y^n\varphi\in G^n\varphi$. لذا $G^n\varphi=H^n$، در نتیجه φ، G^n را به‌طور یکریخت بر روی H^n می‌نگارد. بنابر ۲۹.۳ نتیجه می‌شود که $G/G^n\cong H/H^n$.

۳۴.۸ لم فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد. G را یک گروه آبلی متناهی مولد می‌گیریم، در این‌صورت به موجب ۲۴.۸ اعضایی مانند $x_1, \ldots, x_r$ از G وجود دارند به‌طوری که $G=\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i\rangle$. در این‌صورت

$$G^n=\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i^n\rangle.$$

برهان فرض می‌کنیم $g\in G$. در این‌صورت اعداد صحیح $m_1, \ldots, m_r$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$g=\prod_{i=1}^{r}x_i^{m_i}.$$

پس

$$g^n=\prod_{i=1}^{r}x_i^{m_i n}\in\langle x_1^n,\ldots,x_r^n\rangle.$$

به این ترتیب

$$G^n=\langle x_1^n,\ldots,x_r^n\rangle$$

چون، به‌ازای هر $i=1,\ldots,r$،

$$\langle x_i^n\rangle\leqslant\langle x_i\rangle,$$

در نتیجه

$$G^n=\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i^n\rangle.$$

۳۵.۸ تعریف فرض می‌کنیم r عددِ صحیح مثبتی باشد. گروهی را که حاصلضرب مستقیم r زیرگروه دوری نامتناهی باشد، آبلی آزاد از رتبهٔ r می‌خوانیم.

گروه بدیهی (از مرتبهٔ ۱) گروه آبلی آزاد از رتبهٔ ۰ گفته می‌شود.

توجه داشته باشید که هر گروه آبلی آزاد بی‌تاب است.

۳۶.۸ لم فرض می‌کنیم n و r اعداد صحیح مثبتی باشند. G را یک گروه آبلی آزاد از رتبهٔ r می‌گیریم. در این‌صورت G/G^n حاصلضرب مستقیم r زیرگروه دوری است، که همهٔ آنها از مرتبهٔ nاند.

برهان بنابر فرض، r عضو $x_1, \ldots, x_r$ از G همه از مرتبهٔ نامتناهی وجود دارند، به‌طوری که

$$G=\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i\rangle.$$

در این‌صورت، بنابر ۳۴.۸؛

$$G^n=\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_i^n\rangle.$$

از این‌رو:

$$G/G^n\cong(\langle x_1\rangle/\langle x_1^n\rangle)\times\cdots\times(\langle x_r\rangle/\langle x_r^n\rangle),$$

(۱۱۱ را ببینید). بنابر ۲۵.۳، $\langle x_i\rangle/\langle x_i^n\rangle$، به‌ازای هر $i=1,\ldots,n$، دوری است از مرتبهٔ n.

حال ثابت می‌کنیم که رتبهٔ یک گروه آبلی آزاد به‌وسیلهٔ این گروه به‌طور یکتا مشخص می‌شود.

۳۷.۸ فرع فرض می‌کنیم G و H گروههای آبلی آزادی به‌ترتیب از رتبهٔ r و s باشند، که در آن r و s اعداد صحیحی هستند نامنفی. در این‌صورت $G \cong H$ اگر و تنها اگر $r = s$.

برهان از تعریف واضح است که اگر $r = s$ آنگاه $G \cong H$. به عکس، فرض می‌کنیم $G \cong H$. می‌توانیم G و H را نابدیهی فرض کنیم، بنابراین r و s هر دو مثبت‌اند. بنابر ۳۳.۸، $G/G^۲ \cong H/H^۲$؛ و بنابر ۳۶.۸، $G/G^۲$ و $H/H^۲$ به‌ترتیب گروههای آبلی مقدماتی از مرتبهٔ ۲^r و ۲^s هستند. چون $|G/G^۲| = |H/H^۲|$ در نتیجه $r = s$.

۴۶۰. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد، G یک گروه آبلی و

$$G_n = \{g \in G : g^n = ۱\}.$$

(i) در این‌صورت $G_n \leqslant G$، و $G/G_n \cong G^n$.

(ii) فرض می‌کنیم که G متناهی است، بنابراین (به موجب ۲۴.۸ یا ۴۵۲) اعضای $x_۱$، ...، x_r از G وجود دارند به‌طوری که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{r}\langle x_i\rangle.$$

به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r$، قرار می‌دهیم $m_i = o(x_i)$ و $k_i = m_i/(m_i, n)$. در این‌صورت

$$G_n = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{r}\langle x_i^{k_i}\rangle.$$

(iii) اگر G متناهی باشد، آنگاه $G/G^n \cong G_n$.

(iv) با یک مثال نشان دهید که اگر G نامتناهی باشد، به‌ازای هر $n > ۱$، لزوماً یکریختی $G/G^n \cong G_n$ را نخواهیم داشت.

(v) با یک مثال نشان دهید که، حتی وقتی G متناهی است، برای بعضی مقادیر $n > ۱$، لزوماً تساوی $G = G_n \times G^n$ را نداریم.

۴۶۱. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و G و H گروههای آبلی باشند. هرگاه $G \cong H$ آنگاه $G_n \cong H_n$ (۴۶۰ را ببینید).

۴۶۲. فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی نابدیهی باشد. در این‌صورت، بنابر ۴۵۲، عضوهای نابدیهی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_r از G وجود دارند به‌طوری که $G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{r}\langle x_i\rangle$ و (اگر $r > ۱$) به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r-۱$، $o(x_i)$ بر $o(x_{i+۱})$ بخش‌پذیر است.

(i) اگر p مقسوم‌علیه اولی از $o(x_r)$ باشد، آنگاه G_p آبلی مقدماتی است از مرتبهٔ p^r (که در آن G_p مانند ۴۶۰ تعریف شده است).

(ii) عدد صحیح r، کوچکترین عدد صحیح مثبت n است به‌طوری که G یک گروه nمولدی است. (راهنمایی. از (i)، ۳۰.۲ (i) و ۳۸۸ استفاده کنید.)

۴۶۳. فرض کنید G و H گروههای آبلی متناهی نابدیهی باشند. در این‌صورت، به موجب ۴۵۲، اعداد صحیح مثبت r و s و عضوهای نابدیهی $x_۱$، $x_۲$، ...، x_r از G و $y_۱$، $y_۲$، ...، y_r از H وجود دارند به‌طوری که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{r}\langle x_i\rangle \quad , \quad H = \mathrm{Dr}\prod_{j=۱}^{s}\langle y_j\rangle$$

و (اگر $r > ۱$) به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r-۱$، $o(x_i)$ بر $o(x_{i+۱})$ بخش‌پذیر است و نیز (اگر $s > ۱$) به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, s-۱$، $o(y_j)$ بر $o(y_{j+۱})$ بخش‌پذیر است.

همچنین ثابت کنید که هرگاه $G \cong H$ آنگاه $r = s$ و به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r$، $o(x_i) = o(y_i)$. (اشاره. این نشان می‌دهد که اگر G یک گروه آبلی متناهی نابدیهی باشد، آنگاه اعداد صحیح مثبت r، $o(x_۱)$، $o(x_۲)$، ...، $o(x_r)$ که توسط ۴۵۲ داده می‌شوند، به‌وسیلهٔ G به‌طور یکتا مشخص می‌شوند؛ و به عکس آنها آشکارا یک نوع G را به‌طور یکتا مشخص می‌کنند. اعداد صحیح $o(x_۱)$، $o(x_۲)$، ...، $o(x_r)$ گاهی ناورداهای G نامیده می‌شوند. راهنمایی. بنابر ۴۶۲ (ii)، $r = s$. با استقرا بر $|G|$ استدلال کنید تا نشان دهید که به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r$، $o(x_i) = o(y_i)$. فرض می‌کنیم p مقسوم‌علیهی اول از $o(x_r)$ باشد. در این‌صورت به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r$، p، $o(x_i)$ را می‌شمارد و بنابر ۴۶۰ (ii) و ۴۶۱ و ۴۶۲ (i)، p به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, r$، $o(y_i)$ را نیز می‌شمارد. اگر G و H مقدماتی نباشند، G^p و H^p را در نظر بگیرید و از ۳۳.۸، ۳۴.۸ و فرض استقرا استفاده کنید.)

۴۶۴. ناورداهای گروههای آبلی متناهی $C_۲ \times C_۶$، $C_۶ \times C_{۱۵} \times C_{۲۱}$ و $C_۲ \times C_{۱۰} \times C_{۱۵}$ را به‌دست آورید (۴۶۳).

۴۶۵. فرض می‌کنیم r یک عدد صحیح مثبت باشد، و G یک گروه آبلی آزاد از رتبهٔ r. در این‌صورت بنابر فرض، عضوهای $x_۱$، $x_۲$، ...، x_r از G، که همهٔ آنها از مرتبهٔ نامتناهی‌اند، وجود دارند به‌طوری که

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=۱}^{r}\langle x_i\rangle.$$

(i) فرض می‌کنیم $g \in G$. در این‌صورت اعداد صحیح $n_1, \dots, n_r$ که توسط g به‌طور یکتا مشخص می‌شوند وجود دارند به‌طوری که $g = \prod_{i=1}^{r} x_i^{n_i}$.

(ii) فرض می‌کنیم H گروه آبلی rمولدی دلخواهی باشد. در این‌صورت یک همریختی از G بر روی H وجود دارد.

۴۶۶. فرض می‌کنیم r یک عدد صحیح مثبت باشد و G یک گروه آبلی آزاد از رتبهٔ r. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این‌صورت به‌ازای مقداری چون $s \leqslant r$، H آبلی آزاد است از رتبهٔ s. (راهنمایی. از ۳۸۸ و ۲۴.۸ استفاده کنید.)

۴۶۷. فرض می‌کنیم $K \leqslant G$، که G یک گروه آبلی است. فرض می‌کنیم که G/K به‌ازای عدد صحیح مثبتی مانند r، آبلی آزاد از رتبهٔ r باشد. در این‌صورت زیرگروه H از G وجود دارد به‌طوری که $G = H \times K$. (راهنمایی. r عضو $x_1, \dots, x_r$ از G وجود دارند به‌طوری که $G/K = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{r}\langle x_iK\rangle$ و اعضای $x_1K, \dots, x_rK$ از G/K جملگی دارای مرتبهٔ نامتناهی‌اند. فرض کنید $H = \langle x_1, \dots, x_r\rangle \leqslant G$.)

۴۶۸. فرض می‌کنیم r یک عدد صحیح مثبت باشد و G یک گروه آبلی آزاد از رتبهٔ r. در این‌صورت

(i) G را می‌توان در $\mathbf{Q}^{\times}_{\mathrm{pos}}$ نشاند.

(ii) اگر $r > 1$، G را نمی‌توان در $\mathbf{Q}^{+}$ نشاند.

اکنون نتیجه‌ای از قضیهٔ ساختاری ۲۴.۸ را مورد توجه قرار می‌دهیم.

۳۸.۸ لم فرض می‌کنیم G و H گروههای آبلی متناهی مولد باشند.

(i) عدد صحیح نامنفی r و زیرگروه آبلی آزاد K از G از رتبهٔ r وجود دارند به‌طوری که $G = T(G) \times K$ و $T(G)$ متناهی است.

(ii) فرض می‌کنیم $G = T(G) \times K$ و $H = T(H) \times L$، که در آن K یک زیرگروه آبلی آزاد G از رتبهٔ r است و L یک زیرگروه آبلی آزاد H از رتبهٔ s، و r و s اعداد صحیح نامنفی‌اند. در این‌صورت $G \cong H$ اگر و تنها اگر $T(G) \cong T(H)$ و $r = s$.

برهان (i) بنابر ۲۴.۸، زیرگروههای G_0 و K از G وجود دارند به‌طوری که

$$G = G_0 \times K,$$

که G_0 متناهی است و به‌ازای یک عدد صحیح نامنفی چون r، K آبلی آزاد است از رتبهٔ r.

در این‌صورت، چون $G/G_0 \cong K$، و این هم یک گروه بی‌تاب است، در نتیجه بنابر ۳۱.۸ $G_0 = T(G)$.

(ii) هرگاه $r = s$ آنگاه $K \cong L$. به‌علاوه اگر $T(G) \cong T(H)$ آنگاه، چون $G = T(G) \times K$ و $H = T(H) \times L$، در نتیجه $G \cong H$.

به‌عکس فرض می‌کنیم که $G \cong H$. در این‌صورت بنابر ۳۲.۸، $T(G) \cong T(H)$ و

$$K \cong G/T(G) \cong H/T(H) \cong L.$$

پس همچنین بنابر ۳۷.۸، $r = s$.

اشاره. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی باشد. این قضیه را ر. بئر [a۴]، (۱۹۶۳) و س. و. فومین [a۲۸] (۱۹۳۷) ثابت کرده‌اند که **هرگاه** عدد صحیح مثبتی مانند n وجود داشته باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in T(G)$، $x^n = 1$ (و بویژه اگر $T(G)$ متناهی باشد) آنگاه $T(G)$ یک سازهٔ مستقیم G است. فوکس [b۱۱] جلد ۲، ص. ۱۸۷، قضیهٔ ۱.۱۰۰ را ببینید. ولی در حالت کلی $T(G)$ لزوماً سازهٔ مستقیمی از G نیست؛ به‌عنوان مثال مک‌دانلد [b۳۰] ص. ۲۲۳، مثال ۱۴.۱۱ را ببینید.

در لم اخیر، مسألهٔ یافتن شرایط یکریختی دو گروه آبلی متناهی مولد به مسألهٔ متناظرش برای گروههای آبلی تحویل می‌شود. اکنون در لم زیر تحویل دیگری را انجام می‌دهیم.

۳۹.۸ لم فرض می‌کنیم G و H گروههای آبلی متناهی باشند. در این‌صورت $G \cong H$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد اول p، G و H دارای p زیرگروههای سیلوی یکریخت باشند.

برهان فرض می‌کنیم φ یک یکریختی از G بر روی H است. p را یک عدد اول دلخواه و P را یک p زیرگروه سیلوی G می‌گیریم. در این‌صورت $P \cong P\varphi \leqslant H$. علاوه بر این چون $|P| = |P\varphi|$ و $|G| = |H|$، $P\varphi$ یک p زیرگروه سیلوی H است.

به‌عکس فرض می‌کنیم که به‌ازای هر عدد اول p، G و H دارای p زیرگروههای سیلوی یکریخت باشند. اگر $G = 1$ بلافاصله نتیجه می‌شود که $H = 1$. فرض می‌کنیم که $G \neq 1$، و همچنین $p_1, \dots, p_s$ که در آن s، یک عدد صحیح مثبت است مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند. به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$ فرض می‌کنیم P_i و Q_i به ترتیب معرف p_i زیرگروههای سیلوی G و H باشند. در این‌صورت بنابر فرض به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$،

$$P_i \cong Q_i,$$

و $|H|$ بر هیچ عدد اول متمایز از p_1، ...، p_s بخش‌پذیر نیست. بنابر ۶.۸،

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{s} P_i \quad \text{و} \quad H = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{s} Q_i.$$

از این رو

$$G \cong H.$$

تنها باقی می‌ماند که مسألهٔ یکریختی را برای pگروههای آبلی متناهی در نظر بگیریم. این کار را در لم بعد انجام داده‌ایم.

۴۰.۸ لم فرض می‌کنیم G و H، p گروههای آبلی نابدیهی باشند. بنابر ۲۴.۸ می‌توانیم G و H را به‌صورت حاصلضرب مستقیم زیرگروههای دوری نابدیهی، مانند

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{t}\langle x_i\rangle \quad \text{و} \quad H = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{u}\langle y_i\rangle,$$

که در آنها t و u اعداد صحیح مثبت‌اند تجزیه کنیم، به‌ازای هر $i = 1,\dots,t$، و هر $j = 1,\dots,u$ فرض می‌کنیم

$$o(x_i) = p^{m_i} \quad \text{و} \quad o(y_j) = p^{n_j}.$$

می‌توانیم فرض کنیم نمادها طوری انتخاب شده‌اند که

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_t \quad \text{و} \quad n_1 \geqslant n_2 \geqslant \cdots \geqslant n_u.$$

در این صورت $G \cong H$ اگر و تنها اگر $t = u$ و به‌ازای هر $i = 1,\dots,t$، $m_i = n_i$.

برهان واضح است که اگر $t = u$ و به‌ازای هر $i = 1,\dots,t$، $m_i = n_i$، آنگاه $G \cong H$.
به‌عکس فرض می‌کنیم که $G \cong H$. در اینجا حکم را با استقرا بر m_1 اثبات می‌کنیم. اگر $m_1 = 1$، آنگاه چون بنابر فرض $m_t > 0$، به‌ازای هر $i = 1,\dots,t$، نتیجه می‌شود که $m_i = 1$. لذا G یک pگروه آبلی مقدماتی خواهد بود و در نتیجه H نیز یک pگروه آبلی مقدماتی است. از این‌رو به‌ازای هر $j = 1,\dots,u$، $n_j = 1$. پس همچنین $p^t = |G| = |H| = p^u$، بنابراین $t = u$.

حال فرض می‌کنیم که $m_1 > 1$. در این صورت به موجب حالت اثبات‌شدهٔ قبلی، $n_1 > 1$. فرض می‌کنیم k بزرگترین عدد صحیحی باشد که $m_k > 1$، و همچنین فرض می‌کنیم l بزرگترین عدد صحیحی باشد که $n_l > 1$. در این‌صورت $1 \leqslant k \leqslant t$، و اگر $k < t$، آنگاه به‌ازای هر $i > k$، $m_i = 1$. به همین نحو $1 \leqslant l \leqslant u$، و اگر $l < u$ آنگاه به‌ازای هر $j > l$، $n_j = 1$. از این رو

$$|G| = p^{m_1+\cdots+m_k+t-k} \quad \text{و} \quad |H| = p^{n_1+\cdots+n_l+u-l}.$$

بنابراین، چون $G \cong H$،

$$\sum_{i=1}^{k} m_i + t - k = \sum_{j=1}^{l} n_j + u - l. \qquad \text{(i)}$$

بنابر ۳۳.۸ و ۳۴.۸ نیز:

$$\mathrm{Dr}\prod_{i=l}^{t}\langle x_i^p\rangle = G^p \cong H^p = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{u}\langle y_j^p\rangle.$$

به‌ازای هر $i = 1,\dots,t$ و به‌ازای هر $j = 1,\dots,u$،

$$o(x_i^p) = p^{m_i-1} \quad \text{و} \quad o(y_j^p) = p^{n_j-1}.$$

بنابراین همین‌طور

$$G^p = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{k}\langle x_i^p\rangle \quad \text{و} \quad H^p = \mathrm{Dr}\prod_{j=1}^{l}\langle y_j^p\rangle,$$

که برای آن

$$o(x_i^p) = p^{m_i-1}, \quad o(y_j^p) = p^{n_j-1},$$

$$m_1 - 1 \geqslant m_2 - 1 \geqslant \dots \geqslant m_k - 1 > 0 \quad \text{و} \quad n_1 - 1 \geqslant n_2 - 1 \geqslant \dots \geqslant n_l - 1 > 0.$$

چون $G^p \cong H^p$ و $o(x_1^p) = p^{m_1-1}$، بنابر فرض استقرا نتیجه می‌شود که

$k = l$ و به‌ازای هر $i = 1,\dots,k$، $m_i - 1 = n_i - 1$

در این صورت بنابر تساوی (i) نتیجه می‌شود که $t = u$ و به‌علاوه چون وقتی $i > t$، $n_i = 1 = m_i$ لذا به‌ازای هر $i = 1, \dots, t$ خواهیم داشت $m_i = n_i$، که اثبات به استقراء را کامل می‌کند.

۴۶۹. فرض می‌کنیم n و m اعداد صحیح مثبت باشند، و G یک گروه آبلی باشد. در این صورت

(i) $G^{nm} = (G^n)^m$.

(ii) اگر m، n را بشمارد آنگاه، $G^n \leqslant G^m$.

(iii) هرگاه $H \leqslant G$، آنگاه $(G/H)^n = G^nH/H$.

(iv) اگر $G = H \times K$، آنگاه $G^n = H^n \times K^n$؛ و $G^n = G$ اگر و تنها اگر $H^n = H$ و $K^n = K$.

(v) اگر G دوره‌ای باشد و به‌ازای هر $g \in G$، $(o(g), n) = 1$، آنگاه $G^n = G$.

(vi) فرض می‌کنیم که $n > 1$ و G متناهی مولد باشد. در این صورت $G^n = G$ اگر و تنها اگر G متناهی باشد و $(|G|, n) = 1$.

(vii) فرض می‌کنیم که $n > 1$. در این صورت $G^n = G$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از n، $G^p = G$.

۴۷۰. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی باشد. در این صورت G را بخش‌پذیر (یا رادیکال‌پذیر یا کامل) می‌گوییم اگر به‌ازای هر عدد صحیح مثبتِ n، $G^n = G$. (ما اصطلاح بخش‌پذیر را برای استفادهٔ مکرر حفظ خواهیم کرد، ولو اینکه از نماد جمعی مرسوم برای گروههای آبلی ناشی شده باشد و اصطلاح رادیکال‌پذیر بیشتر برای نماد ضربی مناسب خواهد بود.)

(i) گروههای $\mathbf{Q}^+$، $\mathbf{R}^\times_{\mathrm{pos}}$، $\mathrm{C}^\times$، C_{p^∞} (۱۴۴) همگی بخش‌پذیرند.

(ii) اگر G بخش‌پذیر باشد، هر گروه خارج قسمتی G نیز بخش‌پذیر است.

(iii) اگر $G = H \times K$، آنگاه G بخش‌پذیر است اگر و تنها اگر H و K هر دو بخش‌پذیر باشند.

(iv) اگر G بخش‌پذیر و نابدیهی باشد، آنگاه G نمی‌تواند متناهی مولد باشد.

۴۷۱. فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی باشد و H یک زیرگروه بخش‌پذیر G (۴۷۰). فرض می‌کنیم که K زیر گروهی از G باشد که با شرط $H \cap K = 1$ ماکسیمال باشد. (اشاره. لم زورن که صورتی از به اصطلاح اصل موضوع انتخاب برای مجموعه‌هاست، وجود یک چنین زیرگروه Kای را تضمین می‌کند: برای مثال، فوکس [b۱۱] جلد ۱، صص ۱ـ۲ و ص. ۴۸ را ببینید.)

ثابت کنید که $G = H \times K$. (راهنمایی. فرض کنید $J = HK$. برخلاف آنچه می‌خواهید ثابت کنید فرض کنید که $J < G$. در این صورت عضو $x \in G$ و عدد صحیح مثبت m وجود

دارند به‌طوری که $x \notin J$ و $x^m \in J$. فرض کنید n کوچکترین عدد صحیح از این نوع باشد. بنابر بخش‌پذیری H، عضو $h \in H$ وجود دارد به‌طوری که $(xh^{-1})^n \in K$. به‌علاوه عضوهای $h' \in H$ و $k' \in K$ و عدد صحیح r وجود دارند به‌طوری که $1 \neq h' = (xh^{-1})^r k'$؛ و r بر n بخش‌پذیر نیست. حال با استفاده از الگوریتم تقسیم به یک تناقض با انتخاب n برسید.)

اکنون با در نظر گرفتن گروههای آبلی متناهی مولد به وضعیت بسیار رضایت‌بخشی می‌رسیم. هر چنین گروه Gای، یک دستگاه معین از اعداد صحیح را مشخص می‌کند (۴۱.۸ را ببینید) و نوع G به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ این دستگاه مشخص می‌شود.

۴۱.۸ قضیهٔ یکتایی در مورد گروههای آبلی متناهی مولد هر گروه آبلی متناهی مولد G، دستگاهی از اعداد صحیح نامنفی را به‌صورت زیر مشخص می‌کند. اعداد صحیح نامنفی مانند r و s وجود دارند؛ و اگر $s > 0$، اعداد اول متمایز p_1، … ، p_s، اعداد صحیح مثبت t_1، … ، t_s و اعداد صحیح مثبت m_{ij}($j = 1, \dots, t_i$ و $i = 1, \dots, s$) وجود خواهند داشت به‌طوری که $G = T(G) \times K$، که K یک گروه آبلی آزاد از رتبهٔ r است، همچنین اگر $s = 0$، $T(G) = 1$ و اگر $s > 0$، $T(G)$ حاصلضرب مستقیم $\sum_{i=1}^{s} t_i$ زیرگروه دوری است که مرتبه‌های آنها برابر است با $p_i^{m_{ij}}$($j = 1, \dots, t_i$ و $i = 1, \dots, s$). به‌علاوه، دو گروه آبلی متناهی مولد یکریخت‌اند اگر و تنها اگر آن دو یک دستگاه اعداد صحیح را مشخص کنند.

برهان فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی مولد باشد. بنابر ۳۸.۸، $G = T(G) \times K$، که در آن به‌ازای یک عدد صحیح نامنفیِ r، K یک گروه آبلی آزاد است از رتبهٔ r و $T(G)$ متناهی است. اگر $T(G) = 1$، قرار می‌دهیم $s = 0$. اگر $T(G) \neq 1$، فرض می‌کنیم s معرف تعداد مقسوم علیه‌های اول متمایز $|T(G)|$ باشد، و این مقسوم علیه‌های اول p_1، … ، p_s باشند. در این حالت، بنابر ۶.۸، $T(G) = \mathrm{Dr} \prod_{i=1}^{s} P_i$، که P_i، p_i زیرگروه یکتای سیلو $T(G)$ است. بالاخره بنابر ۲۴.۸، به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، P_i حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی مثلاً t_i زیرگروه دوری نابدیهی است، فرض می‌کنیم مرتبه‌های این زیرگروههای دوری $p_i^{m_{ij}}$($j = 1, \dots, t_i$) باشد.

این حقیقت که دو گروه آبلی متناهی مولد یکریخت‌اند اگر یک دستگاه اعداد صحیح را مشخص کنند، بلافاصله از تعریف دستگاه اعداد صحیح نتیجه می‌شود. به‌عکس فرض کنیم که G و H گروههای آبلی متناهی مولد یکریخت باشند. در این صورت این حقیقت که آنها یک دستگاه اعداد صحیح نامنفی را مشخص می‌کنند از ۳۸.۸، ۳۹.۸ و ۴۰.۸ نتیجه می‌شود. اشاره. هر دستگاه اعداد صحیح نامنفی از نوع مشخص‌شده در این قضیه از یک گروه آبلی متناهی مولد

ناشی می‌شود. این امر واضح است: تنها نیاز داریم حاصلضرب مستقیم مناسبی از گروههای دوری از مرتبهٔ توانی از یک عدد اول و مرتبه‌های نامتناهی را تشکیل دهیم.

۴۲.۸ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد نابدیهی باشد و همچنین

$$G = H_۱ \times \cdots \times H_m = K_۱ \times \cdots \times K_n,$$

که m و n اعداد صحیح مثبت‌اند و $H_۱$، ...، H_m و $K_۱$، ...، K_n زیرگروههای تجزیه‌ناپذیر نابدیهی‌اند. در این صورت $m = n$ و در صورت لزوم با زیرنمایه‌گذاری مجدد به تعداد کافی، به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, n$، $H_i \cong K_i$.

برهان به‌ازای هر $i = ۱, \ldots, m$، H_i با یک گروه خارج قسمتی G یکریخت، و بنابراین متناهی مولد است. به‌همین نحو به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, n$، K_j متناهی مولد است، لذا به‌موجب ۲۶.۸ هر H_i و هر K_j دوری است از مرتبهٔ توانی از یک عدد اول، یا مرتبهٔ نامتناهی. اکنون بنابر ۳۱.۸ و ۴۱.۸ فرع نتیجه می‌شود.

۴۳.۸ فرع (۵.۱). فرض می‌کنیم $n = p_۱^{m_۱} p_۲^{m_۲} \ldots p_s^{m_s}$ که s، $m_۱$، ...، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند و $p_۱$، ...، p_s اعداد اول متمایز. در این صورت اگر $\nu_a(n)$ معرف تعداد انواع متمایز گروههای آبلی از مرتبهٔ n باشد، آنگاه

$$\nu_a(n) = \nu_a(p_۱^{m_۱})\nu_a(p_۲^{m_۲}) \cdots \nu_a(p_s^{m_s}),$$

و به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, s$، $\nu_a(p_j^{m_j})$ با تعداد افرازهای m_j برابر است.

برهان اولین حکم از ۶.۸ و ۳۹.۸ و دومین حکم از ۴۰.۸ نتیجه می‌شود.

۴۴.۸ نظریهٔ جامعی از گروههای آبلی نامتناهی وجود دارد. بعضی پدیده‌های جالبِ توجه در ارتباط با این گروهها اتفاق می‌افتد. به‌عنوان مثال آ. ل. س. کورنر [a۱۸] نشان داده است که یک گروه آبلی بی‌تاب G وجود دارد که برای آن $G \cong G \times G \times G$ اما $G \ncong G \times G$.

برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ گروههای آبلی نامتناهی، فوکس [b۱۱]، گریفیث [b۱۵]، کاپلانسکی [b۲۴]، کوروش [b۲۷] جلد ۱، قسمت ۲، و روتمن [b۳۴] فصلهای ۹ و ۱۰ را ببینید.

۴۷۲. (i) به‌ازای هر عدد صحیح مثبت m، فرض می‌کنیم $\rho(m)$ معرف تعداد افرازهای m باشد. تحقیق کنید که $\rho(۱) = ۱$، $\rho(۲) = ۲$، $\rho(۳) = ۳$، $\rho(۴) = ۵$، $\rho(۵) = ۷$، $\rho(۶) = ۱۱$ و $\rho(۷) = ۱۵$.

(ii) به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $k \leqslant ۱۲$، کوچکترین عدد صحیح مثبت n_k را بیابید طوری که $\nu_a(n_k) = k$.

نشان دهید که هیچ عدد صحیح مثبت nی وجود ندارد که $\nu_a(n) = ۱۳$.

۴۷۳. (i) فرض می‌کنیم G یک گروه آبلی متناهی مولد نابدیهی باشد، همچنین n یک عدد صحیح دلخواهی باشد با $n > ۱$، و فرض می‌کنیم G^* حاصلضرب مستقیم n نسخهٔ یکریخت G باشد. در این صورت $G \ncong G^*$.

(ii) فرض می‌کنیم G یک گروه‌نابدیهی باشد و همچنین $\mathbf{N}$ معرف مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت باشد، و قرار می‌دهیم $G^* = \mathrm{Dr}\, G^{\mathbf{N}}$، که $\mathrm{Dr}\, G^{\mathbf{N}}$ توان مستقیم G با مجموعهٔ اندیس‌گذار $\mathbf{N}$ است (۴۴۵). در این صورت G^* یک گروه نامتناهی است و $G^* \cong G^* \times G^*$.

۹

عملهای گروه بر گروهها

در فصل ۴ و ۵، مفهوم عمل گروه بر یک مجموعه را معرفی کردیم و آن را به‌کار بردیم. یک گروه می‌تواند بر دستگاههای ریاضی دیگر نیز عمل کند. هنگامی که این اتفاق می‌افتد، ما به اصول موضوعهٔ ۱.۴، اصول موضوعهٔ دیگری را اضافه می‌کنیم تا مطمئن شویم که این عمل ساختار این دستگاه خاص را که گروه بر آن عمل می‌کند مدنظر قرار می‌دهد. به‌ویژه یک نظریهٔ بسیار توسعه یافته از عملهای گروه بر فضاهای برداری وجود دارد، که آن را معمولاً نظریهٔ نمایش می‌نامند. این نظریه ابزار نیرومندی برای اثبات قضایای مربوط به گروههای مجرد به‌دست می‌دهد. به‌عنوان مثال، قضایای برنساید و فروبینیوس که در ۲۹.۴ و ۲۴۸ بیان شده‌اند (یا فقط در مورد قضیهٔ فروبینیوس چنین است)، به سادگی هر چه تمامتر به‌وسیلهٔ نظریهٔ نمایش ثابت می‌شوند. ما در این کتاب نظریهٔ نمایش را دیگر مطرح نخواهیم کرد؛ اما برای استفادهٔ مقدماتی به لنگ [b۲۸] فصل ۱۸ و سره [b۳۷] اشاره می‌کنیم. جامعترین شرح را کرتیس و راینر [b۷] فراهم کرده‌اند.

در این فصل، ما مفهوم عمل گروه بر یک گروه را مطرح خواهیم کرد. توجه داشته باشید که در تعریفِ زیر، اصول موضوعه، اصول موضوعهٔ ۱.۴ هستند به انضمام یک اصل موضوع اضافی برای حفظ ساختار. طبق معمول، H و K همواره معرف گروه هستند.

۱.۹ تعریف می‌گوییم H بر K (به‌عنوان یک گروه) عمل می‌کند اگر به هر $h\in H$ و $k\in K$، عضو یکتای $k^h\in K$ متناظر شود به‌طوری که، به‌ازای هر $k,k_1,k_2\in K$ و $h,h_1,h_2\in H$،

$$k^1=k, \quad (k^{h_1})^{h_2}=k^{h_1h_2}$$

و

$$(k_1k_2)^h=k_1^hk_2^h.$$

در خصوص نظریه عملهای گروه بر گروهها نماد 'توانی' k^h یک قرارداد مناسبی است، و چنانکه خواهیم دید، این نماد با نماد قبلی برای مزدوجها به‌خوبی جور درمی‌آید.

۲.۹ چند مثال (i) فرض می‌کنیم R حلقه‌ای باشد با عضو همانی ضربی ۱. در این صورت گروه $R^\times$ بر گروه R^+ عمل خواهد کرد (۱۱.۲ و ۱۲.۲ را ببینید.) اگر به‌ازای هر $a\in R^+$ و هر $b\in R^\times$ تعریف کنیم

$$a^b=ab \text{ (ضرب در حلقهٔ } R\text{)}$$

در اینجا شرایط برای عمل گروه عبارت‌اند از:

$$a1=a, \quad (ab_1)b_2=a(b_1b_2)$$

و

$$(a_1+a_2)b=a_1b+a_2b,$$

به‌ازای هر $a,a_1,a_2\in R^+$ و $b,b_1,b_2\in R^\times$. این شرطها، بنابر قانون شرکت‌پذیری ضرب و قانون توزیع‌پذیری در R، و نیز ویژگی معرف عضو همانی R برقرارند.

(ii) فرض می‌کنیم $H\leqslant \mathrm{Aut}\,K$. در این صورت H بر K عمل می‌کند. در چنین وضعیتی، هر $h\in H$ یک خودریختی K است و، به‌ازای $k\in K$، k^h نگاره k بر اثر h است. شرایط ۱.۹ به‌روشنی برقرارند. این عمل، عمل طبیعی H بر K است.

(iii) فرض می‌کنیم $K\trianglelefteq G$. در این صورت G بر K (به‌عنوان یک گروه) با ترویج عمل می‌کند: به‌ازای هر $k\in K$ و هر $g\in G$، عضو

$$k^g=g^{-1}kg\in K,$$

متناظر می‌شود که با نمادگذاری قبلی جور درمی‌آید (۲۵.۴). در اینجا شرایط برای عمل گروه عبارت‌اند از:

$$(k^{g_۱})^{g_۲} = k^{g_۱ g_۲}, \qquad k^۱ = k,$$

و

$$(k_۱ k_۲)^g = k_۱^g k_۲^g,$$

به‌ازای هر $k, k_۱, k_۲ \in K$ و $g, g_۱, g_۲ \in G$، که آنها را قبلاً در ۲۵.۴ و ۳۶.۴ (یا ۱۹.۲) تحقیق کرده‌ایم. به‌ویژه ملاحظه کردیم که عمل تعریف شده در ۲۵.۴، عملی است از G بر خودش به‌عنوان یک گروه.

از طرفی، عملِ G بر خودش به‌وسیلهٔ ضرب از راست که در ۲۳.۴ معرفی شده، عملی است بر G به‌عنوان یک مجموعه، و نه به‌عنوان یک گروه مگر اینکه $|G| = ۱$.

حال به مشابه‌های ۳.۴ و ۴.۴ اشاره می‌کنیم.

۳.۹ قضیه فرض می‌کنیم H بر K عمل کند. در این صورت به هر $h \in H$ نگاشتی مانند $\varphi_h : K \to K$، که با ضابطهٔ $\varphi_h : k \mapsto k^h$ تعریف شده متناظر می‌شود، که یک خودریختی است از K. علاوه بر این، نگاشت $\varphi : H \to \text{Aut } K$، که با ضابطهٔ $\varphi : h \mapsto \varphi_h$ تعریف می‌شود، یک همریختی است. φ را نمایش خودریختی H، متناظر با این عمل می‌نامیم؛ یا خیلی اوقات برای اختصار اصلاً φ را عمل می‌خوانیم.

برهان فرض می‌کنیم $h \in H$. چون عمل H بر K به‌ویژه یک عمل بر K به‌عنوان یک مجموعه است، ۳.۴ نشان می‌دهد که $\varphi_h \in \Sigma_k$. پس به‌ازای هر $k_۱, k_۲ \in K$،

$$(k_۱ k_۲)\varphi_h = (k_۱ k_۲)^h = k_۱^h k_۲^h = (k_۱\varphi_h)(k_۲\varphi_h),$$

و در نتیجه $\varphi_h \in \text{Aut } K$. از این رو نگاشت $\varphi : h \mapsto \varphi_h$ (که به‌ازای هر $h \in H$ تعریف شده) نگاشتی است از H به توی $\text{Aut } K$، و بنابر ۳.۴، یک همریختی است.

۴.۹ قضیه فرض می‌کنیم φ یک همریختی از H به‌توی $\text{Aut } K$ باشد. در این صورت H بر K عمل می‌کند، وقتی که به‌ازای هر $h \in H$ و هر $k \in K$ تعریف کنیم

$$k^h = k(h\varphi),$$

و φ عمل متناظر است.

برهان چون $\text{Aut } K \leqslant \Sigma_k$، به‌موجب ۴.۴ واضح است که تساوی فوق معرف یک عمل از H بر K، به‌عنوان یک مجموعه است. این عمل یک عمل بر K به‌عنوان یک گروه است، زیرا به‌ازای هر $h \in H$ و $k_۱, k_۲ \in K$

$$\begin{aligned}(k_۱ k_۲)^h &= (k_۱ k_۲)(h\varphi)\\ &= (k_۱(h\varphi))(k_۲(h\varphi)) \qquad (\text{زیرا } h\varphi \in \text{Aut } K)\\ &= k_۱^h k_۲^h.\end{aligned}$$

بالاخره با توجه به ۳.۴، ۴.۴ و ۳.۹ واضح است که φ عمل متناظر است.

۵.۹ در ۳۶.۴ ثابت کردیم که هرگاه $H \leqslant G$، $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ و $N_G(H)/C_G(H)$ را می‌توان در $\text{Aut } H$ نشانید. اکنون درستی این حکم را بررسی می‌کنیم. چون $H \trianglelefteq N_G(H)$، $N_G(H)$ به‌عنوان یک گروه به‌وسیلهٔ تزویج بر H عمل می‌کند. $C_G(H)$ هستهٔ این عمل است، و لذا قضیهٔ ۳۶.۴ از ۳.۹ و قضیهٔ بنیادی همریختیها نتیجه می‌شود.

۴۷۴. اصول موضوعهٔ مناسب در مورد عمل گروه بر یک فضای برداری را طرح‌ریزی کنید.

نشان دهید که اگر یک گروه G بر فضای برداری $V \neq ۰$ عمل کند، یک همریختی متناظر $G \longrightarrow \text{GL}(V)$ (نمایش خطی G متناظر با این عمل) وجود خواهد داشت. به‌عکس نشان دهید که به‌ازای هر همریختی $\theta : G \longrightarrow \text{GL}(V)$، یک عمل از G بر V با نمایش خطی متناظر θ وجود دارد.

۴۷۵. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای با عضو همانی ضربی ۱ باشد. در این صورت عملِ $R^\times$ بر R^+ که در ۲.۹ (i) تعریف شده صادق است.

***۴۷۶.** فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، و همچنین φ، عملِ G بر K به‌وسیلهٔ تزویج باشد (۲.۹ (iii) را ببینید). در این صورت $\text{Ker}\varphi = C_G(K)$.

۴۷۷. فرض می‌کنیم H بر K عمل کند. هرگاه $K \neq ۱$، آنگاه این عمل ناترایا است.

فرض می‌کنیم H بر K، مثلاً با عمل φ، عمل کند. چون H و K هر دو گروه‌اند، ساختمانی موجود است که در مورد عملهای گروه بر مجموعه‌های کلی، معنی ندارد. این ساختمان هم H و هم K را در گروهی مانند G می‌نشاند به‌طوری که عمل φ در G حفظ می‌شود. این ساختمان تعمیم حاصلضرب مستقیم (۳۱.۲) است.

۶.۹ قضیه فرض می‌کنیم H بر K عمل کند. در این صورت مجموعهٔ تمام زوجهای مرتب (h,k)، که $h \in H$ و $k \in K$، ساختار یک گروه G را به‌دست می‌دهد، اگر به‌ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$، تعریف کنیم

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1h_2, k_1^{h_2}k_2).$$

برهان بسته‌بودن بلافاصله از تعریف ضرب نتیجه می‌شود. فرض می‌کنیم $h_1, h_2, h_3 \in H$ و $k_1, k_2, k_3 \in K$. در این صورت با استفاده از شرکت‌پذیری ضرب در H و در K خواهیم داشت

$$\begin{aligned}((h_1, k_1)(h_2, k_2))(h_3, k_3) &= (h_1h_2, k_1^{h_2}k_2)(h_3, k_3)\\ &= (h_1h_2h_3, (k_1^{h_2}k_2)^{h_3}k_3)\\ &= (h_1h_2h_3, k_1^{h_2h_3}k_2^{h_3}k_3),\end{aligned}$$

(بنابر ۱.۹) و نیز

$$\begin{aligned}(h_1, k_1)((h_2, k_2)(h_3, k_3)) &= (h_1, k_1)(h_2h_3, k_2^{h_3}k_3)\\ &= (h_1h_2h_3, k_1^{h_2h_3}k_2^{h_3}k_3).\end{aligned}$$

بنابر ۱.۹، به‌ازای هر $k \in K$، $k^1 = k$. همین‌طور بنابر ۳.۹، به‌ازای هر $h \in H$، نگاشت $k \longmapsto k^h$ یک خودریختی K است. بنابراین $1^h = 1$ و $(k^{-1})^h = (k^h)^{-1}$ (۲.۹). به‌موجب قاعدهٔ ضرب نتیجه می‌شود که $(1,1)$ عضو همانی G است و هر $(h,k) \in G$ دارای عضو وارون $(h^{-1}, (k^{-1})^{h^{-1}}) \in G$ است.

۷.۹ تعریف قبل از نام‌گذاری گروه G در ۶.۹، یک قرارداد نمادی وضع می‌کنیم. در ساخت یک چنین گروه G از H و K، از این به بعد فرض خواهیم کرد که H و K فقط در عضو همانی ۱ مشترک‌اند. (این فرض یک محدودیت جدی نیست، زیرا اگر H و K در عضوهای نابدیهی مشترک باشند، می‌توانیم به‌جای H یا K یک نسخهٔ یکریخت بگذاریم که در آن عضوهای نمایش داده شده با علامات جدید، طوری باشند که فقط اعضای همانی این دو گروه را با یک نماد در برداشته باشند.) بنابراین درگروه G از ۶.۹، به‌جای هر زوج مرتب (h,k) نماد hk را می‌گذاریم. این قرارداد، کاملاً نمادگذاری را ساده می‌کند. این قرارداد متناظر است با قراردادی که ما قبلاً در

۱.۸ برای حاصلضربهای مستقیم اختیار کردیم: همین‌طور ۹.۹ را ببینید. در این صورت قاعدهٔ ضرب در G به‌صورت زیر است

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = (h_1h_2)(k_1^{h_2}k_2)$$

به‌ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$.

فرض می‌کنیم φ عمل H بر K باشد. در این صورت گروه G مرکب از تمامی نمادهای پهلوی هم گذاشته شدهٔ hk، که $h \in H$ و $k \in K$، و ضرب داده شده با تساوی فوق را حاصلضرب نیم‌مستقیم K در H با عمل φ می‌نامیم. ما این گروه را با $H_\varphi \times K$ نشان می‌دهیم. (هشدار. این تعریف و نمادگذاری با متناظرهایشان در روتمن [b۳۴] صص ۱۳۵ تا ۱۳۸ تفاوت دارند. این تفاوت از این حقیقت ناشی می‌شود که روتمن نگاشتها را از سمت چپ بر اعضا اثر می‌دهد. هنگامی که انتقالهای مناسبی صورت گیرد، تعاریف داده شده در اینجا، هم‌ارزند.)

۸.۹ به‌ازای گروههای دلخواه H و K، یک عمل طبیعی از H بر K وجود دارد: به‌ازای هر $h \in H$ و $k \in K$ تعریف می‌کنیم

$$k^h = k.$$

روشن است که شرطهای ۱.۹ برقرارند. نمایش خودریختی متناظر H همریختی بدیهی $\zeta : H \longrightarrow \mathrm{Aut}\, K$ است، یعنی

$$\zeta : h \mapsto 1 \qquad h \in H \text{ به‌ازای هر}$$

حاصلضرب نیم‌مستقیم $H_\zeta \times K$ از K در H با عمل بدیهی، مرکب است از تمامی نمادهای hk، با $h \in H$ و $k \in K$، و ضرب داده شده با

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = (h_1h_2)(k_1k_2),$$

به‌ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$. روشن است که این گروه دقیقاً حاصلضرب مستقیم $H \times K$ است (که در آن، مانند ۱.۸ (به‌جای عضو معمولی (h,k)، hk قرار گرفته است).

هنگامی که حاصلضربهای نیم‌مستقیم را با عملهای نابدیهی تشکیل می‌دهیم؛ معمولاً گروههایی غیر از حاصلضربهای مستقیم به‌دست می‌آوریم. به‌ویژه، توجه داشته باشید که هرگاه H و K گروههایی آبلی باشند و H با یک عمل نابدیهی φ بر K عمل کند، آنگاه گروه $H_\varphi \times K$ ناآبلی است. این شیوهٔ ساخت اهمیت خیلی زیادی دارد.

۹.۹ قضیه فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K عمل کند؛ قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. به‌ازای هر $h \in H$، h را با عضو $h۱ \in G$ یکی می‌گیریم و به‌ازای هر $k \in K$، k را با عضو $۱k \in G$ یکی می‌گیریم (ر.ک. ۸.۱). در این صورت $H \leqslant G$، $K \trianglelefteq G$، $G/K \cong H$، $G = HK$ و $H \cap K = ۱$. علاوه بر این، عمل H بر K تحدید عمل تحت تزویج G بر K، به H است. (۲.۹ (iii) را ببینید.)

برهان ابتدا توجه کنید که نگاشت

$$h \longmapsto h۱,$$

که به‌ازای هر $h \in H$ تعریف می‌شود، همریختی یک به یک از H به توی G است. این توجه یکی گرفتن h با $h۱$ است. در این صورت H نیز بانگارهٔ همریختی یک به یک فوق، یکی گرفته می‌شود، و در نتیجه $H \leqslant G$. به همین نحو، با یکی گرفتن k با $۱k$؛ به‌ازای هر $k \in K$، $K \leqslant G$. بنابر تعریف ضرب در G،

$$hk = (h۱)(۱k)\cdot$$

از این‌رو هنگامی که h با $h۱$ یکی گرفته می‌شود و k با $۱k$ (تنها یک پهلوی همگذاری دو نماد نامرتبط صورت نمی‌گیرد، بلکه hk به حاصلضرب $h \in G$ و $k \in G$ در G بدل می‌شود لذا $G = HK$. علاوه بر این، $H \cap K = ۱$ زیرا تنها عضو G که دارای هر دو شکل $h۱$ و $۱k$ باشد ۱۱ است، که ما در حال حاضر به ۱ نمایش می‌دهیم. (اشاره این بدان منظور است که مطمئن شویم که این یکی گرفتنها در اینجا ابهامی را که در ۷.۹ خواستار بودیم که H و K فقط در عضو همانی ۱ مشترک‌اند ایجاد نمی‌کند.)

اکنون نگاشت

$$\psi : G \longrightarrow H$$

را در نظر می‌گیریم که به‌ازای هر $h \in H$ و $k \in K$ با ضابطهٔ

$$\psi : hk \longmapsto h$$

تعریف می‌شود. بنابر تعریف ضرب در G که در ۷.۹ آمده است، ψ یک همریختی پوشاست و $\mathrm{Ker}\psi = K$. از این‌رو بنابر قضیهٔ اساسی همریختیها، $K \trianglelefteq G$ و $G/K \cong H$. بالاخره، فرض می‌کنیم $h \in H$ و $k \in K$. در این صورت در G،

$$h^{-۱}kh = h^{-۱}hk^h = k^h.$$

لذا k^h در اینجا مزدوج k به‌وسیلهٔ h در G است، و در نتیجه عمل اولیه از H بر K، همان عملی است که با تحدید عمل G بر K به‌وسیلهٔ مزدوج، تعریف شده است.

۱۰.۹ هم‌اکنون به مثالهای مهمی اشاره می‌کنیم.

(i) فرض می‌کنیم K گروه دلخواهی باشد، و عمل طبیعی از $\mathrm{Aut}\,K$ بر K را در نظر می‌گیریم. در این صورت این عمل، نگاشت همانی ε بر $\mathrm{Aut}\,K$ است: به‌ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}\,K$،

$$\varepsilon : \alpha \longmapsto \alpha\cdot$$

این عمل معرف حاصلضرب نیم مستقیم

$$(\mathrm{Aut}\,K)_\varepsilon \times K,$$

است که آن را تمامریخت K می‌نامند و با $\mathrm{Hol}\,K$ نمایش می‌دهند.

بنابر ۹.۹، $K \trianglelefteq \mathrm{Hol}\,K$ و، به‌ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}\,K$ و $k \in K$، $\alpha^{-۱}k\alpha = k^\alpha$ (که در آن حاصلضرب از چپ در $\mathrm{Hol}\,K$ تعریف شده است). لذا هر خودریختی K با تحدید از یک خودریختی داخلی $\mathrm{Hol}\,K$ به‌دست می‌آید.

(ii) در حالت کلی؛ فرض می‌کنیم $H \leqslant \mathrm{Aut}\,K$ و عمل طبیعی از H بر K را در نظر می‌گیریم. در این صورت این عمل، نگاشت شمول $\imath : H \longrightarrow \mathrm{Aut}\,K$ است. حاصلضرب نیم‌مستقیم مربوط

$$H_\imath \times K$$

تمامریختی نسبی K خوانده می‌شود. روشن است که بنابر تعریف

$$K \leqslant H_\imath \times K = HK \leqslant \mathrm{Hol}\,K\cdot$$

(iii) فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی باشد به‌طوری که به‌ازای عضوی چون $b \in A$، $b^۲ \neq ۱$. همچنین فرض می‌کنیم

$$\eta : A \longrightarrow A$$

نگاشت $\eta : a \longmapsto a^{-۱}$ باشد به‌ازای هر $a \in A$. در این صورت $\eta \in \mathrm{Aut}\,A$، $\eta^۲ = ۱$ و $\eta \neq ۱$ زیرا $b^{-۱} \neq b$.

تامریخت نسبی $A\langle\eta\rangle$ از A؛ گروهی است ناآبلی، که آن را گروه تعمیم یافته دووجهی می‌نامند و با $\mathrm{Dih}\ A$ نمایش می‌دهند. در این صورت $|\mathrm{Dih}\ A : A| = 2$. به آسانی دیده می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant 3$، $\mathrm{Dih}\ C_n \cong D_{2n}$، که گروه دووجهی از مرتبهٔ $2n$ است و $\mathrm{Dih}\ C_\infty \cong D_\infty$، گروه دووجهی نامتناهی (۵۷).

۴۷۸. فرض می‌کنیم H، مثلاً با عمل φ بر K عمل کند، قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$.

(i) به‌ازای هر $J \leqslant H$، تعریف می‌کنیم

$$C_K(J) = \{k \in K : k^j = k,\ \text{به‌ازای هر } j \in J\}$$

و همچنین به‌ازای هر $L \leqslant K$؛ تعریف می‌کنیم

$$C_H(L) = \{h \in H : l^h = l,\ \text{به‌ازای هر } l \in L\}$$

پس $C_K(J) = K \cap C_G(J)$ و $C_H(L) = H \cap C_G(L)$

(که در آنها $C_G(J)$ و $C_G(L)$ مرکز سازهای معمولی در G هستند).

توجه می‌کنید که $C_K(H) = \mathrm{Fix}_K(H)$ و $C_H(K) = \mathrm{Ker}\varphi$؛ بویژه $\mathrm{Fix}_K(H) \leqslant K$.

(ii) $\mathrm{Ker}\varphi \trianglelefteq G$، و در واقع $\mathrm{Ker}\,\varphi = H_G$، مغز H در G است.

(iii) به‌ازای هر $J \leqslant H$، $N_G(J) = N_H(J)C_K(J)$.

(iv) به‌ازای هر $J \leqslant H$، $N_G(J) \leqslant N_G(C_K(J))$.

۴۷۹. فرض می‌کنیم که H یک p گروه متناهی باشد که بر گروه متناهی K عمل می‌کند. هرگاه p، $|K|$ را بشمارد آنگاه $|\mathrm{Fix}_K(H)| > 1$.

۴۸۰. فرض می‌کنیم گروه نابدیهی H مثلاً با عمل φ، بر گروه نابدیهی K عمل کند، قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) به‌ازای هر عضو نابدیهی h از H، h_φ یک خودریختی فاقد نقطهٔ ثابت از K است. (۵۴ را ببینید.)

(ii) G یک گروه فروبنیوس است و H یک متمم فروبنیوس در G (۲۴۸ را ببینید.)

۴۸۱. فرض می‌کنیم p و q اعداد اول متمایزی باشند به‌طوری که $p > q$.

(i) تنها عمل یک گروه از مرتبهٔ p بر یک گروه از مرتبهٔ q؛ عمل بدیهی است.

(ii) تنها عمل یک گروهِ مرتبهٔ p بر یک گروه مرتبهٔ q^2، عملی است بدیهی، مگر اینکه $p = 3$ و $q = 2$. (راهنمایی. از ۱۶.۲، ۱۷.۲، ۳۶.۲، ۴۰، ۴۶، ۴۷ و ۲۲۲ استفاده کنید.)

۴۸۲. (i) $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_2) \cong \Sigma_3$.

(ii) $\mathrm{Hol}(C_2 \times C_2) \cong \Sigma_4$.

(راهنمایی. قرار دهید $K = C_2 \times C_2$. در مورد (ii)، عمل $\mathrm{Hol}\ K$ با ضرب از راست را بر مجموعهٔ هم مجموعه‌های راست $\mathrm{Aut}\ K$ در $\mathrm{Hol}\ K$ در نظر بگیرید و از ۵۳.۳ استفاده کنید.)

***۴۸۳.** هرگاه $K_1 \cong K_2$؛ آنگاه $\mathrm{Hol}\ K_1 \cong \mathrm{Hol}\ K_2$، و هر تامریخت نسبی K_1 با یک تامریخت نسبی K_2 یکریخت است. (ر.ک. ۴۸).

۴۸۴. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری $\neq 0$ باشد.

(i) در این صورت $\mathrm{GL}(V)$ بر گروه جمعی V^+ از V، به‌طور طبیعی عمل می‌کند (۴۷ را ببینید). فرض می‌کنیم G معرف تامریخت نسبی متناظر $\mathrm{GL}(V)V^+$ از V^+ باشد.

(ii) به‌ازای هر نگاشت خطی $\lambda : V \longrightarrow V$ و هر بردار $v \in V$، فرض می‌کنیم $(\lambda; v)$، نگاشت $V \longrightarrow V$ باشد که به‌ازای هر $x \in V$ با ضابطهٔ

$$(\lambda; v) : x \longmapsto x\lambda + v,$$

تعریف می‌شود. در این صورت $(\lambda; v) \in \Sigma_v$ اگر و تنها اگر $\lambda \in \mathrm{GL}(V)$. علاوه بر این؛ مجموعهٔ $\{(\lambda; v) : \lambda \in \mathrm{GL}(V), v \in V\}$ زیرگروه $\mathscr{A}(V)$ از Σ_v ~~است~~، که گروه آفین V نامیده می‌شود، و $\mathscr{A}(V) \cong G$.

۴۸۵. (i) فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant 3$. در این صورت

$$\mathrm{Dih}\ C_n \cong D_{2n}.$$

(ii) $\mathrm{Dih}\ C_\infty \cong D_\infty$.

***۴۸۶.** فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی باشد و قرار می‌دهیم $L = \mathrm{Hol}\ A$. در این صورت

(i) $C_L(A) = A$.

(ii) هرگاه $H \leqslant \mathrm{Aut}\ A$ و G تامریخت نسبی HA از A باشد، آنگاه $Z(G) = \mathrm{Fix}_A(H)$. بویژه، اگر $H \neq 1$، G ناآبلی است.

۴۸۷. فرض می‌کنیم A یک گروه دوری باشد و قرار می‌دهم $G = \mathrm{Hol}\ A$.

(i) در این صورت G زَبَرْحل‌پذیر است (۳۸۹ را ببینید. راهنمایی. ۳۸.۴ را ببینید. اگر $|A| = \infty$، از ۴۶ استفاده کنید.)

(ii) هرگاه A فرد مرتبهٔ متناهی یا نامتناهی باشد، آنگاه $Z(G) = 1$. (راهنمایی. از ۴۸۶ استفاده کنید.)

(iii) G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر به‌ازای یک عدد صحیح نامنفی چون n، $|A| = 2^n$. (راهنمایی. ۲۴۳ را ببینید. هرگاه $|A|$ متناهی اما توانی از ۲ نباشد زیرگروهی از G را بیابید که پوچ‌توان نباشد.)

۴۸۸. فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی باشد با عضوی مانند b به‌طوری که $b^2 \neq 1$، و قرار می‌دهیم $D = \mathrm{Dih}\, A$.

(i) هر عضو $D\backslash A$ دارای مرتبهٔ ۲ است (رک. ۵۹، ۱۴۲. برای عکس قضیه، ۵۰۴ را ببینید.)

(ii) $Z(D) = \{a \in A : a^2 = 1\}$.

(iii) A یک زیرگروه مشخصهٔ D است.

(iv) $\mathrm{Aut}\, D \cong \mathrm{Hol}\, A$.

۴۸۹. (i) هرگاه H_1 و H_2 زیرگروههای مزدوجی از $\mathrm{Aut}\, K$ باشند؛ آنگاه تمامریختهای نسبی H_1K و H_2K، زیرگروههای مزدوجی از $\mathrm{Hol}\, K$ خواهند بود.

(ii) $\mathrm{Aut} K$ ممکن است زیرگروههای یکریختی مانند H_1 و H_2 داشته باشد به‌طوری که تمامریختهای نسبی H_1K و H_2K، یکریخت نباشند. (راهنمایی. $K = C_2 \times C_2$ و زیرگروههای مناسب H_1 و H_2 از $\mathrm{Aut}\, K$، از مرتبهٔ ۲ را در نظر بگیرید.)

۴۹۰. فرض می‌کنیم $\mathbf{R}$ با خط اقلیدسی E^1 به‌طریق معمولی یکی گرفته شود: ۵۶ را ببینید. در این صورت $\mathrm{Isom}\, \mathbf{R} \cong \mathrm{Dih}\, \mathbf{R}^+$.

۱۱.۹ تعریف فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. می‌گوییم G بر K شکافته می‌شود، اگر زیرگروهی مانند H از G وجود داشته باشد به‌طوری که $G = HK$ و $H \cap K = 1$. هر چنین زیرگروهی مانند H را یک متمم برای K در G می‌خوانیم.

توجه کنید که زیرگروه H از G، یک متمم K در G است اگر و تنها اگر هر عضو G به‌طور یکتا به‌صورت hk، با $h \in H$ و $k \in K$ قابل بیان باشد. در این صورت همچنین به‌موجب ۴۰.۳، $G/K = HK/K \cong H/(H \cap K) \cong H$. علاوه بر این، به‌ازای $g \in G$، H^g یک متمم K در G است. زیرا

$$G = G^g = H^g K^g = H^g K \qquad (K \trianglelefteq G \text{ زیرا})$$

و $H^g \cap K = H^g \cap K^g = (H \cap K)^g = 1$.

۱۲.۹ لم فرض کنیم $K \trianglelefteq G$ و $K \leqslant J \leqslant G$. اگر G بر K شکافته شود آنگاه J نیز بر K شکافته می‌شود.

برهان مطمئناً $K \trianglelefteq J$. فرض می‌کنیم H یک، متمم K در G باشد. در این صورت $K \leqslant J \leqslant G = HK$، لذا بنابر قاعدهٔ ددکیند (۳.۷)،

$$J = (H \cap J)K.$$

بعلاوه

$$(H \cap J) \cap K = H \cap K = 1.$$

بنابراین $H \cap K$ یک متمم K در J است.

در فصل ۱۰؛ ما شرطهای کافی مهمی را برای شکافتگی ثابت خواهیم کرد. در حال حاضر نشان می‌دهیم که ارتباط نزدیکی بین شکافتگی و حاصلضربهای نیم‌مستقیم وجود دارد.

۱۳.۹ قضیه (i) فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K، عمل کند و قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. در این صورت G بر K شکافته می‌شود و H یک متمم K در G است.

(ii) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. همچنین فرض می‌کنیم G بر K شکافته شده و H یک متمم K در G باشد. φ را عمل از H بر K می‌گیریم که با تحدید عمل از G بر K به‌وسیلهٔ تزویج تعریف می‌شود. در این صورت $G = H_\varphi \times K$.

برهان (i) این قسمت بی‌درنگ از ۹.۹ نتیجه می‌شود.

(ii) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، و H یک متمم K در G باشد. همچنین فرض می‌کنیم $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}\, K$ عمل از H بر K باشد که با تحدید عمل از G بر K به‌وسیلهٔ تزویج تعریف می‌شود: لذا، به‌ازای هر $h \in H$،

$$h\varphi : k \mapsto k^h = h^{-1}kh$$

به‌ازای هر $k \in K$. هر عضو G به‌طور یکتا به شکل hk نمایش داده می‌شود که $h \in H$ و $k \in K$. علاوه بر این ضرب در G به‌ازای هر $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$ با قاعدهٔ زیر

$$(h_1k_1)(h_2k_2) = h_1h_2h_2^{-1}k_1h_2k_2 = h_1h_2k_1^{h_2}k_2$$

معین می‌شود. لذا اعضای G همان اعضای $H_\varphi \times K$ هستند و قاعدهٔ ضرب یکی است. از این‌رو $G = H_\varphi \times K$.

۱۴.۹ لم فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K، عمل کند و قرار می‌دهیم $J=\mathrm{Im}\,\varphi\leqslant \mathrm{Aut}\,K$ اگر عمل φ صادق باشد آنگاه $H_\varphi\times K$ با تمام‌ریخت نسبی JK از K یکریخت است.

برهان فرض می‌کنیم که عمل مفروض φ صادق باشد؛ در این صورت همریختی

$$\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}\,K$$

یک به یک است. قرار می‌دهیم $G=H_\varphi\times K$، و نگاشت

$$\varphi^* : G \longrightarrow \mathrm{Hol}\,K$$

را به‌ازای هر $h\in H$ و $k\in K$ با ضابطهٔ

$$\varphi^* : hk \mapsto (h\varphi)k\in \mathrm{Hol}\,K$$

تعریف می‌کنیم. (این نگاشت خوشتعریف است زیرا هر عضو G به‌طور یکتا به شکل hk قابل بیان است که $h\in H$ و $k\in K$.) به‌ازای هر $h_1,h_2\in H$ و $k_1,k_2\in K$،

$$\begin{aligned}((h_1k_1)(h_2k_2))\varphi^* &= (h_1h_2k_1^{h_2\varphi}k_2)\varphi^* \quad (\text{زیرا } k_1^{h_2}=k_1^{h_2\varphi})\\ &= (h_1h_2)\varphi k_1^{h_2\varphi}k_2\\ &= (h_1\varphi)(h_2\varphi)(h_2\varphi)^{-1}k_1(h_2\varphi)k_2 \quad (\text{در } \mathrm{Hol}\,K)\\ &= (h_1\varphi)k_1(h_2\varphi)k_2\\ &= ((h_1k_1)\varphi^*)((h_2k_2)\varphi^*)\end{aligned}$$

لذا φ^* یک همریختی است. بعلاوه

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\varphi^* &= \{hk : h\in \mathrm{Ker}\,\varphi, k=1\}\\ &= 1 \quad (\text{زیرا } \varphi \text{ یک به یک است})\end{aligned}$$

بنابراین φ^* یک به یک است، و در نتیجه

$$G\cong \mathrm{Im}\,\varphi^* = JK\leqslant \mathrm{Hol}\,K.$$

۴۹۱. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و F یک میدان. در این صورت

(i) $\mathrm{GL}_n(F)$ بر $\mathrm{SL}_n(F)$ شکافته می‌شود.

(ii) هرگاه $n>1$، Σ_n بر A_n شکافته می‌شود.

۴۹۲. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد و s یک مقسوم‌علیه n. در این صورت گروه دوری C_n بر C_s شکافته می‌شود اگر و تنها اگر $(s,n/s)=1$.

۴۹۳. فرض می‌کنیم $1<K<G=C_\infty$. در این صورت G بر K شکافته نمی‌شود.

۴۹۴. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و V یک فضای برداری nبعدی روی میدان $\mathbf{Z}_p$. در این صورت V^+ بر هر زیرگروه خودش شکافته می‌شود.

۴۹۵. فرض می‌کنیم $X=E^2$ (صفحهٔ اقلیدسی) باشد و $G=\mathrm{Isom}X$ و $T=\mathrm{Tr}X$ و $H=T\cup\bigcup_{s\in X}\mathrm{Rot}(X,s)$: ۲۳.۲ را ببینید. در این صورت

(i) G بر H شکافته می‌شود.

(ii) G بر T شکافته می‌شود، و متممهای T در G با $\mathrm{Dih}\,U$ یکریخت‌اند که در آن U گروه دایره‌یی‌ست. (۳۲.۲ (iv)، ۶۱، ۱۰۳ و ۱۱۲ را ببینید.)

۴۹۶. فرض می‌کنیم $K\leqslant Z(G)$ (بنابراین، به‌ویژه $K\trianglelefteq G$). اگر G بر K شکافته شود، و H یک متمم برای K در G باشد، آنگاه $G=H\times K$.

۴۹۷. فرض می‌کنیم P یک pگروه ناآبلی متناهی باشد. در این صورت P بر $Z(P)$ شکافته نمی‌شود. (راهنمایی. از ۴۰۶ و ۴۹۶ استفاده کنید.)

۴۹۸. فرض می‌کنیم $K\leqslant G\leqslant \mathrm{Hol}\,K$. در این صورت G تمام‌ریخت نسبی K است.

۴۹۹. فرض می‌کنیم G بر یک زیرگروه نرمال آبلی A شکافته شود؛ و H را یک متمم برای A در G می‌گیریم. در این صورت $C_G(A)=H_G\times A$ (ر.ک. ۴۷۸ (ii)، ۴۸۶).

۵۰۰. فرض می‌کنیم J و K زیرگروههای نرمال G باشند و $K\leqslant J$.

(i) اگر G بر J شکافته شود آنگاه G/K بر J/K شکافته خواهد شد. (راهنمایی. از ۳.۷ استفاده کنید).

(ii) فرض می‌کنیم که G بر K شکافته شود و H را یک متمم K در G می‌گیریم در این صورت G روی J شکافته می‌شود، اگر و تنها اگر H بر $H\cap J$ شکافته شود. (راهنمایی. باز هم از ۳.۷ استفاده کنید.)

۵۰۱. فرض می‌کنیم K و L زیرگروههای نرمال G باشند، و $J=KL\trianglelefteq G$. فرض می‌کنیم که G/L بر J/L شکافته شود، و H/L یک متمم J/L در G/L باشد. همچنین فرض می‌کنیم که H بر $H\cap K$ شکافته شود. در این صورت G بر K شکافته می‌شود.

۵۰۲. فرض می‌کنیم $K\trianglelefteq G$، که G یک گروه متناهی است. G/K را یک pگروه می‌گیریم و

فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت G بر K شکافته می‌شود اگر و تنها اگر P بر $P \cap K$ شکافته شود.

۵۰۳. G را یک گروه حل‌پذیر متناهی نابدیهی می‌گیریم، و فرض می‌کنیم که $|G|$ نه یک عدد اول باشد و نه مربع یک عدد اول. ثابت کنید که G دارای زیرگروه نرمال حقیقی K است به‌طوری که $|G| < |K|^2$. (اشارات پایانی فصل ۶ و همچنین ۶۶۴ را ببینید. راهنمایی. فرض کنید حکم برقرار نباشد و G گروهی با کوچکترین مرتبهٔ ممکن باشد که حکم برای آن نقض می‌شود. L را یک زیرگروه نرمال مینیمال G بگیرید. نشان دهید که به‌ازای عدد اولی مانند p، $|G/L| = p$ و $|L| < p$. فرض کنید P یک p زیرگروه سیلوی G باشد. با استفاده از ۱۳.۹؛ نشان دهید که به ازای عملی مانند φ از P بر L داریم $G = P_\varphi \times L$. اگر φ نابدیهی باشد، با استفاده از ۵۶.۷، ۴۰.۷، ۴۷، ۱۷.۲ و ۱۶.۲ به یک تناقض برسید.)

۵۰۴. فرض می‌کنیم G گروهی باشد با یک زیرگروه K از شاخص ۲ به‌طوری که هر عضو $G|K$ دارای مرتبهٔ ۲ باشد. در این صورت K آبلی است، و اگر به‌ازای عضوی چون $k \in K$، $k^2 \neq 1$ آنگاه $G = \mathrm{Dih}\, K$. (این حکم عکس ۴۸۸ (i) است. راهنمایی. از ۱۳.۹ و ۵۲ (i) استفاده کنید.)

۵۰۵. (i) فرض می‌کنیم که $\bar{G} = JK$ و $K \trianglelefteq \bar{G}$، $J \leqslant \bar{G}$ (که در آن ممکن است $J \cap K \neq 1$). H را گروهی یکریخت با J می‌گیریم به‌طوری که $H \cap K = 1$، و فرض می‌کنیم θ یک یکریختی از H بر روی J باشد. در این صورت، هنگامی که به‌ازای هر $h \in H$ و $k \in K$ تعریف کنیم

$$k^h = k^{h\theta} \quad (\text{مزدوج } k \text{ به‌وسیلهٔ } h\theta \text{ در } \bar{G})$$

آنگاه H بر K عمل می‌کند.

فرض می‌کنیم $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}\, K$ این عمل باشد و قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. در این صورت نگاشت

$$\theta^* : G \longrightarrow \bar{G},$$

که به‌ازای هر $h \in H$ و $k \in K$ با ضابطهٔ

$$\theta^* : hk \mapsto (h\theta)k$$

تعریف می‌شود، یک همریختی پوشاست و $H \cap \mathrm{Ker}\theta^* = 1 = K \cap \mathrm{Ker}\theta^*$؛ همچنین $\mathrm{Ker}\theta^* \cong J \cap K$.

(ii) فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K، عمل کند و قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. هرگاه $L \trianglelefteq G$ و $L \cap K = 1 = H \cap L$، آنگاه زیرگروههایی مانند S از H و T از K و همچنین یکریختی مانند θ از S بر روی T وجود دارد به قسمی که $S \trianglelefteq H$؛ به‌ازای هر $s \in S$ و $h \in H$، $k \in K$، $s^h\theta = (s\theta)^h$ و $k^s = k^{s\theta}$؛ و $L = \{s(s^{-1}\theta) : s \in S\} \cong S$.

به‌عکس، هرگاه $S \trianglelefteq H$، $T \leqslant K$ و یکریختی θ از S بروی T وجود داشته باشد به طوری که به‌ازای هر $s \in S$، $h \in H$ و $k \in K$، $s^h\theta = (s\theta)^h$ و $k^s = k^{s\theta}$، آنگاه اگر $L = \{s(s^{-1}\theta) : s \in S\}$، داریم $S \cong L \trianglelefteq G$ و $K \cap L = 1 = H \cap L$.

(iii) فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K، عمل کند و قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$. فرض می‌کنیم که $L \trianglelefteq G$، و $K \cap L = 1 = H \cap L$؛ همچنین قرار می‌دهیم $\bar{G} = G/L$، $\bar{H} = HL/L$ و $\bar{K} = KL/L$. در این صورت: $H \cong \bar{H} \leqslant \bar{G}$، $K \cong \bar{K} \trianglelefteq \bar{G}$، $\bar{G} = \bar{H}\bar{K}$ و $\bar{H} \cap \bar{K} \cong L$.

۵۰۶. فرض می‌کنیم $H = \langle h \rangle$ گروه دوری از مرتبهٔ ۴ باشد و $K = \langle k \rangle$ گروه دوری از مرتبهٔ $2n$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت بزرگتر از ۱ است.

(i) یک عمل یکتای φ از H بروی K وجود دارد که برای آن $k^h = k^{-1}$. قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$.

(ii) در این صورت $Z(G) = \langle h^2 \rangle \times \langle k^n \rangle \cong C_2 \times C_2$، و $G/Z(G) \cong D_{2n}$ به‌ازای $n \geqslant 3$، در صورتی که به‌ازای $n = 2$، $G/Z(G) \cong C_2 \times C_2$.

(iii) فرض می‌کنیم $L = \langle h^2k^n \rangle \trianglelefteq G$، و همچنین $\bar{G} = G/L$، $\bar{H} = HL/L$ و $\bar{K} = KL/L$. در این صورت $C_4 \cong \bar{H} \leqslant \bar{G}$، $C_{2n} \cong \bar{K} \trianglelefteq \bar{G}$، $\bar{G} = \bar{H}\bar{K}$ و $|\bar{H} \cap \bar{K}| = 2$. گروه $\bar{G}$ را گروه دو دوری مرتبهٔ $4n$ می‌نامند.

(iv) فرض می‌کنیم $\overline{Z(G)} = Z(G)/L$. در این صورت $Z(\bar{G}) = \overline{Z(G)}$، از مرتبهٔ ۲. (ر.ک. ۱۵۰). از این‌رو $\bar{G}/Z(\bar{G}) \cong G/(ZG)$.

(v) $\bar{G}$ دارای دقیقاً یک عضو از مرتبهٔ ۲ است. و همچنین $\bar{G}$ نمی‌تواند بر $\bar{K}$ شکافته شود.

(vi) $\bar{G} \cong D_{4n}$.

(vii) اگر $n = 2$، $\bar{G} \cong Q_8$ (۱۸۱ را ببینید.)

۵۰۷. فرض می‌کنیم H مثلاً با عمل φ بر K، عمل کند. قرار می‌دهیم $G = H_\varphi \times K$،

$$J = \mathrm{Im}\,\varphi \leqslant \mathrm{Aut}\, K$$

و $L = \mathrm{Ker}\varphi \trianglelefteq H$. در این صورت

(i) $L \trianglelefteq G$ و G/L با تمامریخت نسبی JK از K یکریخت است. (این حکم تعمیم لم ۱۴.۹ است. با توجه به ۴۷۸ می‌دانیم که $L \trianglelefteq G$.)

(ii) به‌ازای هر H، $\alpha \in \mathrm{Aut}\, H$ با عمل $\alpha\varphi$ نیز بر K، عمل می‌کند. در این صورت: $H_{\alpha\varphi} \times K \cong G$ و $\mathrm{Ker}(\alpha\varphi) = L^{\alpha^{-1}} = \{l^{\alpha^{-1}} : l \in L\}$.

۵۰۸. (i) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$؛ و ν را همریختی طبیعی از G بروی G/K می‌گیریم. در این صورت G بر K شکافته می‌شود اگر و تنها اگر یک همریختی $\theta : G/K \longrightarrow G$ وجود داشته باشد به قسمی که $\theta\nu$ نگاشت همانی بر G/K باشد.

(ii) فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$، و G/K یک گروه دوری نامتناهی باشد. در این صورت G بر K شکافته می‌شود. (رک. ۴۶۷).

(iii) با استفاده از (ii)؛ به اضافهٔ ۱۳۳ (i) و (ii)؛ اثبات دیگری ارائه دهید برای اینکه $\mathbf{Q}^+$ دارای هیچ گروه خارج قسمتی دوری نابدیهی نیست.

*۵۰۹. (i) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، و φ را عمل از G بر K به‌وسیلهٔ تزویج می‌گیریم. فرض می‌کنیم $g \in G$. در این صورت $g\varphi \in \mathrm{Inn}K$ اگر و تنها اگر $g \in C_G(K)K$.

(ii) (هولدر [a۶۰]) گروه K را کامل می‌گوییم اگر $Z(K) = ۱$ و $\mathrm{Aut}\, K = \mathrm{Inn}K$. اگر $K \trianglelefteq G$ و K کامل باشد آنگاه $G = C_G(K) \times K$. لذا هر گروه کامل K سازهٔ مستقیمی است از هر توسیع K.

(iii) $\Sigma_۳$ کامل است. (اشاره. در واقع به‌ازای هر عدد صحیح $n \geqslant ۳$، $n \neq ۶$ ، Σ_n کامل است. برای اثبات این قضیه، کوروش [b۲۷] جلد ۱، صص ۹۲ تا ۹۵ یا روتمن [b۳۴]، صص ۱۳۲ تا ۱۳۴ را ببینید. $\Sigma_۶$ کامل نیست.)

ما این احکام را با بکار بردن آنها در به‌دست آوردن اطلاعاتی بیشتر دربارهٔ گروههای مرتبهٔ pq، که p و q اعداد اول متمایزند، روشن می‌کنیم: رک. ۱۶.۵، ۱۷.۵؛ ۱۸.۵. برای انجام این کار ما به اطلاعات بیشتری دربارهٔ گروه خودریختی یک گروه از مرتبهٔ p، احتیاج داریم (رک. ۳۸.۴).
یادآوری می‌کنیم که گروه دوری G از مرتبهٔ n، به‌ازای هر مقسوم‌علیه n مانند s دارای زیرگروه یکتای G_s از مرتبهٔ s است (۳۲.۳)؛ علاوه بر این G_s دوری است و از اینجا نتیجه می‌شود که $G_s = \{x \in G : x^s = ۱\}$ (۱۳۹). ما عکس این حکم را ثابت می‌کنیم و با استفاده از آن نشان خواهیم داد که گروه خودریختی یک گروه مرتبهٔ p دوری است.

۱۵.۹ لم (i) فرض کنیم G گروهی از مرتبهٔ متناهی n باشد به قسمی که به‌ازای هر مقسوم‌علیه n مانند s، $|\{x \in G : x^s = ۱\}| \leqslant s$. در این صورت G دوری است. (رک. ۱۳۹ (iii)).

(ii) فرض می‌کنیم F یک میدان دلخواه باشد. در این صورت هر زیر گروه متناهی $F^\times$ دوری است.

(iii) هرگاه $|G| = p$ آنگاه $\mathrm{Aut}\, G$ دوری است از مرتبهٔ $p - ۱$.

برهان (i) فرض می‌کنیم $g \in G$، $o(g) = s$، و $H = \langle g \rangle \leqslant G$. در این صورت $|H| = s$، s یک مقسوم علیه n است، و به‌ازای هر $h \in H$، $h^s = ۱$. از این رو بنابر فرض، $H = \{x \in G : x^s = ۱\}$، و در نتیجه هر عضو مرتبهٔ s در G، در H قرار دارد. G^* را گروه دوری مرتبهٔ n می‌گیریم و فرض می‌کنیم H^* زیرگروه یکتای G^* از مرتبهٔ s باشد (۳۲.۳). چون H و H^* گروههای دوری از یک مرتبه‌اند، $H \cong H^*$، (۲). بنابراین، چون هر عضوِ مرتبهٔ s در G، در H قرار دارد و همین‌طور هر عضوِ مرتبهٔ s در G^*، در H^* قرار دارد، در نتیجه G و G^* دارای دقیقاً یک تعداد عضو از مرتبهٔ sاند. این نتیجه به‌ازای هر مقسوم‌علیه n مانند s، که برای آن G دارای عضوی از مرتبهٔ s باشد برقرار است. از این‌رو، چون $|G| = |G^*|$ و G^* دارای عضوی از مرتبهٔ n است، لذا G باید عضوی از مرتبهٔ n داشته باشد و در نتیجه G دوری است.

(ii) فرض می‌کنیم $G \leqslant F^\times$ و $|G| = n < \infty$. معروف است که به‌ازای هر عدد صحیح مثبتِ s و هر چند جمله‌ایی $f(x)$ از درجهٔ s و ضرایب در یک میدان، معادلهٔ $f(x) = ۰$ حداکثر دارای r ریشه در آن میدان است. به‌ویژه، حداکثر s عضو متمایز مانند x از F وجود دارند که در معادلهٔ $x^s - ۱ = ۰$ صدق می‌کنند. از این رو همچنین به‌ازای هر مقسوم‌علیه n مانند s، $|\{x \in G : x^s = ۱\}| \leqslant s$. بنابراین، به‌موجب (i)، G دوری است.

(iii) چون $|G| = p$،

$$G \cong \mathbf{Z}_p^+ \quad (۴۰) \cdot$$

از این‌رو

$$\mathrm{Aut}\, G \cong \mathbf{Z}_p^\times \quad (۴۶)$$

چون p عددی اول است، $\mathbf{Z}_p$ یک میدان است. بنابراین به‌موجب (ii)، $\mathrm{Aut}\, G$ دوری است.
حال ثابت می‌کنیم

۱۶.۹ قضیه فرض می‌کنیم p و q دو عدد اول باشند به‌طوری که $p > q$. هرگاه $p \not\equiv ۱$ (پیمانه q)، آنگاه $\nu(pq) = ۱$، در صورتی که اگر $p \equiv ۱$ (پیمانه q) آنگاه $\nu(pq) = ۲$.
(این قضیه‌فرع ۱۸.۵ را نیز در بر می‌گیرد. یادآوری می‌کنیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت دلخواه n، $\nu(n)$ تعداد انواع گروههای از مرتبهٔ n را نمایش می‌دهد.)

برهان چون $p > q$، $q \not\equiv 1$ (پیمانه p). فرض می‌کنیم G گروهی از مرتبهٔ pq باشد، P یک p زیرگروه سیلوی G، و Q یک q زیرگروه سیلوی G. در این صورت $P \cong C_p$ و $Q \cong C_q$. بنابراین ۱۶.۵، $P \lhd G$. علاوه بر این، $PQ = G$ و $P \cap Q = 1$. لذا G بر P شکافته می‌شود، و Q یک متمم برای P در G است. از این‌رو بنابر ۱۳.۹، $G = Q_\varphi \times P$، که در آن $\varphi : Q \longrightarrow \operatorname{Aut} P$ با تحدید عمل G بر P به‌وسیلهٔ تزویج، تعریف می‌شود. هرگاه φ بدیهی باشد آنگاه بنابر ۸.۹، $G = Q \times P \cong C_q \times C_p \cong C_{pq}$ (۷۸). فرض می‌کنیم φ، نابدیهی باشد. چون مرتبهٔ Q عدد اول است، در نتیجه $\operatorname{Ker}\varphi = 1$: یعنی، این عمل صادق است. قرار می‌دهیم $J = \operatorname{Im} \varphi \leqslant \operatorname{Aut} P$. در این صورت $|J| = q$ و، چون $|\operatorname{Aut} P| = p - 1$، نتیجه می‌شود $p \equiv 1$ (پیمانهٔ q). بعلاوه، به‌موجب ۱۴.۹، $G \cong JP \leqslant \operatorname{Hol} P$. بنابر ۱۵.۹، $\operatorname{Aut} P$ دوری است و بنابراین J زیرگروه یکتای $\operatorname{Aut} P$ از مرتبهٔ q است (۳۲.۳). لذا JP تامریخت نسبی یکتای P از مرتبهٔ pq خواهد بود. بدین‌ترتیب ثابت کرده‌ایم که هرگاه $p \not\equiv 1$ (پیمانه q) آنگاه $G \cong C_{pq}$ و در نتیجه $\nu(pq) = 1$؛ در صورتی که اگر $p \equiv 1$ (پیمانه p) آنگاه G یا با C_{pq} یکریخت است و یا با تامریخت نسبی یکتای C_p از مرتبهٔ pq (۴۸۳)؛ از این‌رو چون این دو گروه نایکریخت‌اند (۴۸۶)، $\nu(pq) = 2$.

حال خصوصیت جالب دیگری از تامریختی یک گروه را می‌آوریم.

۱۷.۹ قضیه فرض می‌کنیم K گروهی دلخواه $\rho^1 : K \longrightarrow \Sigma_K$ نمایش جایگشتی منظم راستِ K باشد (۲۳.۴). قرار می‌دهیم $K^* = \operatorname{Im} \rho^1 \leqslant \sum_K$. در این صورت $\operatorname{Aut} K \leqslant \Sigma_K$، $(\operatorname{Aut} K) \cap K^* = 1$ و

$$N_{\Sigma_K}(K^*) = (\operatorname{Aut} K)K^* \cong \operatorname{Hol} K\cdot$$

برهان به‌ازای هر $k \in K$، فرض می‌کنیم $k^* = k\rho^1 \in \Sigma_K$: در این صورت، به‌ازای هر $x \in K$،

$$xk^* = xk\cdot$$

محققاً $\operatorname{Aut} K \leqslant \Sigma_K$ (۱۸.۲). فرض می‌کنیم $k \in K$. در این صورت $k = 1k^*$: و اگر $k^* \in \operatorname{Aut} K$ آنگاه $1k^* = 1$، از این‌رو $k = 1$. لذا $(\operatorname{Aut} K) \cap K^* = 1$.

فرض می‌کنیم $\alpha \in \operatorname{Aut} K$. در این صورت به‌ازای هر $x \in K$ و k،

$$\alpha^{-1}k^*\alpha : x \mapsto (x^{\alpha^{-1}}k)^\alpha = xk^\alpha\cdot$$

از این رو

$$\alpha^{-1}k^*\alpha = (k^\alpha)^* \in K^*\cdot \qquad \text{(i)}$$

لذا

$$\operatorname{Aut} K \leqslant N_{\Sigma_K}(K^*) = L, \text{مثلاً}$$

حال فرض می‌کنیم $\sigma \in L$. می‌خواهیم نشان دهیم که $\sigma \in (\operatorname{Aut} K)K^*$. فرض کنید که σ، $1 \in K$ را به $t \in K$ بنگارد. قرار می‌دهیم

$$\tau = \sigma(t^{-1})^* \in L\cdot$$

پس τ، $1 \in K$ را ثابت نگه می‌دارد. علاوه بر این، چون $K^* \trianglelefteq L$، نگاشت

$$k^* \mapsto \tau^{-1}k^*\tau \qquad (\text{تعریف شده به‌ازای هر} \; k^* \in K^*)$$

یک خودریختی از K^* است. چون نگاشت $k \mapsto k^*$ یک یکریختی است از K بروی K^*، واضح است که نگاشت $\operatorname{Aut} K \longrightarrow \operatorname{Aut} K^*$ تعریف شده با ضابطهٔ $\alpha \mapsto \alpha^*$، که در آن به‌ازای هر $\alpha \in \operatorname{Aut} K$،

$$\alpha^* : k^* \mapsto (k^\alpha)^* \qquad (\text{به‌ازای هر} \; k \in K)$$

یک خودریختی است از $\operatorname{Aut} K$ بر روی $\operatorname{Aut} K^*$ (ر.ک. ۴۸). از این رو عضو یکتای $\alpha \in \operatorname{Aut} K$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $k \in K$،

$$\tau^{-1}k^*\tau = (k^\alpha)^*\cdot$$

حال، به‌ازای هر $x \in K$،

$$x\tau = 1x^*\tau = 1\tau(x^\alpha)^* = 1(x^\alpha)^* = x^\alpha\cdot$$

از این‌رو

$$\tau = \alpha$$

لذا

$$\sigma = \alpha t^* \in (\operatorname{Aut} K)K^*$$

بنابراین

$$L = (\operatorname{Aut} K)K^*\cdot$$

سرانجام، نگاشت

$$\theta : \operatorname{Hol} K \to \Sigma_K$$

را به‌ازای هر $\alpha \in \operatorname{Aut} K$ و $k \in K$ با ضابطهٔ

$$\theta : \alpha k \mapsto \alpha k^*$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت، به‌ازای هر $\beta, \gamma \in \operatorname{Aut} K$ و $x, y \in K$،

$$\begin{aligned}(\beta x \gamma y)\theta &= (\beta\gamma x^{\gamma} y)\theta \\ &= \beta\gamma (x^{\gamma} y)^* \\ &= \beta\gamma (x^{\gamma})^* y^* \\ &= \beta\gamma\gamma^{-1} x^* \gamma y^* \quad (\text{بنابر (i)}) \\ &= \beta x^* \gamma y^* \\ &= (\beta x)\theta . (\gamma y)\theta .\end{aligned}$$

لذا θ همریختی است. بعلاوه، اگر $\alpha k \in \operatorname{Ker}\theta$ آنگاه، به‌ازای هر $x \in K$،

$$x^{\alpha} k = x,$$

پس (با انتخاب $x = 1$) به‌دست می‌آوریم $k = 1$، و در نتیجه $\alpha = 1$. بدین‌ترتیب $\operatorname{Ker}\theta = 1$، و بنابراین θ یک به یک است. از این رو $\operatorname{Hol} K \cong \operatorname{Im}\theta = (\operatorname{Aut} K)K^*$.

۵۱۰. (i) فرض می‌کنیم K و L زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری که $K \cap L = 1$. اگر G/L بر KL/L شکافته شود، آنگاه G بر K شکافته خواهد شد.

(ii) فرض می‌کنیم که $Z(K) = 1$. در این صورت هر توسیع K بر K شکافته خواهد شد اگر و تنها اگر $\operatorname{Aut} K$ بر $\operatorname{Inn} K$ شکافته شود (۲۶.۹ را ببینید).

(iii) فرض می‌کنیم p یک عدد اول فرد باشد. در این صورت گروه دو وجهی D_{2p} از مرتبهٔ $2p$ کامل است (۵۰۹) اگر و تنها اگر $p \neq 3$. هر توسیع D_{2p} بر D_{2p} شکافته می‌شود اگر و تنها اگر $p \not\equiv 1$ (پیمانه ۴). (راهنمایی. از ۱۱۷، ۱۲۴، ۱۲.۹، ۱۵.۹، ۴۷۶، ۴۸۸، ۴۹۲، ۵۰۰ و ۵۰۹ استفاده کنید.)

۵۱۱. با استفاده از ۴۵۲ و این واقعیت که $\mathbf{Z}_p$ یک میدان است ثابت کنید که $\mathbf{Z}_p^{\times}$ دوری است. (اشاره این مسأله روش دیگری است برای اثبات لم ۱۵.۹ (iii).)

۵۱۲. فرض می‌کنیم A گروهی از مرتبهٔ یک عدد اول باشد. در این صورت $\operatorname{Hol} A$ فرادوری است (۱۵۲ را ببینید. رک. ۴۸۷).

۵۱۳. هیچ دوگروهی از گروههای مرتبهٔ ۳۰ در زیر، یکریخت نیستند و همچنین هر گروه از مرتبهٔ ۳۰ با یکی از اینها یکریخت است: C_{30}، $C_5 \times D_6$، $C_3 \times D_{10}$، D_{30}. از این‌رو $\nu(30) = 4$.
(راهنمایی. فرض کنید G گروهی از مرتبهٔ ۳۰ باشد. نشان دهید G یک زیرگروه نرمال دوری مانند K از مرتبهٔ ۱۵ دارد و G بر K شکافته می‌شود. از ۷۸ و ۹۴ استفاده کنید.)

۵۱۴. (i) پنج گروه از مرتبهٔ ۱۲ بیابید که هیچ دوتایی از آنها یکریخت نباشند. (راهنمایی. ۵۰۶ را ببینید.)

(ii) نشان دهید که هر گروه از مرتبهٔ ۱۲ با یکی از این گروهها یکریخت است، و از این رو $\nu(12) = 5$. (راهنمایی. هر گروه G از مرتبهٔ ۱۲ دارای زیرگروه نرمالی است از مرتبهٔ ۳ یا ۴، که G بر آن شکافته می‌شود. از ۴۸۹ (i) و ۵۰۷ (ii) استفاده کنید.)

۵۱۵. (i) فرض می‌کنیم G گروهی نادوری از مرتبهٔ ۸ با K زیرگروهی دوری از مرتبهٔ ۴ باشد. نشان دهید که هرگاه G بر K شکافته شود آنگاه G یا با $C_2 \times C_4$ یکریخت است و یا با D_8، و اگر G بر K شکافته نشود آنگاه $G \cong Q_8$. (راهنمایی. ۵۰۵ (i) و ۵۰۶ را ببینید.)

(ii) بدین‌ترتیب نشان دهید که $\nu(8) = 5$.

۵۱۶. (i) فرض می‌کنیم A گروهی دوری از مرتبهٔ ۸ باشد، مثلاً $A = \langle a \rangle$. نشان دهید که خودریختی یکتای α از A وجود دارد به‌طوری که $a^{\alpha} = a^3$، و $o(\alpha) = 2$.

فرض می‌کنیم T تمامریخت نسبی $A\langle\alpha\rangle$ از A باشد: در این صورت T را گروه نیم دو وجهی از مرتبهٔ ۱۶ می‌نامند. نشان دهید که $T' = \langle a^2 \rangle$، از مرتبه ۴ است. نتیجه بگیرید که T دقیقاً سه زیرگروه با شاخص ۲ دارد، و ثابت کنید که از این سه زیرگروه، یکی با C_8 یکریخت است، و دیگری با D_8، و سومی با Q_8. نتیجه بگیرید که هر یک از این سه زیرگروه با شاخص ۲ در T مشخصه‌اند، و $T \not\cong D_{16}$. (راهنمایی. ۵۹ و ۵۱۵ را ببینید.)

(ii) قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$: در این صورت $|G| = 48$ (۱۶.۲ و ۱۷.۲ را ببینید.) فرض می‌کنیم $x, y \in G$ به شکل

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که $o(x) = 8$، $o(y) = 2$ و $x^y = x^3$. بدین‌ترتیب ثابت کنید که ۲ زیرگروه سیلوی G با T یکریخت‌اند. (رک. ۱۹۳. راهنمایی. از ۱۴.۹ استفاده کنید.)

۵۱۷. فرض می‌کنیم p یک عدد اول باشد، $p \geqslant 5$. هرگاه $p \not\equiv 1$ (پیمانه ۴)، $\nu(4p) = 4$، در صورتی که اگر $p \equiv 1$ (پیمانه ۴)، $\nu(4p) = 5$. (راهنمایی. از ۱۹.۵ و ۴۸۱ استفاده کنید؛ رک. ۵۱۴).

۵۱۸. فرض می‌کنیم K گروهی دلخواه باشد و $\rho^1 : K \longrightarrow \Sigma_K$ نمایش جایگشتی منظم

راست K باشد. قرار می‌دهیم $K^* = \mathrm{Im}\ \rho^1 \leqslant \Sigma_K$. به‌ازای هر $k \in K$، فرض می‌کنیم $k_* : K \longrightarrow K$ به‌ازای هر $x \in K$ با ضابطهٔ $k_* : x \mapsto kx$ تعریف شده باشد و قرار می‌دهیم $K_* = \{k_* : k \in K\}$. در این صورت $k_* \in \Sigma_K$ و $K_* \leqslant \Sigma_K$، $K_* \cong K$، $C_{\Sigma_K}(K^*) = K_*$ و $K^* \cap K_* \cong Z(K)$ و $(\mathrm{Aut}\ K) \cap K_* = 1$

$$C_{\Sigma_K}(K_*) = K^* \qquad N_{\Sigma_K}(K_*) = (\mathrm{Aut}\ K)K_* = (\mathrm{Aut}\ K)K^* = N_{\Sigma_K}(K^*)$$

و

$$N_{\Sigma_K}(K^*)/C_{\Sigma_K}(K^*) \cong \mathrm{Aut}\ K \cong N_{\Sigma_K}(K_*)/C_{\Sigma_K}(K_*)$$

۵۱۹. (i) فرض می‌کنیم که θ یک یکریختی از G_1 بروی G_2 است و $K_1 \leqslant G_1$ و θ، K_1 را به $K_2 \leqslant G_2$ می‌نگارد. در این‌صورت θ ، $C_{G_1}(K_1)$ را به $C_{G_2}(K_2)$ می‌نگارد.
(ii) به‌ازای هر گروه K، $C_{\mathrm{Hol}K}(K) \cong K$ (رک. ۴۸۶).

۵۲۰. فرض می‌کنیم K یک گروه دلخواه باشد و $\rho^1 : K \longrightarrow \Sigma_K$ نمایش جایگشتی منظم راست K، و $K^* = \mathrm{Im}\rho^1 \leqslant \Sigma_K$. در این صورت $N_{\Sigma_K}(K^*)$ از همهٔ $\sigma \in \Sigma_K$هایی تشکیل شده است که به‌ازای هر $x, y, z \in K$،

$$(xy^{-1}z)\sigma = (x\sigma)(y\sigma)^{-1}(z\sigma)\cdot$$

حال به هر گروه دلخواه G و هر عمل از یک گروه H بر مجموعهٔ متناهی X یک عمل از H را بر گروه $\mathrm{Dr}\, G^X$ مربوط می‌کنیم (۲۱.۸ را ببینید). این عمل به یک ساختمان مفیدی از گروهها منجر می‌شود که حاصلضربهای حلقوی نامیده می‌شوند.

۱۸.۹ لم فرض می‌کنیم که H بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. فرض می‌کنیم G گروهی دلخواه باشد و $G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$. در این صورت H وقتی بر G^* (به‌عنوان یک گروه) عمل می‌کند، که به‌ازای هر $h \in H$ و هر $f \in G^*$، $f^h \in G^*$ را به‌ازای هر $x \in X$ با تساویِ

$$f^h(x) = f(xh^{-1})$$

تعریف کنیم. (توجه. در اینجا همانند ۲۱.۸، اعضای G^* نگاشت‌هایی از X به توی G هستند و سمت چپ اعضایی از X نوشته می‌شوند که بر آنها اعمال می‌شوند.)

برهان فرض می‌کنیم $f, f_1, f_2 \in G^*$، $h, h_1, h_2 \in H$ و $x \in X$. در این صورت، با استفاده

از اصول موضوعهٔ ۱.۴، و تعریف ضرب در G^* به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}(f^{h_1})^{h_2}(x) &= f^{h_1}(xh_2^{-1}) = f((xh_2^{-1})h_1^{-1}) \\ &= f(x(h_1h_2)^{-1}) = f^{h_1h_2}(x),\\ f^1(x) &= f(x1^{-1}) = f(x),\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}(f_1f_2)^h(x) &= (f_1f_2)(xh^{-1}) = f_1(xh^{-1})f_2(xh^{-1}) \\ &= f_1^h(x)f_2^h(x) = (f_1^hf_2^h)(x)\cdot\end{aligned}$$

لذا

$$(f^{h_1})^{h_2} = f^{h_1h_2},$$

$$f^1 = f,$$

و

$$(f_1f_2)^h = f_1^hf_2^h$$

و این روابط اصول موضوعهٔ ۱.۹ را برآورده می‌کنند.

۱۹.۹ تعاریف فرض می‌کنیم H، X، G و G^* همچون ۱۸.۹ باشند و φ معرف عمل H بر G^* باشد که در ۱۸.۹ تعریف شده است. در این صورت حاصلضرب نیم‌مستقیم متناظر با $H_\varphi \times G^*$ از G^* در H را حاصلضرب حلقوی G در H می‌خوانند، و اغلب با $G \wr H$ نمایش می‌دهند. زیرگروه نرمال G^* گاهی گروه پایهٔ حاصلضرب حلقوی نامیده می‌شود.

تأکید می‌کنیم که گروه $G \wr H$ به‌وسیلهٔ G، H و یک عمل از H بر یک مجموعه، مشخص می‌شود. عملهای مختلف H ممکن است به حاصلضربهای حلقوی مختلف G در H منجر شوند، بنابراین نماد $G \wr H$ مبهم است. (با وجود این، ۲۰.۹ (۳) را در پایین ملاحظه کنید.)

۲۰.۹ اشارات (۱) باید توجه داشت که هرگاه G بر H گروههایی متناهی باشند، حاصلضرب حلقوی $G \wr H$، که به‌وسیلهٔ عمل H بر مجموعهٔ متناهی X مشخص می‌شود، گروهی است متناهی از مرتبهٔ $|G|^{|X|}.|H|$.
(۲) فرض می‌کنیم $|X| = 1$. در این صورت روشن است که می‌توانیم G و $G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$ را یکی بگیریم: تنها بایستی هر $g \in G$ را با عضوی از G^* که عضو یکتای X را به g می‌نگارد یکی بگیریم. در این حالت تنها عملِ H بر X، عمل بدیهی است، و بنابر ۱۸.۹، عمل متناظرِ H

بر $G^*(=G)$ نیز عمل بدیهی خواهد بود. از این رو به موجب ۸.۹، در این حالت حاصلضرب حلقوی متناظر G در H، عبارت است از $H \times G = G \times H$، حاصلضرب مستقیم G و H.

(۳) فرض می‌کنیم H متناهی باشد. وقتی عمل مربوط به H صراحتاً مشخص نشده باشد، نماد $G \wr H$ طبق قرارداد، نمایش حاصلضرب حلقوی G در H، متناظر با عمل H بر خودش بهوسیلهٔ ضرب از راست، گرفته خواهد شد (۲۳.۴). این حاصلضرب حلقوی را حاصلضرب حلقوی منظم G در H می‌نامند.

حاصلضربهای حلقوی منظم خیلی اوقات به‌صورت مثالهایی درکتابهای درسی دیده می‌شوند. ما به خود حق می‌دهیم که حاصلضربهای حلقوی طبیعی را نیز درنظر بگیریم، یعنی، حاصلضربهای حلقوی که به‌وسیلهٔ عملهای همچون ۲.۴ (i) مشخص شده‌اند.

(۴) فرض می‌کنیم H بر مجموعهٔ نامتناهی X عمل کند. به‌ازای هرگروه G، عملهای متناظری از H بر هر دو گروه $\mathrm{Cr}G^X$ و $\mathrm{Dr}\ G^X$ (۴۴۵) وجود دارند، که دقیقاً به همان طریق واقع در ۱۸.۹ تعریف می‌شوند. حاصلضربهای نیم مستقیم متناظر با $\mathrm{Cr}G^X$ در H و $\mathrm{Dr}\ G^X$ در H به‌ترتیب حاصلضربهای حلقوی تحدید نشده و تحدید شده نامیده می‌شوند. بیشتر حاصلضربهای حلقوی که در این کتاب مورد بررسی قرار خواهند گرفت، هنگامی که این تمایز بین 'تحدیدنشده' و 'تحدیدشده' مطرح نباشد به‌وسیلهٔ عملهایی بر مجموعه‌های متناهی تعریف خواهند داشت.

۲۱.۹ هنگام کار با حاصلضربهای حلقوی، مناسب است که نمادگذاری اثبات ۲۱.۸ را قبول کنیم. فرض می‌کنیم H بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. G راگروهی دلخواه، و W را حاصلضرب حلقوی متناظر $G \wr H$ از G در H می‌گیریم و قرار می‌دهیم $G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$، که گروه پایهٔ W است. طبق ۲۱.۸،

$$G^* = \mathrm{Dr} \prod_{x \in X} G_x,$$

که در آن به‌ازای هر $x \in X$،

$$G_x = \{f \in G^* : f(y) = 1 \text{ هرگاه } x \neq y \in X\}.$$

به‌ازای هر $x \in X$ و هر $g \in G$، فرض می‌کنیم $g_x \in G^*$ با ضابطهٔ

$$g_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } y \neq x \\ g & \text{اگر } y = x \end{cases}$$

به‌ازای هر $y \in X$، تعریف شود. یادآوری می‌کنیم که نگاشت

$$g \mapsto g_x$$

یک همریختی است از G به توی G^*، با نگارهٔ

$$\{g_x : g \in G\} = G_x.$$

اکنون به‌ازای هر $g \in G$، $h \in H$ و $x, y \in X$،

$$\begin{aligned} g_x^h(y) &= g_x(yh^{-1}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{اگر } yh^{-1} \neq x \\ g & \text{اگر } yh^{-1} = x \end{cases} \\ &= g_{xh}(y). \end{aligned}$$

لذا به‌ازای هر $g \in G$، $h \in H$ و $x \in X$،

$$g_x^h = g_{xh}.$$

تساویهای اخیر عملِ H بر G^* را در گروه W به‌طور کامل مشخص می‌کنند.

در خصوص نمادگذاری اشاره دیگری داریم. فرض می‌کنیم H یک گروه دوری متناهی باشد، مثلاً $H = \langle h \rangle$، از مرتبهٔ n، و W را حاصلضرب حلقوی منظم $G \wr H$ می‌گیریم. در این صورت

$$G^* = \mathrm{Dr} \prod_{i=1}^{n} G_{h^i}$$

و به‌ازای هر $g \in G$ و هر $i = 1, \dots, n$،

$$g_{h^i}^h = g_{h^{i+1}}.$$

در این صورت با صرفه‌تر آن است که از ظاهر شدن h در زیر نمایهٔ اعضای G^* جلوگیری کنیم. بدین‌ترتیب قرار می‌دهیم

$$G^* = \mathrm{Dr} \prod_{i=1}^{n} G_i,$$

که در آن

$$G_i = \{g_i : g \in G\}$$

و عملِ H بر G^* در W با تساویهای

$$g_i^h = g_{i+۱},$$

مشخص می‌شود، که در آن زیرنمایه‌ها به پیمانهٔ n تعبیر می‌شوند: لذا $g_{n+۱} = g_۱$.

۵۲۱. فرض می‌کنیم که گروه H بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند و ρ را نمایش جایگشتی متناظر H می‌گیریم و G را گروه نابدیهی دلخواه قرار می‌دهیم $G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$. فرض می‌کنیم φ عملِ H بر G^* باشد که در ۱۸.۹ تعریف شده است. در این صورت $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Ker}\rho$.

بویژه، اگر عملِ H بر X صادق باشد، آنگاه عمل متناظر H بر G^* نیز صادق خواهد بود.

۵۲۲. فرض می‌کنیم که گروههای H و J به‌ترتیب بر مجموعه‌های متناهی X و Y عمل کنند، و این عملها هم‌ارز باشند (۱۹.۴). G را گروه دلخواهی می‌گیریم. در این صورت حاصلضربهای حلقوی متناظر $G \wr H$ و $G \wr J$ یکریخت‌اند.

۵۲۳. فرض می‌کنیم که گروه H بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. G را گروهی دلخواه می‌گیریم و فرض می‌کنیم W حاصلضرب حلقوی متناظر G در H باشد. همچنین فرض می‌کنیم که G بر مجموعهٔ Y عمل کند.

(i) در این صورت W بر مجموعهٔ حاصلضرب $X \times Y$ عمل خواهد کرد اگر به‌ازای هر $x \in X$، $y \in Y$، $h \in H$ و $f \in G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$ تعریف کنیم

$$(x,y)hf = (xh, yf(xh)).$$

(ii) اگر عملهای H بر X و G بر Y هر دو ترایا باشند، آنگاه عمل W بر $X \times Y$ که در (i) تعریف شده ترایا خواهد بود.

(iii) اگر عملهای H بر X و G بر Y هر دو صادق باشند، آنگاه عمل W بر $X \times Y$ که در (i) تعریف شده صادق خواهد بود.

(iv) به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت n و m، $(nm)!$ بر $(m!)^n(n!)$ بخش‌پذیر است.

۵۲۴. فرض می‌کنیم که گروه H به‌گونه‌ای ترایا بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. G را گروهی دلخواه می‌گیریم و فرض می‌کنیم W حاصلضرب حلقوی متناظر $G \wr H$ باشد.

(i) فرض می‌کنیم $x \in X$. در این صورت $W = \langle G_x, H\rangle$، که در آن G_x مانند ۲۱.۹ تعریف می‌شود. علاوه بر این، هرگاه $|X| > ۱$ و $|G| > ۱$ آنگاه نه G_x در W نرمال است و نه H.

(ii) اگر H یک گروه n مولدی باشد و G یک گروه m مولدی و n و m اعداد صحیح مثبت باشند، آنگاه W یک گروه $(n+m)$ مولدی است.

۵۲۵. $C_۲ \wr C_۲ \cong D_۸$، گروه دووجهیِ مرتبهٔ ۸ است. (در اینجا، مانند جاهای دیگر، هنگامی که هیچ ذکری دربارهٔ عمل مربوطه نشده باشد، حاصلضرب حلقوی مورد بحث منظم خواهد بود.)

*۵۲۶. فرض می‌کنیم که H بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. G را گروهی دلخواه، W را حاصلضرب حلقوی متناظر G در H، و G^* را گروه پایهٔ W، می‌گیریم. فرض می‌کنیم $K \leqslant G$ و قرار می‌دهیم

$$K^* = \{f \in G^* : f(x) \in K \text{ ، به‌ازای هر } x \in X\}$$

(i) در این صورت $K^* \leqslant G^*$، $K^* \cong \mathrm{Dr}\,K^X$، $H \leqslant N_W(K^*)$ و $HK^* \cong K \wr H$، حاصلضرب حلقوی متناظر با عمل مفروض H بر X.

(ii) هرگاه $K \trianglelefteq G$ آنگاه $K^* \trianglelefteq W$ و

$$W/K^* \cong (G/K) \wr H,$$

حاصلضرب حلقوی متناظر با عمل مفروض H بر X.

ساختمانهای حاصلضرب حلقوی منبع بسیار مفیدی از مثالها فراهم می‌کنند: این ساختمانها گروههای نسبتاً پیچیده‌ای به‌دست می‌دهند که در عین حال انجام محاسبات در آنها عملی است. برای روشن کردن مطلب، اکنون نشان می‌دهیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n گروههای حل‌پذیری به‌طول مشتق n وجود دارند (۵۲.۷ را ببینید.)

۲۲.۹ لم فرض می‌کنیم G گروه حل‌پذیر دلخواهی مثلاً از طول مشتق n باشد. در این صورت $G \wr C_۲$ گروهی است حل‌پذیر از طول مشتق $n+۱$.

برهان فرض می‌کنیم $H = \langle h \rangle$، از مرتبهٔ ۲ باشد، و $W = G \wr H$ حاصلضرب حلقوی منظم باشد. فرض می‌کنیم G^* گروه پایهٔ W باشد: در این صورت

$$G^* = G_۱ \times G_۲ = \{g_۱ : g \in G\} \times \{g_۲ : g \in G\},$$

که در آن نگاشتهای $g \mapsto g_۱$ و $g \mapsto g_۲$ به‌ترتیب یکریختیهایی G به روی $G_۱$ و $G_۲$ هستند. بنابراین W حاصلضرب نیم‌مستقیم HG^* است، که در آن عمل H بر G^* به‌ازای هر $g \in G$ با تساویهای

$$g_۱^h = g_۲ \quad \text{و} \quad g_۲^h = g_۱,$$

معین می‌شود.

به‌ازای هر گروه حل‌پذیر J، فرض می‌کنیم $\delta(J)$ معرف طول مشتق J باشد. چون G حل‌پذیر است و $\delta(G)=n$، نتیجه می‌گیریم که G^* نیز حل‌پذیر است (۴۹.۷) و $\delta(G^*)=n$ (۳۷۳ (iii)). چون $|W/G^*|=2$، W/G^* آبلی است. بنابراین W حل‌پذیر است (۴۷.۷) و $W'\leqslant G^*$ (۵۲.۳).

به‌ازای هر $g\in G$،

$$g_1^{-1}g_2=g_1^{-1}g_1^{h}=[g_1,h]\in W'.$$

فرض می‌کنیم π معرف تصویر G^* به روی G_2 باشد (۱۶.۸) و قرار می‌دهیم $\pi'=\pi|_{W'}$. در این صورت π' همریختی $W'\longrightarrow G_2$ است، و چون به‌ازای هر $g\in G$،

$$(g_1^{-1}g_2)\pi'=g_2,$$

π' پوشاست. چون $\delta(G_2)=n$، بنابر قضیهٔ بنیادی همریختیها نتیجه می‌شود که

$$\delta(W')\geqslant n \quad ((\text{i})\ ۳۷۳).$$

ولی، چون $W'\leqslant G^*$ و $\delta(G^*)=n$،

$$\delta(W')\leqslant n \quad ((\text{i})\ ۳۷۳).$$

لذا

$$\delta(W')=n,$$

و بنابراین

$$\delta(W)=n+1$$

۲۳.۹ فرع. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، گروههای حل‌پذیری از طول مشتق n وجود دارند.

برهان فرض می‌کنیم A گروه آبلی نابدیهی دلخواهی باشد. گروههای G_1، G_2، G_3، ... را به‌طور بازگشتی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض می‌کنیم $G_1=A$، و به‌ازای هر عدد صحیح $n>1$، قرار می‌دهیم

$$G_n=G_{n-1}\wr C_2.$$

در این صورت با استفادهٔ مکرر از ۲۲.۹، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، G_n گروهی حل‌پذیر از طول مشتق n خواهد بود.

بعداً نشان خواهیم داد که بعضی از گروههای خودریختیِ حاصلضربهای مستقیم، حاصلضربهای حلقوی طبیعی هستند.

۲۴.۹ لم فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و G یک گروه تجزیه‌ناپذیر متناهی نابدیهی به‌طوری که $Z(G)=1$. به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، فرض می‌کنیم $g\mapsto g_i$ (که به‌ازای هر $g\in G$ تعریف شده) یک یکریختی از G به روی یک گروه G_i باشد، و قرار می‌دهیم $G^*=\mathrm{Dr}\ \prod_{i=1}^{n}G_i$. در این صورت

$$\mathbf{Aut}\ G^*\cong(\mathrm{Aut}\ G)\wr\Sigma_n,$$

که در آن حاصلضرب حلقوی به‌وسیلهٔ عمل طبیعی Σ_n بر مجموعهٔ $\{1,2,\dots,n\}$ شکل گرفته است.

برهان قرار می‌دهیم $A=\mathrm{Aut}\ G$. به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، فرض می‌کنیم $\alpha\mapsto\alpha_i$ (که به‌ازای هر $\alpha\in A$ تعریف شده) یک یکریختی از A به روی گروه A_i باشد، و قرار می‌دهیم $A^*=\mathrm{Dr}\ \prod_{i=1}^{n}A_i$. یک نشانیدن بدیهی از A^* در $\mathrm{Aut}\ G^*$ وجود دارد که مطابق آن A^* را با زیرگروه مناسبی از $\mathrm{Aut}\ G^*$ یکی می‌گیریم: یعنی، به‌ازای هر $\alpha\in\mathrm{Aut}\ G$ و هر $i=1,\dots,n$، α_i را با خودریختی یکتای G^* که به‌ازای هر $g\in G$، g_i را به $(g^{\alpha})_i$ می‌نگارد و هر عضو G_j را به‌ازای هر $j\neq i$ ثابت نگه می‌دارد، یکی می‌گیریم. واضح است که در این صورت

$$A^*=\{\beta\in\mathrm{Aut}\ G^*: G_i^{\beta}=G_i،\ \text{به‌ازای هر}\ i=1,\dots,n\}.$$

فرض می‌کنیم $\sigma\in\Sigma_n$. در این صورت به آسانی تحقیق می‌شود که خودریختی یکتای σ^* از G^* وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $g\in G$ و هر $i=1,\dots,n$،

$$g_i^{\sigma^*}=g_{i\sigma}.$$

علاوه بر این نگاشت $\sigma\mapsto\sigma^*$، که به‌ازای هر $\sigma\in\Sigma_n$ تعریف می‌شود، یک همریختی یک‌به‌یک از Σ_n به‌توی $\mathrm{Aut}\ G^*$ است. (در اینجا ما به فرض $G\neq 1$ احتیاج داریم.) قرار می‌دهیم

$$H=\{\sigma^*:\sigma\in\Sigma_n\}.$$

لذا

$$\Sigma_n\cong H\leqslant\mathrm{Aut}\ G^*$$

چون G_i به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، A^*ناوردا است، مشاهده می‌کنیم که

$$H\cap A^*=1.$$

فرض می‌کنیم $\sigma \in \Sigma_n$، $\alpha \in A$، $g \in G$ و $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$. در این صورت

$$g_j^{(\sigma^*)^{-1}\alpha_i\sigma^*} = g_{j\sigma^{-1}}^{\alpha_i\sigma^*} = \begin{cases} g_{j\sigma^{-1}}^{\sigma^*} & j\sigma^{-1}\neq i \quad \text{هرگاه} \\ (g^\alpha)_{j\sigma^{-1}}^{\sigma^*} & j\sigma^{-1}=i \quad \text{هرگاه} \end{cases} = \begin{cases} g_j & j\neq i\sigma \quad \text{هرگاه} \\ (g^\alpha)_j & j = i\sigma \quad \text{هرگاه} \end{cases} = g_j^{\alpha_{i\sigma}}.$$

از این‌رو، به‌ازای هر $\sigma\in\Sigma_n$، $\alpha\in A$ و هر $i=1,\dots,n$،

$$(\sigma^*)^{-1}\alpha_i\sigma^* = \alpha_{i\sigma}\in A^*. \qquad \text{(i)}$$

چون $A^* = \langle \alpha_i : \alpha\in A \text{ و } i=1,\dots,n\rangle$، این نشان می‌دهد که $H\leqslant N_{\mathrm{Aut}\,G^*}(A^*)$. از این رو

$$A^* \trianglelefteq HA^* \leqslant \mathrm{Aut}\,G^*.$$

قرار می‌دهیم $W = A \wr \Sigma_n$، حاصلضرب حلقوی طبیعی. سپس می‌توانیم A^* را با گروه پایهٔ W یکی بگیریم، و در این صورت عمل Σ_n بر A^*، معرف W به‌ازای هر $\sigma\in\Sigma_n$، $\alpha\in A$ و هر $i=1,\dots,n$ با تساویهای

$$\alpha_i^\sigma = \alpha_{i\sigma}.$$

مشخص می‌شود. آنگاه با در نظرگرفتن تساویهای (i)، به‌آسانی تحقیق می‌شود که نگاشت

$$\sigma a^* \mapsto \sigma^* a^*,$$

که به‌ازای هر $\sigma\in\Sigma_n$ و هر $a^*\in A^*$ تعریف شده؛ یک یکریختی از W به روی HA^* است. با نشان دادن اینکه $HA^* = \mathrm{Aut}\,G^*$، اثبات راکامل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\gamma\in\mathrm{Aut}\,G^*$. در این صورت

$$\mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i = G^* = (G^*)^\gamma = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{n} G_i^\gamma \qquad (۴۰۷)$$

اما به‌ازای هر $i=1,\dots,n$، $G_i^\gamma\cong G_i\cong G$، یک گروه تجزیه‌ناپذیر متناهی با مرکز بدیهی است. در این صورت $Z(G^*)=1$ (۴۰۶) و، بنابر قضیهٔ کرول-ریماک-اشمیت (۱۸.۸)،

$$\{G_1,\dots,G_n\} = \{G_1^\gamma,\dots,G_n^\gamma\}.$$

از این‌رو جایگشتی مانند $\sigma\in\Sigma_n$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $i=1,\dots,n$،

$$G_i^\gamma = G_{i\sigma}.$$

قرار می‌دهیم $\beta = (\sigma^*)^{-1}\gamma\in\mathrm{Aut}\,G^*$. در این صورت به‌ازای هر $i=1,\dots,n$،

$$G_i^\beta = G_i.$$

بدین‌ترتیب $\beta\in A^*$، و در نتیجه

$$\gamma = \sigma^*\beta\in HA^*.$$

لذا

$$\mathrm{Aut}\,G^* = HA^*\cong W$$

۲۵.۹ قضیه (فیتینگ [a27]، ۱۹۳۸). فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی باشد با مرکز $Z(G)=1$. بنابر قضیهٔ کرول-ریماک-اشمیت (۱۸.۸)، G به‌صورت حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی زیرگروه نرمال تجزیه‌ناپذیر نابدیهی قابل بیان است، و غیر از ترتیب سازه‌ها این تجزیهٔ G یکتاست؛ فرض می‌کنیم این تجزیه به‌صورت

$$G = G_{11}\times G_{12}\times\cdots\times G_{1n_1}\times G_{21}\times\cdots\times G_{2n_2}\times\cdots\times G_{s1}\times\cdots\times G_{sn_s},$$

باشد، که در آن s، n_1، n_2، ...، n_s اعداد صحیح مثبت‌اند، گروههای G_{ij} نابدیهی و تجزیه‌ناپذیرند $(i=1,\dots,s,\ j=1,\dots,n_i)$، و $G_{ij}\cong G_{kl}$ اگر و تنها اگر $i=k$. در این صورت

$$\mathrm{Aut}\,G \cong ((\mathrm{Aut}\,G_{11})\wr\Sigma_{n_1})\times((\mathrm{Aut}\,G_{21})\wr\Sigma_{n_2})\times\cdots\times((\mathrm{Aut}\,G_{s1})\wr\Sigma_{n_s}),$$

که در آن حاصلضربهای حلقوی طبیعی‌اند.

برهان به‌ازای هر $i=1,\dots,s$ قرار می‌دهیم

$$G_i = G_{i1}\times\cdots\times G_{in_i}.$$

در این صورت

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{s} G_i.$$

فرض می‌کنیم $\gamma \in \operatorname{Aut} G$. در این صورت بنابر ۴۰۷ و قضیهٔ کرول-ریماک-اشمیت، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر $i = 1,\dots,s$ و هر $j = 1,\dots,n_i$، اعداد صحیح k و l وجود دارند به‌طوری که

$$G_{ij}^{\gamma} = G_{kl}.$$

علاوه بر این، چون $G_{ij}^{\gamma} \cong G_{ij}$، باید داشته باشیم $k = i$. پس به‌ازای هر $i = 1,\dots,s$، نتیجه می‌شود

$$G_i^{\gamma} = G_i.$$

لذا $G_1,\dots,G_s$ زیرگروههای مشخصهٔ G هستند.

به‌سادگی نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{Aut} G \cong \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{s} \operatorname{Aut} G_i$$

(رک. ۹۴؛ ۴۳۶). چون سازه‌های مستقیم $G_{i1},\dots,G_{in_i}$ از G_i گروههای تجزیه‌ناپذیر نابدیهی یکریخت‌اند با مرکزهای بدیهی (۴۰۶)، به‌موجب ۲۴.۹ نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $i = 1,\dots,s$،

$$\operatorname{Aut} G_i \cong (\operatorname{Aut} G_{i1}) \wr \Sigma_{n_i},$$

حاصلضرب حلقوی طبیعی است که اثبات قضیهٔ را به‌دست می‌دهد.

۵۲۷. فرض می‌کنیم که گروه H به‌طور صادق بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند. G را یک گروه نابدیهی دلخواه، W را حاصلضرب حلقوی $G \wr H$ و G^* را گروه پایهٔ W می‌گیریم. در این صورت

(i) $C_W(G^*) \leqslant G^*$.

(ii) هرگاه عمل H بر X ترایا نیز باشد آنگاه

$Z(W) = \{ f \in G^* : f(x) = f(y) \in Z(G)$ ،$x, y \in X$ به‌ازای هر $\} \cong Z(G)$.

۵۲۸. فرض می‌کنیم که گروه H بر مجموعهٔ متناهی X به‌طور ترایا عمل کند. G را یک گروه سادهٔ ناآبلی متناهی، W را حاصلضرب حلقوی متناظر با $G \wr H$ و G^* را گروه پایهٔ W می‌گیریم. در این صورت

(i) G^* زیرگروه نرمال مینیمال W است.

(ii) هرگاه عمل H بر X، صادق نیز باشد آنگاه G^* زیرگروه نرمال مینیمال یکتای W است. (راهنمایی. در مورد (i)، از ۹.۸ استفاده کنید و در مورد (ii)، از ۵۲۷ (i).)

۵۲۹. (i) p زیرگروههای سیلو Σ_{p^2-1} آبلی مقدماتی‌اند از مرتبهٔ p^{p-1}.

(ii) p زیرگروههای سیلو Σ_{p^2} از مرتبهٔ p^{p+1} بوده و با $C_p \wr C_p$ یکریخت‌اند.

۵۳۰. فرض می‌کنیم $A = \langle a \rangle$ و $H = \langle h \rangle$، گروههای مرتبهٔ p هستند. قرار می‌دهیم $G = A \wr H$ و A^* را گروه پایهٔ G می‌گیریم: بنابراین

$$A^* = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_p \rangle,$$

$a_p^h = a_1$ و به‌ازای هر $i = 1,\dots,p-1$، $a_i^h = a_{i+1}$.

فرض می‌کنیم $b_1 = a_1$ و به‌ازای هر عدد صحیح $i > 1$، قرار می‌دهیم $b_i = [b_{i-1}, h]$. با استقرا بر n نشان دهید که به‌ازای هر i، $b_i \in \Gamma_i(G)$ (۵۳.۷ را ببینید.)، و همچنین به‌ازای هر $i = 2,3,\dots,p$، $b_i a_i^{-1} \in \mathrm{Dr}\ \prod_{j=1}^{i-1} \langle a_j \rangle$. نتیجه بگیرید که $\Gamma_p(G) \neq 1$.

از این رو نشان دهید که G گروه p دارای ردهٔ p است (راهنمایی. از ۳۷۷ استفاده کنید.)

۵۳۱. $\operatorname{Aut}(\Sigma_3 \times \Sigma_3) \cong \Sigma_3 \wr C_2$.

۵۳۲. فرض می‌کنیم $G = A_5 \wr C_2$. نشان دهید که G دارای زیرگروههایی است مانند J و K به‌طوری که $\langle J, K \rangle = G$، K در G زیرنرمال است و $j(J : J \cap K) > j(G : K)$ (۳۳۹ را ببینید).

۵۳۳. فرض می‌کنیم H بر مجموعهٔ نامتناهی X عمل کند. G را گروهی دلخواه می‌گیریم و قرار می‌دهیم $G^* = \mathrm{Dr}\ G^X$، توان مستقیم محدود شدهٔ G با مجموعهٔ اندیس‌گذار X باشد. (۴۴۵ را ببینید). تحقیق کنید که H بر G^* عمل خواهد کرد اگر به‌ازای هر $h \in H$ و $f \in G^*$، f^h مانند ۱۸.۹ تعریف شود.

۵۳۴. فرض می‌کنیم $\mathbb{N}$ معرف مجموعهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت باشد و قرار می‌دهیم $H = A_{\mathbb{N}}$ (۲۹۱ را ببینید). عمل طبیعی H بر $\mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم $G = C_2$، $G^* = \mathrm{Dr} G^{\mathbb{N}}$ و فرض می‌کنیم W حاصلضرب نیم‌مستقیم G^* در H باشد با عمل مانند ۵۳۳ (با $X = \mathbb{N}$): لذا W حاصلضرب حلقوی محدود شدهٔ G در H خواهد بود (۲۰.۹ (۴) را ببینید).

به‌ازای هر $f \in G^*$؛ فرض می‌کنیم $s(f)$ معرف محمل f باشد (۴۴۵ را ببینید). نشان دهید که به‌ازای هر $f, f' \in G^*$ و هر $h \in H$؛

$$|s(f^h)| = |s(f)|$$

و

$$|s(ff')| = |s(f)| + |s(f')| - ۲|s(f) \cap s(f')|\cdot$$

فرض می‌کنیم $K = \{f \in G^*$: زوج باشد $|s(f)|\}$. ثابت کنید که $K \lhd W$ و،

$$۱ < K < G^* < W$$

یک سری اصلی برای W است. همچنین نشان دهید که W دارای یک‌سری ترکیبی نیست. (رک. ۳۵۵. راهنمایی. قرار دهید $G = \langle g \rangle$. به‌ازای هر $n \in \mathrm{N}$، فرض کنید $g_n \in G^*$ با ضابطهٔ

$$g_n(x) = \begin{cases} ۱ & \text{هرگاه } x \neq n \\ g & \text{هرگاه } x = n \end{cases}$$

تعریف شده باشد. هرگاه $f \in G^*$ و $s(f) = \{j_۱, j_۲, \dots, j_m\}$ با $j_۱ < j_۲ < \cdots < j_m$ آنگاه $f = g_{j_۱} g_{j_۲} \cdots g_{j_m}$.)

۵۳۵. فرض می‌کنیم H گروه نامتناهی دلخواهی باشد و عمل H بر خودش را به‌وسیلهٔ ضرب از راست در نظر می‌گیریم (۲۳.۴). G راگروه نابدیهی دلخواهی می‌گیریم، و قرار می‌دهیم $G^* = \mathrm{Dr}\ G^H$، فرض می‌کنیم W حاصلضرب نیم‌مستقیم G^* در H باشد با عمل مانند ۵۳۳ (با $X = H$): بنابراین W حاصلضرب حلقوی منظم محدود شدهٔ G در H است (۲۰.۹ (۴) را ببینید.)

(i) در این صورت $Z(W) = ۱$ (رک. ۵۲۷).

(ii) فرض می‌کنیم $G = C_p$ و H را p گروه نامتناهی دلخواهی می‌گیریم (۲۶۵ را ببینید: به‌عنوان مثال، می‌توانیم انتخاب کنیم $H = C_{p^\infty}$: ۱۴۴ را ببینید). در این صورت W یک p گروه نامتناهی است و $Z(W) = ۱$ (رک. ۲۸.۴).

این فصل را با کاربردی بر توسیعهای گروهی به‌پایان می‌بریم.

۲۶.۹ تعریف فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$ و $G/K \cong H$. در این صورت G را یک توسیع K توسط H می‌خوانیم.

در این صورت نتیجه می‌شود که یک همریختی φ از G به روی H با $\mathrm{Ker}\varphi = K$ وجود دارد (۱۱۴ را ببینید). در حالت کلی ممکن است چند تا از این همریختیهای φ وجود داشته باشد. نظریه توسیع با زوجهایی مانند (G, φ) سروکار دارد، که توسیعهای K توسط H نامیده

می‌شوند؛ و سعی دارد که این زوجها را رده‌بندی کند. برای اطلاعات بیشتر در خصوص نظریهٔ توسیع، گروئنبرگ [b۱۶] فصلهای ۵ و ۹، کوروش [b۲۷] جلد ۲، فصل ۱۲، مک‌لِین [b۳۱] فصل ۴، روتمن [b۳۴] فصل ۷، اسکات [b۳۶] فصل ۹ را ببینید. در این کتاب، ما وارد بحث پیشرفتهٔ نظریهٔ کلی توسیع نمی‌شویم بلکه فقط چند قضیهٔ خاص را ثابت می‌کنیم.

در حاشیه اشاره می‌کنیم که هرگاه H متناهی باشد، هر توسیع K توسط H را می‌توان در حاصلضرب حلقوی منظم $K \wr H$ نشانید؛ هوپرت [b۲۱] ص۹۹، قضیه ۹.۱۵.۱ یا شنکمن [b۳۵] ص ۱۰۰، قضیهٔ k.۵.۳ را ببینید. ولی ما از این مطلب در اینجا استفاده نمی‌کنیم.

۲۷.۹ قضیه فرض می‌کنیم G یک توسیع K توسط H باشد. در این صورت یک همریختی $\psi : G \longrightarrow H \times \mathrm{Aut}\ K$ وجود دارد به‌طوری که $\mathrm{Ker}\psi = Z(K)$. به‌علاوه هرگاه $\bar{G} = G\psi$ و π معرف تصویر $H \times \mathrm{Aut}\ K$ به روی H باشد (۱۶.۸)، آنگاه

$$\bar{G}\pi = H \quad \text{و} \quad \bar{G} \cap \mathrm{Aut}\ K = \mathrm{Inn}\ \ K\cdot$$

به‌ویژه، هرگاه $Z(K) = ۱$ آنگاه هر توسیع K توسط H را می‌توان در $H \times \mathrm{Aut}\ K$ نشانید.

برهان یک همریختی φ از G به روی H با $\mathrm{Ker}\varphi = K$ وجود دارد (۱۱۴). چون $K \trianglelefteq G$، G بر K به‌وسیلهٔ تزویج عمل می‌کند. فرض می‌کنیم $\sigma : G \to \mathrm{Aut}\ K$ عمل متناظر باشد. بی‌آنکه از کلیت موضوع کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که H و $\mathrm{Aut}\ K$ فقط در عضو همانی مشترک‌اند و در این صورت H و $\mathrm{Aut}\ K$ با زیرگروههای نرمالی از $H \times \mathrm{Aut}\ K$ یکی گرفته می‌شوند (۱.۸ را ببینید).

ما نگاشت

$$\psi : G \longrightarrow H \times \mathrm{Aut}\ K$$

را به‌ازای هر $g \in G$ با ضابطهٔ

$$\psi : g \mapsto (g\varphi)(g\sigma),$$

تعریف می‌کنیم. چون φ و σ همریختی هستند و چون هر عضو H با هر عضو $\mathrm{Aut}\ K$ در

$H \times \mathrm{Aut}\,K$ جابه‌جا می‌شود؛ واضح است که ψ نیز یک همریختی است. علاوه بر این

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,\psi &= \mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Ker}\,\sigma\\ &= K\cap C_G(K)\\ &= Z(K)\cdot \qquad \text{بنابر (۴۷۶)}\end{aligned}$$

حال قرار می‌دهیم $\bar G = G\psi \leqslant H\times \mathrm{Aut}\,K$، و فرض می‌کنیم π تصویر $H\times\mathrm{Aut}\,K$ به روی H باشد. در این صورت به‌ازای هر $g\in G$

$$(g\psi)\pi = g\varphi\cdot$$

چون φ، G را به روی H می‌نگارد، نتیجه می‌گیریم که π، $\bar G$ را به روی H می‌نگارد؛ یعنی

$$\bar G\pi = H\cdot$$

همچنین

$$\begin{aligned}\bar G\cap \mathrm{Aut}\,K &= \{(g\varphi)(g\sigma): g\varphi = 1 \ \text{و}\ g\in G\}\\ &= \{g\sigma : g\in \mathrm{Ker}\varphi\}\\ &= K\sigma \quad (\mathrm{Ker}\varphi = K \ \text{زیرا})\\ &= \mathrm{Inn}\,K\cdot\end{aligned}$$

هرگاه $Z(K)=1$ آنگاه $G\cong \mathrm{Im}\,\psi \leqslant H\times\mathrm{Aut}\,K$، بنابراین G را می‌توان در $H\times \mathrm{Aut}\,K$ نشاند.
خاطر نشان می‌کنیم که به‌ازای هر گروه K، $\mathrm{Inn}K \trianglelefteq \mathrm{Aut}\,K$ (۹۲).

۲۸.۹ فرع فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ و $\mathfrak{Y}$ رده‌هایی از گروههای با سه ویژگی زیر باشند:

(i) هر گروه خارج‌قسمتی از هر $\mathfrak X$ گروه، یک $\mathfrak X$ گروه باشد.

(ii) هر زیر گروه از هر $\mathfrak Y$ گروه، یک $\mathfrak Y$ گروه باشد.

(iii) گروه بدیهی تنها گروهی باشد که هم یک $\mathfrak X$ گروه است و هم یک $\mathfrak Y$ گروه.

فرض می‌کنیم H یک $\mathfrak X$ گروه باشد و K یک گروهی که برای آن $Z(K)=1$ و $\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}K$ یک $\mathfrak Y$ گروه باشد. در این صورت هر توسیع K توسط H با $H\times K$ یکریخت است.

برهان G را یک توسیع K توسط H می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\psi: G\longrightarrow H\times \mathrm{Aut}\,K$ همریختی تعریف شده در ۲۷.۹ باشد، $\bar G = G\psi$، و π و ρ به ترتیب تصاویر از $H\times\mathrm{Aut}\,K$ به روی H و $\mathrm{Aut}\,K$ باشند. چون $Z(K)=1$، ۲۷.۹ نشان می‌دهد $G\cong\bar G$. بنابر ۱۹.۸ (i)،

$$\bar G\pi/(H\cap\bar G)\cong \bar G\rho/((\mathrm{Aut}\,K)\cap\bar G)$$

یعنی، به موجب ۲۷.۹،

$$H/(H\cap \bar G)\cong \bar G\rho/\mathrm{Inn}\,K \leqslant \mathrm{Aut}K/\mathrm{Inn}\,K\cdot$$

چون H یک $\mathfrak X$ گروه است، ویژگی (i) ایجاب می‌کند که $H/(H\cap\bar G)$ نیز یک $\mathfrak X$ گروه باشد؛ و چون $\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}K$ یک $\mathfrak Y$ گروه است. ویژگی (ii) ایجاب می‌کند که $\bar G\rho/\mathrm{Inn}K$ نیز یک $\mathfrak Y$ گروه باشد. از این رو، بنابر ویژگی (iii)، $|H/(H\cap\bar G)|=1$، بنابراین

$$\bar G\pi = H = H\cap \bar G \quad \text{و} \quad \bar G\rho = \mathrm{Inn}\,K\cdot$$

بنابراین به موجب ۱۹.۸ (ii)،

$$\bar G = H\times \mathrm{Inn}\ K\cdot$$

چون $Z(K)=1$، $\mathrm{Inn}\,K\cong K$ (۱۱۷). در نتیجه

$$G\cong\bar G\cong H\times K\cdot$$

اشارات. (۱) هرگاه $\mathfrak X$ را ردهٔ تمام گروهها و $\mathfrak Y$ را ردهٔ متشکل از تنها گروه بدیهی انتخاب کنیم، آنگاه روشن است که $\mathfrak X$ و $\mathfrak Y$ در (i)، (ii) و (iii) صدق می‌کنند. لذا از ۲۸.۹ نتیجه می‌گیریم که هرگاه K گروهی باشد که برای آن $Z(K)=1$ و $\mathrm{Aut}\,K=\mathrm{Inn}\,K$، آنگاه برای هر گروه دلخواه H، هر توسیع K توسط H با $H\times K$ یکریخت است. (این مورد، مورد گروه کامل K است: ۵۰۹ را ببینید.)

(۲) فرض می‌کنیم H یک گروه ساده باشد. اگر $\mathfrak X$ را ردهٔ همهٔ گروههای یکریخت با H به‌انضمام گروه بدیهی انتخاب کنیم و $\mathfrak Y$ را ردهٔ همهٔ گروههایی که H را نمی‌توان در آنها نشاند، آنگاه باز هم $\mathfrak X$ و $\mathfrak Y$ در (i)، (ii) و (iii) صدق می‌کنند. به‌موجب ۲۸.۹ نتیجه می‌گیریم که اگر K گروهی باشد که $Z(K)=1$ و H را نتوان در $\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}\,K$ نشاند، آنگاه هر توسیع K توسط H با $H\times K$ یکریخت است.

ما از این اشاره در اثبات آخرین قضیهٔ این فصل استفاده می‌کنیم. قبل از بیان این قضیه، به یک حدس مشهور اشاره می‌کنیم.

۲۹.۹ حدس شرایر این است که برای هر گروه سادهٔ متناهی مانند G، $\mathrm{Aut}G/\mathrm{Inn}G$ حل‌پذیر است. تاکنون هیچ مثال نقضی برای این حدس شناخته نشده.

۳۰.۹ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی نابدیهی با طول ترکیبی n باشد. فرض می‌کنیم که در یک سری ترکیبی G، n_1 عامل یکریخت با H_1، n_2 عامل یکریخت با H_2، ... ، n_s عامل یکریخت با H_s وجود داشته باشد، که s، n_1، ... ، n_s اعداد صحیح مثبتی هستند به‌طوری که $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$، و H_1، ... ، H_s گروههای سادهٔ دوبه‌دو غیریکریخت‌اند. علاوه بر این فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $i = 1, \ldots, s$،

(i) H_i ناآبلی است و در حدس شرایر صدق می‌کند، و

(ii) $n_i \leqslant 4$.

در این صورت G کاملاً تحویل‌پذیر است (۸.۸).

برهان با استقرا بر n استدلال می‌کنیم. اگر $n = 1$، G ساده است و قضیهٔ بدیهی است. فرض می‌کنیم $n > 1$ و

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

یک سری ترکیبی از G باشد. قرار می‌دهیم $K = G_{n-1} \lhd G$. در این صورت

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_{n-1} = K$$

یک سری ترکیبی از K، به‌طول $n - 1$ است. اما واضح است که با استفاده از فرض استقرا، نشان داده می‌شود که K کاملاً تحویل‌پذیر است. از این‌رو، بنابر (i)، K حاصلضرب مستقیم گروههای سادهٔ ناآبلی است و در نتیجه $Z(K) = 1$.

می‌توانیم فرض کنیم که $G/K \cong H_1$، بنابراین G توسیعی است از K توسط H_1. پس

$$K \cong H_1 \times \cdots \times H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_2 \times \cdots \times H_s \times \cdots \times H_s,$$

که سمت راست آن $n_1 - 1$ نسخه از H_1، n_2 نسخه از H_2، ... ، n_s نسخه از H_s وجود دارد (و در آن اگر $n_1 = 1$ نسخه‌های H_1 حذف می‌شوند). از این رو بنابر ۲۵.۹،

$$\mathrm{Aut}\,K \cong ((\mathrm{Aut}\,H_1) \wr \Sigma_{n_1-1}) \times ((\mathrm{Aut}\,H_2) \wr \Sigma_{n_2}) \times \cdots \times ((\mathrm{Aut}\,H_s) \wr \Sigma_{n_s}),$$

که در آن حاصلضربهای حلقوی طبیعی‌اند (و اگر $n_1 = 1$ اولین عامل سمت راست حذف می‌شود. در این صورت، با توجه به ۱۱۱ و ۵۲۶ (ii)، می‌بینیم که

$$\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}\,K \cong ((\mathrm{Aut}\,H_1/\mathrm{Inn}\,H_1) \wr \Sigma_{n_1-1}) \times ((\mathrm{Aut}\,H_2/\mathrm{Inn}\,H_2) \wr \Sigma_{n_2}) \times \cdots \times ((\mathrm{Aut}\,H_s/\mathrm{Inn}\,H_s) \wr \Sigma_{n_s})$$

هنگامی که m عدد صحیحی نابیشتر از ۴ باشد، Σ_m حل‌پذیر است (۳۶۴)؛ و، بنابر (ii)، $\mathrm{Aut}\,H_i/\mathrm{Inn}\,H_i$ به‌ازای هر $i = 1, \ldots, s$ حل‌پذیر خواهد بود. از این‌رو بنابر ۴۷.۷ و ۴۹.۷، $\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}\,K$ حل‌پذیر است. چون H_1 یک گروه سادهٔ ناآبلی است، نتیجه می‌گیریم که H_1 را نمی‌توان در $\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}\,K$ نشاند. بنابراین به موجب اشاره (۲) بعد از ۲۰.۹،

$$G \cong H_1 \times K.$$

لذا G کاملاً تحویل‌پذیر است. بدین‌ترتیب اثبات به استقرا تمام می‌شود.

۵۳۶. فرض می‌کنیم که $Z(K) = 1$ و $\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}\,K$ حل‌پذیر است. در این صورت هر توسیع K توسط هر گروه تام H (۱۶۸) با $H \times K$ یکریخت است.

۵۳۷. (i) فرض می‌کنیم که K یک گروه متناهی باشد با $Z(K) = 1$. ϖ را مجموعهٔ همهٔ مقسوم‌علیه‌های اول $|\mathrm{Aut}\,K/\mathrm{Inn}\,K|$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم ϖ' مجموعهٔ همهٔ اعداد اولی باشد که به ϖ تعلق ندارند. در این صورت هر توسیع K توسط هر ϖ'گروه متناهی دلخواه H، با $H \times K$ یکریخت است.

(ii) قرار می‌دهیم $K = D_{2p}$، گروه دو وجهی از مرتبهٔ $2p$ که در آن p یک عدد اول فرد دلخواه است. H را گروه متناهی دلخواهی می‌گیریم به‌طوری که $(|H|, (p-1)/2) = 1$. در این صورت هر توسیع K توسط H با $H \times K$ یکریخت است. (راهنمایی. ۴۸۵ و ۴۸۸ را ببینید.)

(iii) قرار می‌دهیم $K = \Sigma_3 \times \Sigma_3$ و فرض می‌کنیم H گروه متناهی دلخواه فرد مرتبه باشد. در این صورت هر توسیع K توسط H با $H \times K$ یکریخت است.

۵۳۸. (i) با یک مثال نشان دهید که حکم ۵۳۷ (i) در حالت کلی اگر شرط $Z(K) = 1$ حذف شود، برقرار باقی نمی‌ماند. (راهنمایی. $K = C_p$ را در نظر بگیرید).

(ii) با یک مثال نشان دهید که حکم ۵۳۷ (ii) در حالت کلی اگر $p > 3$، و شرط $(|H|, (p-1)/2) = 1$ حذف شود، برقرار باقی نمی‌ماند.

(iii) با یک مثال نشان دهید که حکم ۵۳۷ (iii)، در حالت کلی اگر شرط فرد مرتبه بودن H حذف شود، برقرار باقی نمی‌ماند.

۵۳۹. با یک مثال نشان دهید که حکم ۳۰.۹ در حالت کلی اگر شرط (ii) به $n_i \leqslant 5$ بدل شود، برقرار باقی نمی‌ماند. (راهنمایی. قرار دهید $H = A_5$ و فرض کنید K گروه سادهٔ ناآبلی متناهی دلخواهی باشد که در حدس شرایر صدق می‌کند و با H یکریخت نیست. سپس حاصلضرب حلقوی طبیعی $K \wr H$ را در نظر بگیرید.)

۱۰

قضایای انتقال و شکافتگی

برای اینکه یک گروه متناهی بر یک زیرگروه نرمال شکافته شود چند شرط کافی بنیادی را اثبات خواهیم کرد و نیز چند همریختی مهم، به‌نام نگاشتهای انتقال از یک گروه G به‌توی بخشهای آبلی G را تعریف و از آنها استفاده خواهیم کرد. برای این کار روش ظریف منسوب به هـ. ویلانت را، که بر مسأله‌ای از اعمال گروه بر مجموعه‌ای مناسب مبتنی است دنبال خواهیم کرد.

۱.۱۰ **تعریف** فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. زیرمجموعه‌ای چون T از G را، که شامل صادق یک عضو از هر هم‌مجموعهٔ راستِ H در G باشد، یک تراگرد راست برای H در G می‌نامیم. در این صورت $|T| = |G : H|$ و $HT = G$. به‌همین نحو یک تراگرد چپ برای H در G یک زیرمجموعهٔ S از G است، که شامل صادق یک عضو از هر هم‌مجموعهٔ چپ H در G باشد: در این صورت $|S| = |G : H|$ و $SH = G$.

۲.۱۰ فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و همچنین T یک تراگرد راست برای H در G باشد و $g \in G$. در این صورت مجموعهٔ $Tg = \{tg : t \in T\}$ نیز یک تراگرد راست برای H در G است: زیرا

اگر Hx یک هم‌مجموعهٔ راست دلخواه H در G باشد (که در آن $x \in G$)، آنگاه بنابر فرض خواهیم داشت، $|T \cap Hxg^{-1}| = 1$ و در نتیجه

$$|Tg \cap Hx| = |(T \cap Hxg^{-1})g| = 1.$$

اکنون واضح است که G با ضرب از راست بر مجموعهٔ $\mathscr{T}$ متشکل از همهٔ تراگردهای راست H در G (از طرف راست) عمل می‌کند.

همچنین فرض می‌کنیم $h \in H$. در این صورت مجموعهٔ $hT = \{ht : t \in T\}$ یک تراگرد راست برای H در G است: زیرا اگر Hx یک هم‌مجموعهٔ راست دلخواه از H در G باشد (با $x \in G$) آنگاه خواهیم داشت

$$|hT \cap Hx| = |T \cap h^{-1}Hx| = |T \cap Hx| = 1.$$

از این‌رو H با ضرب از چپ بر مجموعهٔ $\mathscr{T}$ از طرف چپ عمل می‌کند. ما این عملهای راست و چپ بر $\mathscr{T}$ و چند عمل دیگر را که به‌وسیلهٔ آنها مشخص می‌شوند، بررسی خواهیم کرد.

۵۴۰. فرض می‌کنیم که $H \leqslant G$ و $T \subseteq G$. در این صورت T یک تراگرد راست برای H در G است اگر و تنها اگر هر عضو G به‌طور یکتا به شکل ht با $h \in H$ و $t \in T$ قابل بیان باشد.

۵۴۱. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. برای هر زیرمجموعهٔ ناتهی X از G، فرض می‌کنیم که

$$X^* = \{x^{-1} : x \in X\}.$$

در این صورت X یک تراگرد راست برای H در G است اگر و تنها اگر X^* یک تراگرد چپ برای H در G باشد.

۵۴۲. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، که G یک گروه متناهی است و $\mathscr{T}$ را مجموعهٔ متشکل از همهٔ تراگردهای راست برای H در G می‌گیریم. فرض کنید که $|H| = m$ و $|G : H| = n$. در این صورت $|\mathscr{T}| = m^n$.

۵۴۳*. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$.

(i) هرگاه $H \trianglelefteq G$، آنگاه هر تراگرد راست برای H در G، یک تراگرد چپ برای H در G خواهد بود و نیز هر تراگرد چپ برای H در G، یک تراگرد راست برای H در G است. در این حالت ما به‌طور ساده از تراگردها برای H در G صحبت می‌کنیم.

(ii) هرگاه $H \trianglelefteq G$، آنگاه یک تراگرد برای H در G وجود دارد که زیرگروهی است از G اگر و تنها اگر G بر H شکافته شود.

(iii) اگر هر تراگرد راست برای H در G یک تراگرد چپ نیز برای H در G باشد، آنگاه

$$H \trianglelefteq G.$$

(اشاره. در واقع این مطلب همواره صادق است که اگر G یک گروه متناهی باشد، یک تراگرد راست برای H در G وجود دارد که یک تراگرد چپ برای H در G نیز هست. اثبات این موضوع خارج از قلمرو نظریهٔ گروهها، مثلاً در نظریهٔ گراف صورت می‌گیرد. زاسنهاوس [b41] صص. ۱۱ تا ۱۳، یا ویلسن [b39] ص. ۱۲۶، مثال ۲۷ d را ببینید.)

۳.۱۰ تعاریف فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$ و $|G : H| = n < \infty$ و H/J آبلی باشد. همچنین $\mathscr{T}$ را مجموعهٔ همهٔ تراگردهای راست H در G می‌گیریم. اینک به هر زوج مرتب T و U از اعضای $\mathscr{T}$، یک عضو از گروه H/J مربوط می‌کنیم که آن را با T/U نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. داریم $|T| = n$، مثلاً $T = \{t_1, \dots, t_n\}$. بنابر فرض به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$ عضو یکتای $u_i \in U$ وجود دارد به‌طوری که $Ht_i = Hu_i$؛ و از این‌رو $U = \{u_1, \dots, u_n\}$. پس برای $i = 1, \dots, n$، $t_iu_i^{-1} \in H$، حال تعریف می‌کنیم

$$T/U = \prod_{i=1}^{n} Jt_iu_i^{-1}.$$

چون گروه H/J آبلی است، ترتیبی که ما به توسط آن n عضو $Jt_1u_1^{-1}, \dots, Jt_nu_n^{-1}$ را در یکدیگر ضرب می‌کنیم، تأثیری در حاصلضربی که به‌دست می‌آوریم ندارد، و در نتیجه T/U یک عضو خوشتعریف از H/J است.

اکنون فرض می‌کنیم $T, U, V \in \mathscr{T}$، مثلاً

$$T = \{t_1, \dots, t_n\}, \quad U = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad V = \{v_1, \dots, v_n\},$$

که به‌ازای $i = 1, \dots, n$،

$$Ht_i = Hu_i = Hv_i.$$

در این صورت

$$T/T = \prod_{i=1}^{n} Jt_it_i^{-1} = J, \tag{i}$$

که J عضو همانی H/J است و چون H/J آبلی است خواهیم داشت

$$U/T=\prod_{i=1}^{n} Ju_it_i^{-1}=\prod_{i=1}^{n}(Jt_iu_i^{-1})^{-1}=(T/U)^{-1}, \qquad \text{(ii)}$$

و باز هم چون H/J آبلی است داریم

$$T/V=\prod_{i=1}^{n} Jt_iv_i^{-1}=\prod_{i=1}^{n}(Jt_iu_i^{-1})(Ju_iv_i^{-1})=T/U\ .\ U/V\cdot \qquad \text{(iii)}$$

حال ما نسبت $\sim$ را بر $\mathscr{T}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$T\sim U \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad T,U\in\mathscr{T} \ \text{و}\ T/U=J$$

در این صورت تساویهای (i)، (ii) و (iii) در فوق نشان می‌دهند که $\sim$ یک نسبت هم‌ارزی بر $\mathscr{T}$ است. فرض می‌کنیم که Ω معرف مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی این نسبت هم‌ارزیِ $\sim$ باشد. لذا Ω مجموعه‌ای از مجموعه‌های تراگرد راست برای H در G است.

۴.۱۰ تعریف فرض می‌کنیم $J\trianglelefteq H\leqslant G$ با $|G:H|<\infty$ و H/J آبلی باشد. همچنین فرض می‌کنیم T یک تراگرد راست برای H در G باشد و $g\in G$. بنابر ۲.۱۰، Tg یک تراگرد راست برای H در G است، و در نتیجه یک عضو $Tg/T\in H/J$ وجود دارد که مانند ۳.۱۰ تعریف می‌شود. حال نگاشت

$$\tau:G\to H/J$$

را با ضابطهٔ

$$\tau:g\mapsto Tg/T,$$

تعریف می‌کنیم و آن را انتقال از G به‌توی H/J می‌نامیم. این نگاشت ابتدا به‌وسیلهٔ شور (۱۸۷۵ـ۱۹۴۱) در [a۹۰] مورد بررسی قرارگرفته بود. ما نشان می‌دهیم که τ مستقل از انتخاب تراگرد راستی است که در تعریف آن آمده و τ یک همریختی است.

۵.۱۰ فرض می‌کنیم که $J\trianglelefteq H\leqslant G$ با $|G:H|=n<\infty$ و H/J آبلی باشد. فرض می‌کنیم T و U تراگردهای راست برای H در G باشند، $g\in G$ و $h\in H$. در این صورت

(الف) $Tg/Ug=T/U=hT/hU$.

(ب) انتقال τ از G به‌توی H/J مستقل از انتخاب تراگرد راستی است که در تعریف آن آمده و τ یک همریختی است.

برهان (الف) فرض می‌کنیم $T=\{t_1,\dots,t_n\}$ و $U=\{u_1,\dots,u_n\}$ که به‌ازای $i=1,\dots,n$، $Ht_i=Hu_i$. در این صورت به‌ازای $i=1,\dots,n$،

$$Ht_ig=Hu_ig$$

و

$$Hht_i=Ht_i=Hu_i=Hhu_i$$

از این رو

$$Tg/Ug=\prod_{i=1}^{n}J(t_ig)(u_ig)^{-1}=\prod_{i=1}^{n}Jt_iu_i^{-1}=T/U$$

و

$$\begin{aligned} hT/hU &=\prod_{i=1}^{n}J(ht_i)(hu_i)^{-1}=\prod_{i=1}^{n}(Jh)(Jt_iu_i^{-1})(Jh)^{-1}\\ &=\prod_{i=1}^{n}Jt_iu_i^{-1} \qquad (\text{زیرا } H/J \text{ آبلی است})\\ &=T/U\cdot \end{aligned}$$

(ب) بنابر ۳.۱۰ (iii)، داریم

$$\begin{aligned} Tg/T &=Tg/Ug\cdot Ug/U\cdot U/T\\ &=T/U\cdot Ug/U\cdot (T/U)^{-1} \qquad ((\text{بنابر (الف) و ۳.۱۰(ii)}))\\ &=Ug/U \qquad (\text{زیرا } H/J \text{ آبلی است}) \end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که τ مستقل از انتخاب تراگرد راست برای H در G است، که در تعریف آن به‌کار رفته است.

اکنون فرض می‌کنیم $x,y\in G$. در این صورت

$$\begin{aligned} (xy)\tau &=Txy/T\\ &=Txy/Ty\cdot Ty/T \qquad ((\text{بنابر ۳.۱۰(iii)}))\\ &=Tx/T\cdot Ty/T \qquad ((\text{بنابر (الف)}))\\ &=(x\tau)(y\tau)\cdot \end{aligned}$$

لذا τ یک همریختی است.

۶.۱۰ در ۵.۱۰، $\mathscr{T}$ را مجموعهٔ همهٔ تراگردهای راست برای H در G می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $\sim$ نسبت هم ارزی بر $\mathscr{T}$ باشد که در ۳.۱۰ تعریف شده است. در این صورت ۵.۱۰ (الف) نشان می‌دهد که هرگاه $T \sim U$ آنگاه به‌ازای هر $g \in G$ و هر $h \in H$، $Tg \sim Ug$ و $hT \sim hU$. بنابراین عمل راست G بر $\mathscr{T}$ و عمل چپ H بر $\mathscr{T}$ که در ۲.۱۰ تعریف شده‌اند، در نسبت هم‌ارزی $\sim$ صدق می‌کنند.

پس نتیجه می‌شود که اگر به‌ازای هر $\omega \in \Omega$، $g \in G$، $h \in H$ با T یک عضو $\mathscr{T}$ در ردهٔ هم‌ارزی ω تعریف کنیم

$$\omega g = \text{ردهٔ هم‌ارزی شامل } Tg \text{، و}$$
$$h\omega = \text{ردهٔ هم‌ارزی شامل } hT$$

آنگاه این عملها به‌طریق طبیعی یک عمل راست از G برروی مجموعهٔ Ω متشکل از رده‌های هم‌ارزی $\sim$، و نیز یک عمل چپ از H بر Ω القا می‌کنند. اشارات فوق نشان می‌دهند که اینها خوشتعریف‌اند، لذا معرف عملهای راست و چپی بر Ω هستند.

۷.۱۰ فرض می‌کنیم نمادگذاری و مفروضات مانند بندهای قبلی باشند. همچنین

$$T = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathscr{T}.$$

و $h \in H$. در این صورت چون به‌ازای هر $i = 1, \dots, n$، $Hht_i = Ht_i$، خواهیم داشت

$$hT/T = \prod_{i=1}^{n} J(ht_i)t_i^{-1} = Jh^n.$$

به‌ویژه به‌ازای هر $j \in J$، $jT \sim T$. از این‌رو به‌ازای هر $j \in J$ و هر $\omega \in \Omega$،

$$j\omega = \omega.$$

اکنون یک کاربرد ساده از انتقال را ذکر می‌کنیم.

۸.۱۰ قضیه فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$ با $|G:H| = n < \infty$، $|H/J| = m < \infty$ و H/J آبلی. همچنین فرض می‌کنیم $(n,m) = 1$. در این صورت $H \cap G' \cap Z(G) \leqslant J$.

برهان فرض می‌کنیم τ انتقال از G به‌توی H/J باشد و $h \in H \cap G' \cap Z(G)$. در این صورت، هرگاه T یک تراگرد راست برای H در G باشد،

$$\begin{aligned} h\tau &= Th/T \\ &= hT/T \ (\text{زیرا } h \in Z(G)) \\ &= Jh^n \ (\text{بنابر ۷.۱۰}). \end{aligned}$$

چون τ یک همریختی است (۵.۱۰)، قضیه بنیادی نشان می‌دهد که

$$G/\operatorname{Ker}\tau \cong \operatorname{Im}\tau \leqslant H/J.$$

از این‌رو $G/\operatorname{Ker}\tau$ آبلی است و در نتیجه بنابر ۵۲.۳، $G' \leqslant \operatorname{Ker}\tau$. پس $h \in \operatorname{Ker}\tau$.

حال

$$J = h\tau = Jh^n,$$

و در نتیجه

$$h^n \in J.$$

چون $(n,m) = 1$ از اینجا نتیجه می‌شود (۱.۵) که

$$h \in J.$$

۵۴۴. فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد و H یک زیرگروه آبلی G با $|H| = m$ و $|G:H| = n$. $\mathscr{T}$ را مجموعهٔ همهٔ تراگردهای راست H در G می‌گیریم، و فرض می‌کنیم $\sim$ نسبت هم‌ارزی روی $\mathscr{T}$ باشد که در ۳.۱۰ تعریف شده است و نیز Ω را مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ می‌گیریم، که در آن $J = 1$. در این صورت هر ردهٔ هم‌ارزی $\sim$ شامل m^{n-1} عضو $\mathscr{T}$ است و $|\Omega| = m$.

۵۴۵. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، با $|K| = n < \infty$ و G/K آبلی. فرض می‌کنیم که G بر K شکافته شود و H یک متمم برای K در G باشد. τ را انتقال از G به‌توی H می‌گیریم و فرض می‌کنیم ψ نگاشت $G \to H$ باشد که به‌ازای هر $h \in H$ و $k \in K$ با ضابطهٔ $\psi : hk \to h$ تعریف می‌شود (۹.۹ را ببینید.)؛ و نیز ν را نگاشت $h \mapsto h^n$ از H به‌توی خودش می‌گیریم. در این صورت $\tau = \psi\nu$.

۵۴۶. فرض می‌کنیم N یک عدد صحیح باشد، $N > 1$؛ $G = \Sigma_N$، $H = \langle (12) \rangle$، و نیز τ انتقال از G به‌توی H باشد. در این صورت τ همریختی بدیهی است اگر و تنها اگر $N \geqslant 4$.
(راهنمایی. از ۵۴۵ استفاده کنید.)

۵۴۷. فرض می‌کنیم N یک عدد صحیح باشد، $N > ۱$، F یک میدان متناهی و $G = \mathrm{GL}_N(F)$.

(i) فرض می‌کنیم H مجموعهٔ همهٔ ماتریسهای قطری در G باشد که برای آنها همهٔ درایه‌های قطری به استثنای اولین درایه مساوی ۱ باشند، که در آن ۱ عضو همانی F است. در این صورت

$$F^\times \cong H \leqslant G\cdot$$

(ii) انتقال از G به‌توی H بدیهی است.

(راهنمایی. از **۵۴۵** استفاده کنید و رک. **۴۹۱**).

۵۴۸. فرض می‌کنیم n عددی صحیح باشد، $n > ۲$ و $G = \Sigma_n$. در این صورت:

(i) $G = \langle (۱۲), (۱۳), \dots, (۱n) \rangle$ (۲۱ و ۳۰.۲ (i) را ببینید.)

(ii) عمل طبیعی G بر مجموعهٔ $\{۱, ۲, \dots, n\}$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $H \doteq \mathrm{Stab}_G(۱)$ و $J = A_n \cap H$. در این صورت $J \trianglelefteq H$ و $|H/J| = ۲$. همچنین انتقال از G به‌توی H/J نابدیهی است اگر و تنها اگر n فرد باشد. (راهنمایی. توجه کنید که مجموعهٔ $\{۱, (۱۲), (۱۳), \dots, (۱n)\}$ یک تراگرد راست برای H در G است.)

۵۴۹. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) هرگاه G یک p زیرگروه سیلوی آبلی داشته باشد آنگاه p، $|G' \cap Z(G)|$ را نمی‌شمارد. از این‌رو اگر همهٔ زیرگروههای سیلو G آبلی باشند آنگاه $G' \cap Z(G) = ۱$.

(ii) اگر $G/Z(G)$ یک ϖ گروه باشد، آنگاه G' نیز یک ϖ گروه است.

(iii) با یک مثال نشان دهید که عکس (ii) برقرار نیست.

(iv) هرگاه G یک p گروه ناآبلی باشد، آنگاه $G' \cap Z(G) \neq ۱$.

(اشاره. اگر G گروهی باشد که لزوماً متناهی نیست، به‌طوری که برای آن $G/Z(G)$ یک ϖ گروه متناهی باشد، آنگاه G' نیز یک ϖ گروه متناهی است. این مطلب قضیه‌ای از شور است: هوپرت [b۲۱] ص. ۴۱۷، قضیهٔ ۳.۲.۴ را ببینید. ج. ویگلد [a۹۹] با یک برهان مقدماتی ماهرانه ثابت کرد که اگر $|G/Z(G)| = p^n$ آنگاه $|G'|$، $p^{n(n-۱)/۲}$ را می‌شمارد.)

۵۵۰. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر متناهی باشد با یک p زیرگروه سیلوی آبلی P. فرض می‌کنیم که p' معرف مجموعهٔ همهٔ اعداد اول متمایز از p باشد و $O_{p'}(G) = ۱$. در این صورت $P \trianglelefteq G$. (راهنمایی. با استقرا بر $|G|$ استدلال کنید. سپس نشان دهید که برای هر $K \lhd G$، $(P \cap K) \lhd G$. سپس $C_G(O_p(G))$ را در نظر بگیرید و از **۱۵۷**، **۲۵۲**، **۳۸۱** و **۵۴۹** (i) استفاده کنید.)

اکنون عمل چپ H بر Ω را که در ۶.۱۰ معرفی شد، بررسی می‌کنیم. برای این منظور به دو لم مقدماتی نیاز داریم.

۹.۱۰ لم فرض می‌کنیم که $J \trianglelefteq H$ و H از چپ بر مجموعهٔ X عمل کند. همچنین فرض می‌کنیم که عمل با تحدید از J بر X بدیهی باشد، یعنی به‌ازای هر $j \in J$ و هر $x \in X$، $jx = x$. بنابراین وقتی که (به‌ازای هر $h \in H$ و $x \in X$) تعریف کنیم

$$(Jh)x = hx,$$

آنگاه یک عمل از چپ از H/J بر X به‌دست می‌آوریم.

برهان به‌محض اینکه بدانیم معادلهٔ تعریف‌کنندهٔ

$$(Jh)x = hx$$

دارای معنی است، بدین‌معنی که وابسته به انتخاب عضو h در هم‌مجموعهٔ Jh نیست، آنگاه واضح است که یک عمل چپ از H/J بر X به‌دست خواهیم آورد. فرض می‌کنیم $h, h' \in H$ با $Jh = Jh'$ و $x \in X$. چون $J \trianglelefteq H$، داریم $Jh' = h'J$ و در نتیجه عضو $j \in J$ وجود دارد به‌طوری که

$$h = h'j\cdot$$

بنابراین

$$hx = h'(jx) = h'x,$$

زیرا عمل J بر X بدیهی است.

همچنین نظیر ۳.۴، به یک عمل از چپ احتیاج خواهیم داشت. این عمل از چپ را در اینجا به‌طور صریح می‌آوریم، زیرا در تعریف نمایش جایگشتی مناسب، باید مواظب یک نکته بود زیرا قرار داد ثابت ما این بوده است که جایگشتها را در طرف راست نمادهایی که بر آنها عمل می‌کنند قرار دهیم (توضیحات فصل ۲ قبل از مسألهٔ ۱۷ را ببینید).

۱۰.۱۰ لم فرض می‌کنیم G از چپ بر مجموعهٔ X عمل کند. در این صورت به هر $g \in G$ نگاشت $\lambda_g : X \to X$ متناظر خواهد شد که با ضابطهٔ $\lambda_g : x \mapsto gx$ تعریف می‌شود، و این

نگاشت جایگشتی از X است. به‌علاوه نگاشت $\lambda^* : G \to \Sigma_X$ که با ضابطهٔ $\lambda^* : g \mapsto \lambda_{g^{-۱}}$ تعریف می‌شود یک همریختی است (رک. ۱۸۶).

برهان به‌ازای $g_۱, g_۲ \in G$ و $x \in X$،

$$x\lambda_{g_۱g_۲} = (g_۱g_۲)x = g_۱(g_۲x) = g_۱(x\lambda_{g_۲}) = x\lambda_{g_۲}\lambda_{g_۱}$$

و در نتیجه

$$\lambda_{g_۱g_۲} = \lambda_{g_۲}\lambda_{g_۱}$$

از این‌رو همچنین

$$\lambda_{(g_۱g_۲)^{-۱}} = \lambda_{g_۲^{-۱}g_۱^{-۱}} = \lambda_{g_۱^{-۱}}\lambda_{g_۲^{-۱}}.$$

محققاً $\lambda_۱ = ۱ \in \Sigma_X$ و بنابراین به‌ازای هر $g \in G$،

$$\lambda_g\lambda_{g^{-۱}} = ۱ = \lambda_{g^{-۱}}\lambda_g.$$

از این‌رو $\lambda_g \in \Sigma_X$؛ و بنابراین تساوی فوق نشان می‌دهد که نگاشت $\lambda^* : g \mapsto \lambda_{g^{-۱}}$ یک همریختی از G به‌توی Σ_X است.

۱۱.۱۰ فرض می‌کنیم که نمادگذاری همچون در ۶.۱۰ باشد، و به‌علاوه فرض می‌کنیم که $|H/J| = m < \infty$ و n و m اعداد صحیح متباینی باشند. عملِ چپ از H بر Ω را که در ۶.۱۰ تعریف شده، در نظر می‌گیریم. بنابر ۷.۱۰ و ۹.۱۰، این عمل به‌طور طبیعی یک عملِ چپ از H/J بر Ω القاء می‌کند. در این صورت

(i) عملِ چپ از H بر Ω ترایا است و به‌ازای هر $\omega \in \Omega$، $\mathrm{Stab}_H(\omega) = J$ و

(ii) عملِ چپ از H/J بر Ω منظم است. به‌ویژه $|\Omega| = m$ (رک. ۵۴۴).

برهان (i) برای اینکه نشان دهیم عملِ چپ از H بر Ω تراياست، کافی است نشان دهیم که به‌ازای هر $T, U \in \mathscr{T}$، عضوی مانند $h \in H$ وجود دارد به‌طوری که $hT \sim U$.
بنابر ۷.۱۰، به‌ازای هر $h \in H$،

$$hT/T = Jh^n,$$

و بنابر ۳.۱۰ (iii) نیز

$$hT/U = hT/T \cdot T/U$$

چون $(n,m) = ۱$، اعداد صحیح a و b وجود دارند به‌طوری که

$$an + bm = -۱.$$

به‌علاوه، چون $T/U \in H/J$ و $|H/J| = m$،

$$(T/U)^m = J.$$

از این‌رو

$$(T/U)^{an+۱} = J.$$

بنابراین، اگر قرار دهیم $(T/U)^a = Jh$ که $h \in H$، آنگاه،

$$hT/U = Jh^n \cdot T/U = (T/U)^{an+۱} = J,$$

و در نتیجه

$$hT \sim U.$$

اکنون فرض می‌کنیم $\omega \in \Omega$، بنابر ۷.۱۰،

$$J \leqslant \mathrm{Stab}_H(\omega).$$

فرض می‌کنیم که $h \in \mathrm{Stab}_H(\omega)$ و T را یک عضو $\mathscr{T}$ در ردهٔ هم‌ارزی ω می‌گیریم: در این صورت $hT \sim T$. از این‌رو، بنابر ۷.۱۰؛ $Jh^n = J$، یعنی، $h^n \in J$. چون $(n,m) = ۱$ نتیجه می‌گیریم (۱۰۵) که

$$h \in J.$$

از این‌رو

$$\mathrm{Stab}_H(\omega) = J.$$

(ii) بنابر (i) عملِ چپ از H/J بر Ω ترایا است. به‌علاوه به‌ازای هر $\omega \in \Omega$،

$$\mathrm{Stab}_{H/J}(\omega) = \{Jh : h \in H \text{ و } h\omega = \omega\}$$
$$= J/J \quad (\text{بنابر (i)}).$$

لذا این عمل منظم است.

لم زیر را بعداً مورد استفاده قرار خواهیم داد.

۱۲.۱۰ لم فرض می‌کنیم که X یک مجموعهٔ ناتهی و A یک زیرگروه آبلی Σ_X باشد. اگر عمل طبیعی A بر X ترایا باشد، آنگاه $C_{\Sigma_X}(A) = A$ (رک. ۵۱۸).

برهان فرض می‌کنیم که $C = C_{\Sigma_X}(A)$. چون A آبلی است، داریم $A \leqslant C$. فرض می‌کنیم که $\sigma \in C$ و $x \in X$ و $x\sigma = y \in X$. چون عمل A ترایاست به‌ازای $\alpha \in A$یی، $y = x\alpha$. در این صورت، به‌ازای هر $\beta \in A$،

$$\begin{aligned}(x\beta)\sigma &= (x\sigma)\beta \quad (\text{زیرا } \sigma \in C)\\ &= (x\alpha)\beta\\ &= (x\beta)\alpha \quad (\text{زیرا } A \text{ آبلی است})\cdot\end{aligned}$$

چون عمل A بر X ترایاست، این نشان می‌دهد که به‌ازای هر $w \in X$،

$$w\sigma = w\alpha\cdot$$

لذا، چون این عمل صادق است،

$$\sigma = \alpha \in A\cdot$$

از این‌رو $C \leqslant A$، و در نتیجه $C = A$.

با این لم نشان می‌دهیم که تحت شرایط مناسبی، عمل راست از G بر Ω در ۶.۱۰ و عمل چپ از H/J بر Ω در ۱۱.۱۰، به‌طریق جالبی به‌هم وابسته‌اند.

۱۳.۱۰ قضیه (ه. ویلانت) فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$، با $|G : H| = n < \infty$، $|H/J| = m < \infty$، $(n,m) = 1$ و H/J آبلی. فرض می‌کنیم Ω همان مجموعهٔ تعریف‌شده در ۳.۱۰ باشد و G از راست بر Ω همچون در ۶.۱۰ و H/J از چپ بر Ω همچون در ۱۱.۱۰ عمل کند. علاوه بر این فرض می‌کنیم که τ انتقال از G به‌توی H/J باشد. در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، عضو یکتای $g^* \in H/J$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $\omega \in \Omega$،

$$\omega g = g^*\omega\cdot$$

به‌علاوه نگاشت $g \mapsto g^*$ یک همریختی از G به‌توی H/J است و $g\tau = (g^*)^n$.

برهان به‌ازای هر $g \in G$، فرض می‌کنیم که ρ_g معرف جایگشت $\omega \mapsto \omega g$ از Ω باشد. همچنین به‌ازای هر $h \in H$ فرض می‌کنیم که λ_{Jh} معرف جایگشت $\omega \mapsto (Jh)\omega$ از Ω باشد، و λ^* همریختی $Jh \mapsto \lambda_{(Jh)^{-1}}$ از H/J به‌توی Σ_Ω: ۱۰.۱۰ را ببینید. فرض می‌کنیم که $A = \operatorname{Im} \lambda^* \leqslant \Sigma_\Omega$. چون H/J آبلی است، پس A آبلی است. چون عمل چپ از H/J بر Ω ترایاست (۱۱.۱۰)، عمل طبیعی A بر Ω ترایاست.

فرض می‌کنیم $g \in G$. در این صورت، بنابر شرکت‌پذیری ضرب در G، به‌ازای هر $h \in H$ و $\omega \in \Omega$

$$h(\omega g) = (h\omega)g,$$

از این‌رو،

$$(Jh)(\omega g) = ((Jh)\omega)g,$$

یعنی

$$\rho_g \lambda_{Jh} = \lambda_{Jh}\rho_g\cdot$$

چون این تساوی به‌ازای هر $h \in H$ صادق است و چون $A = \{\lambda_{Jh} : h \in H\}$، بنابر ۱۲.۱۰

$$\rho_g \in C_{\Sigma_\Omega}(A) = A\cdot$$

از این‌رو عضو $g^* \in H/J$ وجود خواهد داشت به‌طوری که

$$\rho_g = (g^*)^{-1}\lambda^* = \lambda_{g^*},$$

و چون عمل چپ از H/J بر Ω صادق است (۱۱.۱۰)، g^* به‌طور یکتا به‌وسیلهٔ g مشخص می‌شود. در این صورت به‌ازای هر $\omega \in \Omega$،

$$\omega g = g^*\omega\cdot$$

حال فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in G$. در این صورت به‌ازای هر $\omega \in \Omega$،

$$\begin{aligned}(g_1g_2)^*\omega &= \omega(g_1g_2) = (\omega g_1)g_2 = g_1^*\omega g_2 = g_2^*(g_1^*\omega)\\ &= (g_2^*g_1^*)\omega = (g_1^*g_2^*)\omega,\end{aligned}$$

زیرا $g_1^*, g_2^* \in H/J$ و H/J نیز آبلی است. بار دیگر چون عمل چپ از H/J صادق است، نتیجه می‌گیریم که

$$(g_1g_2)^* = g_1^*g_2^*.$$

فرض می‌کنیم T یک تراگرد راست برای H در G باشد، $g \in G$، و مثلاً $g^* = Jh$ که در آن $h \in H$. در این صورت، چون به‌ازای هر $\omega \in \Omega$، $\omega g = g^*\omega = h\omega$، با نمادگذاری ۳.۱۰،

$$Tg \sim hT,$$

از این‌رو

$$\begin{aligned} g\tau &= Tg/T \\ &= Tg/hT \cdot hT/T && (\text{بنابر } ۳.۱۰(\mathrm{iii})) \\ &= J \cdot Jh^n && (\text{بنابر } ۷.۱۰) \\ &= Jh^n \\ &= (g^*)^n. \end{aligned}$$

۵۵۱. فرض می‌کنیم که n یک عدد صحیح باشد، $n > 1$. در این صورت زیر گروه دوری $\langle (12\ldots n) \rangle$ یک زیرگروه آبلی ماکسیمال از Σ_n است (۲۳۵ را ببینید.)

***۵۵۲.** فرض می‌کنیم که J، H، G، n، m، Ω و τ همچون در ۱۳.۱۰ باشند، و $\theta : G \to H/J$ همریختی $g \mapsto g^*$ باشد که در ۱۳.۱۰ تعریف‌شده و $K = \operatorname{Ker}\theta$. ثابت کنید

(i) $\operatorname{Ker}\tau = K$.

(ii) برای عمل G بر Ω که در ۶.۱۰ تعریف‌شده، به‌ازای هر $\omega \in \Omega$، $\operatorname{Stab}_G(\omega) = K$؛ و

(iii) هرگاه عمل G بر Ω ترایا باشد، آنگاه این عمل هم‌ارز با عمل G به‌وسیلهٔ ضرب از راست بر مجموعهٔ همهٔ هم‌مجموعه‌های K در G است و $G/K \cong H/J$.

آیا این عمل G بر Ω لزوماً ترایاست؟

۱۴.۱۰ فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$، با $|G : H| = n < \infty$ و H/J آبلی و نیز فرض می‌کنیم τ انتقال از G به‌توی H/J باشد. در این صورت به‌ازای هر $g \in G$، $g\tau = Tg/T$، که در آن بنابر ۵.۱۰ ما می‌توانیم به‌جای T هر تراگرد راست برای H در G را انتخاب کنیم. برای

استفاده در اثبات قضیهٔ بعدی، ملاحظه می‌کنیم که برای یک gی خاص، می‌توانیم T را به‌طریقی نسبتاً ساده برای محاسبهٔ $g\tau$ برگزینیم.

فرض می‌کنیم که $g \in G$ و X معرف مجموعهٔ همهٔ هم‌مجموعه‌های راست H در G باشد. در این صورت عمل G بر X توسط ضرب از راست (۱۳.۴) به یک عمل $\langle g \rangle$ بر X محدود می‌شود. فرض کنیم که در این عمل $\langle g \rangle$ بر X، درست s مدار $X_1, \ldots, X_s$ (که در آن $1 \leqslant s \leqslant n$) وجود داشته باشد. به‌ازای هر $i = 1, \ldots, s$ فرض می‌کنیم $|X_i| = n_i$، در نتیجه $n_1 + \cdots + n_s = n$، $Hx_i \in X_i$ که در آن $x_i \in G$. در این صورت

$$X_i = \{Hx_i,\ Hx_ig,\ Hx_ig^2, \ldots, Hx_ig^{n_i-1}\}$$

و

$$Hx_ig^{n_i} = Hx_i. \qquad \text{(i)}$$

حال می‌توانیم T را به‌صورت زیر انتخاب کنیم

$$T = \{x_ig^r : r = 0, 1, \ldots, n_i - 1;\ i = 1, \ldots, s\}$$

که یک مورب راست برای H در G است.

در این صورت
$$Tg = \{x_ig^r : r = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, \ldots, s\}$$

چون هنگامی که $0 < r < n_i$، خواهیم داشت $x_ig^r \in Tg \cap T$، و نیز به‌موجب (i)، به‌دست می‌آوریم

$$g\tau = Tg/T = \prod_{i=1}^{s} Jx_ig^{n_i}x_i^{-1},$$

که در آن به‌ازای $i = 1, \ldots, s$، $x_ig^{n_i}x_i^{-1} \in H$.

۱۵.۱۰ تعریف ما در فصل ۹ مفهوم متمم را برای یک زیرگروه نرمال در یک گروه مانند G معرفی کردیم. اکنون مناسب است از متممها برای زیرگروههای دلخواه و یا به‌طور کلیتر بخشهایی از G (۳۲۴) صحبت کنیم.

فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$ و $K \leqslant G$. اکنون می‌گوییم که K یک متمم برای H/J در G است اگر $HK = G$ و $H \cap K = J$. اگر همچنین $K \trianglelefteq G$ ، می‌گوییم که K یک متمم نرمال برای H/J در G است.

توجه داشته باشید که اگر K یک متمم برای H/J در G باشد، آنگاه $HK = KH = G$ (۹۵). همچنین توجه کنید که هرگاه K یک متمم نرمال برای H/J در G باشد، آنگاه بنابر ۳.۴۰،

$$G/K = HK/K \cong H/(H\cap K) = H/J.$$

اکنون مفهوم متمم نرمال برای یک بخش در گروه را با مفاهیمی که قبلاً در این فصل بسط داده شده‌اند، در قضیه اصلی زیر مرتبط خواهیم کرد. این ارتباط تنگاتنگی با قضایای موجود در مقالات فروبنیوس [a۳۰] و شور [a۹۰] دارد.

۱۶.۱۰ قضیه (ه. ویلانت) فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$، با $|G:H| = n < \infty$، $|H/J| = m < \infty$، $(n,m) = 1$ و H/J آبلی باشد. فرض می‌کنیم $\sim$ نسبت هم‌ارزی بر مجموعهٔ $\mathscr{T}$ متشکل از تمام تراگردهای راست برای H در G باشد که در ۳.۱۰ تعریف شده، و τ معرف انتقال $G \to H/J$ باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(i) یک متمم نرمال برای H/J در G وجود دارد.

(ii) هرگاه $h_1, h_2 \in H$ و h_1، h_2 در G مزدوج باشند، $Jh_1 = Jh_2$.

(iii) به‌ازای هر $h \in H$، $h\tau = Jh^n$.

(iv) به‌ازای هر $h \in H$ و هر $T \in \mathscr{T}$، $hT \sim Th$.

برهان (i) ⇐ (ii) فرض می‌کنیم که $K \trianglelefteq G$، با $HK = G$ و $H \cap K = J$. فرض می‌کنیم که $h \in H$ و $g \in G$ با $h^g \in H$. می‌توانیم g را به شکل $g = h_1k$ بیان کنیم که در آن $h_1 \in H$ و $k \in K$.

فرض می‌کنیم که

$$h_2 = h^{h_1} \in H.$$

پس همچنین

$$h_2^k = h^g \in H.$$

از این‌رو چون $K \trianglelefteq G$،

$$h_2^k h_2^{-1} = k^{-1}k^{h_2^{-1}} \in H \cap K = J, \qquad (\text{بنابر فرض})$$

بنابراین برای $j \in J$ ای؛ $h^g = jh_2$ و در نتیجه

$$Jh^g = Jh_2 = (Jh)^{Jh_1} = Jh,$$

زیرا H/J آبلی است.

(ii) ⇐ (iii) فرض می‌کنیم که هرگاه h_1، h_2 اعضایی از H و مزدوج در G باشند، داشته باشیم، $Jh_1 = Jh_2$. فرض می‌کنیم که $h \in H$. بنابر ۱۴.۱۰ (با $g = h$)، اعداد صحیح مثبت s، $n_1, \dots, n_s$ و عضوهای $x_1, \dots, x_s \in G$ وجود دارند به‌طوری که

$$n_1 + \cdots + n_s = n,$$

و به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$،

$$x_i h^{n_i} x_i^{-1} \in H$$

و نیز

$$h\tau = \prod_{i=1}^{s} Jx_i h^{n_i} x_i^{-1}$$

پس $x_i h^{n_i} x_i^{-1}$ و h^{n_i} عضوهایی از Hاند که در G مزدوج‌اند. بنابراین به موجب فرض قضیه برای $i = 1, \dots, s$،

$$Jx_i h^{n_i} x_i^{-1} = Jh^{n_i}.$$

از این‌رو

$$h\tau = Jh^{n_1} \cdot Jh^{n_2} \cdots Jh^{n_s} = Jh^n.$$

(iii) ⇐ (iv) فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $h \in H$، $h\tau = Jh^n$. همچنین فرض می‌کنیم $h \in H$ و $T \in \mathscr{T}$. در این صورت بنابر فرض،

$$Th/T = Jh^n.$$

همچنین، بنابر ۷.۱۰،

$$hT/T = Jh^n.$$

از این‌رو، بنابر ۳.۱۰،

$$hT/Th = hT/T \cdot (Th/T)^{-1} = J,$$

و در نتیجه

$$hT \sim Th.$$

(iv) ⇐ (i) فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $h \in H$ و $T \in \mathscr{T}$، $hT \sim Th$. همچنین Ω را مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ می‌گیریم، و عمل G را بر Ω، به‌صورتی که در ۶.۱۰ تعریف‌شده در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $\omega \in \Omega$ و $K = \mathrm{Stab}_G(\omega)$. بنابر فرض به‌ازای هر $h \in H$،

$h\omega = \omega h$. از این‌رو بنابر ۱۱.۱۰ عملِ (راست) از H بر Ω به‌وسیلهٔ تحدید عمل G، ترایاست و $\mathrm{Stab}_H(\omega) = J$؛ یعنی،

$$H \cap K = J.$$

فرض می‌کنیم $g \in G$. در این صورت، به‌موجب ترایائی عمل H، برای $h \in H$ای؛ $\omega g = \omega h$. پس $gh^{-1} \in K$. از این‌رو

$$G = KH = HK.$$

لذا K یک متمم برای H/J در G است. بالاخره، بنابر **۵۵۲**، K هستهٔ انتقال از G به‌توی H/J است، و بنابراین $K \trianglelefteq G$. بدین‌ترتیب K یک متمم نرمال برای H/J در G است.

۱۷.۱۰ تعریف زیرگروه H از گروه متناهی G یک زیرگروه هال G گفته می‌شود اگر

$$(|G:H|, |H|) = 1.$$

هر زیرگروه سیلوی G یک زیرگروه هال G است. در فصل ۱۱، ما تعمیم بنیادی ف. هال را در مورد گروههای حل‌پذیر متناهیِ قضیه سیلو ثابت خواهیم کرد. این تعمیم با وجود و خواص زیرگروههای هال سروکار دارد.

به‌عنوان یک نتیجهٔ فوری از ۱۶.۱۰ خاطرنشان می‌کنیم که

۱۸.۱۰ فرع فرض می‌کنیم که A یک زیرگروه هال آبلی از گروه متناهی G باشد. در این صورت یک متمم نرمال برای A در G وجود دارد اگر و تنها اگر هیچ دو عضو متمایز A در G مزدوج نباشند.

برهان در ۱۶.۱۰، بگیرید $H = A$ و $J = 1$.

۱۹.۱۰ تعاریف فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد. متمم یک p زیرگروه سیلوی G، یک p متمم G نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که زیرگروه H از G یک p متمم G است اگر و تنها اگر $|G:H|$ توانی از p باشد و p، $|H|$ را نشمارد. به‌ویژه، یک p متمم G، یک زیرگروه هالِ G است.

هرگاه G دارای یک p متمم نرمال باشد، آنگاه G، p پوچ‌توان خوانده می‌شود. ملاحظه خواهیم

کرد که یک گروه متناهی پوچ‌توان است اگر و تنها اگر به‌ازای هر عدد اول p، p پوچ‌توان باشد: **۵۶۳** را ببینید.

یک گروه لزومی ندارد که دارای یک p متمم باشد. برای مثال، ۲۵.۵ نشان می‌دهد که گروه متناوب A_5 از درجهٔ ۵، نه یک ۲ متمم دارد و نه یک ۳ متمم، با این وجود A_5 دارای ۵ متممهایی است (یعنی زیرگروههای یکریخت با A_4). **۵۶۱** را نیز ببینید.

۵۵۳. فرض می‌کنیم که $J \trianglelefteq H \leqslant G$، با $|G:H| = n < \infty$ و H/J آبلی باشد. τ را انتقال از G به‌توی H/J می‌گیریم. در این صورت به‌ازای هر $g \in Z(G)$، $g\tau = Jg^n$. (راهنمایی. از ۱۴.۱۰ استفاده کنید.)

۵۵۴. فرض می‌کنیم که $J \trianglelefteq H \leqslant G$، و یک متممِ K برای H/J در G وجود دارد. در این صورت هر مزدوج K در G متممی برای H/J در G است. (راهنمایی. توجه داشته باشید که هر مزدوج K در G به شکل K^h است که $h \in H$.)

۵۵۵. فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$. در این صورت یک متمم برای H/J در G وجود دارد اگر و تنها اگر یک عمل از G بر مجموعه‌ای چون X وجود داشته باشد، که به یک عمل ترایا از H بر X، تحدید شود به‌طوری که برای $x \in X$، $\mathrm{Stab}_H(x) = J$.

۵۵۶. (i) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ با $|G:H| < \infty$. فرض می‌کنیم که H/H' متناهی است و $(|G:H|, |H/H'|) = 1$. در این صورت $H \cap [H,G] \trianglelefteq H$ و یک متمم نرمال برای $H/(H \cap [H,G])$ در G وجود دارد.

(ii) فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد به‌طوری که $O^p(G) = G$. هرگاه P یک pزیرگروه سیلوی G باشد آنگاه $P \leqslant [P,G]$.

***۵۵۷.** (شور [a۹۰]) فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد و H یک زیرگروه هالِ G به‌طوری که $H \leqslant Z(G)$. در این صورت یک زیرگروه مانند K از G وجود دارد به‌طوری که $G = H \times K$. (اشاره. این حکم در ۳۰.۱۰ و ۳۱.۱۰ تعمیم خواهد یافت.)

۵۵۸. فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد و A یک زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمالِ P (۲۵۱ را ببینید). در این صورت برای زیرگروهی چون B از G به‌طوری که p، $|B|$ را نمی‌شمارد، $C_G(A) = A \times B$. (راهنمایی. از **۲۳۵**، **۲۳۶**، **۲۵۱** و **۲۵۲** استفاده کنید تا نشان دهید که A یک p زیرگروه سیلوی $C_G(A)$ است. سپس **۵۵۷** را مورد استفاده قرار دهید.)

۵۵۹. (فروبنیوس [a۳۱]) فرض می‌کنیم G یک گروه از مرتبه mn باشد که در آن m و n اعداد صحیح مثبت متباین‌اند. قرار می‌دهیم $X = \{x \in G : x^m = 1\}$ و $Y = \{y \in G : y^n = 1\}$.

همچنین فرض می‌کنیم که $|X| \leqslant m$ و $|Y| \leqslant n$. در این صورت

(i) $X \cap Y = 1$، $G = XY$، $|X| = m$، $|Y| = n$، و هر عضو X با هر عضو Y تعویض می‌شود. (راهنمایی. از ۷ استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم که $H = C_G(X) \leqslant G$ (بنابر ۳۵.۴)، و $X_0 = X \cap H$ و $|X_0| = m_0$. در این صورت $X_0 \leqslant G$، $|H| = m_0 n$ و m_0، m را می‌شمارد.

(iii) برای زیرگروهی چون Y_0 از H، $H = X_0 \times Y_0$. (راهنمایی. از ۵۵۷ استفاده کنید.)

(iv) $Y_0 = Y$ و از این‌رو $Y \leqslant G$.

(v) $X \leqslant G$ و $G = X \times Y$.

(هشدار. روشن نیست که X و Y زیرگروههایی از G هستند تا بتوان (i)، (ii)، (iii) و (iv) را ثابت کرد.)

*۵۶۰. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.

(i) هرگاه G دارای یک p متممِ L باشد آنگاه $L^G = O^p(G)$ (که در آن L^G بستار نرمال L در G است: ۱۸۰ را ببینید.)

(ii) هرگاه G، p پوچ‌توان باشد آنگاه G صادق یک p متمم دارد که همان $O^p(G)$ است.

۵۶۱. مقسوم‌علیه اولی چون p از $|A_6|$ وجود ندارد، که برای آن A_6 دارای یک p متمم باشد. (راهنمایی. برخلاف این حکم، فرض کنید که A_6 برای یک p که $|A_6|$ را می‌شمارد، دارای یک p متمم باشد و به تناقض برسید. اگر $p = 2$، زیرگروهی از A_6 یکریخت با A_5 را در نظر بگیرید و از ۹۹ (i) و ۲۵.۵ استفاده کنید. اگر $p = 3$، نشان دهید که یک ۳متمم از A_6 باید یک ۵ زیرگروه نرمال سیلو داشته باشد و تعداد کل ۵ زیرگروههای سیلوی A_6 را محاسبه کنید. اگر $p = 5$، از ۱۴.۴ و ۲۸.۵ استفاده کنید.)

۵۶۲. هرگاه گروه متناهی G، p پوچ‌توان باشد، هر زیرگروه و هرگروه خارج قسمتی G نیز p پوچ‌توان است.

*۵۶۳. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(i) G، p پوچ‌توان است.

(ii) هر عامل اصلی G از مرتبه‌ای که بر p بخش‌پذیر باشد، مرکزی است.

از این‌رو G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر G به‌ازای هر عدد اول p، p پوچ‌توان باشد.

(راهنمایی. برای (i) $\Leftarrow$ (ii)، کافی است نشان دهید که هرگاه L یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد به‌طوری که p، $|L|$ را بشمارد، آنگاه $L \leqslant Z(G)$. از ۵۳.۳ و ۸.۵ استفاده کنید. در مورد (ii) $\Leftarrow$ (i) از استقرا بر $|G|$ استفاده کنید: از این‌رو هرگاه L یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد، G/L، p پوچ‌توان خواهد بود. اگر p، $|L|$ را بشمارد، از ۵۵۷ استفاده کنید.)

۵۶۴. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد با $|G| = 3r$، که در آن r یک عدد صحیح مثبت فرد است و بر ۳ بخش‌پذیر نیست. در این صورت G، ۳ پوچ‌توان است. (راهنمایی. از ۳۰۲ و ۱۸.۱۰ استفاده کنید. اشاره. توجه داشته باشید که قضیه ۲۰۵ بلافاصله از ۱۸.۱۰ نتیجه می‌شود. در ۲۴.۱۰ یک قضیهٔ کلیتری را ثابت خواهیم کرد.)

از ۱۸.۱۰ برای اثبات یک ملاک مفید برای p پوچ‌توان بودن یک گروه متناهی استفاده می‌کنیم. برای برهان همچنین به لم زیر نیاز داریم

۲۰.۱۰ لم (برنساید [b3]، ص. ۱۵۵) فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد. در این صورت هر دو عضو $Z(P)$ که در G مزدوج باشند در واقع در $N_G(P)$ نیز مزدوج‌اند.

برهان فرض می‌کنیم که $x \in Z(P)$، $g \in G$ و $x^g \in Z(P)$. در این صورت،

$$P \leqslant C_G(x) \cap C_G(x^g) = C_G(x) \cap C_G(x)^g \qquad (\text{بنابر ۲۲۹})\cdot$$

از این‌رو (بنابر ۲۵۲) P و $P^{g^{-1}}$، p زیرگروههای سیلو $C_G(x)$ هستند و بدین‌ترتیب در $C_G(x)$ مزدوج‌اند: پس برای عضوی مانند $y \in C_G(x)$،

$$P^{g^{-1}} = P^y.$$

در این صورت $yg \in N_G(P)$ و $x^g = (x^y)^g = x^{yg}$.

۲۱.۱۰ قضیه (برنساید [a9]). فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد. هرگاه $P \leqslant Z(N_G(P))$ آنگاه G، p پوچ‌توان است.

برهان فرض می‌کنیم که $H = N_G(P)$. چون $P \leqslant Z(H)$، به‌ویژه P آبلی است. بنابراین ما می‌توانیم از ۱۸.۱۰ با $A = P$ استفاده کنیم. فرض می‌کنیم که $x_1, x_2 \in P$. هرگاه x_1 و x_2 در G مزدوج باشند، آنگاه بنابر ۲۰.۱۰ (و نیز چون P آبلی است)، x_1 و x_2 در H مزدوج‌اند. اما در این صورت، چون $P \leqslant Z(H)$، $x_1 = x_2$. از این‌رو بنابر ۱۸.۱۰، G، p پوچ‌توان است.

اشاره. در ۲۱.۱۰ کافی نیست که صرفاً فرض کنیم P آبلی است. در واقع، هر گروه سادهٔ ناآبلی متناهی معلوم G به‌ازای مقسوم‌علیه اولی چون p از $|G|$، دارای p زیرگروههای سیلو دوری است، و با اینکه (بنابر ۲۶۲ یا ۲۴.۱۰) یک چنین pیی می‌بایست فرد باشد، مثالهای متعددی از گروههای سادهٔ ناآبلی متناهی وجود دارند که دارای ۲ زیرگروههای سیلو آبلی‌اند.

ما از این قضیه برای اثبات نکتهٔ دیگری در باب مرتبهٔ گروههای سادهٔ متناهی استفاده می‌کنیم.

۲۲.۱۰ فرع فرض می‌کنیم G یک گروه سادهٔ متناهی زوج مرتبه با مرتبهٔ بزرگتر از ۲ باشد. در این صورت $|G|$ یا بر ۸ یا بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

برهان فرض می‌کنیم که ۸، $|G|$ را بشمارد و T را یک ۲ زیرگروه سیلوی G می‌گیریم. چون $|G|$ زوج است و $|G| \neq 2$ بنابر ۲۹.۴، $1 < T < G$؛ و بنابر فرضمان، $|T| \leqslant 4$. از این‌رو بنابر ۷۷، T با C_2 یا $C_2 \times C_2$ یا C_4 یکریخت است. (در واقع بنابر **۲۶۲** یا ۲۴.۱۰، $T \cong C_2 \times C_2$، اما در اینجا احتیاجی نیست که به این قضیه‌ها مراجعه کنیم.) به‌ویژه، T آبلی است، لذا بنابر ۳۶.۴،

$$T \leqslant C_G(T) \trianglelefteq N_G(T).$$

چون T یک ۲ زیرگروه سیلوی G است، $N_G(T)/C_G(T)$ باید فرد مرتبه باشد. هرگاه

$$C_G(T) = N_G(T)$$

آنگاه $T \leqslant Z(N_G(T))$ و در نتیجه، بنابر ۲۱.۱۰، G، ۲ پوچ‌توان خواهد بود و این امر با ساده بودن G در تناقض است. بنابراین،

$$C_G(T) < N_G(T).$$

به‌موجب ۳۶.۴؛ $N_G(T)/C_G(T)$ را می‌توان در $\operatorname{Aut} T$ نشانید. بنابر ۴۰، ۴۶، ۴۷، ۴۸ و ۳۶.۲، $\operatorname{Aut} T$ با $\mathbf{Z}_2^\times$ یا $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_2)$ یا $\mathbf{Z}_4^\times$ یکریخت است، از این‌رو $|\operatorname{Aut} T|$ برابر ۱ یا ۶ یا ۲ است (۱۶.۲ یا ۴۴ را ببینید). ولی ما نشان داده‌ایم که $|N_G(T)/C_G(T)|$ فرد و بزرگتر از ۱ است، و در نتیجه تنها امکان این است که $|N_G(T)/C_G(T)| = 3$ و $T \cong C_2 \times C_2$. بدین‌ترتیب $|G|$ بر ۱۲ بخش‌پذیر است، آنچه ادعا شده بود.

۲۳.۱۰ گروه متناوب A_5 از درجهٔ ۵، مثالی است از یک گروه سادهٔ ناآبلی متناهی زوج مرتبه که مرتبه‌اش بر ۸ بخش‌پذیر نیست. هر چنین گروه ساده‌ای چون G (به‌موجب اثبات ۲۲.۱۰)، ۲ زیرگروههای سیلواش می‌بایست با $C_2 \times C_2$ یکریخت باشند. در واقع یک قضیهٔ رده‌بندی کامل برای گروههای سادهٔ متناهی که ۲ زیرگروههای سیلوشان با $C_2 \times C_2$ یکریخت است، وجود دارد: هر چنین گروهی با $\mathrm{PSL}_2(F)$ یکریخت است (۶۱.۳ را ببینید)، که در آن F یک میدان متناهی است با $|F| \geqslant 5$ و $|F|$ با ۳ یا ۵ به پیمانهٔ ۸ همنهشت است. (در ارتباط با این، فصل ۱۵

گورنشتاین [b۱۳] را ببینید که در آن قضیهٔ رده‌بندی مزبور تحت این فرض اضافی که ۲ زیرگروههای سیلو خود-مرکزی باشند اثبات شده است. برای یک حکم کلی، گورنشتاین [a۴۳] را ببینید.)

برنساید در کتابش ([b۳]، ص. ۳۳۰ در پاورقی) اشاره می‌کند که 'یک بررسی از مرتبهٔ گروههای سادهٔ نادوری معلوم، این حقیقت جالب توجه را روشن می‌سازد که تمامی اینها بر ۱۲ بخش‌پذیرند'. مدتها تصور بر این بود که ثابت خواهد شد مرتبه‌های گروههای سادهٔ ناآبلی متناهی بر ۱۲ بخش‌پذیرند، اما در ۱۹۶۰، م. سوزوکی [a۹۲] وجود یک خانوادهٔ نامتناهی از گروههای سادهٔ ناآبلی متناهی را اعلام کرد، که مرتبهٔ آنها بر ۳ بخش‌پذیر نبودند، می‌توانید [a۹۳] را نیز ببینید. مرتبهٔ کوچکترین گروه سوزوکی $2^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ است. هیچ مثال دیگری از گروههای سادهٔ ناآبلی متناهی که مرتبه‌شان بر ۳ بخش‌پذیر نباشد کشف نشده است، و چنین فکر می‌کنند که احتمالاً فقط گروههای سوزوکی یک چنین گروههایی هستند.

موشکافی در اثبات ۲۲.۱۰، با تحلیل ۲ زیرگروههای سیلوی ممکن از مرتبهٔ ۸، نشان می‌دهد که یک گروه سادهٔ متناهی زوج مرتبه، با مرتبهٔ بزرگتر از ۲، باید دارای مرتبه‌ای باشد که بر ۱۲، ۱۶ و یا بر ۵۶ بخش‌پذیر است: ۶۴۰ را ببینید.

به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۲۱.۱۰ برنساید؛ می‌توانیم یک قضیهٔ ساختاری قوی را برای گروههای متناهی که تمام زیرگروههای سیلوشان دوری‌اند، اثبات کنیم.

ابتدا فرع زیر را ثابت می‌کنیم

۲۴.۱۰ فرع فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی و p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. اگر p زیرگروههای سیلوی G دوری باشند آنگاه G، p پوچ‌توان است. (این فرع تعمیم قضیه‌های ۲۶۲ و ۵۶۴ است.)

برهان فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوی G باشد و نیز فرض می‌کنیم P دوری باشد. در این صورت $P \leqslant C_G(P) \trianglelefteq N_G(P)$ و، بنابر ۳۶.۴، $N_G(P)/C_G(P)$ را می‌توان در $\operatorname{Aut} P$ نشانید. چون $P \leqslant C_G(P)$، $|N_G(P)/C_G(P)|$ بر p بخش‌پذیر نیست. فرض می‌کنیم $|P| = p^m$، که در آن m عدد صحیحی است مثبت. در این‌صورت، چون P دوری است، $|\operatorname{Aut} P| = p^m - p^{m-1}$ (**۲۴۳**). از این‌رو $|N_G(P)/C_G(P)|$، باید $p - 1$ را بشمارد. چون p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ است، نتیجه می‌گیریم که $|N_G(P)/C_G(P)| = 1$، از این‌رو $C_G(P) = N_G(P)$. لذا $P \leqslant Z(N_G(P))$ و در نتیجه بنابر قضیهٔ برنساید G، p پوچ‌توان است.

از لم زیر نیز استفاده می‌کنیم.

۲۵.۱۰ لم (هـ ی. زاسنهاوس [b۴۱]). فرض می‌کنیم G گروهی حل‌پذیر باشد. اگر در سری مشتق G (۵۱.۷)، عاملهای G'/G'' و G''/G''' هر دو دوری باشند آنگاه $G''=G'''=1$.

برهان چون G حل‌پذیر است، عدد صحیح مثبت r وجود دارد به‌طوری که $G^{(r)}=1$ (۵۲.۷). از این‌رو اگر $G''=G'''$، نتیجه می‌گیریم که $G''=G'''=1$. بنابراین (با تعویض G با G/G''') می‌توانیم فرض کنیم که $G'''=1$، و سعی کنیم تا ثابت کنیم که هرگاه G'/G'' و G'' هر دو دوری باشند آنگاه $G''=1$.

چون $G''\trianglelefteq G$، ۳۶.۴ نشان می‌دهد که $C_G(G'')\trianglelefteq G$ و $G/C_G(G'')$ را می‌توان در $\mathrm{Aut}\,G''$ نشاند. چون G'' دوری است بنابر ۳۸.۴، $\mathrm{Aut}\,G''$ آبلی است، و از این‌رو بنابر ۵۲.۳، $G'\leqslant C_G(G'')$. بنابراین $G''\leqslant Z(G')$. چون G'/G'' دوری است، بنابر ۳۰.۳ نتیجه می‌شود که $G'/Z(G')$ دوری است و از این‌رو (۱۲۵) نتیجه می‌دهد که G' آبلی است. پس $G''=1$.

۲۶.۱۰ قضیه (هولدر، برنساید، زاسنهاوس [a۱۰۸]، [b۴۱]). فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد به‌طوری که همهٔ زیرگروههای سیلو آن دوری باشند. در این صورت G حل‌پذیر است. به‌علاوه G/G' و G' هر دو دوری‌اند (بنابراین G فرادوری است (۱۵۲))، همچنین G روی G' شکافته می‌شود و G' یک زیرگروه هال G است.

اشارات. هرگاه G یک گروه دوری متناهی باشد، همهٔ زیرگروههای آن دوری‌اند (۳۲.۳)، به‌ویژه همهٔ زیرگروههای سیلو آن نیز دوری‌اند. هرگاه G یک گروه آبلی متناهی باشد و همهٔ زیرگروههای سیلواش دوری باشند، G دوری است (۴۱۰). اما همچنین گروههای ناآبلی متناهی نیز وجود دارند که همهٔ زیرگروههای سیلوشان دوری‌اند: به‌عنوان مثال، گروه دووجهی D_{2n}، به‌ازای هر عدد صحیح فرد $n\geqslant 3$ (۲۵۹).

برهان قضیه (i) ابتدا تحقیق می‌کنیم که هر زیرگروه و هر گروه خارج قسمتی G نیز همان ویژگی G را داراست. فرض می‌کنیم $H\leqslant G$. بنابر قضیهٔ سیلو، هر زیرگروه سیلوی H، زیرگروهی است از یک زیرگروه سیلوی G. چون زیرگروههای گروههای دوری، دوری‌اند (۳۲.۳)، همهٔ زیرگروههای سیلوی H دوری‌اند. حال فرض می‌کنیم که $K\trianglelefteq G$. می‌دانیم هر زیرگروه سیلوی G/K به شکل PK/K است که در آن P یک زیرگروه سیلوی G است (۲۵۲). چون $PK/K\cong P/(P\cap K)$ (۴۰.۳) و P دوری است، PK/K دوری خواهد بود. لذا تمام زیرگروههای سیلوی G/K دوری‌اند.

(ii) حال با استقرا بر $|G|$ ثابت می‌کنیم که G حل‌پذیر است. هرگاه $|G|=1$ حکم بدیهی است، بنابراین فرض می‌کنیم که $|G|>1$. گیریم p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. بنابر ۲۴.۱۰؛

G، p پوچ‌توان است. فرض می‌کنیم K، p متمم نرمال G باشد. دراین صورت $K\trianglelefteq G$، و بنابر (i)، تمام زیرگروههای سیلوی K دوری‌اند. از این‌رو بنابر فرض استقرا K حل‌پذیر است. چون G/K با p زیرگروه سیلو P از G یکریخت است و P دوری، از (۴۷.۷) نتیجه می‌شود که G حل‌پذیر است.

(iii) می‌دانیم G/G'، G'/G'' و G''/G'''، گروههایی آبلی هستند و (بنابر (i)) همهٔ زیرگروههای سیلوی آنها دوری‌اند. لذا این گروههای آبلی دوری‌اند (۴۱۰). از این‌رو بنابر (ii) و ۲۵.۱۰، $G''=1$ و G/G' و G' دوری هستند.

(iv) فرض می‌کنیم $|G/G'|=n$ و $|G'|=m$. بنابر (iii)، عضوهای $x,\ y\in G$ وجود دارند به‌طوری که

$$G'=\langle x\rangle \quad \text{و} \quad G/G'=\langle yG'\rangle\cdot$$

در این صورت $G=\langle x,y\rangle$ و $x^y\in G'$ (۱۰۸)، در نتیجه برای یک عدد صحیح چون r خواهیم داشت

$$x^y=x^r$$

از این‌رو

$$[x,y]=x^{r-1}$$

قرار می‌دهیم $L=\langle x^{r-1}\rangle$. در این صورت L در G' مشخصه است (۱۳۸) و بنابراین $L\trianglelefteq G$ (۱۵.۳). اینک

$$G/L=\langle xL,\ yL\rangle$$

و

$$[xL,yL]=[x,y]L=L,$$

زیرا $[x,y]\in L$. لذا G/L با ۲ عضو که جابجایی‌پذیرند، تولید می‌شود. از این‌رو G/L آبلی (۶۹)، و در نتیجه $G'\leqslant L$ (۵۲.۳). همین‌طور چون $L\leqslant G'$،

$$\langle x^{r-1}\rangle=L=G'=\langle x\rangle\cdot$$

بنابراین، چون $o(x)=m$،

$$(r-1,m)=1\ (5)$$

از آنجایی که $|G/G'| = n$، $y^n \in G'$ (۱۰۵)، در نتیجه برای یک عدد صحیح s خواهیم داشت

$$y^n = x^s.$$

اما در این صورت

$$x^s = y^n = (y^n)^y = (x^s)^y = x^{rs},$$

و بنابراین $x^{(r-1)s} = 1$. از این‌رو $(r-1)s$ بر $o(x) = m$ بخش‌پذیر است. اما چون $(r-1, m) = 1$، نتیجه می‌شود که s بر m بخش‌پذیر است. بنابراین

$$y^n = 1.$$

چون $G/G' = \langle yG' \rangle$ از مرتبهٔ n است، این ایجاب می‌کند که

$$o(y) = n.$$

در این صورت $G = \langle y \rangle G'$ و بنابر ۴۰.۳،

$$G/G' \cong \langle y \rangle / \langle y \rangle \cap G'.$$

چون $|\langle y \rangle| = n = |G/G'|$، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$\langle y \rangle \cap G' = 1.$$

لذا $\langle y \rangle$ یک متمم برای G' در G است.

فرض می‌کنیم که $(n, m) > 1$. در این صورت عدد اولی چون q وجود دارد که هم m را می‌شمارد و هم n را. قرار می‌دهیم

$$n_1 = n/q \quad \text{و} \quad m_1 = m/q.$$

در این صورت

$$o(x^{m_1}) = q = o(y^{n_1}).$$

عیناً همان‌گونه که $L \trianglelefteq G$، نتیجه می‌شود که $\langle x^{m_1} \rangle \trianglelefteq G$. پس (بنابر ۳۸.۳ و ۴۰.۳)،

$$J = \langle x^{m_1} \rangle \langle y^{n_1} \rangle \leqslant G \quad \text{و} \quad |J| = q^2.$$

بنابراین به‌موجب قضیهٔ سیلو، $J \leqslant Q$، که در آن Q یک q زیرگروه سیلوی G است. بنابر فرض، Q دوری است و لذا Q زیرگروه یکتایی از مرتبهٔ q دارد (۳۲.۳). اما این در تناقض است با این حقیقت که $\langle x^{m_1} \rangle$ و $\langle y^{n_1} \rangle$ زیرگروههای متمایز J از مرتبهٔ qاند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $(n, m) = 1$.

۵۶۵. فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد. X و Y را زیرمجموعه‌های ناتهی P می‌گیریم به طوری که $P \leqslant N_G(X) \cap N_G(Y)$ (۳۲.۴ را ببینید). هرگاه X و Y در G مزدوج باشند آنگاه آنها در $N_G(P)$ نیز مزدوج‌اند (این مسأله تعمیم مسألهٔ ۲۰.۱۰ است.)

۵۶۶. فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوگروه متناهی G باشد. فرض می‌کنیم که هرگاه $g \in G$ و $P \neq P^g$، آنگاه $P \cap P^g = 1$. در این صورت هر دو عضو P که در G مزدوج باشند در $N_G(P)$ نیز مزدوج‌اند.

۵۶۷. فرض کنید $|G| = pr$، که r یک عدد صحیح مثبت است به‌قسمی که p، r را نمی‌شمارد. هرگاه G دارای r زیرگروه متمایز از مرتبهٔ p باشد آنگاه G دارای زیرگروه نرمالی از مرتبهٔ r است.

۵۶۸. اگر $|G| = p^2q^2$، که p و q دو عدد اول متمایزند، آنگاه یا G دارای یک p زیرگروه سیلوی نرمال است و یا دارای یک q زیرگروه سیلوی نرمال؛ و بنابراین G ساده نیست. (ر.ک. ۱۹.۵. راهنمایی. از ۳۰.۴، قضیهٔ سیلو و قضیهٔ برنساید استفاده کنید.)

۵۶۹. اگر $|G| = p^3q$، که p و q دو عدد اول متمایزند، آنگاه G ساده نیست. (راهنمایی. فرض کنید که G یک گروه ساده از مرتبهٔ p^3q است. نشان دهید که $p < q$، و از قضایای سیلو و برنساید استفاده کنید تا نشان دهید که تعداد q زیرگروههای سیلوی G، برابر است با p^2. از اینجا نتیجه بگیرید که $p = 2$ و $q = 3$. اشاره. در حالت کلی، G لزوماً دارای یک p زیرگروه سیلوی نرمال یا یک q زیرگروه سیلوی نرمال نیست، برای مثال $G = \Sigma_4$ را در نظر بگیرید.)

۵۷۰. فرض می‌کنیم G یک گروه ساده از مرتبهٔ p^2qr باشد که p و q و r سه عدد اول متمایزند، و P را یک p زیرگروه سیلوی G می‌گیریم در این صورت

(i) p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ است؛ بنابراین بی‌آنکه از کلیت کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم $p < q < r$.

(ii) $P \cong C_p \times C_p$، و $|N_G(P)/C_G(P)|$ یا q است و یا r؛

(iii) $p = 2$ و $q = 3$؛

(iv) $G \cong A_5$.

(راهنمایی. اثبات ۲۲.۱۰ را ببینید و از ۲۹۴ استفاده کنید.)

۵۷۱. ثابت کنید که هر گروه از مرتبهٔ فرد کمتر از ۱۰۰۰ حل‌پذیر است.
(راهنمایی. فرض کنید که حکم برقرار نیست. در این صورت نشان دهید که این فرض وجود یک گروه سادهٔ ناآبلی G از مرتبهٔ n،را برای یک عدد صحیح فرد $n < 1000$، ایجاب می‌کند فرض کنید $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}$، که در آن s، m_1، ...، m_s اعداد صحیح مثبت و p_1، ...، p_s اعداد اول فرد متمایزند. برای نشان دادن اینکه $\sum_{i=1}^{s} m_i = 5$، ۲۹.۴، ۱۷.۵، ۱۹.۵، ۲۰.۵، ۵۶۸، ۵۶۹ و ۵۷۰ را به‌کار برده و محاسبات لازم را انجام دهید. نتیجه بگیرید که ۳، n را می‌شمارد؛ از این‌رو n باید یکی از پنج عدد 5×3^4، 7×3^4، 11×3^4، $5^2 \times 3^3$، $7 \times 5 \times 3^3$ باشد. چهار عدد نخست از این امکانها را به‌وسیلهٔ ۲۷۹ و قضیهٔ سیلو رد کنید. اگر $n = 7 \times 5 \times 3^3$، با استفاده از قضیهٔ سیلو نشان دهید که G دارای زیرگروهی از شاخص ۷ است و سپس از ۱۴.۴ استفاده کنید تا به آخرین تناقض برسید. اشاره. این حکم صرفاً حالت خاصی از قضیهٔ فایت‌ـ‌تامپسن است: ۳۸۳ و ۱۲.۱ را ببینید.)

۵۷۲. فرض می‌کنیم $|G| = p^m q^n$، با p و q اعداد اول متمایز و m و n اعداد صحیح نامنفی، و همچنین فرض می‌کنیم که p زیرگروههای سیلو و q زیرگروههای سیلو G آبلی باشند. در این صورت G حل‌پذیر است. (راهنمایی. با استقراء بر $|G|$، کافی است نشان دهید که G نمی‌تواند ساده و ناآبلی باشد. فرض کنید که چنین است. Q را یک q زیرگروه سیلوی G بگیرید و برای اینکه نشان دهید زیرگروهی چون L از G وجود ندارد به قسمی که $Q < L < G$، از ۱۰۰ و ۲۶۴ (ii) استفاده کنید. سپس قضیهٔ برنساید را مورد استفاده قرار دهید. اشاره. به موجب قضیهٔ دیگری از برنساید ــ ۲۷.۱۱ را ببینید ــ شرط زیرگروههای آبلی سیلو در اینجا حقیقتاً زاید است.)

۵۷۳. فرض می‌کنیم T یک ۲ زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد.

(i) هرگاه $T \cong C_2 \times C_2$ و $|G|$ بر ۳ بخش‌پذیر نباشد آنگاه G، ۲ پوچ‌توان است.

(ii) هرگاه $T \cong C_2 \times C_2 \times C_2$ و $|G|$ بر ۳ و یا بر ۷ بخش‌پذیر نباشد آنگاه G، ۲ پوچ‌توان است.

۵۷۴. فرض می‌کنیم که گروه متناهی G دارای p زیرگروه سیلوی آبلی P باشد، و قرار می‌دهیم $H = N_G(P)$. در این صورت G، pپوچ‌توان است اگر و تنها اگر برای زیرگروهی چون Q از H داشته باشیم $H = P \times Q$.

۵۷۵. فرض می‌کنیم $n = \prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}$، که در آن s، m_1، ...، m_s اعداد صحیح مثبت و p_1، ...، p_s اعداد اول متمایز. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) هر گروه G از مرتبهٔ n، دوری است.

(ii) به‌ازای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$، $m_i = 1$ و (پیمانهٔ p_j) $p_i \not\equiv 1$.

(این حکم در ۴.۱ بیان شده است. راهنمایی. برای اینکه نشان دهید اگر (ii) برقرار نباشد، (i) نیز برقرار نخواهد بود، اگر برای یک i، $m_i > 1$، گروههای آبلی را در نظر بگیرید؛ و اگر به‌ازای هر i، $m_i = 1$ اما برای i و jای (پیمانه p_j) $p_i \equiv 1$، ۱۶.۹ را به‌کار برید. برای اینکه نشان دهید (ii) $\Rightarrow$ (i)، فرض کنید که G یک گروه از مرتبهٔ n است و ۲۶.۱۰ را به‌کار برید. توجه داشته باشید که هرگاه $G' \neq 1$، آنگاه بنابر ۱۲۵، $C_G(G') < G$. سپس از ۳۶.۴، ۴۶ و ۱۳۸ استفاده کنید.)

می‌خواهیم ثابت کنیم اگر H یک زیرگروه هال نرمال از گروه متناهی G باشد، آنگاه G بر H شکافته می‌شود: رک. حالت خاص این حکم در ۵۵۷. خاطر نشان می‌کنیم که وقتی $H \trianglelefteq G$، هیچ تمایزی بین تراگردهای چپ و راست برای H در G وجود ندارد و لذا ما فقط تراگرد می‌گوییم (۵۴۳). سپس ملاحظه می‌کنیم که عملِ چپ از H بر مجموعهٔ $\mathscr{T}$ متشکل از همهٔ تراگردها برای H در G که در ۲.۱۰ تعریف‌شده به یک عملِ چپ از G بر $\mathscr{T}$ توسیع می‌یابد.

۲۷.۱۰ فرض می‌کنیم $H \trianglelefteq G$. در این صورت G به‌وسیلهٔ ضرب از چپ بر مجموعهٔ $\mathscr{T}$ متشکل از همهٔ تراگردها برای H در G، از سمت چپ عمل می‌کند.

برهان فرض می‌کنیم $g \in G$ و $T \in \mathscr{T}$. در این صورت، به‌ازای هر $x \in G$، با استفاده از ۱۹.۳ خواهیم داشت

$$|gT \cap Hx| = |T \cap g^{-1}Hx| = |T \cap Hg^{-1}x| = 1,$$

زیرا $T \in \mathscr{T}$. از این‌رو $gT \in \mathscr{T}$. اکنون قضیه واضح است.

۲۸.۱۰ فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \trianglelefteq G$، با $|G/H| = n < \infty$ و H/J آبلی باشد. $\mathscr{T}$ را مجموعهٔ تمام تراگردها برای H در G می‌گیریم. در این صورت هرگاه $g \in G$ و $T, U \in \mathscr{T}$،

$$gT/gU = Jg(T/U)Jg^{-1}.$$

برهان فرض می‌کنیم $T = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathscr{T}$ و $U = \{u_1, \dots, u_n\} \in \mathscr{T}$ که به‌ازای $i = 1, \dots, n$، $Ht_i = Hu_i$. در این صورت (بنابر ۱۹.۳) به‌ازای $i = 1, \dots, n$،

$$Hgt_i = gHt_i = gHu_i = Hgu_i.$$

از این‌رو

$$gT/gU = \prod_{i=1}^{n} J(gt_i)(gu_i)^{-1} = \prod_{i=1}^{n} Jgt_iu_i^{-1}g^{-1} = Jg(T/U)Jg^{-1}.$$

۲۹.۱۰ قضیه فرض می‌کنیم A یک زیرگروه هال نرمال آبلی از گروه متناهی G باشد. در این صورت G بر A شکافته می‌شود. به‌علاوه، متممها برای A در G، ردهٔ تزویجی واحدی از زیرگروههای G تشکیل می‌دهند.

برهان در ۳.۱۰ قرار می‌دهیم $H = A$ و $J = 1$. فرض می‌کنیم $\mathscr{T}$ معرف مجموعهٔ همهٔ تراگردها برای A در G باشد، و $\sim$ رابطهٔ هم‌ارزی روی $\mathscr{T}$ باشد که در ۳.۱۰ تعریف‌شده، و همچنین Ω مجموعهٔ رده‌های هم‌ارزی $\sim$ باشد. بنابر ۲۷.۱۰؛ G با ضرب از چپ، بر $\mathscr{T}$ از طرف چپ عمل می‌کند. به‌علاوه این عمل از چپ به‌طور طبیعی یک عمل از چپ از G بر Ω القاء می‌کند: زیرا وقتی $g \in G$ و $T, U \in \mathscr{T}$ با $T \sim U$، آنگاه ۲۸.۱۰ نشان می‌دهد که $gT \sim gU$. تحدید عمل از چپ G بر Ω به A مطمئناً عملی از چپ از A بر Ω است، که قبلاً در ۶.۱۰ معرفی شده است. بنابر ۱۱.۱۰ (با $J = 1$)؛ این عمل منظم است.

اکنون فرض می‌کنیم $\omega \in \Omega$ و $K = \mathrm{Stab}_G(\omega)$ (که این پایدارساز به عملِ چپ از G بر Ω نسبت داده می‌شود.) گیریم $g \in G$. در این صورت، بنابر ترایا بودن عملِ چپ از A بر Ω، برای یک $a \in A$،

$$g\omega = a\omega,$$

و بنابراین

$$a^{-1}g \in K.$$

از این‌رو

$$AK = G$$

به‌علاوه

$$A \cap K = \mathrm{Stab}_A(\omega) = 1$$

زیرا که عملِ چپ از A بر Ω منظم است. لذا K یک متمم برای A در G است.

حال فرض می‌کنیم L متمم دلخواهی برای A در G باشد. در این صورت روشن است که $L \in \mathscr{T}$ (رک. ۵۴۳). λ را عضوی از Ω می‌گیریم که L را شامل است. در این صورت به‌ازای هر $l \in L$

$$lL = L,$$

و در نتیجه

$$l\lambda = \lambda$$

از این‌رو

$$L \leqslant \mathrm{Stab}_G(\lambda)$$

چون عملِ چپ از A بر Ω ترایاست، به‌ازای یک $b \in A$ خواهیم داشت

$$\lambda = b\omega,$$

و در این صورت به‌موجب عملی از چپ نظیر ۱۸۷،

$$\mathrm{Stab}_G(\lambda) = b\,\mathrm{Stab}_G(\omega)b^{-1} = K^{b^{-1}}.$$

چون

$$|L| = |G/A| = |K^{b^{-1}}|.$$

$$L = K^{b^{-1}}.$$

همین‌طور چون هر مزدوج در G از یک متمم برای A در G، بار دیگر نیز یک متمم برای A در G است (۱۱.۹)، قضیه ثابت شده است.

اکنون نشان می‌دهیم که در ۲۹.۱۰، نتیجهٔ شکافتگی بدون این شرط که A آبلی باشد برقرار باقی می‌ماند. این حکم مهم قضیهٔ شور–زاسنهاوس نامیده می‌شود.

۳۰.۱۰ قضیه (شور–زاسنهاوس [b۴۱]). فرض می‌کنیم K یک زیرگروه هال نرمال از گروه متناهی G باشد. در این صورت G روی K شکافته می‌شود.

برهان قرار می‌دهیم $|G/K| = n$ و $|K| = m$. توجه داریم که، کافی است نشان دهیم G دارای یک زیرگروه H از مرتبهٔ n است: زیرا در این صورت، چون $(n,m) = 1$، خواهیم داشت $H \cap K = 1$، و از این‌رو نیز، بنابر ۴۰.۳، $|HK| = nm$ و در نتیجه $HK = G$.

با استقرا بر m ثابت می‌کنیم که G دارای زیرگروهی است از مرتبهٔ n. اگر $m = 1$، حکم بدیهی است، بنابراین فرض می‌کنیم که $m > 1$. p را مقسوم‌علیه اولی از m، و P را یک p زیرگروه سیلوی K، می‌گیریم و قرار می‌دهیم $N = N_G(P)$. در این صورت بنابر لم فراتینی (۱۳.۵)، $G = NK$. بنابر ۴۰.۳، $N \cap K \trianglelefteq N$ و $N/N\cap K \cong G/K$؛ پس $N/N\cap K$ از مرتبهٔ n است. هرگاه $N < G$ آنگاه $N \cap K < K$ و در نتیجه $|N\cap K|$ مقسوم‌علیه واقعی m است. در این صورت، به‌موجب فرض استقرا N دارای زیرگروهی چون H از مرتبهٔ n است. ازاین‌رو H نیز زیرگروه G از مرتبهٔ n است.

بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $N = G$، یعنی اینکه $P \trianglelefteq G$. چون p، m را می‌شمارد، $P \neq 1$. قرار می‌دهیم $Z = Z(P)$. در این صورت بنابر ۲۸.۴ و ۱۲۱، $1 < Z \trianglelefteq G$. به‌موجب ۳۰.۳، $K/Z \trianglelefteq G/Z$ و $G/Z/K/Z \cong G/K$، پس $G/Z/K/Z$ از مرتبهٔ n است. به‌علاوه $|K/Z|$ یک مقسوم‌علیه واقعی m است و در نتیجه بنابر فرض استقرا G/Z دارای زیرگروه L/Z از مرتبهٔ n است، که در آن $L \leqslant G$.

محققاً p، n را نمی‌شمارد و در نتیجه Z یک زیرگروه هال نرمال L است. چون Z آبلی نیز هست، از ۲۹.۱۰ نتیجه می‌شود که L بر Z شکافته می‌شود، از این‌رو L دارای یک زیرگروه H از مرتبهٔ n است. در این صورت H نیز زیرگروه G از مرتبهٔ n خواهد بود. به این ترتیب برهان استقرایی خاتمه می‌یابد.

اکنون بررسی می‌کنیم که آیا در ۳۰.۱۰، همچون در ۲۹.۱۰، متممها مزدوج‌اند. ثابت می‌کنیم

۳۱.۱۰ قضیه (زاسنهاوس [b۴۱]). فرض می‌کنیم K یک زیرگروه هال نرمال از گروه متناهی G باشد و فرض می‌کنیم که یا K حل‌پذیر باشد یا G/K. در این صورت متممها برای K در G، ردهٔ تزویجی واحدی از زیر گروههای G تشکیل می‌دهند.

برهان فرض می‌کنیم H و H^* متممهایی برای K در G باشند. کافی است نشان دهیم که H و H^* در G مزدوج‌اند. با استقرا بر $|G|$ استدلال و فرض می‌کنیم $|G/K| = n$ و $|K| = m$. اگر $n = 1$ یا $m = 1$، حکم بدیهی است؛ بنابراین می‌توانیم چنین فرض کنیم که $1 < n$ و $1 < m$.

(i) ابتدا K را حل‌پذیر می‌گیریم. بنابر ۵۱.۳ و ۱۵.۳، $K' \trianglelefteq G$. به‌موجب ۳۰.۳، K/K' زیرگروه هال نرمالی از G/K' است. همچنین (بنابر ۴۰.۳) HK'/K' و H^*K'/K' متممهایی برای K/K' در G/K' هستند. چون K/K' آبلی است (۵۲.۳)، به‌موجب ۲۹.۱۰ نتیجه می‌شود که HK'/K' و H^*K'/K' در G/K' مزدوج‌اند. از این‌رو عضو $g \in G$ وجود دارد به قسمی که

$$H^*K' = (HK')^g = H^gK'.$$

قرار می‌دهیم $|K'| = m'$. در این صورت m'، m را می‌شمارد، و چون $|H^*K'/K'| = n$، K' یک زیرگروه هال نرمال H^*K' است. به‌علاوه، H^* و H^g متممهایی برای K' در H^*K' هستند، و K' حل‌پذیر است (۴۶.۷). چون K حل‌پذیر است و $K \neq 1$، $K' < K$ (۵۲.۷). بنابراین

$$|H^*K'| = nm' < nm = |G|.$$

ازاین‌رو بنابر فرض استقرا H^* و H^g در H^*K' مزدوج‌اند. لذا H و H^* در G مزدوج‌اند و بحث استقرا در این حالت کامل می‌شود.

(ii) حال فرض می‌کنیم که G/K حل‌پذیر است. چون $K < G$، پس یک عامل اصلی J/K از G وجود پیدا می‌کند و چون G/K حل‌پذیر است، برای pای که n را می‌شمارد، J/K یک pگروه آبلی مقدماتی است (۵۶.۷). پس $K < J \leqslant G = HK$؛ بنابراین به موجب قاعدهٔ ددکیند (۳.۷)، $J = (H \cap J)K$. به‌همین نحو $J = (H^* \cap J)K$. چون p، m را نمی‌شمارد، J، p پوچ‌توان است با p متمم نرمال K، و نیز $H \cap J$، و $H^* \cap J$، p زیرگروههای سیلوی J هستند. از این‌رو، بنابر قضیهٔ سیلو، برای $x \in J$ی؛

$$H^* \cap J = (H \cap J)^x.$$

به‌علاوه $H \cap J \trianglelefteq H$ و در نتیجه $H^* \cap J = (H \cap J)^x \trianglelefteq H^x$. همچنین $H^* \cap J \trianglelefteq H^*$. قرار می‌دهیم $L = H^* \cap J$ و $N = N_G(L)$. لذا N هر دوی H^x و H^* را شامل است. به‌خصوص $NK = G$. بنابر ۴۰.۳، $N \cap K \trianglelefteq N$ و $N/(N \cap K) \cong NK/K = G/K$. بنابراین $N/(N \cap K)$ حل‌پذیر است و $N \cap K$ یک زیر گروه هال از N است. به‌علاوه، $|N/N \cap K| = |G/K| = n = |H^*|$. حال $(N \cap K)L \trianglelefteq N$ (۳۹.۳)، بنابراین به‌موجب ۳۰.۳، $(N \cap K)L/L \trianglelefteq N/L$ و

$$N/L\big/(N \cap K)L/L \cong N/(N \cap K)L \cong N/(N \cap K)\big/(N \cap K)L/(N \cap K),$$

که این هم حل‌پذیر است (۴۶.۷). همین‌طور چون بنابر ۴۰.۳،

$$(N \cap K)L/L \cong (N \cap K)/(N \cap K \cap L) \cong N \cap K,$$

$(N \cap K)L/L$ یک زیرگروه هال N/L است. علاوه بر این $|(N \cap K)L| = |N \cap K|\,|L|$، و در نتیجه

$$|H^*/L| = |N/(N \cap K)|\big/|L| = |N/(N \cap K)L|.$$

از این‌رو H^*/L و H^x/L متممهایی برای $(N \cap K)L/L$ در N/L هستند. چون $K < J$، $L \neq 1$ و در نتیجه $|N/L| < |G|$. لذا به‌موجب فرض استقرا H^*/L و H^x/L در N/L مزدوج‌اند. بنابراین H و H^x در G مزدوج‌اند (۲۳۰) و استدلال استقرایی در این حالت کامل می‌شود.

اشاره. در این قضیه چون $(|G/K|, |K|) = ۱$، یا $|G/K|$ و یا $|K|$ فرد است. بنابر قضیهٔ فایت‌ـتامپسن (۱۲.۱؛ ۳۸۳ را ببینید) نتیجه می‌شود که یا G/K و یا K لزوماً حل‌پذیر خواهد بود. بنابراین فرض قضیه که یا K و یا G/K حل‌پذیر است زاید است. اما هیچ اثباتی از تزویج متممها در حالت کلی شناخته‌نشده که یکبار هم به قضیهٔ بسیار ژرف ۱۲.۱ ارجاع داده نشود.

۵۷۶. فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$، که $|G/H| = n < \infty$، $|H/J| = m < \infty$، $(n, m) = ۱$ و H/J آبلی است. فرض می‌کنیم $\sim$ رابطه‌ای هم‌ارزی بر مجموعهٔ $\mathscr{T}$ متشکل از تمام تراگردها برای H در G باشد، که در ۳.۱۰ تعریف شده است. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(i) یک متمم نرمال برای H/J در G وجود دارد.

(ii) $J \trianglelefteq G$ و برای زیرگروهی چون K از G، $G/J = (H/J) \times (K/J)$.

(iii) به‌ازای هر $g \in G$ و هر $T \in \mathscr{T}$، $gT \sim Tg$.

(ر ک. ۱۶.۱۰. راهنمایی. در مورد (ii) $\Rightarrow$ (iii)؛ فرض کنید که $g \in G$ و نشان دهید که اعداد صحیح مثبت s، $n_1, \cdots, n_s$ و عضوهای $k_1, \ldots, k_s \in K$ وجود دارند به‌طوری که $n_1 + \cdots + n_s = n$، و به‌ازای $i = 1, \ldots, s$، $Hg^{-n_i}k_ig^{n_i} = Hk_i$ و

$$U = \{g^{-j}k_ig^j : j = 0, 1, \cdots, n_i - 1; i = 1, \cdots, s\}$$

یک تراگرد برای H در G است. برای این U؛ $U^g \sim U$ و از این‌رو $Ug \sim gU$. به‌ازای هر $T \in \mathscr{T}$ نتیجه بگیرید که $T^g \sim T$، و بنابراین $Tg \sim gT$.)

۵۷۷. فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \trianglelefteq G$، که G/H متناهی و H/J آبلی است. فرض می‌کنیم τ انتقال $G \to H/J$، و $\operatorname{Im} \tau = I/J$ که $J \leqslant I \leqslant H$. در این صورت $[G, I] \leqslant J$.

۵۷۸. (زاسنهاوس [b۴۱]). فرض می‌کنیم که G یک گروه متناهی باشد با یک زیرگروه هال نرمال آبلی A و τ را انتقال از G به‌توی A می‌گیریم. در این صورت

(i) $\operatorname{Im} \tau = Z(G) \cap A$.

(ii) $\operatorname{Ker} \tau \cap \operatorname{Im} \tau = ۱$.

(iii) $G = \operatorname{Ker} \tau \times \operatorname{Im} \tau$.

(iv) $A \cap \operatorname{Ker} \tau \leqslant [A, G]$.

(v) $A \cap \operatorname{Ker} \tau = [A, G] = G' \cap A$.

(vi) $A = (G' \cap A) \times (Z(G) \cap A)$.

(vii) هرگاه $A < G$ و G تجزیه‌ناپذیر باشد (۸۱)، آنگاه $Z(G) \cap A = ۱$ و $A \leqslant G'$.

(راهنمایی. برای (i) و (ii)، از ۵۵۳ و ۵۷۷؛ برای (iv)، از ۱۴.۱۰، و برای (v)، از ۱۶۲؛ و برای (vi)، از ۱۲.۹ استفاده کنید.)

۵۷۹. مثالی از یک گروه متناهی G با یک زیرگروه نرمال چون K ارائه دهید به قسمی که G بر K شکافته شود، اما متممهای K در G ردهٔ هم‌ارزی واحدی از زیرگروههای G را تشکیل ندهند (ر ک. ۲۹.۱۰، ۳۰.۱۰؛ ۳۱.۱۰).

۵۸۰. فرض می‌کنیم K یک زیرگروه هال نرمال از گروه متناهی G باشد.

(i) در این صورت K در G مشخصه است.

(ii) H را یک متمم برای K در G می‌گیریم (که بنابر ۳۰.۱۰ وجود دارد) و فرض می‌کنیم که یا K و یا G/K حل‌پذیر باشد. در این صورت H در G هم درون پایاست و هم نرمال‌گرا: ۲۶۷ و ۲۶۸ را ببینید.

۵۸۱. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$، که G یک گروه متناهی است. فرض می‌کنیم که $\operatorname{Aut} K$ بر $\operatorname{Inn} K$ شکافته شود. هرگاه $(|G/K|, |Z(K)|) = ۱$ آنگاه G بر K شکافته می‌شود. (راهنمایی. عمل G را بر K به‌وسیلهٔ تزویج در نظر بگیرید و از ۱۲.۹، ۲۹.۱۰ و ۵۰۱ استفاده کنید.)

۵۸۲. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و p یک مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد. K را یک زیرگروه نرمال G می‌گیریم به‌طوری که p، $|G/K|$ را نشمارد. در این صورت زیرگروهی چون H از G وجود دارد به‌طوری که $G = HK$ و p، $|H|$ را نمی‌شمارد. (راهنمایی. از ۱۳.۵ و ۳۰.۱۰ استفاده کنید.)

قبل از ارائهٔ کاربردهای عمدهٔ دیگری از ۱۶.۱۰، ما مفهوم اتصال را معرفی می‌کنیم. این مفهوم در تحلیلهای تازهٔ گروههای سادهٔ متناهی نقش برجسته‌ای دارد.

۳۲.۱۰ تعاریف (i) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. می‌گوییم دو عضو (یا دو زیرمجموعهٔ) H در H به‌وسیلهٔ G اتصال یافته‌اند اگر این دو عضو در G مزدوج باشند ولی در H مزدوج نباشند.

برای مثال؛ جایگشتهای (۱۲۳) و (۱۳۲) در $\langle(۱۲۳)\rangle$ به‌وسیلهٔ Σ_3 اتصال یافته‌اند.

بنابراین ۱۶.۱۰ (ii) را می‌توان بار دیگر به‌صورت زیر بیان کرد: 'هرگاه h_1 و h_2 اعضایی از H باشند که در H به‌وسیلهٔ G اتصال یافته‌اند، $Jh_1 = Jh_2$'. (این احکام هم‌ارزند، زیرا اگر $h_1, h_2 \in H$ و h_1 و h_2 در H مزدوج باشند آنگاه خود به خود $Jh_1 = Jh_2$، زیرا H/J آبلی است.) لم برنساید ۲۰.۱۰ را می‌توان بار دیگر چنین بیان کرد: 'هرگاه P یک p زیرگروه سیلوی گروه متناهی G باشد، آنگاه هر دو عضو $Z(P)$ که در P به‌وسیلهٔ G اتصال یافته باشند؛ در P به‌وسیلهٔ $N_G(P)$ نیز اتصال یافته‌اند.'

(ii) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این‌صورت زیرگروه کانونی H در G چنین تعریف می‌شود

$$\mathrm{Foc}_G(H) = \langle [h,g] : h \in H, g \in G, [h,g] \in H \rangle.$$

یا هم‌ارز با آن

$\mathrm{Foc}_G(H) = \langle h_1 h_2^{-1}$: h_1 و h_2 اعضای H مزدوج در Gاند$\rangle$.

در این صورت واضح است که

$$H' \leqslant \mathrm{Foc}_G(H) \leqslant G' \cap H.$$

هرگاه $H \trianglelefteq G$ آنگاه به‌ازای هر $h \in H$ و $g \in G$، $[h,g] \in H$ (۱۶۲)، و بنابراین

$$\mathrm{Foc}_G(H) = [H,G].$$

ولی در حالت کلی ممکن است داشته باشیم $[H,G] \leqslant H$ و بنابراین، $\mathrm{Foc}_G(H) < [H,G]$.
هرگاه هیچ اتصالی در H به‌وسیلهٔ G وجود **نداشته باشد**؛ یعنی هرگاه اعضای H که در G مزدوج‌اند قبلاً در H مزدوج باشند، آنگاه $\mathrm{Foc}_G(H) = H'$. در حالت کلی ممکن است چنین تصور کنیم که خارج قسمت $\mathrm{Foc}_G(H)/H'$ **به‌نحوی** میزان اتصالی را که در H به‌وسیلهٔ G صورت می‌گیرد اندازه‌گیری می‌کند.

۳۳.۱۰ قضیه فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. همچنین فرض می‌کنیم که $|G:H| = n < \infty$، $|H/H'| = l < \infty$ و $(n,l) = 1$. در این صورت $\mathrm{Foc}_G(H) = G' \cap H$، و یک متمم نرمال برای $H/(G' \cap H)$ در G وجود دارد.

برهان قرار می‌دهیم $J = \mathrm{Foc}_G(H)$. در این صورت

$$H' \leqslant J \leqslant H,$$

و در نتیجه (بنابر ۳۰.۳ و ۵۲.۳) $J \trianglelefteq H$ و H/J آبلی است. به‌علاوه؛ هرگاه $|H,J| = m$، آنگاه m، l را می‌شمارد و بنابراین $(n,m) = 1$. **لذا می‌توانیم** از ۱۶.۱۰ استفاده کنیم. فرض می‌کنیم h_1 و h_2 اعضای H باشند که در G مزدوج‌اند. در این صورت بنابر تعریف J، خواهیم داشت $h_1 h_2^{-1} \in J$ و در نتیجه $Jh_1 = Jh_2$. از این‌رو، بنابر ۱۶.۱۰، یک متمم نرمال چون K برای H/J در G وجود دارد.

پس

$$G/K \cong H/J.$$

از این‌رو G/K آبلی است؛ و از (۵۲.۳) نتیجه می‌شود که

$$G' \leqslant K.$$

حال

$$J \leqslant G' \cap H \leqslant H \cap K = J.$$

بنابراین

$$J = G' \cap H.$$

مهمترین حالت خاص این قضیه، قضیهٔ زیرگروه کانونی نامیده می‌شود.

۳۴.۱۰ فرع (قضیهٔ زیرگروهی کانونی: د.گ. هیگمن [a۵۶]، ۱۹۵۳). فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلو گروه متناهی G باشد. در این صورت $\mathrm{Foc}_G(P) = G' \cap P$.
حقایق زیر اهمیت این قضیه را روشن می‌سازند.

۳۵.۱۰ (i) برای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول، وقتی که $\mathfrak{X}$ رده‌ای از ϖ گروههای آبلی متناهی باشد، هر گروه متناهی G دارای یک $\mathfrak{X}$مانده‌یی است: این 'ϖمانده‌یی آبلی' از G عبارت است از $G/(G'O^{\varpi}(G))$ (۴۴.۳ و ۴۵.۳ را ببینید).

(ii) به‌ازای هر گروه متناهی G و هر p زیرگروه سیلو P از G، p مانده‌یی آبلی G با $P/(G' \cap P)$ یکریخت است.

برهان فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد.
(i) فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت G/K یک ϖ گروه آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leqslant K$ و $O^{\varpi}(G) \leqslant K$ (بنابر ۵۲.۳ و ۴۴.۳)، از این‌رو اگر و تنها اگر $G'O^{\varpi}(G) \leqslant K$.
به‌علاوه (بنابر ۳۹.۳)، $G'O^{\varpi}(G) \trianglelefteq G$.
(ii) فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلو G باشد. در این صورت، بنابر ۴۰.۳،

$$(P/G' \cap P) \cong PG'/G',$$

که PG'/G' یک p زیرگروه سیلوی G/G' است (۲۵۲).

فرض می‌کنیم

$$R = G'O^{p}(G) \trianglelefteq G$$

لذا بنابر ۳۰.۳ و (i) خواهیم داشت

$$R/G' = O^p(G/G').$$

از این‌رو، چون G/G' آبلی است، R/G'، p متمم (یکتای) G/G' است و (بنابر ۵۶۰ و ۵۶۳)، $G/G'\big/R/G'$ با p زیرگروه سیلو (یکتای) G/G' یکریخت است. لذا بنابر ۳۰.۳

$$G/R \cong P/(G'\cap P).$$

اکنون مشاهده می‌کنیم که قضیهٔ زیرگروه کانونی، pماندهٔ آبلی از گروه متناهی G را به اعضای یک p زیرگروه سیلوی G که به‌وسیلهٔ G اتصال یافته‌اند مربوط می‌کند.

از قضیه زیرگروه کانونی برای به‌دست آوردن اطلاعاتی راجع به گروههای متناهی با p زیرگروههای آبلی استفاده می‌کنیم. قضیهٔ مذکور حالت خاصی از یک قضیه منسوب به اُ. گرون [a۴۵] است که بعداً به آن مراجعه خواهیم کرد.

۳۶.۱۰ قضیه فرض می‌کنیم G گروهی متناهی با یک p زیرگروه سیلو آبلی P باشد، و قرار می‌دهیم $H = N_G(P)$. در این صورت $G/O^p(G) \cong H/O^p(H)$.

برهان چون P آبلی است و $PO^p(G) = G$ (بنابر ۲۵۲)، $G/O^p(G)$ آبلی است و از این‌رو p ماندهٔ آبلی G است. همچنین P، p زیرگروه سیلو (یکتای) H است، و در نتیجه، با توضیحی مشابه، $H/O^p(H)$؛ p ماندهٔ آبلی H است. از این‌رو بنابر ۳۵.۱۰، آنچه باید ثابت کنیم این است که

$$P/(G'\cap P) \cong P/(H'\cap P).$$

روشن است که $H'\cap P \leqslant G'\cap P$؛ باقی می‌ماند نشان دهیم که $G'\cap P \leqslant H'\cap P$، یا هم‌ارز با آن، به‌موجب قضیهٔ زیرگروه کانونی؛ نشان می‌دهیم که

$$\mathrm{Foc}_G(P) \leqslant \mathrm{Foc}_H(P).$$

فرض می‌کنیم x_1 و x_2 دو عضو P باشند که در G مزدوج‌اند. در این صورت، چون P آبلی است، لم برنساید ۲۰.۱۰ نشان می‌دهد که x_1 و x_2 در H مزدوج‌اند. از این‌رو

$$\mathrm{Foc}_G(P) \leqslant \mathrm{Foc}_H(P),$$

و قضیه ثابت می‌شود.

سپس، از چند قضیهٔ قبلی برای اثبات قضیهٔ شکافتگی دیگری، که در این حالت منسوب است به و. گاشوتس، استفاده می‌کنیم. به لم زیر نیاز پیدا می‌کنیم.

۳۷.۱۰ لم فرض می‌کنیم G گروهی متناهی باشد با یک p زیرگروه سیلوی نرمال آبلی P، و نیز $O^p(G) = G$. Q را یک p متمم G می‌گیریم (که بنابر ۲۹.۱۰ وجود دارد). در این صورت $N_G(Q) = Q$.

برهان قرار می‌دهیم $R = N_G(Q)$ و $P_0 = P\cap R$. چون $P \trianglelefteq G$، $P_0 \trianglelefteq R$. به‌علاوه به‌موجب تعریف، $Q \trianglelefteq R$، و چون P_0 یک pگروه است و p، $|Q|$ را نمی‌شمارد، $P_0 \cap Q = 1$. از این‌رو بنابر ۵۳.۳،

$$[P_0, Q] = 1.$$

بنابراین، چون P آبلی نیز هست،

$$C_G(P_0) \geqslant PQ = G.$$

لذا

$$P_0 \leqslant Z(G).$$

چون؛ بنابر فرض، $O^p(G) = G$، p، $|G/G'|$ را نمی‌شمارد (۲۹۷)، و بنابراین $P \leqslant G'$ (۲۵۲ را ببینید). از این‌رو بنابر ۸.۱۰ (با $H = P$ و $J = 1$)، داریم

$$P_0 \leqslant P\cap G'\cap Z(G) = 1.$$

چون

$$Q \leqslant R \leqslant G = PQ,$$

به‌موجب قاعدهٔ ددکیند (۳.۷) نتیجه می‌شود که

$$R = P_0Q = Q,$$

آنچه ادعا شده بود.

۳۸.۱۰ قضیه (و. گاشوتس [a۳۴]؛ ۱۹۵۲). فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد. هرگاه p زیرگروههای سیلو $O^p(G)$ آبلی باشند، G بر $O^p(G)$ شکافته می‌شود.

برهان با استقرا بر $|G|$ استدلال می‌کنیم. اگر $|G| = 1$، حکم بدیهی است، بنابراین فرض می‌کنیم که $|G| > 1$. قرار می‌دهیم $K = O^p(G)$، و P را یک p زیرگروه سیلوی K می‌گیریم. فرض می‌کنیم $L = N_K(P)$. بنابر فرض، P آبلی است و به‌موجب تعریف K، $O^p(K) = K$ (۱۵۶ را ببینید). از این‌رو بنابر ۳۶.۱۰، $O^p(L) = L$.

قرار می‌دهیم $H = N_G(P)$. در این صورت $H \cap K = L$ و چون $K \trianglelefteq G$، $L \trianglelefteq H$. بنابر لم فراتینی (۱۳.۵)، $HK = G$. لذا K یک متمم نرمال برای H/L در G است. به‌ویژه،

$$H/L \cong G/K,$$

که یک p گروه است. چون نشان داده‌ایم که $O^p(L) = L$، از اینجا نتیجه می‌شود که

$$L = O^p(H).$$

چون $L \leqslant K$ و p زیرگروههای سیلو K آبلی‌اند، لذا p زیرگروههای سیلو L آبلی هستند. از این‌رو هرگاه $H < G$، با توجه به فرض استقرا نتیجه می‌گیریم که H بر L شکافته می‌شود. پس اگر P_1 متممی برای L در H باشد، آنگاه

$$P_1K = P_1LK = HK = G \quad \text{و} \quad P_1 \cap K = P_1 \cap H \cap K = P_1 \cap L = 1$$

در نتیجه P_1 متممی برای K در G نیز هست.

بنابراین می‌توان فرض کرد که $H = G$، یعنی اینکه $P \trianglelefteq G$. پس P یک p زیرگروه سیلو نرمال آبلی K است، و در نتیجه بنابر ۲۹.۱۰، K روی P شکافته می‌شود و متممهای P در K، ردهٔ تزویج واحدی از زیرگروههای K تشکیل می‌دهند. فرض می‌کنیم Q متممی برای P در K باشد، یعنی، یک p متمم برای K. سپس مرور اثبات لم فراتینی (۱۳.۵؛ ۲۶۷ را نیز ببینید) نشان می‌دهد که

$$N_G(Q)K = G.$$

چون علاوه بر این $O^p(K) = K$، ۳۷.۱۰ نشان می‌دهد که

$$N_G(Q) \cap K = N_K(Q) = Q.$$

لذا K یک متمم نرمال برای $N_G(Q)/Q$ در G است. به‌ویژه

$$N_G(Q)Q \cong G/K,$$

که یک p گروه است. پس اگر P_2 یک p زیرگروه سیلوی $N_G(Q)$ باشد،

$$P_2Q = N_G(Q).$$

از این‌رو

$$P_2K = P_2QK = N_G(Q)K = G$$

و

$$P_2 \cap K = P_2 \cap N_G(Q) \cap K = P_2 \cap Q = 1,$$

چراکه p، $|Q|$ را نمی‌شمارد. بنابراین P_2 یک متمم برای K در G است و استدلال استقرایی کامل می‌شود.

۵۸۳. (i) فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلو از گروه متناهی G باشد، که در آن p یک مقسوم‌علیه اول $|G|$ است. ثابت کنید که اگر هیچ دو عضو متمایز P، در P به‌وسیلهٔ G اتصال نیافته باشند، آنگاه $P \nleqslant G'$ و $O^p(G) < G$.

(ii) مثالی ارائه دهید از یک گروه حل‌پذیر متناهیِ G با یک p زیرگروه سیلوی P، به‌ازای مقسوم‌علیه اولی مانند p از $|G|$، به‌طوری که $P \leqslant G'$.

۵۸۴. (i) ثابت کنید که هرگاه H یک زیرگروه آبلی G باشد و یک متمم نرمال برای H در G وجود داشته باشد، آنگاه $\mathrm{Foc}_G(H) = 1$.

(ii) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، و $\mathrm{Foc}_G(H) = 1$. ثابت کنید که H آبلی است و هیچ دو عضو متمایز H، در H به‌وسیلهٔ G اتصال نیافته‌اند. با یک مثال نشان دهید که لزومی ندارد یک متمم نرمال برای H در G وجود داشته باشد. (رک. ۱۸.۱۰).

۵۸۵. مثالی از یک گروه G با یک زیرگروه H ارائه دهید به‌طوری که

$$\mathrm{Foc}_G(H) < H \cap [H,G].$$

۵۸۶. (i) فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، با $|G:H| < \infty$، $|H/H'| < \infty$ و

$$(|G:H|, |H/H'|) = 1.$$

ثابت کنید که $H \cap [H,G] = G' \cap H$ (رک. ۵۵۶ و ۳۳.۱۰).

(ii) مثالی از یک گروه G با یک زیرگروه H ارائه دهید که $H \cap [H,G] < G' \cap H$.

۵۸۷. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$، و نیز $|G:H| = n < \infty$ و $|H/H'| = l < \infty$ و $(n,l) = 1$. τ را انتقال از G به‌توی $H/(G' \cap H)$ می‌گیریم. در این صورت

$$\mathrm{Im}\,\tau = H/(G' \cap H).$$

۵۸۸. فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلوگروه متناهی G باشد. در این صورت احکام زیرهم‌ارزند:

(i) یک متمم نرمال برای P/P' در G وجود دارد.

(ii) $G' \cap P = P'$.

۵۸۹. مثالی از یک گروه متناهی G با یک p زیرگروه سیلو P، به‌ازای عدد اول p، ارائه دهید به‌طوری که $G/O^p(G) \ncong H/O^p(H)$، که در آن $H = N_G(P)$ (ر.ک. ۳۶.۱۰).

۵۹۰. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد با یک p زیرگروه سیلو دوری. در این صورت یا G، p پوچ‌توان است یا $O^p(G) = G$. (راهنمایی. ۳۸.۱۰، ۵۰۲ و ۴۹۲ را به‌کار ببرید.)

این فصل را با اثبات چند تعمیم مهم از قضایای انتقال که قبلاً به‌دست آمده‌اند خاتمه می‌دهیم. مناسب می‌دانیم که نماد جدیدی را برای تزویج اعضا معرفی کنیم: این نمادگذاری منسوب است به هـ. ویلانت. یادآوری می‌کنیم که تزویج بر مجموعهٔ متشکل از تمام اعضای یک گروه، یک رابطهٔ هم‌ارزی است (۴۹).

۳۹.۱۰ تعریف فرض می‌کنیم $x, y \in G$. می‌نویسیم $x \underset{G}{=} y$ اگر و تنها اگر x و y در G مزدوج باشند.

تعمیم جزئی از ۱۶.۱۰ را ثابت می‌کنیم که در آن فرض آبلی بودن H/J به فرض پوچ‌توان بودن H/J تضعیف‌شده است.

۴۰.۱۰ قضیه (هـ. ویلانت). فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant G$، با $|G:H| = n < \infty$ و $|H/J| = m < \infty$، $(n,m) = 1$ و H/J پوچ‌توان. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(i) یک متمم نرمال برای H/J در G وجود دارد.

(ii) هرگاه $h_1, h_2 \in H$ و $h_1 \underset{G}{=} h_2$، آنگاه $Jh_1 \underset{H/J}{=} Jh_2$.

برهان (i) ⇐ (ii)، در این مورد استدلال دقیقاً شبیه استدلال (i) ⇐ (ii) برای ۱۶.۱۰ است، با این تفاوت که تساوی آخر حذف شده است.

(ii) ⇐ (i) با استقرا بر m استدلال می‌کنیم. اگر $m = 1$، حکم (i) بدیهی است، و بنابراین فرض می‌کنیم که $m > 1$. قرار می‌دهیم $Z(H/J) = J_1/J$. پس بنابر ۳۰.۳ و ۴۶.۷، $J_1 \trianglelefteq H$، و H/J_1 پوچ‌توان است. فرض می‌کنیم $|H/J_1| = m_1$. در این صورت m_1، m را می‌شمارد. بنابراین $(n, m_1) = 1$؛ و به‌موجب ۵۴.۷، $m_1 < m$. گیریم $h_1, h_2 \in H$ که $h_1 \underset{G}{=} h_2$. بنابر فرض $Jh_1 \underset{H/J}{=} Jh_2$، و در نتیجه بدیهی است که $J_1h_1 \underset{H/J_1}{=} J_1h_2$. اکنون

به‌موجب فرض استقرا نتیجه می‌شود که یک متمم نرمال چون K_1 برای H/J_1 در G وجود دارد. پس

$$H/J_1 \cong G/K_1.$$

اما $J \trianglelefteq J_1 \leqslant K_1$، و $|K_1 : J_1| = |G:H| = n$. فرض می‌کنیم $|J_1/J| = m_2$: در این صورت m_2 یک مقسوم‌علیه m است، و در نتیجه $(n, m_2) = 1$. به‌علاوه، J_1/J آبلی است. فرض می‌کنیم $x_1, x_2 \in J_1$، که $x_1 \underset{K_1}{=} x_2$. چون $x_1, x_2 \in H$، بنابر فرض نتیجه می‌شود $Jx_1 \underset{H/J}{=} Jx_2$. از این‌رو، چون $Jx_1,\ Jx_2 \in J_1/J = Z(H/J)$، نتیجه می‌شود که $Jx_1 = Jx_2$. اکنون بنابر ۱۶.۱۰ یک متمم نرمال چون K برای J_1/J در K_1 وجود دارد. اما در این صورت

$$HK = HJ_1K = HK_1 = G$$

و

$$H \cap K = H \cap K_1 \cap K = J_1 \cap K = J$$

لذا K یک متمم برای H/J در G است.

بالاخره، نشان می‌دهیم که $K \trianglelefteq G$. داریم

$$J \leqslant K \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq G.$$

فرض می‌کنیم $h \in H$. در این صورت، چون $J \trianglelefteq H$،

$$J = J^h \leqslant K^h \trianglelefteq K_1^h = K_1.$$

بنابر ۴۰.۳

$$|K^h/(K^h \cap K)| = |K^hK/K|.$$

سمت چپ این تساوی

$$|K^h : J^h| = |K:J| = |G:H| = n,$$

را می‌شمارد، و حال آنکه سمت راست

$$|K_1/K| = |J_1/J| = m_2,$$

را می‌شمارد. چون $(n, m_2) = 1$، نتیجه می‌شود که $K^h \leqslant K$. به‌همین نحو $K \leqslant K^h$. لذا

$$K^h = K.$$

چون این رابطه به‌ازای هر $h \in H$ صادق است و چون $G = HK$، این نشان می‌دهد که

$$K \trianglelefteq G.$$

به این ترتیب اثبات استقرایی کامل می‌شود.

به‌عنوان یک حالت خاص، تعمیم ۱۸.۱۰ در زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم.

۴۱.۱۰ فرع فرض می‌کنیم H یک زیرگروه هال پوچ‌توان از گروه متناهی G باشد. در این صورت یک متمم نرمال برای H در G وجود دارد اگر و تنها اگر هیچ دو عضو H، در H به‌وسیلهٔ G اتصال نیافته باشند.

شرط لازم و کافی را برای اینکه یک زیرگروه هال (نه لزوماً پوچ‌توان) از گروه متناهی G یک متمم نرمال در G داشته باشد توسط م. سوزوکی در [a۹۴] ثابت شده است. در این اثبات از نظریهٔ سرشت استفاده شده است.

به‌عنوان فرع دیگری از ۴۰.۱۰، ثابت می‌کنیم

۴۲.۱۰ فرع فرض می‌کنیم $J \trianglelefteq H \leqslant V \leqslant G$، با $|G : H| = n < \infty$،

$$|H/J| = m < \infty, (n, m) = 1$$

و H/J پوچ‌توان باشد. فرض می‌کنیم هرگاه $h_1, h_2 \in H$ و $h_1 \underset{G}{=} h_2$، آنگاه $h_1 \underset{V}{=} h_2$. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(i) یک متمم نرمال برای H/J در G وجود دارد.

(ii) یک متمم نرمال برای H/J در V وجود دارد.

برهان $(\mathrm{i}) \Rightarrow (\mathrm{ii})$ فرض می‌کنیم که K یک متمم نرمال برای H/J در G باشد: بنابراین $G = HK$، $K \trianglelefteq G$ و $H \cap K = J$. در این صورت $V \cap K \trianglelefteq V$ و بنابر قاعدهٔ ددکیند، (۳.۷)، $V = H(V \cap K)$. به‌علاوه $H \cap (V \cap K) = H \cap K = J$. لذا $V \cap K$ یک متمم نرمال برای H/J در V است.

$(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{i})$ فرض می‌کنیم $h_1, h_2 \in H$ با $h_1 \underset{G}{=} h_2$. در این صورت بنابه فرض $h_1 \underset{V}{=} h_2$. از این‌رو، اگر یک متمم نرمال برای H/J در V وجود داشته باشد؛ آنگاه بنابر ۴۰.۱۰ (که در آن V به‌جای G به‌کار برده شده)، $Jh_1 \underset{H/J}{=} Jh_2$، و در این صورت بار دیگر موجب ۴۰.۱۰ (که با G به‌کار برده شده)، یک متمم نرمال برای H/J در G وجود دارد.

اکنون ۴۲.۱۰ را برای یک تعمیم مهم ۳۶.۱۰ به‌کار می‌گیریم. نخست به یک تعریف نیاز داریم.

۴۳.۱۰ تعریف فرض می‌کنیم G گروهی متناهی و P یک p زیرگروه سیلو G باشد. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر p زیرگروه سیلو P^* از G که شامل $Z(P)$ باشد، داشته باشیم $Z(P^*) = Z(P)$.

در این صورت G، p نرمال خوانده می‌شود.

به‌سادگی ملاحظه می‌شود که تعریف p نرمال بودن فقط به p بستگی دارد نه به انتخاب pزیرگروه سیلو P از G (۵۹۳ (i) و (iii) را ببینید). به‌علاوه بدیهی است که اگر P آبلی باشد G، p نرمال است.

از لم زیر استفاده خواهیم کرد

۴۴.۱۰ لم فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی p نرمال باشد، و P یک p زیرگروه سیلو G. اگر $x_1, x_2 \in P$ و $x_1 \underset{G}{=} x_2$، آنگاه $x_1 \underset{W}{=} x_2$، که در آن $W = N_G(Z(P))$.

برهان فرض می‌کنیم $x \in P$، $g \in G$ و $x^g \in P$. در این صورت

$$Z(P) \leqslant C_G(x) \cap C_G(x^g) = C_G(x) \cap C_G(x)^g \quad (۲۲۹)$$

بنابر قضیهٔ سیلو، یک p زیرگروه سیلو چون P_1 از $C_G(x)$ شامل $Z(P)$ وجود دارد؛ و در این صورت یک p زیرگروه سیلو مانند P^* از G شامل P_1 نیز وجود خواهد داشت. چون $Z(P)^{g^{-1}} \leqslant C_G(x)$، برای یک $y \in C_G(x)$، داریم

$$Z(P)^{g^{-1}} \leqslant P_1^y.$$

اما

$$Z(P) \leqslant P \cap P^* \cap (P^*)^{yg}$$

از این‌رو، چون G، p نرمال است و بنابر ۲۲۹،

$$Z(P) = Z(P^*) = Z(P^*)^{yg}.$$

بنابراین

$$yg \in N_G(Z(P^*)) = N_G(Z(P)) = W\cdot$$

لذا برای یک $w \in W$، $yg = w$

از آنجایی که $y \in C_G(x)$،

$$x^g = x^{yg} = x^w,$$

و درنتیجه x و x^g در W مزدوج‌اند.

حال می‌توانیم قضیهٔ اصلی راجع به گروههای p نرمال را ثابت کنیم. این قضیه اصلاح قضیهٔ اَ. گرون است که توسط ف. هال صورت گرفته و تعمیم ۳۶.۱۰ است.

۴۵.۱۰ قضیه. (اَ. گرون [a۴۵]، ف. هال). فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی p نرمال باشد و P یک p زیرگروه سیلو G. در این صورت، به‌ازای هر زیرگروه V از G که شامل $N_G(Z(P))$ باشد،

$$G/O^p(G) \cong V/O^p(V)\cdot$$

برهان قرار می‌دهیم $W = N_G(Z(P))$. اگر $x_1, x_2 \in P$ و $x_1 \underset{G}{=} x_2$، آنگاه بنابر ۴۴.۱۰، $x_1 \underset{W}{=} x_2$ و بنابراین، چون $W \leqslant V$، $x_1 \underset{V}{=} x_2$. محققاً $O^p(V) \leqslant O^p(G)$ (۱۵۷). چون $P \leqslant V$، P یک p زیرگروه سیلو V است و بنابراین $PO^p(V) = V$ (۲۵۲). قرار می‌دهیم $J = P \cap O^p(V) \trianglelefteq P$. در این صورت $O^p(V)$ یک متمم نرمال برای P/J در V است. اما، چون P/J پوچ‌توان است (۴۴.۷)، می‌توانیم از ۴۲.۱۰ با $H = P$ و J و V مانند فوق استفاده کنیم. از این‌رو یک متمم نرمال چون K برای P/J در G وجود دارد. پس $K \trianglelefteq G$ و $G/K \cong P/J$، که یک p گروه است. بنابراین

$$O^p(G) \leqslant K\cdot$$

از این‌رو

$$P \cap O^p(G) \leqslant P \cap K = J = P \cap O^p(V) \leqslant P \cap O^p(G)$$

و در نتیجه

$$P \cap O^p(G) = P \cap K$$

چون $O^p(G)$ و K زیرگروههای نرمال Gاند، $P \cap O^p(G)$ و $P \cap K$ به‌ترتیب p زیرگروههای سیلو $O^p(G)$ و K هستند (۲۵۲). از این‌رو چون $K/O^p(G)$ یک p گروه است،

$$K = O^p(G)\cdot$$

بنابراین، چون $O^p(V)$ نیز یک متمم نرمال برای P/J در V است،

$$G/O^p(G) = G/K \cong P/J \cong V/O^p(V)\cdot$$

اکنون از ۴۲.۱۰ برای اثبات یک قضیهٔ بنیادی از فروبینوس استفاده می‌کنیم، این قضیه شرط لازم و کافی برای p پوچ‌توان بودن یک گروه متناهی است. نخست یک لم را ثابت می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که وقتی $H \leqslant G$، $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$ (۳۶.۴).

۴۶.۱۰ لم فرض می‌کنیم که G گروهی متناهی و P یک p زیرگروه سیلو G باشد. فرض می‌کنیم که به‌ازای هر زیرگروه Q از P، $N_G(Q)/C_G(Q)$ یک p گروه باشد. در این صورت، به‌ازای هر p زیرگروه سیلو P^* از G و هر $x \in P \cap P^*$، عضو $y \in C_G(x)$ وجود دارد به‌طوری که

$$P^* = P^y\cdot$$

برهان فرض می‌کنیم P^* یک p زیرگروه سیلو G باشد و $Q = P \cap P^*$. با استقرا بر $|P:Q|$ استدلال می‌کنیم. هرگاه $|P:Q| = 1$ آنگاه $P^* = P$ و حکم بدیهی است. حال فرض می‌کنیم که $|P:Q| > 1$. در این صورت $Q < P$ و در نتیجه بنابر ۶.۵، $Q < N_P(Q)$. به‌موجب قضیهٔ سیلو، یک p زیرگروه سیلو Q_1 از $N_G(Q)$ با $N_P(Q) \leqslant Q_1$ وجود دارد و نیز یک p زیرگروه سیلو P_1 از G با $Q_1 \leqslant P_1$. فرض می‌کنیم $x \in P \cap P^* = Q$. در این صورت همچنین $x \in P \cap P_1$. به‌علاوه، چون $Q < N_P(Q) \leqslant P \cap P_1$، $|P : P \cap P_1| < |P : Q|$. از این‌رو بنابر فرض استقرا، عضو $y_1 \in C_G(x)$ وجود دارد به‌طوری که $P_1 = P^{y_1}$.

به‌علاوه $Q < P^*$ و بنابراین $Q < N_{P^*}(Q)$ (۶.۵). چون $N_{P^*}(Q)$ یک p زیرگروه سیلو $N_G(Q)$ است، به‌موجب قضیهٔ سیلو عضو $w \in N_G(Q)$ وجود دارد به‌طوری که

$$N_{P^*}(Q) \leqslant Q_1^w\cdot$$

بنابر فرض $N_G(Q)/C_G(Q)$ یک p گروه است، و از این‌رو $N_G(Q) = Q_1 C_G(Q)$ (۲۵۲). بنابراین می‌توانیم انتخاب کنیم $w \in C_G(Q) \leqslant C_G(x)$، زیرا $x \in Q$.

اما

$$Q < N_{P^*}(Q) \leqslant P^* \cap P_1^w = P^* \cap P^{y_1 w}$$

قرار می‌دهیم $u = (y_1 w)^{-1} \in C_G(x)$. بنابراین

$$x = x^u \in Q^u < N_{P^*}(Q)^u \leqslant P \cap (P^*)^u.$$

از این‌رو $|P : Q| < |P : P \cap (P^*)^u|$ و در نتیجه بنابر فرض استقرا، عضو $y_2 \in C_G(x)$ وجود دارد به‌طوری که $(P^*)^u = P^{y_2}$. در این صورت $P^* = P^{y_2 y_1 w}$ و $y_2 y_1 w \in C_G(x)$، که اثبات استقرایی را کامل می‌کند.

۴۷.۱۰ قضیه. (فروبنیوس [a۳۲]). فرض می‌کنیم G گروهی متناهی و P یک p زیرگروه سیلو G باشد. در این‌صورت G، p پوچ‌توان است اگر و تنها اگر $N_G(Q)/C_G(Q)$ برای هر زیرگروه Q از P، یک p گروه باشد.

برهان فرض می‌کنیم که به‌ازای هر $Q \leqslant P$، $N_G(Q)/C_G(Q)$ یک pگروه باشد. در این صورت باید نشان دهیم که یک متمم نرمال برای P در G وجود دارد. قرار می‌دهیم $V = N_G(P)$. در این صورت $P \trianglelefteq V$ و $(|V/P|, |P|) = 1$؛ بنابراین به‌موجب قضیهٔ شور–زاسنهاوس (۳۰.۱۰)، یک متمم چون W برای P در V وجود پیدا می‌کند. پس

$$W \leqslant O^p(V) \leqslant C_G(P),$$

(۵۶۰)، زیرا بنابر فرض $N_G(P)/C_G(P)$ یک p گروه است. از این‌رو

$$P \leqslant C_G(W) \leqslant N_G(W),$$

و در نتیجه

$$W \trianglelefteq PW = V$$

لذا W یک متمم نرمال برای P در V است.

اکنون از ۴۲.۱۰ با $J = 1$، $H = P$ و $V = N_G(P)$ استفاده می‌کنیم. خاطرنشان می‌کنیم که P پوچ‌توان است (۴۴.۷). تنها باقی می‌ماند که شرط اتصال را بررسی کنیم. فرض می‌کنیم $x \in P$، $g \in G$ و $x^g \in P$. در این صورت $x \in P \cap P^{g^{-1}}$، و بنابراین به‌موجب ۴۶.۱۰؛ برای $y \in C_G(x)$ای،

$$P^{g^{-1}} = P^y.$$

پس $yg \in V$ و

$$x^g = x^{yg}$$

از این‌رو x و x^g در V مزدوج‌اند. لذا بنابر ۴۲.۱۰، یک متمم نرمال برای P در G وجود دارد.

به‌عکس، فرض می‌کنیم که G دارای p متمم نرمالی چون K باشد و $Q \leqslant P$. در این صورت

$$Q \trianglelefteq N_G(Q), \qquad K \cap N_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$$

و

$$Q \cap K \cap N_G(Q) = Q \cap K = 1$$

زیرا p، $|K|$ را نمی‌شمارد. از این‌رو بنابر ۵۳.۳،

$$[Q, K \cap N_G(Q)] = 1,$$

و در نتیجه

$$K \cap N_G(Q) \leqslant C_G(Q) \trianglelefteq N_G(Q)$$

اکنون به‌موجب ۴۰.۳، $N_G(Q)/(K \cap N_G(Q)) \cong KN_G(Q)/K \leqslant G/K$، که یک p گروه است. از این‌رو

$$O^p(N_G(Q)) \leqslant K \cap N_G(Q) \leqslant C_G(Q),$$

و بنابراین $N_G(Q)/C_G(Q)$ یک p گروه است.

۴۸.۱۰ قضیهٔ فروبنیوس، ۴۷.۱۰ را ج. گ. تامپسن برای pهای فرد بهبود قابل ملاحظه‌ای بخشیده است: هوپرت [b۲۱] ص ۴۳۸، قضیهٔ ۲.۶.۴، یا شنکمن [b۳۵] ص. ۲۷۳، قضیهٔ ۳.۹ a را ببینید. از قضیهٔ تامپسن تظریفهای بیشتری ساخته شده‌اند. برای مثال؛ گ. گلاوبرمن ثابت کرده است که هرگاه P یک p زیرگروه سیلو نابدیهی از گروه متناهی G باشد، با pی فرد، یک زیرگروه مشخصهٔ آبلی نابدیهی صریحاً تعریف‌شده‌ای چون A از P وجود دارد به‌طوری که هرگاه $N_G(A)$، p پوچ‌توان باشد آنگاه G، p پوچ‌توان است، گورنشتاین [b۱۳] ص. ۲۸۰ قضیهٔ ۱.۳.۸ را ببینید.

برای یک راه متفاوت با قضایای انتقال، براساس قضایای ظریف پیوندی که به‌وسیلهٔ ج. ل. آلپرین کشف شده، گورنشتاین [b۱۳]، فصلهای ۷ و ۸ و درسهای گ. گلاوبرمن را که در پاول و هیگمن [b۳۳] فصل ۱ عرضه شده، ببینید.

۵۹۱. (گ. زاپا [a۱۰۵]: [a۱۰۶] را نیز ببینید) فرض می‌کنیم H یک زیرگروه هال پوچ‌توان از گروه متناهی G باشد. در این صورت احکام زیر هم‌ارزند:

(i) یک متمم نرمال برای H در G وجود دارد.

(ii) یک تراگرد راست چون T برای H در G وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $h \in H$، $hT = Th$.

۵۹۲. گروه Σ_4، ۲ نرمال نیست.

۵۹۳. فرض می‌کنیم $J \leqslant H \leqslant G$. در این صورت می‌گوییم J در H نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته است اگر H هیچ مزدوجی از J را در G بجز خود J شامل نباشد.

(i) نشان دهید که هرگاه J در H نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته باشد، و $g \in G$، آنگاه J^g در H^g نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته است.

(ii) نشان دهید که هرگاه J در H نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته باشد، آنگاه $J \trianglelefteq N_G(H)$ با یک مثال نشان دهید که عکس این مطلب در حالت کلی صادق نیست.

(iii) فرض می‌کنیم G گروهی متناهی و P یک p زیرگروه سیلو G باشد. ثابت کنید که G، p نرمال است اگر و تنها اگر $Z(P)$ در P نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته باشد.

(iv) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی و H یک p زیرگروه سیلو G باشد. ثابت کنید که J در H نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته است اگر و تنها اگر J در G نرمال‌گرا باشد (۲۶۸ را ببینید. راهنمایی. از ۱۴.۷ و ۳۳۴ استفاده کنید.)

۵۹۴. فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلو گروه متناهی G باشد.

(الف) هرگاه G، p پوچ‌توان باشد آنگاه هر زیرگروه نرمال از P، در P نسبت به G به‌طور ضعیف‌ـبسته است. (ر.ک. ۵۹۳ (ii)).

(ب) دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G، p پوچ‌توان است.

(ii) G، p نرمال است و $N_G(Z(P))$، p پوچ‌توان.

۵۹۵. فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلو گروه متناهی G باشد. فرض کنید که $1 < P < G$، $N_G(P) = P$ و نیز هرگاه P_1، P_2، p زیرگروههای سیلو متمایز G باشند، $P_1 \cap P_2 = 1$. در این صورت G، p پوچ‌توان است. به‌علاوه هرگاه K، p متمم نرمال G باشد آنگاه

$$K = \{1\} \cup (G \backslash \bigcup_{g\in G} P^g).$$

(اشارات. با اصطلاحات ۲۴۸؛ فرض این است که G یک گروه فروبنیوس است با P به‌عنوان یک متمم فروبنیوس در G. این حکم حالت خاصی از قضیهٔ فروبنیوس است که در ۲۴۸ گفته شد. راهنمایی. نشان دهید که هرگاه $g \in G$ و $Z(P) \leqslant P^g$ آنگاه $P^g = P$، از این رو بویژه G، p نرمال است و $N_G(Z(P)) = P$.)

۵۹۶. فرض می‌کنیم G یک گروه p نرمال متناهی و P یک p زیرگروه سیلو G باشد. در این صورت به‌ازای هر زیرگروه V از G که شامل $N_G(Z(P))$ باشد، $P \cap G' = P \cap V'$. (راهنمایی. از ۳۴.۱۰ و ۴۴.۱۰ استفاده کنید.)

۵۹۷. فرض می‌کنیم گروه متناهی G دارای یک p زیرگروه سیلو نابدیهی چون P باشد. علاوه بر این فرض می‌کنیم که برای هر زیرگروه آبلی نابدیهی Q از P، $N_G(Q) = P$. در این صورت، G، p پوچ‌توان است. (راهنمایی. از ۵۹۵ استفاده کنید.)

۵۹۸. فرض می‌کنیم گروه متناهی G دارای یک p زیرگروه سیلو نابدیهی چون P باشد. در این صورت G، p پوچ‌توان است اگر و تنها اگر برای هر زیرگروه نابدیهی Q از P؛ $N_G(Q)$، p پوچ‌توان باشد.

۵۹۹. (ن. ایتو [a62].) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد که در آن هر زیرگروه حقیقی، p پوچ‌توان است. هرگاه خود G، p پوچ‌توان نباشد، آنگاه $O^p(G) = G$، G دارای یک p زیرگروه سیلو نرمال چون P است؛ و G/P برای عدد اولی چون $q \neq p$؛ یک q گروه دوری است، علاوه بر این هر زیرگروه حقیقی G پوچ‌توان است. (راهنمایی. با استقرا بر $|G|$ استدلال کنید. فرض کنید که G، p پوچ‌توان نباشد و به‌موجب ۵۹۸ نتیجه بگیرید که یک زیرگروه نابدیهی چون Q از P وجود دارد که در G نرمال است. با استقرا به حالت $Q = P$ برگردید. سپس از ۴۷.۱۰ استفاده کنید تا نشان دهید که یک زیرگروه P_1 از P و عضو $x \in N_G(P_1)\backslash C_G(P_1)$ وجود دارد به‌طوری که $o(x)$ توانی از عدد اول $q \neq p$ است. حال نشان دهید که $\langle x\rangle P = G$.)

۶۰۰. (اَ. ج. اشمیت [a84] و ک. آیواساوا [a64].) فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی باشد که هر زیرگروه حقیقی‌اش پوچ‌توان است. در این صورت یا G پوچ‌توان است، یا اعداد اول q, p و اعداد صحیح مثبت n, m وجود دارند به‌طوری که $|G| = p^m q^n$؛ و G دارای p زیرگروه سیلوی نرمالی چون P است و G/P دوری است. در هر حالت G حل‌پذیر است. (راهنمایی. ۵۶۳ و ۵۹۹ را به‌کار ببرید. اشاره. برای اثبات دیگری از این حکم، منسوب به و. گاشوتس و اجتناب از به‌کار بردن انتقال، هوپرت [b21] صص. ۲۸۰ تا ۲۸۳، قضایای ۱.۵.۳ و ۲.۵.۳ را ببینید.)

۴۹.۱۰ این فصل را با معرفی قضایایی پایان می‌بریم که، شاید بین چند قضیهٔ اساسی رده‌بندی که در ظرف ده سال گذشته ثابت شده‌اند؛ مهمترین قضایا هستند: رده‌بندی N گروههای حل‌ناپذیر ج. گ. تامپسن ([a98]). یک N گروه عبارت است از یک گروه متناهی که در آن نرمال‌ساز هر زیرگروه حل‌پذیر نابدیهی، حل‌پذیر است. قضیهٔ تامپسن N گروههای ساده را به‌دست می‌دهد و به‌خصوص فهرستی از به‌اصطلاح گروههای سادهٔ مینیمال، یعنی گروههای سادهٔ متناهی که همه زیرگروههای حقیقی‌شان حل‌پذیرند فراهم می‌آورد. برای اطلاعات بیشتر از رده‌بندی گروههای ساده، مراجع معرفی‌شده در انتهای ۳ ۶۱ را ببینید.

۱۱

گروههای پوچ‌توان و حل‌پذیر متناهی

در سرتاسر این فصل، G معرف یک گروه متناهی است. گفتار خود را با وابسته کردن زیرگروه مشخصهٔ جدید $\Phi(G)$ به G شروع و سپس قضیه‌ای را که در فصل ۷ وعده داده بودیم ثابت می‌کنیم، این قضیه ساختار نرمال و ساختار حسابی یک گروه پوچ‌توان متناهی را به طریقی جالب به هم مربوط می‌سازد.

۱.۱۱ تعاریف (i) تعریف زیرگروه ماکسیمال در مسألهٔ ۱۴۰ را دوباره یادآوری می‌کنیم. زیرگروه حقیقی M از G را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌گوییم اگر زیرگروهی مانند L وجود نداشته باشد به‌طوری که $M < L < G$.

(ii) هرگاه $G \neq ۱$ آنگاه (چون G متناهی است) مسلماً G شامل حداقل یک زیرگروه ماکسیمال است و (در واقع هر زیرگروه حقیقی G در یک زیرگروه ماکسیمال G قرار دارد، ۱۴۰ (ii) را ببینید). $\Phi(G)$ را اشتراک تمام زیرگروههای ماکسیمال G تعریف می‌کنیم. اگر $G = ۱$، تعریف می‌کنیم $\Phi(G) = ۱$.

$\Phi(G)$ (به یاد گ. فراتینی ۱۸۵۲ـ۱۹۲۵، که اولین بار ویژگیهای آن را مورد بررسی قرار داد) زیرگروه فراتینی G نامیده می‌شود.

فرض می‌کنیم $\mathscr{M}$ معرف مجموعهٔ همهٔ زیرگروههای ماکسیمال G باشد و همچنین $\alpha \in \operatorname{Aut} G$. به موجب ۲۹.۳، هرگاه $M \in \mathscr{M}$ آنگاه $M^\alpha \in \mathscr{M}$. علاوه بر این، چون α دوسویی است، $\{M^\alpha : M \in \mathscr{M}\} = \mathscr{M}$. از اینجا نتیجه می‌شود که $\Phi(G)$ یک زیرگروه مشخصهٔ G است.

۲.۱۱ لم فرض می‌کنیم $K \lhd G$. در این صورت K یک زیرگروه ماکسیمال G است اگر و تنها اگر مرتبهٔ G/K عدد اول باشد.

برهان چون $K \lhd G$، $|G/K| > ۱$. اکنون بنابر ۳۰.۳، K یک زیرگروه ماکسیمال G است اگر و تنها اگر G/K هیچ زیرگروه حقیقی نابدیهی نداشته باشد، یعنی (بنابر ۲۹) اگر و تنها اگر به‌ازای عدد اولی مانند p، $|G/K| = p$.

۳.۱۱ قضیه هفت حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G پوچ‌توان است.

(ii) هر زیرگروه G، در G زیرنرمال است.

(iii) هرگاه $H < G$، $H < N_G(H)$.

(iv) هر زیرگروه ماکسیمال G در G نرمال است.

(v) $G' \leqslant \Phi(G)$.

(vi) هر زیرگروه سیلو G در G نرمال است.

(vii) G حاصلضرب مستقیم گروههایی است که مرتبهٔ آنها توانی از یک عدد اول است.

برهان می‌توانیم فرض کنیم که $G \neq ۱$، زیرا در غیر این صورت روشن است که همهٔ احکام برقرارند.

(i) $\Leftarrow$ (ii) این حالت، حالت خاص ۵۹.۷ است.

(ii) $\Leftarrow$ (iii) فرض می‌کنیم $H < G$. بنابر (ii)، یک سری از H به G وجود دارد. از این‌رو یک سری حقیقی از H به G، مانند

$$H = H_۰ \lhd H_۱ \lhd \cdots \lhd H_n = G$$

وجود دارد. چون $H < G$، $n > ۰$. پس $H < H_۱ \leqslant N_G(H)$.

(iii) $\Leftarrow$ (iv) فرض می‌کنیم M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد. بنابر (iii)، $M < N_G(M) \leqslant G$. اما از ماکسیمال بودن M نتیجه می‌شود که $N_G(M) = G$. لذا $M \lhd G$.

$(\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{v})$ فرض می‌کنیم M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد. بنابر (iv)، $M \lhd G$، پس به موجب ۲.۱۱، G/M دوری است از مرتبهٔ اول. بنابراین، مطابق ۵۲.۳، $G' \leqslant M$. این رابطه به‌ازای هر زیرگروه ماکسیمال M از G برقرار است و در نتیجه بنابر تعریفِ $\Phi(G)$، $G' \leqslant \Phi(G)$.

$(\mathrm{v}) \Rightarrow (\mathrm{iv})$ فرض می‌کنیم M زیرگروه ماکسیمال G باشد. در این صورت (v) ایجاب می‌کند که $G' \leqslant M$. از این‌رو M/G' زیرگروهی است از گروه آبلی G/G' و در نتیجه $M/G' \lhd G/G'$. از این‌رو بنابر ۳۰.۳، $M \lhd G$.

$(\mathrm{iv}) \Rightarrow (\mathrm{vi})$ فرض می‌کنیم P یک p زیرگروه سیلو G باشد. گیریم $N_G(P) < G$. در این صورت یک زیرگروه ماکسیمال M از G وجود دارد که $N_G(P)$ را شامل است. اما در این صورت بنابر ۱۴.۵، $N_G(M) = M$، که با (iv) در تناقض است. از این‌رو (iv) ایجاب می‌کند که $N_G(P) = G$، یعنی $P \trianglelefteq G$.

$(\mathrm{vi}) \Rightarrow (\mathrm{vii})$ فرض می‌کنیم p_1، ...، p_s مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند، که در آن s یک عدد صحیح مثبت است. بنابر (vi)، G به‌ازای هر $i = 1$، ...، s، دارای یک p_iزیرگروه سیلو نرمال چون P_i است. در این صورت بنابر ۶.۸،

$$G = \mathrm{Dr}\prod_{i=1}^{s} P_i.$$

$(\mathrm{vii}) \Rightarrow (\mathrm{i})$ این حکم توسط ۴۴.۷ و چند بار استفاده از ۴۹.۷ (i) نتیجه می‌شود.

*۶۰۱. فرض می‌کنیم A یک زیرگروه نرمال آبلی G باشد که G روی A شکافته شود. H را یک متمم A در G می‌گیریم. در این صورت A یک زیرگروه نرمال مینیمال G است اگر و تنها اگر H یک زیرگروه ماکسیمال G باشد. (رک. ۳۵۹).

۶۰۲. فرض می‌کنیم که A یک زیرگروه نرمال مینیمال آبلی G باشد. در این صورت یا $A \leqslant \Phi(G)$ یا G بر A شکافته می‌شود. (رک. ۳۵۹).

۶۰۳. (و. گاشوتس [a۳۵].) (i) فرض می‌کنیم M یک زیرگروه ماکسیمال G باشد. در این صورت یا $M \geqslant Z(G)$ یا $M \geqslant G'$. (راهنمایی. نشان دهید که اگر $M \ngeqslant Z(G)$ آنگاه $M \lhd G$.)
(ii) $G' \cap Z(G) \leqslant \Phi(G)$.

۶۰۴. G دارای یک زیرگروه نرمال ماکسیمال از مرتبهٔ ۲ است اگر و تنها اگر به‌ازای عدد اولی مانند p، $|G| = 2p$. (راهنمایی. اگر G دارای یک زیرگروه ماکسیمال از مرتبهٔ ۲ باشد، که در G نرمال نیست از ۱۱.۶ و ۱۳.۶ استفاده کنید.)

۶۰۵. (i) یک زیرگروه ماکسیمال نرمال G لزوماً یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G است (۳۶۳ را ببینید.)

(ii) اگر G حل‌پذیر باشد آنگاه یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G لزوماً یک زیرگروه ماکسیمال نرمال G است.

(iii) با یک مثال نشان دهید که هرگاه G حل‌ناپذیر باشد آنگاه یک زیرگروه نرمال ماکسیمال G لزوماً یک زیرگروه ماکسیمال G نخواهد بود.

۶۰۶. به‌ازای هر عدد اولِ p، $O_p(G)$، p زیرگروه سیلو یکتای $F(G)$، زیرگروه فیتینگ G، است. (راهنمایی. ۴۴.۷ و ۳.۱۱ را ببینید.)

۶۰۷. هرگاه G پوچ‌توان باشد آنگاه به‌ازای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول،

$$G = O_\varpi(G) \times O^\varpi(G).$$

۶۰۸. فرض می‌کنیم که G یک زیرگروه ماکسیمال M داشته باشد، که $M_G = 1$ و $|G:M| = 4$. در این صورت $M \ntrianglelefteq G$ و G یا با A_4 یکریخت است و یا با $\sum_4$.
(راهنمایی. از ۱۴.۴ و ۲۸۹ استفاده کنید. توجه داشته باشید که بنابر ۳.۱۱، G نمی‌تواند یک ۲ گروه باشد. اشاره. هم A_4 و هم $\sum_4$ دارای زیرگروههای ماکسیمالی از شاخص ۴ با هستهٔ بدیهی هستند. ۲۸۸ و ۲۸۹ را ببینید.)

۶۰۹. فرض می‌کنیم که G نابدیهی و زبَرحل‌پذیر باشد (۳۸۹ را ببینید). نشان دهید که هرگاه p بزرگترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد، G دارای یک p زیرگروه سیلو نرمال است. با استقرا بر تعداد مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$. ثابت کنید که اگر q کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ باشد، آنگاه G، q پوچ‌توان است. (راهنمایی. از ۳۹۸ (iii) و ۶۰۳ استفاده کنید.)

۶۱۰. (ب. هوپرت [a۶۱].) اگر هر زیرگروه حقیقی G زَبرحل‌پذیر باشد، G حل‌پذیر است. (رک. ۶۰۰. راهنمایی. از ۶۰۹ و ۵۹۹ استفاده کنید.)

۶۱۱. فرض می‌کنیم که G به‌طور ترایا بر مجموعهٔ متناهیِ X عمل کند. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ Y از X و هر $g \in G$، قرار می‌دهیم

$$Yg = \{yg : y \in Y\} \subseteq X$$

(۱۸۷ را ببینید)؛ همچنین به‌ازای هر $x \in X$ و هر زیرگروه H از G قرار می‌دهیم

$$xH = \{xh : h \in H\} \subseteq X.$$

زیرمجموعهٔ Y از X را یک قطعه (یا یک مجموعهٔ نااولیه) برای این عمل گوییم اگر به‌ازای هر $g \in G$ یا $Yg = Y$ یا $Yg \cap Y = \varnothing$. روشن است که به‌خصوص $\varnothing$، X، و تمام زیرمجموعه‌های ۱ عضوی X قطعه هستند: این قطعه‌ها قطعه‌های نابدیهی نامیده می‌شوند.

این عمل را اولیه می‌نامیم، اگر تنها قطعه‌ها قطعه‌های بدیهی باشند. در غیر این صورت این عمل نااولیه نامیده می‌شود.

احکام زیر را ثابت کنید.

(i) هرگاه Y یک قطعه برای این عمل باشد، آنگاه به‌ازای هر $g \in G$، Yg نیز یک قطعه خواهد بود. به‌علاوه، اگر $Y \neq \varnothing$ آنگاه $|Y|$، $|X|$ را می‌شمارد.

فرض می‌کنیم $x \in X$ و قرار می‌دهیم $L = \mathrm{Stab}_G(x)$.

(ii) به‌ازای هر زیرگروه G مانند H که L را شامل است، xH یک قطعه است.

(iii) هر قطعهٔ شامل x به شکل xH است که $L \leqslant H \leqslant G$.

(راهنمایی. اگر Y یک قطعهٔ شامل x باشد، قرار دهید $H = \{h \in G : Yh = Y\}$.)

(iv) حال فرض می‌کنیم که $|X| >$ ۱. در این صورت این عمل اولیه است اگر و تنها اگر L یک زیرگروه ماکسیمال G باشد.

۶۱۲. هرگاه G به‌طور ترایا بر مجموعهٔ X که $|X| = p$ (عدد اول)، عمل کند آنگاه این عمل اولیه است. (راهنمایی. از ۶۱۱ (i) استفاده کنید.)

۶۱۳. فرض می‌کنیم که G بر مجموعهٔ متناهی X عمل کند و همچنین $K \trianglelefteq G$. فرض می‌کنیم ρ نمایش جایگشتی G متناظر با این عمل باشد. هرگاه این عمل اولیه باشد، آنگاه یا $K \leqslant \mathrm{Ker}\rho$ یا عمل K بر X (به‌وسیلهٔ تحدید عمل G) ترایا است. (۶۱۱ را ببینید. راهنمایی. نشان دهید که هر K مدار برای عمل G یک قطعه است.)

۶۱۴. فرض می‌کنیم که G بر مجموعهٔ متناهی X، $|X| \geqslant$ ۲، عمل کند. این عمل را ۲ ترایایی (یا ترایای دوگانه) می‌نامیم اگر وقتی (x, x') و (y, y') زوجهای مرتبی از اعضای متمایز X باشند، عضوی مانند $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری که $xg = y$ و $x'g = y'$.

احکام زیر را ثابت کنید.

(i) فرض می‌کنیم $x \in X$ و $L = \mathrm{Stab}_G(x)$. در این صورت این عمل ۲ ترایایی است اگر و تنها اگر این عمل ترایا باشد و به‌علاوه، عمل L بر $X \setminus \{x\}$ نیز که با تحدید عمل G تعریف می‌شود ترایا باشد.

(ii) اگر این عمل ۲ ترایایی باشد و $|X| = n$، آنگاه $|G|$ توسط $n(n-$ ۱$)$ شمرده می‌شود. (راهنمایی. از (i) و ۱۱.۴ استفاده کنید.)

(iii) هرگاه این عمل ۲ ترایایی باشد آنگاه اولیه است (۶۱۱ را ببینید).

۶۱۵. فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح باشد، $n \geqslant$ ۲، و $X = \{$۱، ۲، $\dots, n\}$.

(i) عمل طبیعی $\sum_n$ بر X، ۲ ترایایی است و اگر $n \geqslant$ ۴، عمل طبیعی A_n بر X نیز، ۲ ترایایی است (۶۱۴ را ببینید).

(ii) $\sum_n$ دارای یک زیرگروه ماکسیمال از شاخص n است و اگر ۳ $\leqslant n$، A_n نیز یک زیرگروه ماکسیمال از شاخص n دارد. (رک. ۲۹.۵ و ۲۹۲. راهنمایی. از ۶۱۱ و ۶۱۴ استفاده کنید.)

۶۱۶. فرض می‌کنیم $H < G$، و X را مجموعهٔ هم مجموعه‌های راست H در G می‌گیریم. در این صورت عمل G بر X با ضرب از راست ۲ ترایایی است اگر و تنها اگر عضوی مانند $g \in G$ وجود داشته باشد به‌طوری که $G = H \cup HgH$ (۱۳.۴ و ۶۱۴ را ببینید). به‌علاوه، اگر این عمل ۲ ترایایی باشد آنگاه $|H|$ بر $|G : H| -$ ۱ بخش‌پذیر است.

اینک چند ویژگی از $\Phi(G)$ را ثابت می‌کنیم.

۴.۱۱ لم فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. در این صورت $K \leqslant \Phi(G)$، اگر و فقط اگر هیچ زیرگروه حقیقی H از G وجود نداشته باشد که $HK = G$.

برهان ابتدا فرض می‌کنیم $K \leqslant \Phi(G)$. گیریم $H < G$. در این صورت یک زیرگروه ماکسیمال مانند M از G وجود دارد که $H \leqslant M < G$. چون $K \leqslant \Phi(G)$، $K \leqslant M$. از این‌رو $HK \leqslant M < G$. بنابراین هیچ زیرگروه حقیقی H از G وجود ندارد که $HK = G$.

حال فرض می‌کنیم $K \nleqslant \Phi(G)$. در این صورت ۱ $G \neq$ و به موجب تعریفِ $\Phi(G)$، یک زیرگروه ماکسیمال مانند M از G وجود دارد که $K \nleqslant M$. پس $M < MK \leqslant G$ (۳۸.۳). از ماکسیمال بودن M نتیجه می‌گیریم که $MK = G$. لذا در این حالت M یک زیرگروه حقیقی G است به‌طوری که $MK = G$.

حال ویژگی بنیادی $\Phi(G)$ که فراتینی در ۱۸۸۵ کشف کرد، به سادگی اثبات می‌شود.

۵.۱۱ قضیه (فراتینی [a۲۹])، $\Phi(G)$ پوچ‌توان است.

برهان فرض می‌کنیم P یک زیرگروه سیلو دلخواه $\Phi(G)$ باشد. چون $\Phi(G) \trianglelefteq G$، لم فراتینی (۱۳.۵) نشان می‌دهد که

$$G = N_G(P)\Phi(G).$$

از این‌رو بنابر ۴.۱۱، $N_G(P) = G$. لذا $P \trianglelefteq G$، و در نتیجه $P \trianglelefteq \Phi(G)$. حال به موجب ۳.۱۱ نتیجه می‌گیریم که $\Phi(G)$ پوچ‌توان است.

نظر به تعریف $F(G)$ زیرگروه فیتینگ G، (۶۴.۷)، نتیجه زیر بی‌درنگ حاصل می‌شود.

۶.۱۱ فرع $\Phi(G)\leqslant F(G)$.

۷.۱۱ لم فرض می‌کنیم $H\leqslant G$ و $K\trianglelefteq G$.

(i) هرگاه $K\leqslant\Phi(H)$ آنگاه $K\leqslant\Phi(G)$.

(ii) $\Phi(K)\leqslant\Phi(G)$ (ر.ک. ۳۹۵).

برهان (i) فرض می‌کنیم که $K\nleqslant\Phi(G)$. در این صورت بنابر ۴.۱۱، یک زیرگروه حقیقی مانند J از G وجود دارد که

$$JK=G.$$

فرض می‌کنیم $K\leqslant\Phi(H)$. در این صورت

$$K\leqslant H\leqslant G=JK,$$

بنابراین به موجب قاعدهٔ ددکیند (۳.۷)،

$$H=(H\cap J)K.$$

مطابق ۴.۱۱، فرض $K\leqslant\Phi(H)$ ایجاب می‌کند که

$$H\cap J=H.$$

در این صورت

$$K\leqslant H\leqslant J$$

و بنابراین

$$G=JK=J<G,$$

که یک تناقض است. از این‌رو اگر $K\nleqslant\Phi(G)$، نتیجه می‌شود که $K\nleqslant\Phi(H)$.

(ii) چون $\Phi(K)$ در K مشخصه است و $K\trianglelefteq G$، ۱۵.۳ نشان می‌دهد که $\Phi(K)\trianglelefteq G$. اکنون با استفاده از (i)، با $\Phi(K)$ به جای K و K به جای H، حکم نتیجه می‌شود.

اشاره. در حالت کلی صادق نیست که اگر $H\leqslant G$ آنگاه $\Phi(H)\leqslant\Phi(G)$: ۶۲۹ را ببینید.

۸.۱۱ لم فرض می‌کنیم $K\lhd G$. در این صورت

(i) $\Phi(G)K/K\leqslant\Phi(G/K)$.

(ii) اگر $K\leqslant\Phi(G)$، آنگاه $\Phi(G)/K=\Phi(G/K)$.

برهان به موجب ۳۰.۳ واضح است که هر زیرگروه ماکسیمال G/K به شکل M/K است که M یک زیرگروه ماکسیمال G شامل K است. به‌علاوه، به‌ازای هر چنین Mی، M/K یک زیرگروه ماکسیمال G/K است؛ و احکام (i) و (ii) نتیجه می‌شوند.

اشارات. (۱) در حالت کلی صادق نیست که اگر $K\lhd G$ آنگاه $\Phi(G)K/K=\Phi(G/K)$: ۶۳۰ را ببینید.

(۲) توجه داشته باشید که، بنابر (ii)، $G/\Phi(G)$ همواره دارای زیرگروه فراتینی بدیهی است.

۹.۱۱ لم فرض می‌کنیم G یک p گروه باشد. در این صورت $\Phi(G)=1$ اگر و تنها اگر G آبلی مقدماتی باشد.

برهان می‌توانیم فرض کنیم که $G\neq 1$. ابتدا فرض می‌کنیم که G آبلی مقدماتی باشد. چون $G\neq 1$، $\Phi(G)<G$ (بنابر تعریف $\Phi(G)$). علاوه بر این به موجب ۴۱.۷، G مشخصه‌یی‌ـساده است. بنابراین چون $\Phi(G)$ یک زیرگروه مشخصهٔ حقیقی G است، $\Phi(G)=1$.

حال به عکس فرض می‌کنیم، $\Phi(G)=1$، بنابر ۴۴.۷، G پوچ‌توان است. بنابراین به موجب ۳.۱۱، $G'\leqslant\Phi(G)$. از این‌رو $G'=1$، و در نتیجه G آبلی است. M را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌گیریم و فرض می‌کنیم $g\in G$. در این صورت $M\lhd G$ و در نتیجه مطابق ۲.۱۱، مرتبهٔ G/M یک عدد اول است. چون G یک p گروه است، $|G/M|=p$. بنابراین $g^p\in M$ (۱۰۵). این رابطه برای هر زیرگروه ماکسیمال M از G صادق است، در نتیجه

$$g^p\in\Phi(G)=1.$$

از این‌رو به‌ازای هر $g\in G$،

$$g^p=1.$$

لذا G آبلی مقدماتی است.

۱۰.۱۱ فرع فرض می‌کنیم G یک p گروه باشد. در این صورت $\Phi(G)$ کوچکترین زیرگروه نرمال یکتای K از G است که G/K آبلی مقدماتی است. (به عبارت دیگر، هنگامی‌که $\mathfrak{X}$ ردهٔ p زیرگروههای آبلی مقدماتی باشد، $G/\Phi(G)$، $\mathfrak{X}$ ماندهیی G است.)

برهان محققاً $G/\Phi(G)$ یک pگروه است و بنابر ۸.۱۱، $G/\Phi(G)$ دارای زیرگروه فراتینی بدیهی است. از این‌رو بنابر ۹.۱۱، $G/\Phi(G)$، آبلی مقدماتی است.

فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ با G/K آبلی مقدماتی. در این صورت بنابر ۸.۱۱ و ۹.۱۱،

$$\Phi(G)K/K \leqslant \Phi(G/K) = K/K.$$

از این‌رو

$$\Phi(G) \leqslant K,$$

و برهان کامل می‌شود.

اشاره. از این حکم نتیجه می‌شود که هرگاه G یک pگروه باشد، $G/\Phi(G)$ را می‌توان به طریقی طبیعی به‌عنوان یک فضای برداری متناهی بعد روی $\mathbf{Z}_p$ در نظر گرفت: ۴۰.۷ را ببینید.

۶۱۷. فرض می‌کنیم $x \in G$. در این صورت x را یک نامولد G گوییم اگر وقتی X یک مجموعه از مولدهای G است با $x \in X$، $X\backslash\{x\}$ نیز یک مجموعه از مولدهای G باشد.

ثابت کنید که $\Phi(G)$ مجموعه‌ای است مرکب از تمام نامولدهای G. (راهنمایی. با استفاده از ۴.۱۱ نشان دهید که هر عضو $\Phi(G)$ یک نامولد G است.)

۶۱۸. فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$. زیرگروه H از G را یک مکمل K در G گوییم اگر $HK = G$. بویژه G خود یک مکمل K در G است؛ و هر متمم K در G یک مکمل K در G است.

فرض می‌کنیم H یک مکمل 'مینیمال K' در G باشد؛ یعنی، فرض می‌کنیم H یک مکمل K در G باشد، به‌طوری که هیچ زیرگروه حقیقی H یک مکمل K در G نباشد. در این صورت ثابت کنید که $H \cap K \leqslant \Phi(H)$. (راهنمایی. از ۴.۱۱ استفاده کنید.)

۶۱۹. (i) فرض می‌کنیم که G پوچ‌توان است. هرگاه G/G' دوری باشد، آنگاه G دوری است. (راهنمایی. از ۳.۱۱ و ۴.۱۱ استفاده کنید. اشاره. شرط پوچ‌توان بودن G، همان‌گونه که گروه Σ_3 نشان می‌دهد یک شرط لازم است.)

(ii) فرض می‌کنیم که G یک pگروه نابدیهی باشد. هرگاه G دارای طول مشتق n باشد، آنگاه $|G| \geqslant p^{2n-1}$. (راهنمایی. از (i) و استقرا بر n استفاده کنید. اشاره. این کران می‌تواند به‌طور قابل‌توجهی بهبود یابد. ف. هال [a۴۸] ثابت کرده است که یک pگروه نابدیهی از طول مشتق n دارای مرتبهٔ بزرگتر یا مساوی $p^{2^{n-1}+n-1}$ است: هوپرت [b۲۱] ص ۳۰۷ قضیهٔ ۱۱.۷.۳ را ببینید.)

۶۲۰. اگر $G/\Phi(G)$ یک ϖ گروه باشد، G یک ϖ گروه است. (راهنمایی. فرض کنید که حکم برقرار نیست و از قضیهٔ شور-زاسنهاوس ۳۰.۱۰ و ۴.۱۱ استفاده کنید.)

۶۲۱. (و. گاشوتس [a۳۵].) هرگاه $K/\Phi(G)$ یک زیرگروه نرمال پوچ‌توان $G/\Phi(G)$ باشد، K پوچ‌توان است. لذا $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$. بویژه اگر $G/\Phi(G)$ پوچ‌توان باشد، G نیز پوچ‌توان است. (ر.ک. ۶.۱۱. راهنمایی. نشان دهید که به‌ازای هر زیرگروه سیلو P از K، $P\Phi(G) \trianglelefteq G$ و برهان ۵.۱۱ را دنبال کنید.)

۶۲۲. فرض می‌کنیم $\mathfrak{X}$ ردهٔ گروههایی با دو ویژگی زیر باشد:

(i) هر گروه خارج‌قسمتی از هر $\mathfrak{X}$ گروه یک $\mathfrak{X}$ گروه باشد.

(ii) هرگاه $H/\Phi(H) \in \mathfrak{X}$، $H \in \mathfrak{X}$.

(به‌عنوان مثال، $\mathfrak{X}$ ممکن است ردهٔ ϖ گروههای متناهی یا ردهٔ گروههای پوچ‌توان متناهی باشد: ۶۲۰ و ۶۲۱ را ببینید.)

فرض می‌کنیم $K \trianglelefteq G$ و فرض می‌کنیم $G/K \in \mathfrak{X}$. ثابت کنید که یک $\mathfrak{X}$ زیرگروه از G وجود دارد که مکمل K در G است (۶۱۸ را ببینید). با یک مثال نشان دهید که لزومی ندارد یک متمم K در G وجود داشته باشد.

۶۲۳. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد. در این صورت $\Phi(G) < F(G)$ (ر.ک. ۶.۱۱. راهنمایی. از ۳۹۶ (i) و ۶۲۱ استفاده کنید.)

۶۲۴. (i) $F(G)/\Phi(G)$ آبلی است. (ر.ک. ۶.۱۱. راهنمایی. از ۳.۱۱ و ۷.۱۱ استفاده کنید.)

(ii) هرگاه G حل‌پذیر باشد، آنگاه $C_G(F(G)/\Phi(G)) = F(G)$؛ از این‌رو $G/F(G)$ را می‌توان در $\mathrm{Aut}(F(G)/\Phi(G))$ نشانید. (۳۹۰ را ببینید. راهنمایی. از ۶۲۱، ۶۷.۷ و (i) استفاده کنید.)

۶۲۵. (i) هرگاه $F(G)$ یک pگروه باشد آنگاه $F(G)/\Phi(G)$ آبلی مقدماتی است. (راهنمایی. از ۷.۱۱ و ۱۰.۱۱ استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر و $F(G)$ یک p گروه ۲ مولدی است، که در آن p یا ۲ است یا ۳. قرار می‌دهیم $\varpi = \{2,3\}$. در این صورت G یک ϖ گروه است. علاوه بر این اگر $p = 2$، آنگاه ۳ زیرگروههای سیلو G از مرتبهٔ حداکثر ۳اند، و اگر $p = 3$ آنگاه ۲ زیرگروههای سیلو G از مرتبهٔ حداکثر 2^4 هستند. (راهنمایی. از (i)، ۴۰.۷، ۴۷ و ۶۲۴ استفاده کنید.)

۶۲۶. (و. گاشوتس [a۳۵].) (i) هرگاه A زیرگروه نرمال آبلی G باشد به‌طوری که $A \cap \Phi(G) = 1$ آنگاه G بر A شکافته می‌شود. (راهنمایی. از ۶۱۸ و ۷.۱۱ (i) استفاده کنید.)

(ii) فرض می‌کنیم $\Phi(G) = 1$. اگر $F(G) \neq 1$ آنگاه هر زیرگروه نرمال نابدیهی A از G که در $F(G)$ قرار داشته باشد، حاصلضرب مستقیمی است از زیرگروههای نرمال مینیمال آبلی G و G بر A شکافته می‌شود. بویژه، هرگاه G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد به‌طوری که

$\Phi(G) = 1$ آنگاه $F(G) = S(G)$، که $S(G)$ سکوی G است (۳۹۷ را ببینید)، و G روی $F(G)$ شکافته می‌شود. (راهنمایی. با استقراء بر $|A|$ استدلال کنید. فرض کنید B یک زیرگروه نرمال مینیمال G مشمول در A باشد و از ۶۲۴ و (i) استفاده کنید.)

۶۲۷. (و. گاشوتس [a۳۵]) $\Phi(G) = 1$ اگر و تنها اگر G بر $S_1(G)$ شکافته شود، که در آن $S_1(G)$ مانند ۴۱۲ تعریف می‌شود. (راهنمایی. ۶۲۶ را ببینید. اگر $\Phi(G) \neq 1$، یک زیرگروه نرمال مینیمال H از G را در نظر بگیرید که $H \leqslant \Phi(G)$. نشان دهید که $H \leqslant S_1(G)$ و از ۴۱۴ استفاده کنید. سپس با استفاده از ۴.۱۱ نشان دهید که G را نمی‌توان بر $S_1(G)$ شکافت.)

۶۲۸. فرض می‌کنیم که H و K زیرگروههای نرمال G باشند به‌طوری که $G = H \times K$.

(i) به‌ازای هر زیرگروه ماکسیمال K، مانند L، $H \times L$ یک زیرگروه ماکسیمال G است؛ و هر زیرگروه ماکسیمال G شامل H، به شکل $H \times L$ خواهد بود، که در آن L یک زیرگروه ماکسیمال K است. (راهنمایی. از ۴۰۲ استفاده کنید.)

(ii) هرگاه $K \neq 1$، آنگاه اشتراک تمام زیرگروههای ماکسیمال G شامل H، برابر است با $H \times \Phi(K)$.

(iii) $\Phi(G) = \Phi(H) \times \Phi(K)$. (راهنمایی. از (ii) و ۷.۱۱ استفاده کنید.)

(iv) فرض می‌کنیم که M یک زیرگروه G باشد که نه H را شامل است و نه K را. در این صورت M یک زیرگروه ماکسیمال G خواهد بود اگر و تنها اگر M حاصلضرب زیرمستقیمی از H و K باشد و $H/H \cap M$ نیز ساده باشد (۴۴۱ و ۱۹.۸ را ببینید). (راهنمایی. چنانچه M حاصلضرب زیرمستقیمی از H و K باشد و اگر $M \leqslant L \leqslant G$، به‌وسیلهٔ ۱۹.۸ و ۴۳۹ نشان دهید که $|L| = |H \cap L||K|$.)

(v) فرض می‌کنیم که یا H حل‌پذیر باشد یا K. در این صورت هر زیرگروه ماکسیمال M از G که نه H را شامل باشد و نه K را، لزوماً در G نرمال خواهد بود. علاوه بر این، G یک چنین زیرگروه ماکسیمالی مانند M دارد اگر و تنها اگر $(|H/H'|, |K/K'|) > 1$. (راهنمایی. از (iv)، ۵۵.۷، ۱۹.۸ و ۲۹۷ استفاده کنید.)

(vi) اگر H و K گروههای سادهٔ ناآبلی یکریخت باشند آنگاه G دارای زیرگروههای ماکسیمالی است که با H یکریخت‌اند (و در G نرمال نیستند). (راهنمایی. از (iv) و ۴۳۸ استفاده کنید.)

۶۲۹. فرض می‌کنیم $G = \sum_4$. در این صورت $|F(G)| = 4$، $F(G)$ زیرگروه نرمال مینیمال یکتای G است و $\Phi(G) = 1$. اگر H یک ۲ زیرگروه سیلو G باشد، آنگاه $\Phi(H) \neq 1$. (ر.ک. ۷.۱۱، ۶۲۳، ۶۲۴، ۶۲۵، ۶۲۶. راهنمایی. ۲۸۹ را ببینید.)

۶۳۰. فرض می‌کنیم $K = C_p$، $M = \mathrm{Aut}\, C_p$ و $G = \mathrm{Hol}\, C_p$، که در آن p یک عدد اول

دلخواه است. در این صورت

(i) M یک زیرگروه ماکسیمال G است و $M_G = 1$.

(ii) $F(G) = K$ و $\Phi(G) = 1$.

(iii) به‌ازای $p = 5$، $\Phi(G/K)$ نابدیهی است (ر.ک. ۸.۱۱).

(راهنمایی. ۴۹۹، ۶۵.۷، ۱۵.۹ (iii) را ببینید.)

۶۳۱. M را زیرگروه ماکسیمال G می‌گیریم. فرض می‌کنیم که M یک p زیرگروه سیلو نرمال P دارد که در G نرمال نیست. در این صورت $N_G(P) = M$، و P یک p زیرگروه سیلو G است. (راهنمایی. فرض کنید P یک p زیرگروه سیلو G نیست سپس از قضیهٔ سیلو و ۶.۵ استفاده کنید.)

۶۳۲. فرض می‌کنیم که یک گروه متناهی حل‌ناپذیر با یک زیرگروه ماکسیمال آبلی وجود دارد، G را یک چنین گروهی از کوچکترین مرتبهٔ ممکن می‌گیریم. فرض می‌کنیم M زیرگروه ماکسیمال آبلی G باشد. نتایج زیر را ثابت کنید.

(i) $M_G = 1$. (راهنمایی. هرگاه چنین نباشد، از ۴۷.۷ استفاده کنید.)

(ii) G' زیرگروه نرمال مینیمال یکتای G است.

(iii) M یک زیرگروه هالِ G است. (راهنمایی. از ۶۳۱ استفاده کنید.)

(iv) G، به‌ازای هر عدد اول p که $|M|$ را می‌شمارد، p پوچ‌توان است. (راهنمایی. از قضیهٔ برنساید ۲۱.۱۰ استفاده کنید.)

(v) M یک متمم برای G' در G است.

(vi) هر متمم برای G' در G با M مزدوج است. (راهنمایی. ۳۱.۱۰ قابل استفاده است.)

(vii) هر زیرگروه G که با M یکریخت باشد، با M مزدوج است.

(viii) فرض می‌کنیم q یک مقسوم‌علیه اول $|G'|$ باشد، Q را یک q زیرگروه سیلو G' می‌گیریم. در این صورت $N_G(Q)$ یک زیرگروه M^* یکریخت با M دارد. (راهنمایی. از لم فراتینی ۱۳.۵ و قضیهٔ شور-زاسنهاوس ۳۰.۱۰ استفاده کنید.)

(ix) M^* یک زیرگروه ماکسیمال G است و $Q \trianglelefteq G$.

(x) با این نتیجه که G حل‌پذیر است، یک تناقض به‌دست آورید.

پس نتیجه می‌گیریم که یک گروه متناهی حل‌پذیر است اگر یک زیرگروه ماکسیمال آبلی داشته باشد. (۶۳۳ و ۶۳۴ را نیز ببینید. اشارات. این قضیه را ب. هوپرت [a۶۱] در یک شکل کلیتر و مستقل از او ی. ن. هرشتاین [a۵۵] ثابت کرده است. هر گروه متناهی حل‌ناپذیر می‌تواند یک زیرگروه ماکسیمال پوچ‌توان داشته باشد: به‌عنوان مثال می‌دانیم که ۲ زیرگروههای سیلو گروه سادهٔ $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_{17})$، زیرگروههای ماکسیمال‌اند. ولی ج. گ. تامپسن [a۹۶] این قضیه مهم را ثابت کرد

که یک گروه متناهی حل‌پذیر است اگر یک زیرگروه ماکسیمال پوچ‌توان از مرتبهٔ فرد داشته باشد: قضیهٔ ۲.۳.۱۰ ص ۳۴۰ از گورنشتاین [b۱۳] یا قضیهٔ ۴.۷.۴ ص ۴۴۵ از هوپرت [b۲۱]، یا قضیهٔ b.۳.۹ ص ۲۷۷ از شنکمن [b۳۵] را ببینید.)

۶۳۳. فرض می‌کنیم G یک زیرگروه ماکسیمال آبلی دارد (بنابراین به موجب ۶۳۲، G حل‌پذیر است). در این صورت طول مشتق G حداکثر ۳ است. (اشاره. در ۶۳۴ خواهیم دید که G می‌تواند طول مشتق ۳ داشته باشد.)

۶۳۴. فرض می‌کنیم $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$، $G_1 = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}_3)$، و $K = Z(G)$. توجه داشته باشید که $|G/G_1| = 2$ و بنابر ۱۲۳، $|K| = 2$ و $K < G_1$.

(i) نشان دهید که $G_1/K \cong A_4$ و G_1 دارای ۲ زیرگروه سیلو نرمالی است مانند J. (راهنمایی. ۱۹۳، ۲۸۸ و ۲۸۹ را ببینید.)

(ii) نشان دهید که J ناآبلی است؛ و نتیجه بگیرید که $G_1' = J$. (راهنمایی. خاطرنشان می‌کنیم که بنابر قضیهٔ سیلو J شامل هر عضو G_1 است که مرتبه‌اش توانی از ۲ باشد. برای اثبات اینکه $G_1' = J$، از ۱۶۴ و ۲۸۸ استفاده کنید.)

(iii) نتیجه بگیرید که $G' = G_1$. بنابراین G_1 دارای طول مشتق ۳ است و G دارای طول مشتق ۴.

(iv) نشان دهید که G_1 دارای یک زیرگروه دوری است مانند M از مرتبهٔ ۶ و ثابت کنید که M یک زیرگروه ماکسیمال G_1 است. (ر.ک. ۶۳۳. راهنمایی. هرگاه M در G_1 ماکسیمال نباشد آنگاه $|G_1/G_1'|$ زوج خواهد بود.)

(v) نشان دهید که G_1 دارای یک برگشت یکتاست. از ۳۳.۹ نتیجه بگیرید که $J \cong Q_8$ گروه چهارگان.

بعداً یک قضیه بنیادی از برنساید را روی مجموعه‌های مولدهای pگروههای متناهی ثابت می‌کنیم.

۱۱.۱۱ تعریف فرض می‌کنیم X مجموعه‌ای از مولدهای G باشد (۲۹.۲). می‌گوییم X یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G است، اگر به‌ازای هر زیرمجموعهٔ حقیقیِ Y از X، $\langle Y\rangle$ یک زیرگروه حقیقی G باشد.

به موجب این تعریف واضح است که هر مجموعه از مولدهای G شامل یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G است.

این تصور از یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای یک گروه تا اندازه‌ای شبیه مفهوم یک پایه از فضای برداری است. ولی، حتی در مورد یک گروه آبلی متناهی ممکن است مجموعه‌های مینیمال از مولدها با تعداد اعضای متفاوت وجود داشته باشند. به‌عنوان مثال، فرض کنید G یک گروه آبلی

دوری از مرتبهٔ ۶ باشد مثلاً $G = \langle x\rangle$. در این صورت $\{x\}$ یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G است. ولی علاوه بر این $G = \langle x^2, x^3\rangle$ و چون $\langle x^2\rangle < G$ و $\langle x^3\rangle < G$، $\{x^2, x^3\}$ یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G است.

آنچه ما بدنبال اثباتش هستیم این است که هرگاه G یک p گروه نابدیهی باشد، آنگاه تعداد اعضای هر دو مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G یکی است.

۱۲.۱۱ قضیه پایه‌ایی برنساید فرض می‌کنیم G یک p گروه نابدیهی باشد، $\bar G = G/\Phi(G)$ و $|\bar G| = p^d$. به‌ازای هر $x \in G$، قرار می‌دهیم $\bar x = x\Phi(G) \in \bar G$ و به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی X از G نیز قرار می‌دهیم $\bar X = \{\bar x : x \in X\} \subseteq \bar G$. اگر X یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G باشد، آنگاه $\bar X$ یک پایه از $\bar G$ است ($\bar G$ به طریقی طبیعی به‌عنوان یک فضای برداری روی $\mathbf{Z}_p$ در نظر گرفته می‌شود) و $|X| = d$. به عکس، هرگاه X یک زیرمجموعه از G باشد به‌طوری که $|X| = d$ و $\bar X$ پایه‌ای از $\bar G$ باشد، آنگاه X مجموعه‌ای مینیمال از مولدهای G است.

برهان چون $G \neq 1$، $d > 0$. به موجب ۱۰.۱۱، $\bar G$ آبلی مقدماتی است و بنابراین (مانند ۴۰.۷) می‌توان آن را به‌عنوان یک فضای برداری روی $\mathbf{Z}_p$ در نظر گرفت. چون $|\bar G| = p^d$، بُعد این فضای برداری برابر است با d.

فرض می‌کنیم $\varnothing \subset X \subseteq G$. هرگاه $G = \langle X\rangle$، آنگاه $\langle \bar X\rangle = \bar G$ (۱۰۸). در این صورت با در نظرگرفتن $\bar X$ به‌عنوان یک مجموعه از بردارهای فضای برداری $\bar G$، $\bar X$ محققاً $\bar G$ را پدید می‌آورد. به عکس فرض می‌کنیم که $\bar X$ یک مجموعه از بردارهای پدیدآور $\bar G$ باشد. در این صورت بنابر تعریف ساختار فضای برداری روی $\bar G$ (۴۰.۷ را ببینید)، $\bar X$ مجموعه‌ای است از مولدهای گروه آبلی مقدماتی $\bar G$. قرار می‌دهیم

$$\langle X\rangle = H \leqslant G.$$

در این صورت

$$\bar G = \langle \bar X\rangle = H\Phi(G)/\Phi(G).$$

بنابراین

$$G = H\Phi(G).$$

اکنون از ۴.۱۱ نتیجه می‌شود که $H = G$.

لذا X یک مجموعه از مولدهای G است اگر و تنها اگر $\bar{X}$ یک مجموعهٔ پدیدآور از بردارهای فضای برداری $\bar{G}$ باشد. حال فرض می‌کنیم X یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G باشد. در این صورت هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی Y از X وجود ندارد که $\bar{Y}$، $\bar{G}$ را پدید آورد. از این‌رو $\bar{X}$ یک مجموعهٔ پدیدآور مینیمال از بردارهای $\bar{G}$ خواهد بود، یعنی یک پایه از $\bar{G}$. چون هیچ زیرمجموعهٔ حقیقی Y از X وجود ندارد که $\bar{Y} = \bar{X}$، نتیجه می‌شود که

$$|X| = |\bar{X}| = d.$$

به‌عکس، فرض می‌کنیم که $|X| = d$ و $\bar{X}$ یک پایه از $\bar{G}$ باشد. در این صورت چون $\bar{X}$، $\bar{G}$ را پدید می‌آورد، به موجب آنچه بالا گفتیم نتیجه می‌گیریم که X یک مجموعه از مولدهای G است. پس نشان داده‌ایم که مجموعه‌ای از مولدهای G با کمتر از d عضو وجود ندارد. بنابراین، چون $|X| = d$، X یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G است.

۱۳.۱۱ فرع (ف. هال [a۴۸]، ۱۹۳۳). فرض می‌کنیم G یک p گروه باشد و $\bar{G} = G/\Phi(G)$ که در آن، مثلاً $|\bar{G}| = p^d$ و $|\Phi(G)| = p^m$.

(i) فرض می‌کنیم $\varphi : \mathrm{Aut}\, G \to \mathrm{Aut}\, \bar{G}$ یک همریختی باشد که با ضابطهٔ $\varphi : \alpha \mapsto \bar{\alpha}$ تعریف می‌شود، که در آن به‌ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$، $x \in G$ و $\bar{x} = x\Phi(G) \in \bar{G}$،

$$\bar{x}^{\bar{\alpha}} = \overline{x^{\alpha}} (= x^{\alpha}\Phi(G))$$

(۱۳۶ را ببینید). در این صورت $\mathrm{Ker}\,\varphi$ یک p زیرگروه نرمال G است از مرتبهٔ حداکثر p^{dm} و $\mathrm{Aut}\, G/\mathrm{Ker}\,\varphi$ را می‌توان در $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}_p)$ نشانید.

(ii) $|\mathrm{Aut}\, G|$، $p^{dm}(p^d - 1)(p^d - p)(p^d - p^2)\cdots(p^d - p^{d-1})$ را می‌شمارد.

برهان (i) چون $\Phi(G)$ زیرگروه مشخصهٔ G است، تحقیق اینکه به‌ازای هر $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$، $\bar{\alpha}$ خوشتعریف و یک خودریختی $\bar{G}$ است و نیز نگاشت φ یک همریختی است، ساده است (۱۳۶). فرض می‌کنیم X یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G باشد. همچنین بنابر ۱۲.۱۱، $|X| = d$: مثلاً

$$X = \{x_1, \dots, x_d\}.$$

در این صورت $\bar{X} = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_d\}$ یک پایه از $\bar{G}$ خواهد بود. همچنین بنابر ۱۲.۱۱، به‌ازای

هر انتخاب d عضو (نه لزوماً متمایز) از $\Phi(G)$، مانند $u_1, \dots, u_d \in \Phi(G)$، مجموعهٔ

$$\{x_1u_1, \dots, x_du_d\}$$

یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G است.

حال فرض می‌کنیم $\mathscr{M}$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های مرتب G به شکل

$$(x_1u_1, \dots, x_du_d),$$

باشد که در آن $u_1, \dots, u_d \in \Phi(G)$. در این صورت روشن است که

$$|\mathscr{M}| = p^{dm}.$$

باید توجه داشت که هرگاه $y_1, \dots, y_d \in G$، آنگاه زیرمجموعهٔ مرتب $(y_1, \dots, y_d)$ از G، متعلق است به $\mathscr{M}$ اگر و تنها اگر

$$\bar{y}_i = \bar{x}_i, \qquad \text{به‌ازای هر } i = 1, \dots, d$$

قرار می‌دهیم $K = \mathrm{Ker}\,\varphi$. اگر $\alpha \in K$ و $(y_1, \dots, y_d) \in \mathscr{M}$ آنگاه به‌ازای هر $i = 1, \dots, d$، $\overline{y_i^{\alpha}} = \bar{y}_i^{\bar{\alpha}} = \bar{y}_i = \bar{x}_i$ و بنابراین $(y_1^{\alpha}, \dots, y_d^{\alpha}) \in \mathscr{M}$.

اکنون واضح است که K به طریق طبیعی بر مجموعهٔ $\mathscr{M}$ عمل می‌کند. اگر α عضو پایدارساز K از مجموعهٔ مرتب $(y_1, \dots, y_d) \in \mathscr{M}$ باشد، آنگاه

$$(y_1^{\alpha}, \dots, y_d^{\alpha}) = (y_1, \dots, y_d),$$

از این‌رو (چون تساوی اخیر تساوی بین مجموعه‌های مرتب است)،

$$y_i^{\alpha} = y_i, \qquad \text{به‌ازای هر } i = 1, \dots, d$$

بنابراین، چون $G = \langle y_1, \dots, y_d \rangle$، نتیجه می‌گیریم $\alpha = 1$ (۷۲). از این‌رو به موجب ۱۱.۴، طول هر مدار عمل K بر $\mathscr{M}$ برابر است با $|K|$. لذا $|\mathscr{M}|$ مضربی است از $|K|$. بنابراین، چون $|\mathscr{M}| = p^{dm}$، K یک p گروه است و $|K| \leqslant p^{dm}$.

مطابق قضیهٔ اساسی همریختیها، $K \trianglelefteq \mathrm{Aut}\, G$ و $(\mathrm{Aut}\, G)/K$ را می‌توان در $\mathrm{Aut}\, \bar{G}$ نشانید. چون $\bar{G}$ آبلی مقدماتی است از مرتبهٔ p^d (۱۰.۱۱)، $\bar{G}$ با گروه جمعیِ یک فضای برداری مثل V از بعد d روی $\mathbf{Z}_p$ یکریخت است (۴۰.۷). بنابراین به موجب ۴۷، $\mathrm{Aut}\, \bar{G} \cong \mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}_p)$.

(ii) این حکم بی‌درنگ از (i) به انضمام ۱۶.۲ و ۱۷.۲ نتیجه می‌شود.
اشاره. و. گاشوتس [a۳۷] این حکم مهم را ثابت کرد که هرگاه G یک pگروه باشد با $|G|>p$، آنگاه $|\mathrm{Aut}\ G/\mathrm{Inn}\ G|$ بر p بخش‌پذیر است: قضیهٔ ۱.۱۹.۳، ص ۴۰۳ از هوپرت [b۲۱] را ببینید.

۶۳۵. فرض می‌کنیم G یک pگروه نابدیهی باشد و $\bar{G}=G/\Phi(G)$ را به‌عنوان یک فضای برداری روی $\mathbf{Z}_p$ به طریق طبیعی در نظر می‌گیریم. دراین صورت به‌ازای هر پایهٔ B از $\bar{G}$ یک مجموعهٔ مینیمال از مولدهای G مانند X وجود دارد، به‌طوری که $\bar{X}=B$ (که $\bar{X}$ مانند ۱۲.۱۱ تعریف می‌شود).

۶۳۶. فرض می‌کنیم G یک p گروه ۲ مولدی باشد.
(i) هرگاه q مقسوم‌علیه اول دلخواهی از $|\mathrm{Aut}\ G|$ متمایز از p باشد، آنگاه $p^2\equiv 1$ (پیمانهٔ q).
(ii) هرگاه $p>2$، آنگاه بزرگترین مقسوم‌علیه اول $|\mathrm{Aut}\ G|$ نمی‌تواند از p بزرگتر باشد، در حالی که اگر $p=2$ آنگاه یا $\mathrm{Aut}\ G$ خودش یک ۲ گروه است و یا دارای مرتبهٔ 3×2^r است، که در آن r یک عدد صحیح مثبت است. (رک. ۶۲۵. توجه داشته باشید که، بنابر ۱۴۱، $|\mathrm{Aut}\ G|\neq 3$.)

۶۳۷. اگر یک ۳ گروه ۳ مولدی دارای یک خودریختی با مرتبهٔ عدد اول $q\neq 3$ باشد آنگاه q یا ۲ است یا ۱۳. (اشاره. $C_3\times C_3\times C_3$ یک ۳ گروه ۳ مولدی است با خودریختیهایی از مرتبهٔ ۲ و ۱۳.)

۶۳۸. P را یک p زیرگروه سیلو G می‌گیریم و فرض می‌کنیم d یک عدد صحیح مثبت باشد به‌طوری که هر زیرگروه از G، یک گروه dمولدی باشد. اگر دو عدد صحیح $|G|$ و $(p-1)(p^2-1)\cdots(p^{d-1}-1)(p^d-1)$ متباین باشند، آنگاه G، p پوچ‌توان خواهد بود. (راهنمایی. از ۳۶.۴، ۴۷.۱۰ و ۱۳.۱۱ استفاده کنید. اشاره. این حکم بهبودیافته‌ای از قضیهٔ فروبنیوس است [a۳۲].)

۶۳۹. P را یک p زیرگروه سیلو G می‌گیریم که در آن p کوچکترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ است. ثابت کنید که هرگاه P فرادوری باشد (۱۵۲) آنگاه G، p پوچ‌توان خواهد بود، مگر اینکه $p=2$ و $|G|$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. با یک مثال نشان دهید که هرگاه $p=2$ و $|G|$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد آنگاه G لزوماً p پوچ‌توان نخواهد بود. (رک. ۲۴.۱۰. راهنمایی. از ۱۰۸، ۱۵۲ و ۶۳۸ استفاده کنید.)

۶۴۰. فرض می‌کنیم G گروهی ساده از مرتبهٔ زوج بزرگتر از ۲ باشد. در این صورت $|G|$ بر ۱۲، ۱۶ یا ۵۶ بخش‌پذیر است. (رک. ۲۲.۱۰ و ۲۳.۱۰. راهنمایی. از ۶۳۸ استفاده کنید.)

۶۴۱. (i) ثابت کنید که هرگروه از مرتبهٔ $17\times 5\times 3^2$ آبلی است و هرگروه از مرتبهٔ $17\times 5\times 3^3$ پوچ‌توان است. (رک. ۲۷۸ و ۳۶۷. راهنمایی. از ۵۶۳ و ۶۳۸ استفاده کنید.)

(ii) نشان دهید که یک گروه از مرتبهٔ $17\times 5\times 3^4$ وجود دارد که پوچ‌توان نیست. (راهنمایی. با استفاده از ۴۸۶ نشان دهید که یک گروه از مرتبهٔ 5×3^4 وجود دارد که پوچ‌توان نیست.)

اکنون قضیهٔ مهمی را ثابت می‌کنیم که جزئی از آن به گالوا منسوب است. قسمتهای دیگر این قضیه منسوب است به اُ. اور [a۷۶] و ر. بئر [a۶].

۱۴.۱۱ قضیه فرض می‌کنیم $O_p(G)\neq 1$. قرار می‌دهیم $L=O_p(G)$ و $|L|=p^n$. به‌علاوه فرض می‌کنیم که G دارای یک زیرگروه ماکسیمال M باشد به‌طوری که $M_G=1$. در این صورت

(i) L آبلی مقدماتی است.
(ii) M یک متمم برای L در G است؛ بویژه $|G:M|=p^n$.
(iii) L در G نرمال مینیمال است، و
(iv) $C_G(L)=L$؛ از این‌رو L زیرگروه نرمال مینیمال یکتای G خواهد بود.

به‌علاوه، فرض می‌کنیم که یک عدد اول مانند q وجود داشته باشد به‌طوری که $O_q(M)\neq 1$. در این صورت به‌ازای هر چنین qای:

(v) $p^n\equiv 1$ (پیمانهٔ q). بویژه $p\neq q$ و
(vi) هر متمم برای L در G با M مزدوج است.

اشاره. هرگاه G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد و دارای یک زیرگروه ماکسیمال M باشد به‌طوری که $M_G=1$، آنگاه بنابر ۳۸۱ عدد اولی مانند p وجود دارد به‌طوری که $O_p(G)\neq 1$ و در نتیجه احکام (i) تا (iv) برقرارند. بویژه، تنها یک عدد اول مانند p وجود دارد به‌طوری که $O_p(G)\neq 1$. به‌علاوه، $M\neq 1$، مگر اینکه $|G|=p$. سپس چون M حل‌پذیر است (۴۶.۷)، عدد اولی چون q وجود دارد به‌طوری که $O_q(M)\neq 1$ و در این صورت احکام (v) تا (vi) نیز برقرارند. ممکن است چند تا از چنین اعداد اولی مانند q وجود داشته باشند: ۶۳۰ را ببینید.

برهان از قضیه (i) چون M یک زیرگروه ماکسیمال G است، $\Phi(G)\leqslant M$، و چون $\Phi(G)\trianglelefteq G$، نتیجه می‌گیریم که $\Phi(G)\leqslant M_G=1$. لذا $\Phi(G)=1$. بنابراین چون $L\trianglelefteq G$، ۷.۱۱ نشان می‌دهد که $\Phi(L)=1$. از آنجا که L یک p زیرگروه است، از ۹.۱۱ نتیجه می‌شود که L آبلی مقدماتی است.

(ii) چون $1\neq L\trianglelefteq G$ و $M_G=1$، $L\not\leqslant M$. بنابراین $M<ML\leqslant G$ (۳۸.۳)، و در نتیجه ماکسیمال بودن M ایجاب می‌کند که $ML=G$. از آنجا که $L\trianglelefteq G$، $M\cap L\trianglelefteq M$،

و چون بنابر (i)، L آبلی است، $M \cap L \trianglelefteq L$، از این‌رو $M \cap L \trianglelefteq ML = G$، بنابراین $M \cap L \leqslant M_G = ۱$. لذا $ML = G$ و $M \cap L = ۱$؛ یعنی M یک متمم برای L در G است. به‌ویژه $|G:M| = |L| = p^n$.

(iii) فرض می‌کنیم $۱ < K \trianglelefteq G$ که $K \leqslant L$. در این صورت $M \leqslant MK \leqslant G$. چون $M_G = ۱$، $K \nleqslant M$ و در نتیجه $MK \neq M$. بنابراین چون M ماکسیمال است، $MK = G$. به‌علاوه بنابر (ii)، $M \cap K \leqslant M \cap L = ۱$. از این‌رو M یک متمم برای K در G است و در نتیجه بنابر (ii)، $|K| = |G:M| = |L|$. و از آنجا که $K \leqslant L$، نتیجه می‌گیریم که $K = L$. لذا L در G نرمال مینیمال است.

(iv) بنابر (i) و (ii)،

$$L \leqslant C_G(L) \leqslant G = ML.$$

بنابراین، به موجب قاعدهٔ ددکیند (۳.۷)، خواهیم داشت:

$$C_G(L) = (M \cap C_G(L))L.$$

اما بنابه ۳۶.۴، $C_G(L) \trianglelefteq G$. لذا $M \cap C_G(L) \trianglelefteq M$. علاوه بر این L، $M \cap C_G(L)$ را مرکزی و بنابراین به نرمال بدل می‌کند.

از این‌رو
$$M \cap C_G(L) \trianglelefteq ML = G$$

چون $M_G = ۱$، نتیجه می‌شود که $M \cap C_G(L) = ۱$. لذا

$$C_G(L) = L.$$

فرض می‌کنیم G دارای یک زیرگروه نرمال مینیمال مانند $N \neq L$ باشد. در این صورت $L \cap N \trianglelefteq G$ و بنابر (iii)، $N \nleqslant L$، بنابراین $L \cap N < N$. چون N در G نرمال مینیمال است نتیجه می‌شود که $L \cap N = ۱$. در این صورت بنابر ۵۳.۳، خواهیم داشت

$$[L, N] = ۱.$$

از این‌رو $N \leqslant C_G(L) = L$ و این یک تناقض است. بنابراین L زیرگروه نرمال مینیمال یکتای G است.

حال فرض می‌کنیم که به‌ازای عدد اولی مانند q، $O_q(M) \neq ۱$. قرار می‌دهیم $Q = O_q(M)$.

(v) چون $Q \trianglelefteq M$ و $L \trianglelefteq G$، بنابر ۴.۷ و (ii)،

$$QL \trianglelefteq ML = G.$$

همین‌طور، بنابر (ii)، $Q \cap L = ۱$ و در نتیجه بنابر ۴۰.۳ داریم

$$|QL| = |Q||L|.$$

بنابراین، چون $Q \neq ۱$ و $L = O_p(G)$، نتیجه می‌شود که $q \neq p$. لذا Q یک q زیرگروه سیلو QL است.

حال $۱ < Q \trianglelefteq M$ و چون $M_G = ۱$، $Q \ntrianglelefteq G$. بنابراین ماکسیمال بودن M نتیجه می‌دهد که

$$N_G(Q) = M.$$

از این‌رو بنابر قاعدهٔ ددکیند (۳.۷) و (ii) خواهیم داشت

$$N_{QL}(Q) = (QL) \cap M = Q(L \cap M) = Q.$$

لذا مطابق قضیهٔ سیلو،

$$|L| = |QL : Q| = |QL : N_{QL}(Q)| \equiv ۱ \ (\text{پیمانهٔ } q)$$

یعنی

$$p^n \equiv ۱ \ (\text{پیمانهٔ } q).$$

(vi) M^* را متمم دلخواهی برای L در G می‌گیریم و قرار می‌دهیم $Q^* = O_q(M^*)$. همریختی طبیعی ν از G بر G/L، Q را به QL/L و Q^* را به Q^*L/L می‌نگارد. چون بنابر (ii)، M یک متمم است برای L در G، تحدید ν به M یک یکریختی از M به روی G/L خواهد بود. بنابراین ν باید $Q = O_q(M)$ را بر $O_q(G/L)$ بنگارد. به همین نحو، ν باید Q^* را به $O_q(G/L)$ بنگارد. لذا

$$QL/L = O_q(G/L) = Q^*L/L,$$

بنابراین

$$QL = Q^*L.$$

چون بنابر (v)، $q \neq p$، نتیجه می‌شود که Q و Q^*، q زیرگروههای سیلو QL هستند. بنابراین مطابق قضیهٔ سیلو به‌ازای $x \in QL$ی؛

$$Q^* = Q^x.$$

همچون در (v)،

$$M = N_G(Q).$$

چون $Q^* \trianglelefteq M^*$ به موجب ۲۲۹ نتیجه می‌شود که

$$M^* \leqslant N_G(Q^*) = N_G(Q^x) = M^x.$$

چون M و M^* متممهایی هستند برای L در G،

$$|M^*| = |G/L| = |M| = |M^x|.$$

از این‌رو

$$M^* = M^x.$$

۱۵.۱۱ فرع (گالوا). فرض می‌کنیم که G نابدیهی و حل‌پذیر باشد و M را یک زیرگروه ماکسیمال G می‌گیریم. در این صورت به‌ازای عدد اولی مانند p و عدد صحیحی مانند n، $|G : M| = p^n$.

برهان قرار می‌دهیم $\bar{G} = G/M_G$ و $\bar{M} = M/M_G$. در این صورت، بنابر ۳۰.۳، $\bar{M}$ یک زیرگروه ماکسیمال $\bar{G}$ است به‌طوری که $\bar{M}_{\bar{G}} = ۱$. چون $\bar{G}$ حل‌پذیر است (۴۶.۷) و نابدیهی، یک عدد اول مانند p وجود دارد به‌طوری که $O_p(\bar{G}) \neq ۱$ (۳۸۱). قرار می‌دهیم $|O_p(\bar{G})| = p^n$. در این صورت بنابر ۱۴.۱۱،

$$|\bar{G} : \bar{M}| = p^n.$$

از این‌رو

$$|G : M| = p^n.$$

اشارات. می‌توان نشان داد که در گروه $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}_2)$ از مرتبهٔ ۱۶۸، شاخص هر زیرگروه ماکسیمال یا ۷ است یا ۸. می‌دانیم که $\mathrm{GL}_3(\mathbf{Z}_2)$ ساده است (۳۸۵ را ببینید). این گروه در واقع تنها گروه سادهٔ شناخته‌شدهٔ ناآبلی است که شاخص هر زیرگروه ماکسیمالش توانی از یک عدد اول است.

۶۴۲. فرض می‌کنیم G دارای یک زیرگروه نرمال نابدیهی آبلی باشد. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G یک زیرگروه ماکسیمال M دارد که $M_G = ۱$.

(ii) $\Phi(G) = ۱$ و G دارای یک زیرگروه نرمال مینیمال یکتا است.

۶۴۳. فرض می‌کنیم که G دارای یک زیرگروه نرمال مینیمال آبلی مانند L باشد به‌طوری که $O_q(G/L)$ به‌ازای عدد اولی مانند q نابدیهی باشد. در این صورت دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G یک زیرگروه ماکسیمال M دارد که $M_G = ۱$.

(ii) $C_G(L) = L$.

(راهنمایی. برای اثبات اینکه (ii) $\Leftarrow$ (i)، از ۵۶.۷، ۶۲۱ و ۶۴۲ استفاده کنید.)

۶۴۴. فرض می‌کنیم $O_p(G) \neq ۱$، و G یک زیرگروه ماکسیمال مانند M داشته باشد، که $M_G = ۱$. در این صورت

(i) $O_p(G) = F(G)$.

(ii) $O_p(G)$ زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال یکتای G است، و

(iii) $O_p(G)$ یک زیرگروه آبلی ماکسیمال G است.

(۲۳۵، ۲۵۱ و ۴۰۰ را ملاحظه کنید. همچنین ۶۴۵ را ببینید.)

۶۴۵. قرار می‌دهیم $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_3)$ و $K = Z(G)$. نشان دهید که

(i) K زیرگروه نرمال آبلی ماکسیمال یکتای G است.

(ii) $K < F(G)$، و

(iii) K یک زیرگروه آبلی ماکسیمال G نیست.

(ر.ک. ۶۴۴. راهنمایی. از ۱۹۳، ۲۸۹ و ۶۳۴ استفاده کنید.)

*۶۴۶. فرض می‌کنیم G نابدیهی و زَبَرحل‌پذیر باشد (۳۸۹ را ببینید). در این صورت شاخص هر زیرگروه ماکسیمال G، در G عدد اول است. (اشاره. ب. هوپرت [a۶۱]، به عکس، ثابت کرد که یک گروه متناهی نابدیهی که شاخص هر گروه ماکسیمالش عدد اول باشد لزوماً زَبَرحل‌پذیر است. ۱۶.۱۱ و اشارت پس از آن را ببینید.)

۶۴۷. (اور [a۷۶]). فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد و M و M^* را زیرگروههای

ماکسیمال G می‌گیریم. در این صورت M و M^* زیرگروههای مزدوج G هستند اگر و تنها اگر $M_G = M_G^*$.

۶۴۸. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد. در این صورت هر دو عمل اولیهٔ صادق G بر مجموعه‌ها، هم‌ارزند. (۶۱۱، ۱۹.۴ را ببینید. راهنمایی. از ۶۱۱، ۶۴۷، ۲۰.۴ و ۲۱.۴ استفاده کنید.)

***۶۴۹.** فرض می‌کنیم که گروه H مثلاً با عمل φ بر گروه آبلی A، عمل کند. قرار می‌دهیم $\bar{H} = \mathrm{Im}\varphi \leqslant \mathrm{Aut}\, A$ (۳.۹ را ببینید). عمل φ را تحویل‌ناپذیر گوییم اگر تنها زیرگروههای $\bar{H}$ پایای A، ۱ و A باشند.

فرض می‌کنیم $A \neq 1$ و قرار می‌دهیم $J = H_\varphi \times A$. در این صورت φ تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر A یک زیرگروه نرمال مینیمال J باشد. بویژه، اگر φ تحویل‌ناپذیر و A متناهی باشد آنگاه به‌ازای عدد اولی مانند p، A یک p گروه آبلی مقدماتی است.

۶۵۰. (i) فرض می‌کنیم F میدان دلخواهی باشد. در این صورت عمل $F^\times$ بر F^+ به‌وسیلهٔ ضرب (مانند ۲.۹ (i)) تحویل‌ناپذیر است (۶۴۹).

(ii) به‌ازای هر عدد اول p و هر عدد صحیح مثبت n، یک گروه حل‌پذیر متناهی G با یک زیرگروه ماکسیمال از شاخص p^n در G وجود دارد. (ر.ک. ۱۵.۱۱. راهنمایی. از ۶۰۱ و ۶۴۹ استفاده کنید. وجود یک میدان با p^n عضو می‌تواند مسلم گرفته شود. برای اثبات وجود چنین میدانی، به‌عنوان مثال، لم ۴.۷ ص ۳۱۶ از هرشتاین [b19] یا بخش ۵، ص ۱۸۲ از لنگ [b28] یا قضیهٔ ۶.۸ ص ۱۵۵ از روتمن [b34] را ببینید.)

۶۵۱. سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) $O_p(G) \neq 1$ و G دارای یک زیرگروه ماکسیمال M است به‌طوری که $M_G = 1$.

(ii) $O_p(G) \neq 1$ و یک عمل اولیهٔ صادق از G بر یک مجموعه وجود دارد (۶۱۱ را ببینید).

(iii) یک pگروه آبلی مقدماتی نابدیهی مانند A و یک زیرگروه H از $\mathrm{Aut}\, A$ وجود دارد به‌طوری که عمل طبیعی از H بر A تحویل‌ناپذیر است و G با تمام‌ریخت نسبی HA از A یکریخت است (۶۴۹ را ببینید). (راهنمایی. برای اینکه ثابت کنید (ii) $\Leftrightarrow$ (i)، از ۶۱۱ استفاده کنید. برای اینکه ثابت کنید (i) $\Leftarrow$ (iii)، از ۱۳.۹، ۱۴.۹، ۱۴.۱۱ و ۶۴۹ استفاده کنید. برای اینکه ثابت کنید (iii) $\Leftarrow$ (i)، از ۴۸۶، ۴۹۹، ۶۰۱ و ۶۴۹ استفاده کنید.)

۶۵۲. دو حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G دارای یک زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی مانند L و یک زیرگروه M است به‌طوری که $|G:M| = p$ و $M_G = 1$.

(ii) G با یک تمام‌ریخت نسبی یک گروه از مرتبهٔ p، یکریخت است.

(راهنمایی. برای اینکه ثابت کنید (i) $\Leftarrow$ (ii) از ۱۳.۹، ۱۴.۹ و ۱۴.۱۱ استفاده کنید. برای اینکه ثابت کنید (ii) $\Leftarrow$ (i) از ۴۸۶ و ۴۹۹ استفاده کنید. اشاره. هرگاه G در (i) و (ii) صدق کند آنگاه بویژه G فرادوری است: ۱۵۲ و ۵۱۲ را ببینید.)

۶۵۳. فرض می‌کنیم گروه H مثلاً با عمل φ بر گروه K عمل کند. قرار می‌دهیم

$$\bar{H} = \mathrm{Im}\varphi \leqslant \mathrm{Aut}\, K$$

(i) اگر $J \trianglelefteq H$، آنگاه $C_K(J)$ یک زیرگروه $\bar{H}$ پایای K است (۴۷۸ را ببینید).

(ii) فرض می‌کنیم H متناهی، K متناهی و آبلی مقدماتی مثلاً از مرتبهٔ p^n، و φ تحویل‌ناپذیر باشد (۶۴۹). در این صورت به‌ازای هر عدد اول q، یا $O_q(H) \leqslant \mathrm{Ker}\varphi$ یا $p^n \equiv 1$ (پیمانهٔ q).

۶۵۴. (i) A را یک زیرگروه نرمال آبلی نابدیهی از G می‌گیریم. در این صورت عمل G بر A به‌وسیلهٔ تزویج عملی تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر A یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد (۲.۹ (iii) و ۶۴۹ را ببینید.)

(ii) A را یک زیرگروه نرمال مینیمال آبلی G می‌گیریم. در این صورت به‌ازای عدد اولی مانند p و عدد صحیح مثبتی چون n، $|A| = p^n$ و به‌ازای هر عدد اول q، یا $O_q(G/C_G(A))$ بدیهی است و یا

$$p^n \equiv 1 \ (\text{پیمانهٔ } q).$$

بویژه، $O_p(G/C_G(A))$ بدیهی است. (راهنمایی. توجه داشته باشید که عمل G بر A به‌وسیلهٔ تزویج یک عمل صادق از $G/C_G(A)$ بر A را مشخص می‌کند: ۴۷۶ را ببینید. از ۶۵۳ استفاده کنید.)

۶۵۵. فرض کنید V، یک فضای برداری از بعد متناهی n بر میدان F باشد، با $n > 0$

(i) عمل طبیعی $\mathrm{GL}(V)$ بر V^+ تحویل‌ناپذیر است. به‌علاوه $\mathscr{A}(V)$ گروه آفین V، یک زیرگروه نرمال مینیمال یکتای A دارد و $A \cong V^+$. (۴۸۴، ۴۸۶ و ۶۴۹ را ببینید.)

(ii) فرض می‌کنیم به‌ازای یک عدد اول p، $F = \mathbf{Z}_p$، در این صورت V^+ آبلی مقدماتی است از مرتبهٔ p^n و $\mathrm{GL}(V)$ نیز متناهی خواهد بود. فرض می‌کنیم $1 < H \leqslant \mathrm{GL}(V)$ و همچنین عمل طبیعی H بر V^+ تحویل‌ناپذیر باشد. اگر H حل‌پذیر باشد آنگاه به‌ازای یک مقسوم‌علیه اول q از $|H|$، $p^n \equiv 1$ (پیمانهٔ q)، در صورتی که اگر H پوچ‌توان باشد آنگاه به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول q از $|H|$، $p^n \equiv 1$ (پیمانهٔ q).

(iii) اگر $F = \mathbf{Z}_p$، آنگاه یک زیرگروه دوری مانند H از $\mathrm{GL}(V)$ وجود دارد که $|H| = p^n - 1$، و عمل طبیعی H بر V^+ تحویل‌ناپذیر است.

(راهنمایی. برای (ii)، از ۶۵۳ استفاده کنید. در مورد (iii)، توجه داشته باشید که V^+ با گروه جمعی یک میدان p^n عضوی یکریخت است و از ۴۷۵ و ۱۴.۹، ۱۵.۹ (ii) و ۶۵۰ (i) استفاده کنید.)

۶۵۶. فرض می‌کنیم که G دارای یک زیرگروه ماکسیمال M باشد به‌طوری که $|G : M| = 6$. در این صورت G دارای یک عامل اصلی یکریخت با A_5 یا با A_6 است. این حکم را می‌توان به‌وسیلهٔ استدلال زیر اثبات کرد:

(i) ابتدا توجه می‌کنیم که به منظور اثبات این حکم، کافی است فرض کنید $M_G = 1$ و نتیجه بگیرید که G دارای یک زیرگروه نرمال مینیمال یکریخت با A_5 یا با A_6 است. پس فرض کنید $M_G = 1$ و K را یک زیرگروه نرمال مینیمال G بگیرید.

(ii) با استفاده از ۱۴.۱۱ نشان دهید که K ناآبلی است.

(iii) توجه داشته باشید که بنابر ۱۴.۴، $|G|$، $5 \times 3 \times 2^4$ را می‌شمارد. سپس با استفاده از ۱۰.۸ به همراه ۱۷.۵ و ۱۹.۵ نشان دهید که K ساده است.

(iv) بنابر ۱۸۴، K را می‌توان در A_6 نشانید. از این‌رو اگر $K \neq A_6$، $|K| \leqslant 180$.

(v) بالاخره، از ۳۰.۵ و ۲۹۶ استفاده کنید.

(اشاره. هم A_5 دارای زیرگروههای ماکسیمال از شاخص ۶ است و هم A_6: ۲۵.۵ و ۶۱۵ را ببینید.)

۶۵۷. (الف) یک گروه فرد مرتبه نمی‌تواند زیرگروه ماکسیمالی از شاخص ۹ داشته باشد. این حکم را می‌توان با استدلال زیر ثابت کرد:

(i) فرض کنید حکم برقرار نیست و G را یک گروه از کوچکترین مرتبهٔ فردِ ممکن با یک زیرگروه ماکسیمال M بگیرید به‌طوری که $|G : M| = 9$. در این صورت $M_G = 1$.

(ii) فرض کنید K یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد. با استفاده از ۳۶.۴، ۲.۱۱، ۴.۱۱ و ۶۳۶ نشان دهید که K ناآبلی است.

(iii) توجه داشته باشید که بنابر ۱۴.۴، $|G|$، $7 \times 5 \times 3^4$ را می‌شمارد. سپس با استفاده از ۱۰.۸ نشان دهید که K ساده است.

(iv) توجه کنید که $|K|$ بر ۹ بخش‌پذیر است. با استفاده از قضیهٔ سیلو نشان دهید که تعداد ۳ زیرگروههای سیلو متمایز K، برابر است با ۷، از این‌رو K دارای یک زیرگروه از شاخص ۷ است.

(v) با استفاده از ۱۴.۴ نتیجه بگیرید که $|K|$، $7 \times 5 \times 3^2$ را می‌شمارد.

(vi) تناقض نهایی را با استفاده از ۱۹.۵ و ۵۷۰ نتیجه بگیرید.

(اشاره. مطابق قضیهٔ فایت‌ـ‌تامپسن هر گروه از مرتبهٔ فرد حل‌پذیر است: ۳۸۳ را ببینید. در این صورت حکم بلافاصله با استفاده از ۱۴.۱۱ به‌دست می‌آید. با این وجود همان‌گونه که استدلال خلاصه شدهٔ فوق نشان می‌دهد، لازم نیست از قضیهٔ فایت‌ـ‌تامپسن کمک بگیرید.)

(ب) به‌ازای هر عدد اولِ p به‌طوری که (پیمانه ۳) $p \equiv -1$، یک گروه از مرتبهٔ $3p^2$ با یک زیرگروه ماکسیمال از مرتبهٔ ۳ و شاخص p^2 وجود دارد. (ر ک. ۶.۴. راهنمایی. فرض کنید A یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبهٔ p^2 باشد. توجه داشته باشید که بنابر ۶۰۱ کافی است نشان دهید که یک تمامریختی نسبی G از A از مرتبهٔ $3p^2$ وجود دارد، به‌طوری که A یک زیرگروه نرمال مینیمال G است. همچنین ۲۲۸ را ببینید. اگر G یک تمامریختی نسبی A از مرتبهٔ $3p^2$ باشد، با استفاده از ۳۶.۴ و ۳۸.۴ نشان دهید که اگر A در G نرمال مینیمال نباشد، آنگاه یک زیرگروه B از A وجود دارد به‌طوری که $|B| = p$ و $B \leqslant Z(G)$.)

اکنون حکم جالبی را ثابت می‌کنیم که تا اندازه‌ای عکس ۱۵.۱۱ است. ما برهانی را می‌آوریم که در قضیهٔ ۴.۹.۶ ص ۷۱۸ هوپرت [b21] آمده است.

۱۶.۱۱ قضیه (ف. هال) فرض می‌کنیم که به‌ازای هر زیرگروه ماکسیمال M از G، $|G : M|$ یا یک عدد اول است و یا مربعی از یک عدد اول. در این صورت G حل‌پذیر است.

برهان با استقرا بر $|G|$ استدلال می‌کنیم. می‌توانیم فرض کنیم که $G \neq 1$. K را یک زیرگروه نرمال مینیمال G می‌گیریم. هر زیرگروه ماکسیمال G/K به شکل M/K است، که در آن M یک زیرگروه ماکسیمال G است. از این‌رو شاخص هر زیرگروه ماکسیمال G/K یا یک عدد اول است و یا مربع یک عدد اول. بنابراین مطابق فرض استقرا، G/K حل‌پذیر است.

فرض می‌کنیم p بزرگترین مقسوم‌علیه اولی باشد که $|K|$ را می‌شمارد و P را یک p زیرگروه سیلو K می‌گیریم. اگر $N_G(P) = G$ آنگاه، چون K در G نرمال مینیمال است، $K = P$. در این حالت K حل‌پذیر است (۴۴.۷).

اکنون فرض می‌کنیم که $N_G(P) < G$. در این صورت یک زیرگروه ماکسیمال M از G وجود دارد به‌طوری که $N_G(P) \leqslant M$. به موجب لم فراتینی (۱۳.۵)،

$$G = N_G(P)K\cdot$$

همچنین $M \cap K \trianglelefteq M$ و چون $P \leqslant M \cap K \leqslant K$، P یک p زیرگروه سیلو از $M \cap K$ بوده و (باز هم بنابر ۱۳.۵)،

$$M = N_M(P)(M \cap K)\cdot$$

حال به موجب ۴۰.۳ و قضیهٔ سیلو، نتیجه می‌گیریم که

(i) $|G : N_G(P)| = |K : N_K(P)| \equiv$ ۱ (پیمانهٔ p)

و

(ii) $|M : N_M(P)| = |M \cap K : N_{M\cap K}(P)| \equiv$ ۱ (پیمانه p).

چون $N_G(P) \leqslant M \leqslant G = N_G(P)K$،

$$G = MK,$$

و بنابراین

(iii) $|G : M| = |K : M \cap K|.$

به‌علاوه،

$$N_M(P) = M \cap N_G(P) = N_G(P)$$

و

$$|G : N_G(P)| = |G : M||M : N_G(P)|.$$

از این‌رو از (i) و (ii) نتیجه می‌گیریم که

(iv) $|G : M| \equiv$ ۱ (پیمانهٔ p).

بنابر فرض، عدد اولی مانند q وجود دارد به‌طوری که

(v) $|G : M|$ یا با q برابر است یا با q^2.

محققاً $q \neq p$ و بنابر (iii)، q، $|K|$ را می‌شمارد. بنابراین به موجب انتخاب p، نتیجه می‌گیریم که

$$q < p.$$

اکنون (iv) و (v) به اتفاق ایجاب می‌کنند که

$|G : M| = q^2 \equiv$ ۱ (پیمانه p).

همنهشتی اخیر با $q < p$، تنها وقتی امکان‌پذیر است که ۳ = p و ۲ = q. لذا

$|G : M| =$ ۴.

اما (iii) نشان می‌دهد که K دارای یک زیرگروه از شاخص ۴ است. بنابراین، به موجب ۱۴.۴، K دارای یک زیرگروه نرمال حقیقیِ L خواهد بود به‌طوری که K/L را می‌توان در $\sum_4$، که حل‌پذیر است نشانید (۳۶۴). لذا K/L حل‌پذیر است (۴۶.۷)، و بنابراین K/L دارای یک گروه خارج‌قسمتی آبلی نابدیهی است (۳۷۴). از این‌رو بنابر ۳۰.۳، K نیز دارای یک گروه خارج‌قسمتی آبلی نابدیهی خواهد بود، بنابراین

$$K' < K.$$

چون K' در K مشخصه است (۵۱.۳)، ۱۵.۳ نشان می‌دهد که

$$K' \trianglelefteq G.$$

از آنجا که K در G نرمال مینیمال است، نتیجه می‌شود که

$K' =$ ۱.

لذا K آبلی است.

اما در هر حالت، هم K حل‌پذیر است و هم G/K. بنابراین، به موجب ۴۷.۷، G حل‌پذیر است. بدین‌ترتیب اثبات استقرائی کامل می‌شود.

اشارات. این قضیه نشان می‌دهد که در حالت خاص اگر شاخص هر زیرگروه ماکسیمال G در G عدد اول باشد، G حل‌پذیر است. ب. هوپرت [a۶۱] حتی بیشتر، ثابت کرد که G زَبَرحل‌پذیر است. (۳۸۹)، این عکس نتیجهٔ ۶۴۶ است. اثبات به اطلاعات نسبتاً بیشتری از عملهای گروهی تحویل‌ناپذیر (۶۴۹)، بیش از آنچه در این کتاب گنجانده شده، نیاز دارد: قضیهٔ ۵.۹.۶ ص ۷۱۸ از هوپرت [b۲۱] یا قضیهٔ c.۷.۷ ص ۲۳۶ از شنکمن [b۳۵] یا قضیهٔ ۸.۳.۹ ص ۲۲۶ از اسکات [b۳۶] را ببینید.

حال چند قضیهٔ بنیادی از ف. هال را دربارهٔ ساختار حسابی گروههای حل‌پذیر متناهی ثابت می‌کنیم.

۱۷.۱۱ تعریف به‌ازای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول، مجموعهٔ همهٔ اعداد اولی را که به ϖ تعلق ندارند، با ϖ' نمایش دهیم.

فرض می‌کنیم $H \leqslant G$. در این صورت گوییم H یک ϖ زیرگروه هالِ G است، اگر $|H|$ یک ϖ عددی و $|G:H|$ یک ϖ' عددی باشد. (۴۱.۳ را ببینید).

یادآوری می‌کنیم که یک ϖ زیرگروه هال G، به معنی ۱۷.۱۰، یک زیرگروه هال G خواهد بود. یک p زیرگروه هال G دقیقاً همان p زیرگروه سیلو G و یک p' زیرگروه هال G دقیقاً همان p متمم G است (۱۹.۱۰ را ببینید).

به‌علاوه توجه داریم که اگر G یک ϖ زیرگروه هال مانند H داشته باشد، آنگاه $|H|$ به‌وسیلهٔ $|G|$ مشخص می‌شود، یعنی $|H|$ باید بزرگترین ϖ عددی باشد که $|G|$ را می‌شمارد.

*۶۵۸. فرض می‌کنیم که H یک ϖ زیرگروه هال G باشد.

(i) هرگاه $J \leqslant G$ به‌طوری که $|J| = |H|$، آنگاه J یک ϖ زیرگروه هال G خواهد بود.

(ii) به‌ازای هر عضو $g \in G$، H^g یک ϖ زیرگروه هال G است.

(iii) هرگاه $H \leqslant L \leqslant G$، آنگاه H یک ϖ زیرگروه هال L است.

*۶۵۹. فرض می‌کنیم $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$.

(i) اگر H یک ϖ زیرگروه G باشد آنگاه HK/K یک ϖ زیرگروه G/K خواهد بود.

(ii) اگر H یک ϖ زیرگروه هال G باشد آنگاه $H \cap K$ یک ϖ زیرگروه هال K خواهد بود و HK/K یک ϖ زیرگروه هال G/K.

۶۶۰. فرض می‌کنیم که H یک ϖ زیرگروه هال G باشد. در این صورت

$$O_\varpi(G) \leqslant H \leqslant O^\varpi(G) \quad \text{و} \quad HO^\varpi(G) = G$$

۶۶۱. G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر هر زیرگروه هال G در G نرمال باشد (ر.ک. ۳.۱۱).

قضیهٔ سیلو وجود p زیرگروههای سیلو را به‌ازای هر عدد اول p در هر گروه متناهی چون G تضمین می‌کند. قضیهٔ زیر از هال، که در ۱۹۲۸ ثابت شد، وجود ϖ زیرگروههای هال را به‌ازای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول، در هر گروه حل‌پذیر متناهی G تضمین می‌کند. این قضیه همچنین گزاره‌های نظیر ۹.۵ (ب) را ثابت می‌کند.

۱۸.۱۱ قضیه (ف. هال [a۴۷]). فرض می‌کنیم G حل‌پذیر باشد و ϖ را مجموعهٔ دلخواهی از اعداد اول می‌گیریم. در این صورت

(i) G دارای یک ϖ زیرگروه هال است.

(ii) هرگاه H یک ϖ زیرگروه هال G باشد و V، ϖ زیرگروه دلخواهی از G، آنگاه به‌ازای یک $g \in G$، $V \leqslant H^g$. به خصوص، ϖ زیرگروههای هال G ردهٔ تزویجی واحدی از زیرگروههای G را تشکیل می‌دهند.

برهان ما (i) و حکم اول (ii) را با هم به‌وسیلهٔ استقرا بر $|G|$ ثابت می‌کنیم. سپس حکم دوم (ii) آشکارا نتیجه می‌شود، زیرا همهٔ ϖ زیرگروههای هال G دارای یک مرتبه‌اند و هر زیرگروه از این مرتبه یک ϖ زیرگروه هال G است (۶۵۸ را ببینید).

هرگاه $|G| = 1$، قضیه واضح است. فرض می‌کنیم $|G| > 1$. چون همهٔ زیرگروهها و همهٔ گروههای خارج‌قسمتی G حل‌پذیرند (۴۶.۷)، از فرض استقرا نتیجه می‌شود که این قضیه برای هر زیرگروه حقیقی G و هر گروه خارج‌قسمتی G به‌وسیلهٔ یک زیرگروه نرمال نابدیهی، برقرار است.

قرار می‌دهیم $R = O_\varpi(G)$ و ابتدا فرض می‌کنیم $R \neq 1$. در این صورت، بنابر فرض استقرا G/R دارای یک ϖ زیرگروه هال مانند H/R است که $H \leqslant G$. پس $|H| = |H/R| \cdot |R|$، یک ϖ عددی و $|G:H| = |G/R : H/R|$، یک ϖ' عددی خواهد بود. بنابراین H یک ϖ زیرگروه هال G است. حال فرض می‌کنیم V، ϖ زیرگروه دلخواهی از G باشد. در این صورت VR/R یک ϖ زیرگروه G/R است (۶۵۹) و بنابراین به موجب فرض استقرا به‌ازای یک $g \in G$ (۲۳۰)،

$$VR/R \leqslant (H/R)^{Rg} = H^g/R.$$

در این صورت $V \leqslant VR \leqslant H^g$ و اثبات در این حالت کامل می‌شود.

حال فرض می‌کنیم $R = 1$. قرار می‌دهیم $K = O_\varpi(G)$ و فرض می‌کنیم L یک زیرگروه نرمال مینیمال G باشد. بنابر ۵۶.۷، L به‌ازای عدد اولی مانند p، یک p گروه آبلی مقدماتی است، و چون $R = 1$، $p \notin \varpi$. از این‌رو

$$L \leqslant K.$$

هرگاه $K = G$ آنگاه G یک ϖ' گروه خواهد بود و روشن است که قضیه برقرار است: در این حالت ۱، ϖ زیرگروه یکتای G است. سرانجام، می‌توانیم همچنین فرض کنیم که

$$K < G.$$

در این صورت یک عامل اصلی G به شکل J/K وجود دارد و بنابر ۵۶.۷، J/K به‌ازای عدد اولی مانند q، یک q گروه آبلی مقدماتی است. اگر $q \in \varpi'$، آنگاه چون $|J| = |J/K|\cdot|K|$، J یک ϖ' زیرگروه نرمال G خواهد بود که $K < J$؛ و این با تعریف K در تناقض است. از این‌رو $q \in \varpi$. Q را یک q زیرگروه سیلو J می‌گیریم. در این صورت، چون J/K یک q گروه است، $J = QK$ (۲۵۲). از آنجا که $Q \neq 1$ و $R = 1$، $N_G(Q) < G$. از این‌رو بنابر فرض استقراء، $N_G(Q)$ دارای یک ϖ زیرگروه هال مانند H خواهد بود. به‌علاوه

$$|G : H| = |G : N_G(Q)||N_G(Q) : H|.$$

مطابق لم فراتینی، (۱۳.۵)،

$$G = N_G(Q)J = N_G(Q)QK = N_G(Q)K.$$

بنابراین به موجب ۴۰.۳،

$$|G : N_G(Q)| = |K : N_G(Q) \cap K|,$$

که یک ϖ' عددی است. چون $|N_G(Q) : H|$ نیز یک ϖ' عددی است، بنابر تعریف H، $|G : H|$ یک ϖ' عددی خواهد بود. لذا H یک ϖ زیرگروه هال G است.

فرض می‌کنیم V، ϖ زیرگروه دلخواهی از G باشد. در این صورت VL/L یک ϖ زیرگروه G/L و HL/L یک ϖ زیرگروه هال G/L است (۶۵۹). از این‌رو بنابر فرض استقراء به‌ازای یک $x \in G$ (۲۳۰)،

$$VL/L \leqslant (HL/L)^{Lx} = H^xL/L.$$

لذا $V \leqslant VL \leqslant H^xL \leqslant G$. به‌علاوه H^x یک ϖ زیرگروه هال H^xL است (۶۵۸). بنابراین هرگاه $H^xL < G$، بنابر فرض استقراء نتیجه می‌شود که به‌ازای یک $y \in H^xL$،

$$V \leqslant (H^x)^y = H^{xy},$$

و اثبات در این حالت کامل می‌شود.

حال فرض می‌کنیم $H^xL = G$. در این صورت

$$HL = (H^xL)^{x^{-1}} = G.$$

چون H یک ϖ زیرگروه G است و $p \notin \varpi$، $H \cap L = 1$. لذا H یک متمم L در G خواهد بود. از این‌رو بنابر ۶۰۱، H یک زیرگروه ماکسیمال G است. علاوه بر این چون H_G یک ϖ زیرگروه نرمال G است، $H_G = 1$. روشن است که $L = O_p(G)$. قرار می‌دهیم

$$W = VL.$$

پس

$$L \leqslant W \leqslant G = HL$$

بنابراین به موجب قاعدهٔ ددکیند (۳.۷)،

$$W = (W \cap H)L.$$

اما $W \cap H$ یک ϖ زیرگروه W است. همچنین $(W \cap H) \cap L = 1$ و در نتیجه به موجب ۴۰.۳،

$$|W : W \cap H| = |L|,$$

یک ϖ' عددی است. لذا $W \cap H$ یک ϖ زیرگروه هال W است. چون V نیز آشکارا یک ϖ زیرگروه هال W است، بنابر فرض استقراء نتیجه می‌شود که هرگاه $W < G$، آنگاه به‌ازای یک $w \in W$،

$$V = (W \cap H)^w.$$

بنابراین

$$V \leqslant H^w$$

سرانجام، اگر $W = G$، آنگاه V یک متمم L در G است و بنابراین، چون H حل‌پذیر است و $H \neq 1$، ۱۴.۱۱ (vi) نشان می‌دهد که به‌ازای یک $g \in G$،

$$V = H^g,$$

و اثبات به استقراء کامل می‌شود.

اشاره. قسمت آخر این برهان با استفاده از ۲۹.۱۰ ممکن است اندکی خلاصه‌تر شود.

۱۹.۱۱ تعریف G را یک گروه نابدیهی می‌گیریم: فرض می‌کنیم $|G| = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$، که در آن s، m_1، ...، m_s اعداد صحیح مثبتی هستند و p_1، ...، p_s اعداد اول متمایز. قرار می‌دهیم $S = \{1, 2, \dots, s\}$. در این صورت مرتبه‌های ممکن زیرگروههای هال نابدیهی G عبارت‌اند از $2^s - 1$ عدد متمایز $\prod_{j \in T} p_j^{m_j}$ که در آن حوزهٔ مقادیر T، $2^s - 1$ زیرمجموعهٔ ناتهی متمایز S هستند.

حال فرض می‌کنیم G حل‌پذیر باشد. در این صورت قضیهٔ هال، ۱۸.۱۱، وجود زیرگروههای هال از هر مرتبهٔ ممکن در G را تضمین می‌کند. به‌ویژه، به‌ازای هر $i \in S$، G دارای یک زیرگروه مانند H_i از مرتبهٔ $\prod_{j\in S\setminus\{i\}} p_j^{m_j}$ و شاخص $p_i^{m_i}$ خواهد بود. یعنی، H_i یک p_i متمم است (۱۹.۱۰).

هر مجموعهٔ دلخواه $\mathscr{S} = \{H_1, H_2, \dots , H_s\}$ مرکب از s زیرگروه G را، که در آن H_i یک p_i متمم G است، یک دستگاه متمم برای G می‌نامیم.

۶۶۲. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد. در این صورت به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از $|G|$، G دارای زیرگروه ماکسیمالی مانند M است به‌طوری که $|G : M|$ توانی از p است. (رک. ۱۵.۱۱؛ ۶۷۷ را نیز ببینید).

۶۶۳. فرض می‌کنیم که G یک گروه نابدیهی است که به‌ازای هر زیرگروه ماکسیمال M از G، $|G : M| \leqslant 5$. ثابت کنید G یک ϖ گروه حل‌پذیر است، که در آن $\varpi = \{2, 3, 5\}$ و G دارای یک ۵ زیرگروه سیلو نرمال (احتمالاً بدیهی) است. (راهنمایی. از ۱۶.۱۱ استفاده کنید. برای اینکه ثابت کنید G دارای یک ۵ زیرگروه سیلو نرمال است، (i)، (ii) و (iv) از اثبات ۱۶.۱۱ را ببینید.)

۶۶۴. فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر است و $|G|$ دارای s مقسوم‌علیه اول متمایز است که $s \geqslant 2$. نشان دهید که به‌ازای هر مقسوم‌علیه اولی مانند p از $|G|$،

$$|G| < |H|^{s/s-1},$$

که H یک p متمم G است (رک. ۵۰۳).

۶۶۵. فرض می‌کنیم که G حل‌پذیر و $|G|$ دارای s مقسوم‌علیه اول متمایز است. همچنین فرض می‌کنیم که به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از $|G|$، p متمم‌های G پوچ‌توان‌اند.

(i) ثابت کنید که اگر $s \geqslant 3$، G پوچ‌توان است. (همچنین ۶۷۲ را ببینید. راهنمایی. ثابت کنید که هر زیرگروه سیلو G در G نرمال است.)

(ii) با یک مثال نشان دهید که اگر $s = 2$، G لزوماً پوچ‌توان نخواهد بود.

هال عکس جالب توجه، ۱۸.۱۱ را ثابت کرده است. یعنی ثابت کرده است هرگاه G دارای یک دستگاه متمم باشد، G لزوماً حل‌پذیر است. ما این قضیه را در ۲۶.۱۱ ثابت خواهیم کرد.
ابتدا چند ویژگی از دستگاههای متمم را بررسی می‌کنیم.
نشان می‌دهیم که هر دستگاه متمم G به نحو بسیار ساده، زیرگروههای حقیقی هال از تمام مرتبه‌های ممکن را مشخص می‌کند.

۲۰.۱۱ قضیه فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد با $|G| = p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_s^{m_s}$، که در آن m_1، ...، m_s، s اعداد صحیحی مثبت و p_1، ...، p_s اعداد اول متمایزند. قرار می‌دهیم $S = \{1, 2, \dots , s\}$، و به‌ازای هر $i \in S$، H_i را یک p_i متمم G می‌گیریم. به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی مانند T از S، قرار می‌دهیم

$$H_T = \bigcap_{j\in T} H_j.$$

در این صورت به‌ازای هر زیرمجموعهٔ حقیقی ناتهی چون T از S، $H_{S\setminus T}$ یک زیرگروه هال G است از مرتبهٔ $\prod_{j\in T} p_j^{m_j}$ و $H_S = 1$.

برهان حکم هم‌ارز با این قضیه این است که به‌ازای هر زیرمجموعهٔ ناتهی U از S، H_U یک زیرگروه هال G از شاخص $\prod_{j\in U} p_j^{m_j}$ است. این حکم هم‌ارز با یک استدلال روشن و ساده با استفاده از استقرا بر $|U|$ و نتیجهٔ ۱۰۰ ثابت می‌شود.

۲۱.۱۱ تعریف فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد و همچنین p_1، ...، p_s مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند. به‌ازای هر $i = 1, \dots , s$، H_i را یک p_i متمم از G می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\mathscr{S} = \{H_1, \dots , H_s\}$ یک دستگاه متمم برای G باشد.
به‌ازای هر $g \in G$ فرض می‌کنیم

$$\mathscr{S}^g = \{H_1^g, \dots , H_s^g\}.$$

چون به‌ازای هر $i = 1, \dots , s$، $|H_i^g| = |H_i|$، $\mathscr{S}^g$ نیز یک دستگاه متمم برای G خواهد بود. اکنون واضح است که G با ترویج بر مجموعهٔ تمام دستگاههای متمم برای G عمل می‌کند. برای این عمل پایدارساز $\mathscr{S}$ در G برابر است با زیرگروه

$$\{g \in G : \mathscr{S}^g = \mathscr{S}\} = \{g \in G : H_i^g = H_i ,\ \text{به‌ازای هر}\ i = 1, \dots , s\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{s} N_G(H_i).$$

ما این زیرگروه را با $N_G(\mathscr{S})$ نمایش می‌دهیم؛ و آن را نرمال‌ساز دستگاهی G می‌نامیم.
حال فرض می‌کنیم $\mathscr{S}^* = \{H_1^*, \dots , H_s^*\}$ دستگاه متمم دیگری برای G باشد، که به‌ازای هر $i = 1, \dots , s$، H_i^* یک p_i متمم G است. بنابر ۱۸.۱۱ (ii) اعضای $g_1, \dots , g_s \in G$

وجود دارند به‌طوری که به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، $H_i^* = H_i^{g_i}$. اکنون نشان می‌دهیم که می‌توانیم انتخاب کنیم $g_1 = g_2 = \cdots = g_s$.

۲۲.۱۱ قضیه (ف. هال [a۵۰]). فرض می‌کنیم $\mathscr{S}$ و $\mathscr{S}^*$ دستگاههای متممی برای گروه حل‌پذیر نابدیهی G باشند، در این صورت به‌ازای عضوی چون $g \in G$، $\mathscr{S}^* = \mathscr{S}^g$.

برهان فرض می‌کنیم p_1، ...، p_s مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند و همچنین $\mathscr{S} = \{H_1, \dots, H_s\}$، که در آن H_i یک p_i متمم G است. چون بنابر ۱۸.۱۱ (ii)، p_i متمم‌های G یک ردهٔ تزویجی واحد از زیرگروههای G را تشکیل می‌دهند، ۳۳.۴ نشان می‌دهد که به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، تعداد p_i متمم‌های متمایز G برابر است با $|G : N_G(H_i)|$. از این‌رو تعداد دستگاههای متمم متمایز برای G برابر است با

$$\prod_{i=1}^{s} |G : N_G(H_i)| = n \quad \text{مثلاً}$$

برای عمل G به‌وسیلهٔ تزویج بر مجموعهٔ تمام دستگاههای متمم G، از ۱۱.۴ نتیجه می‌شود که طول مدار $\mathscr{S}$ برابر است با

$$|G : N_G(\mathscr{S})| = |G : \bigcap_{i=1}^{s} N_G(H_i)|.$$

از آنجا که $H_i \leqslant N_G(H_i) \leqslant G$، $|G : N_G(H_i)|$ به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، توانی است از p_i. از این‌رو هرگاه $i \neq j$،

$$(|G : N_G(H_i)|, |G : N_G(H_i)|) = 1.$$

لذا با چند بار استفاده از ۱۰۰، به‌دست می‌آوریم

$$|G : N_G(\mathscr{S})| = \prod_{i=1}^{s} |G : N_G(H_i)| = n.$$

به این ترتیب مدار $\mathscr{S}$ باید هر دستگاه متمم G را شامل باشد (یعنی، این عمل ترایا است). از این‌رو برای عضوی چون $g \in G$، $\mathscr{S}^* = \mathscr{S}^g$.

اشاره. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد، و همچنین p_1، ...، p_s مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ باشند، به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، P_i و P_i^* را، p_i زیرگروههای سیلو G می‌گیریم. این مطلب که یک عضو مانند $g \in G$ وجود دارد به‌طوری که به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، $P_i^* = P_i^g$ در حالت کلی صادق نیست: ۶۷۱ را ببینید.

۲۳.۱۱ فرع G را یک گروه حل‌پذیر نابدیهی می‌گیریم. در این صورت نرمال‌سازهای دستگاهی G یک ردهٔ تزویجی واحد از زیرگروههای پوچ‌توان G را تشکیل می‌دهند.

برهان فرض می‌کنیم $\mathscr{S} = \{H_1, \dots, H_s\}$ یک دستگاه متمم برای G باشد. نرمال‌ساز دستگاهی G متناظر با این دستگاه عبارت است از زیرگروه

$$L = N_G(\mathscr{S}) = \bigcap_{i=1}^{s} N_G(H_i).$$

به‌ازای هر عضو $g \in G$،

$$L^g = \bigcap_{i=1}^{s} N_G(H_i)^g = \bigcap_{i=1}^{s} N_G(H_i^g) = N_G(\mathscr{S}^g),$$

نرمال‌ساز دستگاهی متناظر با دستگاه متمم $\mathscr{S}^g$. این اشاره به همراه ۲۲.۱۱، نشان می‌دهند که نرمال‌سازهای دستگاهی G ردهٔ تزویجی واحدی از زیرگروههای G را تشکیل می‌دهند.

فرض می‌کنیم به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، H_i یک p_i متمم G باشد. اگر $s = 1$ آنگاه G یک p_1 گروه است، $H_1 = 1$ و $L = N_G(H_1) = G$، که در این حالت پوچ‌توان است. حال فرض می‌کنیم $s > 1$ و به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$، قرار می‌دهیم

$$P_i = \bigcap_{j \neq i} H_j.$$

بنابر ۲۰.۱۱، P_i یک p_i زیرگروه سیلو G است. به‌علاوه به‌ازای هر i، $L = N_G(\mathscr{S}) \leqslant N_G(P_i)$. چون $P_i \trianglelefteq N_G(P_i)$، $L \cap P_i \trianglelefteq L$؛ و به سادگی بررسی می‌شود که $L \cap P_i$ یک p_i زیرگروه سیلو L است. این نشان می‌دهد که هر زیرگروه سیلو L در L نرمال است، زیرا p_1، ...، p_s تنها مقسوم‌علیه‌های اول $|G|$ هستند. از این‌رو بنابر ۳.۱۱، L پوچ‌توان است.

۲۴.۱۱ ف. هال [a۵۱]، در مقاله‌اش خیلی از احکام جالب دیگر راجع به نرمال‌سازهای دستگاهی را ثابت کرده است. به‌عنوان مثال، او نشان داده است که هر نرمال‌ساز دستگاهی یک گروه حل‌پذیر نابدیهی G، هر عامل اصلی مرکزی G را می‌پوشاند و از هر عامل اصلی G که مرکزی نباشد دور می‌شود (۳۲۴ را ببینید). از اینجا نتیجه می‌شود که مرتبهٔ هر نرمال‌ساز دستگاهی G برابر است با حاصلضرب مرتبهٔ عامل‌های اصلی مرکزی واقع در یک سری اصلی خاص از G. برای اطلاعات بیشتر، بخش ۱۱.۶ از هوپرت [b۲۱] را ببینید.

۶۶۶. فرض می‌کنیم $\mathscr{S}$ یک دستگاه متمم برای گروه حل‌پذیر نابدیهی G باشد. در این صورت تعداد دستگاههای متمم متمایز G برابر است با $|G : N_G(\mathscr{S})|$.

۶۶۷. مرتبهٔ نرمال‌ساز دستگاهی را در مورد هریک از گروههای حل‌پذیر $\sum_۳$، $A_۴$ و $\sum_۴$ بیابید.

۶۶۸. فرض می‌کنیم G یک گروه پوچ‌توان نابدیهی باشد. در این صورت نرمال‌ساز دستگاهی یکتای G خود G است.

۶۶۹. فرض می‌کنیم $K \lhd G$، که در آن G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی است و قرار می‌دهیم $\bar{G} = G/K$. فرض می‌کنیم $p_۱$، ...، p_s مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|G|$ و همچنین $p_۱$، ...، p_r مقسوم‌علیه‌های اول متمایز $|\bar{G}|$ باشند که در آن $r \leqslant s$. به‌ازای هر $i = ۱, \ldots , s$، H_i را یک p_i متمم G می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\{H_۱, \ldots , H_s\}$ دستگاه متمم $\mathscr{S}$ برای G باشد و قرار می‌دهیم $\bar{\mathscr{S}} = \{H_۱K/K, \ldots , H_rK/K\}$. در این صورت $\bar{\mathscr{S}}$ یک دستگاه متمم برای G است و

$$N_{\bar{G}}(\bar{\mathscr{S}}) = N_G(\mathscr{S})K/K\cdot$$

(راهنمایی. کافی است فرض کنید که K یک زیرگروه نرمال مینیمال G است. در این صورت K به‌ازای هر $j \in \{۱, \ldots , s\}$ ای، یک p_j گروه است و هرگاه $i \neq j$، $K \leqslant H_i$. توجه داشته باشید که اگر $r < s$ آنگاه $r = s - ۱$ و $j = s$. برای اینکه نشان دهید $N_{\bar{G}}(\bar{\mathscr{S}}) \leqslant N_G(\mathscr{S})K/K$، توجه کنید که H_j یک p_j متمم از H_jK است و از ۱۸.۱۱ استفاده کنید.)

۶۷۰. فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر نابدیهی باشد. ثابت کنید که هرگاه L یک نرمال‌ساز دستگاهی G باشد، آنگاه $L^G = G$ (که در آن L^G معرف بستار نرمال L در G است: ۱۸۰ را ببینید). به‌ویژه، نرمال‌سازهای دستگاهی G، نابدیهی‌اند. (راهنمایی. فرض کنید که حکم برقرار نیست و با استفاده از ۶۶۸ و ۶۶۹ به یک تناقض برسید.)

۶۷۱. فرض می‌کنیم $p \geqslant ۵$ و G را حاصلضرب حلقوی طبیعی $C_p \wr \sum_۳$ می‌گیریم (۱۹.۹، ۲۰.۹ را ببینید): در این صورت $|G| = ۶p^۳$. فرض کنید A گروه پایه‌ای G باشد: در این صورت

$$A = \langle a_۱\rangle \times \langle a_۲\rangle \times \langle a_۳\rangle,$$

که در آن مرتبهٔ هر a_i برابر p است؛ و A، p زیرگروه سیلو یکتای G است. قرار می‌دهیم $\sigma = (۱۲۳)$ و $\tau = (۱۲)$، در این صورت $\langle\sigma\rangle$ و $\langle\sigma^{a_۱}\rangle$، ۳ زیرگروههای سیلو G هستند و $\langle\tau\rangle$ یک ۲ زیرگروه سیلوی G است.

نشان دهید که عضوی مانند $g \in G$ وجود ندارد به‌طوری که برای آن

$$\{\langle\sigma\rangle, \langle\tau\rangle, A\}^g = \{\langle\sigma^{a_۱}\rangle, \langle\tau\rangle, A\}$$

(رک. ۲۲.۱۱)

برای اثبات عکس قضیهٔ هال ۱۸.۱۱، از لم زیر استفاده خواهیم کرد.

۲۵.۱۱ لم (ه. ویلانت [a۱۰۳]، ۱۹۶۰). فرض می‌کنیم G دارای سه زیرگروه حل‌پذیر $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ باشد، و نیز فرض می‌کنیم هرگاه $i, j \in \{۱, ۲, ۳\}$ با $i \neq j$،

$$(|G : H_i|, |G : H_j|) = ۱\cdot$$

در این صورت G حل‌پذیر است.

برهان با استقرا بر $|G|$ استدلال می‌کنیم. چون $(|G : H_۱|, |G : H_۲|) = ۱$، ۱۰۰ نشان می‌دهد که

$$G = H_۱H_۲\cdot$$

چون $H_۲$ حل‌پذیر است، می‌توانیم فرض کنیم که $H_۱ \neq ۱$. $L_۱$ را یک زیرگروه نرمال مینیمال $H_۱$ می‌گیریم. در این صورت چون $H_۱$ حل‌پذیر است، به‌ازای عدد اولی مانند p، $L_۱$ یک p گروه آبلی مقدماتی است (۵۶.۷). بنابر فرض، p نه $|G : H_۲|$ را می‌شمارد و نه $|G : H_۳|$ را. بدون اینکه از کلیت موضوع کاسته شود، فرض می‌کنیم که p، $|G : H_۲|$ را نشمارد.
قرار می‌دهیم

$$J = H_۱ \cap H_۲$$

در این صورت بنابر ۹۸،

$$|G : H_۲| = |H_۱H_۲|/|H_۲| = |H_۱ : J|\cdot$$

لذا p، $|H_۱ : J|$ را نمی‌شمارد. چون $J \leqslant H_۱$ و $L_۱ \unlhd H_۱$، $J \leqslant JL_۱ \leqslant H_۱$. از این‌رو، p، $|JL_۱ : J|$ را نمی‌شمارد. ولی، بنابر ۹۸ (یا ۳.۴۰)،

$$|JL_۱ : J| = |L_۱ : J \cap L_۱|,$$

و چون L_1 یک p گروه است، $|L_1 : J \cap L_1|$ توانی است از p. بنابراین

$$|JL_1 : J| = 1,$$

یعنی،

$$L_1 \leqslant J.$$

حال قرار می‌دهیم $L = L_1^G$، بستار نرمال L_1 در G، (۱۸۰). در این صورت

$$\begin{aligned} L &= \langle x^g : x \in L_1, g \in G \rangle \\ &= \langle x^{h_1 h_2} : x \in L_1, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 \rangle \quad (\text{زیرا } G = H_1 H_2) \\ &\leqslant H_2, \end{aligned}$$

زیرا $L_1 \trianglelefteq H_1$ و $L_1 \leqslant J \leqslant H_2$ (رک. ۲۶۴). چون H_2 حل‌پذیر است، L نیز حل‌پذیر است (۴۶.۷). به‌علاوه $1 < L_1 \leqslant L \trianglelefteq G$.

اکنون می‌توانیم فرض استقرا را برای G/L به‌کار ببریم. به‌ازای هر $i = 1, 2, 3$، $H_iL/L \leqslant G/L$ و $H_iL/L \cong H_i/(H_i \cap L)$ (۴۰.۳)؛ که در آن $H_i/(H_i \cap L)$ حل‌پذیر است، زیرا H_i حل‌پذیر است (۴۶.۷). هرگاه $i \neq j$،

$$(|G/L : H_iL/L|, |G/L : H_jL/L|) = (|G : H_iL|, |G : H_jL|),$$

و این عدد، $(|G : H_i|, |G : H_j|)$ را می‌شمارد، لذا برابر است با ۱. از این‌رو بنابر فرض استقرا، G/L حل‌پذیر خواهد بود.

بالاخره، چون L و G/L هر دو حل‌پذیرند، بنابر ۴۷.۷ نتیجه می‌شود که G حل‌پذیر است، و اثبات استقرا کامل می‌شود.

قضیهٔ اصلی در زیر آمده است.

۲۶.۱۱ قضیه (ف. هال [a۴۹]). فرض می‌کنیم G به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از $|G|$ یک p متمم داشته باشد. در این صورت G حل‌پذیر است.

فرض می‌کنیم که $|G| = p_1^{m_1} p_2^{m_2}$، که p_1 و p_2 اعداد اول متمایزند و m_1 و m_2 اعداد صحیح نامنفی. در این صورت یک p_1 زیرگروه سیلو از G یک p_2 متمم G است و یک p_2 زیرگروه سیلو G یک p_1 متمم G. لذا از قضیهٔ سیلو نتیجه می‌شود که به‌ازای هر مقسوم‌علیه p از $|G|$، G دارای یک p متمم است، و بنابراین به موجب ۲۶.۱۱، G باید حل‌پذیر باشد. لذا، ۲۶.۱۱ حالت خاص قضیه‌ای از برنساید را شامل است که ما قبلاً به آن اشاره کردیم (۲۹.۴ و ۳۸۲، ۵۷۲ را ببینید).

۲۷.۱۱ قضیه (برنساید [a۱۱]، ۱۹۰۴). فرض می‌کنیم $|G| = p^m q^n$ که p و q اعداد اول متمایز و m و n دو عدد صحیح نامنفی‌اند. در این صورت G حل‌پذیر است.

برهانِ ۲۶.۱۱ به این قضیه از برنساید مربوط می‌شود. اثبات برنساید مبتنی است بر نظریه سرشتهای گروه که ما آن را در این کتاب نیاورده‌ایم: مثلاً برای مطالعهٔ این موضوع قضیهٔ ۱.۳۴، ص ۲۳۹ از کرتیس و راینر [b۷] یا قضیهٔ ۳.۳.۴، ص ۱۳۱ ازگورنشتاین [b۱۳]، یا قضیهٔ ۳.۷.۵، ص ۴۹۲، از هوپرت [b۲۱]، یا قضیهٔ f.۵.۸، ص ۲۶۳ از شنکمن [b۳۵]، یا قضیهٔ ۳.۳.۱۲، ص ۳۳۴ از اسکات [b۳۶] را ببینید. اخیراً هم اثبات تازه‌تری برای ۲۷.۱۱ مستقل از نظریه سرشتها داده شده است. اما این اثبات نیز متضمن تکنیکهای پیچیده‌ای است که در این کتاب درج نشده است. مقاله‌های هـ. بندر [a۷]، د. م. گولدشمید [a۴۰]، و هـ. ماتسویاما [a۷۳] و همچنین کتاب گیجن [b۱۲] را ببینید.

برهانِ ۲۶.۱۱ می‌توانیم فرض کنیم $G \neq 1$ و $|G| = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_s^{m_s}$ که s، m_1، ...، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند و p_1، ...، p_s اعداد اول متمایز. با استقرا بر s استدلال می‌کنیم. اگر $s \leqslant 2$، حکم بنابه ۲۷.۱۱ صحیح است. حال فرض می‌کنیم که $s > 2$. برای هر $i = 1, \dots, s$ فرض می‌کنیم H_i یک p_i متمم G باشد و $i, j \in \{1, 2, \dots, s\}$ با $i \neq j$. در این صورت

$$(|G : H_i|, |G : H_j|) = 1,$$

و در نتیجه طبق ۱۰۰،

$$|H_i : H_i \cap H_j| = |G : H_i \cap H_j| / |G : H_i| = |G : H_j| = p_j^{m_j}.$$

لذا، $H_i \cap H_j$ یک p_j متمم H_i است. بنابراین H_i به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از $|H_i|$ یک p متمم دارد. چون $|H_i|$ دقیقاً $s - 1$ مقسوم‌علیه اول متمایز دارد بنابر فرض استقرا نتیجه می‌شود که H_i حل‌پذیر است. این نتیجه به‌ازای هر $i = 1, \dots, s$ برقرار است. چون $s \geqslant 3$، حال می‌توانیم با استفاده از ۲۵.۱۱ نشان دهیم که G حل‌پذیر است؛ و در اینجا استدلال استقرایی کامل می‌شود.

اشاره. ۱۸.۱۱ و ۲۶.۱۱ با هم یک سرشت نمایی حسابی از گروههای متناهی حل‌پذیر به‌دست می‌دهند که مفهوم آن هم‌ارزی سه حکم زیر است:

(i) G حل‌پذیر است.

(ii) G به‌ازای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول یک ϖ زیرگروه هال دارد.

(iii) G به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از $|G|$ دارای یک p متمم است.

۶۷۲. فرض می‌کنیم که G دارای سه زیرگروه پوچ‌توان $H_۱$، $H_۲$، $H_۳$ باشد به‌طوری که به‌ازای $i,j \in \{۱,۲,۳\}$ با $i \neq j$، $(|G:H_i|,|G:H_j|) = ۱$. در این صورت G پوچ‌توان است. به‌علاوه، اگر $H_۱$، $H_۲$ و $H_۳$ آبلی باشند، G آبلی است (رک. ۲۵.۱۱. این حکم، اصلاح (i) ۶۶۵ است. راهنمایی. ثابت کنید هر زیرگروه سیلو G در G نرمال است.)

۶۷۳. با یک مثال نشان دهید که یک گروه حل‌ناپذیر G ممکن است زیرگروههای حل‌پذیری مانند $H_۱$ و $H_۲$ داشته باشد به‌طوری که $(|G:H_۱|,|G:H_۲|) = ۱$ (رک. ۲۵.۱۱. راهنمایی. ۲۵.۵ را ببینید).

۶۷۴. (i) فرض می‌کنیم که G در عکس قضیه لاگرانژ صدق می‌کند، یعنی گروه G برای هر مقسوم‌علیه m از $|G|$ زیرگروهی از مرتبه m دارد. در این صورت G حل‌پذیر است (همچنین ۶۷۵ و ۶۷۶ را ببینید.)

(ii) (د. هـ. مک‌لین [a۷۴]). فرض می‌کنیم G یک گروه حل‌پذیر از مرتبهٔ $p_۱^{m_۱}p_۲^{m_۲}\cdots p_s^{m_s}$ باشد که s، $m_۱$، ...، m_s اعداد صحیح مثبت‌اند و $p_۱$، ...، p_s اعداد اول متمایز. فرض می‌کنیم A یک گروه آبلی از مرتبهٔ $p_۱^{m_۱-۱}p_۲^{m_۲-۱}\cdots p_s^{m_s-۱}$ باشد. در این صورت گروه $G \times A$ در عکس قضیه لاگرانژ صدق می‌کند. (راهنمایی. از ۱۸.۱۱ و مسألهٔ ۱۳۵ استفاده کنید.)

۶۷۵. فرض می‌کنیم G یک گروه نابدیهی باشد که هر زیرگروه آن در عکس قضیهٔ لاگرانژ صدق کند (۶۷۴ را ببینید). در این صورت G یک p زیرگروه سیلو نرمال خواهد داشت که p بزرگترین مقسوم‌علیه اول $|G|$ است. (۶۷۶ را نیز ببینید. راهنمایی. استدلال را با استقرا بر $|G|$ شروع کنید. در صورتی که G یک p گروه نباشد از ۱۸.۴ استفاده کنید.)

۶۷۶. (اور [a۷۶]، گ. زاپا [a۱۰۴]، د. هـ. مک‌لین [a۷۴]). سه حکم زیر هم‌ارزند:

(i) G زَبَرْحل‌پذیر است (۳۸۹).

(ii) هر وقت که $J < H \leqslant G$ و J زیرگروه ماکسیمال در H باشد، $|H:J|$ یک عدد اول است.

(iii) هر زیرگروه G در عکس قضیهٔ لاگرانژ صدق می‌کند (۶۷۴ و ۶۷۵ را ببینید).

(راهنمایی. برای (i) $\Leftarrow$ (ii)، ۶۴۶ را ببینید. برای (ii) $\Leftarrow$ (iii) با استقرا بر $|G|$ استدلال کنید، و توجه کنید که هر زیرگروه G در همان فرضهای G صدق می‌کند. برای اینکه نشان دهید خود G در عکس قضیه لاگرانژ صدق می‌کند از ۱۶.۱۱ و ۶۶۲ استفاده کنید تا نشان دهید برای هر مقسوم‌علیه اول p از $|G|$، G زیرگروهی از شاخص p دارد. برای (iii) $\Leftarrow$ (i)، استدلال را با استقرا بر $|G|$ آغاز کنید. اگر $|G| > ۱$، توجه داشته باشید که طبق ۶۷۵ به‌ازای مقسوم‌علیه اولی چون p از $|G|$، G، p زیرگروه سیلو نرمال P دارد. با استفاده از ۶۷۴ و ۱۸.۱۱ و فرض

استقرا نشان دهید که G/P زَبَرْحل‌پذیر است. بنا به فرض، G دارای یک زیرگروه M از شاخص p است. از ۶.۵ و ۳۸۹ (v) استفاده کرده نشان دهید که $G \rhd (M \cap P)$ و $G/(M \cap P)$ زَبَرْحل‌پذیر است. $K \trianglelefteq G$ را چنان انتخاب کنید که $K \leqslant M \cap P$، G/K زبرحل‌پذیر است و $|K|$ کوچکترین مقدار ممکن را دارد. اگر $K \neq ۱$، توجه داشته باشید که طبق ۳۹۱، $K > [K \text{ و } P]$. در این صورت عامل اصلی K/L از M را با $K > L \geqslant [K \text{ و } P]$ در نظر بگیرید و با استفاده از ۳۸۹ (v) تناقضی برای انتخاب K به‌دست آورید.)

۶۷۷. فرض می‌کنیم که برای هر زیرگروه نابدیهی H از G، به‌ازای هر مقسوم‌علیه اول p از $|H|$، H یک زیرگروه حقیقی از شاخص توانی از p داشته باشد. در این صورت G حل‌پذیر است (رک. ۶۶۲ و ۶۷۸).

۶۷۸. با یک مثال نشان دهید که یک گروه حل‌ناپذیر G ممکن است برای هر مقسوم‌علیه اول p از $|G|$ زیرگروهی از شاخص p داشته باشد. (رک. ۶۶۲، ۱۶.۱۱، ۲۶.۱۱. راهنمایی. فرض کنید H یک گروه ساده ناآبلی باشد و $G = H \times K$ که K یک گروه دوری مناسب است.)

۶۷۹. فرض می‌کنیم گروه G دارای زیرگروههای آبلی A و B باشد به‌طوری که

$$(|G:A|,|G:B|) = ۱.$$

در این صورت G حل‌پذیر است. این موضوع را می‌توانید با استدلال زیر اثبات کنید.

فرض کنید قضیه صادق نیست و G گروه حل‌ناپذیری از کمترین مرتبه با زیرگروههای آبلی A، B است به‌طوری که $(|G:A|,|G:B|) = ۱$. در این صورت

(i) A و B زیرگروههای حقیقی G هستند و $G = AB$.

(ii) فرض کنید $۱ < K \trianglelefteq G$. پس G/K حل‌پذیر است (راهنمایی. از مینیمال بودن G استفاده کنید.)

(iii) G ساده است. (راهنمایی. اگر $K < G$، از مینیمال بودن G استفاده کنید.)

(iv) $A \cap B = ۱$. (راهنمایی. از ۲۶۴ (ii) استفاده کنید.)

(v) A یک زیرگروه ماکسیمال G است. (راهنمایی. دوباره از ۲۶۴ (ii) استفاده کنید.)

(vi) با استفاده از ۶۳۲ یک تناقض به‌دست آورید. (رک. ۶۷۲ و ۶۷۳. اشارات. از روشهای دیگر نتایجی قویتر از این حاصل شده است. مثلاً با محاسبات کوتاه ولی ابتکارآمیز جابه‌جاگرها، ن. ایتو [a۶۳] نشان داده است که هرگاه G دارای زیرگروههای آبلی نظیر A و B باشد به‌طوری که $G = AB$ آنگاه G حل‌پذیر است و در واقع $G'' = ۱$. این امر در حالتی که G نامتناهی باشد به قوت خود باقی است. همچنین قضیهٔ ۴.۴.۶، ص ۶۷۴، از هوپرت [b۲۱] را ببینید. برای گروه

متناهی G نتیجهٔ عمیقتری توسط هـ. ویلانت [a۱۰۱] و اُ. هـ. کیگل [a۶۷] بیان شده است که نشان می‌دهد هروقت G زیرگروههای پوچ‌توان G_1 و G_2 داشته باشد به‌طوری که $G = G_1G_2$، آنگاه G حل‌پذیر است. به‌ویژه، اگر G زیرگروههای پوچ‌توان G_1 و G_2 داشته باشد به‌طوری که $(|G : G_1|, |G : G_2|) = 1$ آنگاه G حل‌پذیر است. هوپرت [b۲۱]، بخش ۴.۶، یا شنکمن [b۳۵]، قضیهٔ e.۲.۹ ص، ۲۶۹ یا اسکات [b۳۶] بخش ۲.۱۳ را ببینید.)

۲۸.۱۱ مطلب نهایی این کتاب را با چندین تبصره در مورد قضایای تازه‌تری در نظریهٔ گروههای حل‌پذیر متناهی به پایان می‌بریم. تنها می‌توانیم به ذکر برخی از مهمترین دستاوردها بپردازیم، جزئیات بیشتر خواننده را به هوپرت [b۲۱] فصل ۶ و مراجع موجود در آن ارجاع دهیم.

در سال ۱۹۶۱ ر. و. کارتر[1] [a۱۳] نشان داد که هرگروه متناهی حل‌پذیر دارای زیرگروههای پوچ‌توان و خود-نرمال‌ساز است و این زیرگروهها که زیرگروههای کارتر نام دارند، یک ردهٔ تزویج واحد تشکیل می‌دهند. هر زیرگروه کارتر شامل یک دستگاه نرمال‌ساز[2] است (۲۱.۱۱) و به‌عکس هر دستگاه نرمال‌ساز در یک زیرگروه کارتر قرار دارد، اما رده‌های زیرگروههای کارتر و دستگاه نرمال‌ساز فقط در موارد خاصی برهم منطبق می‌شوند.

در سال ۱۹۶۳ و. گاشوتس[3] [a۳۶]، تعمیم موضوع را به نحوی گسترده پایه‌گذاری کرد که هم شامل قسمتهای مهم قضیهٔ کارتر و هم قضیه هال[4] ۱۸.۱۱ بود. یک ردهٔ $\mathfrak{F}$ از گروههای متناهی را یک تشکل[5] می‌نامند اگر دو ویژگی زیر را داشته باشد: (i) هرگروه خارج‌قسمت از هر $\mathfrak{F}$گروه یک $\mathfrak{F}$گروه باشد، (ii) هرگروه متناهی یک $\mathfrak{F}$ مانده‌یی داشته باشد (۴۵.۳ را ببینید). ردهٔ ϖ گروههای متناهی برای هر مجموعهٔ ϖ از اعداد اول (۴۴.۳ را ببینید)، ردهٔ گروههای آبلی متناهی (۵۲.۳ را ببینید)، ردهٔ گروههای پوچ‌توان متناهی و ردهٔ گروههای حل‌پذیر متناهی (۵۰.۷ را ببینید) همگی مثالهایی از تشکل هستند. تشکل $\mathfrak{F}$ را اشباع شده می‌نامیم اگر هروقت G یک گروه متناهی باشد به‌طوری که $G/\Phi(G)$ یک $\mathfrak{F}$ گروه باشد، آنگاه خود G نیز یک $\mathfrak{F}$ گروه باشد (گاشوتس و او. لوبزدر[6] [a۳۸]). برای مثال، تشکلهایی نظیر ϖ گروههای متناهی، گروههای پوچ‌توان متناهی و گروههای حل‌پذیر متناهی همگی از نوع اشباع شده‌اند (۶۲۰، ۶۲۱، ۵.۱۱ و ۴۷.۷ را ببینید)، اما تشکل گروههای آبلی متناهی از نوع اشباع شده نیست (۱۰.۱۱ را ببینید).

گاشوتس ثابت کرد که برای هر تشکل اشباع شدهٔ $\mathfrak{F}$، هر گروه حل‌پذیر متناهی G دارای $\mathfrak{F}$ زیرگروههایی با چند ویژگی خاص هستند و این زیرگروهها یک ردهٔ تزویج واحد تشکیل می‌دهند.

1. R. W. Carter 2. System normalizer 3. W. Gaschutz 4. Hall's theorem 5. Formation 6. U. Lubeseder

حال این زیرگروههای مورد بحث $\mathfrak{F}$ تصویرگرهای[1] G نامیده می‌شوند و (به موجب یکی از قضایای ت. اُ. هاوکز[2] در [a۵۳]) این زیرگروهها با ویژگی زیر مشخص می‌شوند: زیرگروه H از G یک $\mathfrak{F}$ تصویرگر G است اگر و تنها اگر هروقت که $K \trianglelefteq G$، HK/K یک $\mathfrak{F}$ زیرگروه ماکسیمال G/K باشد. در صورتی‌که $\mathfrak{F}$ تشکل اشباع‌شدهٔ ϖ گروههای متناهی باشد، ϖ تصویرگرهای G همان ϖ زیرگروههای هال G خواهند بود؛ و هروقت $\mathfrak{F}$ تشکل اشباع‌شدهٔ گروههای پوچ‌توان متناهی باشد، $\mathfrak{F}$ تصویرگرهای G همان زیرگروههای کارتر G هستند.

در سال ۱۹۶۷ ر. و. کارتر و ت. اُ. هاوکز در [a۱۵] نشان دادند که برای هر تشکل اشباع‌شدهٔ $\mathfrak{F}$ شامل تشکل گروههای پوچ‌توان متناهی، می‌توان در هر گروه حل‌پذیر متناهی G رده‌ای از $\mathfrak{F}$ زیرگروهها، مشابه با دستگاه نرمال‌سازهای هال را موسوم به $\mathfrak{F}$ نرمال‌سازهای G تعریف کرد. این زیرگروهها یک ردهٔ تزویج واحد از G تشکیل می‌دهند. هر $\mathfrak{F}$ تصویرگر G شامل یک $\mathfrak{F}$ نرمال‌سازِ G است و به‌عکس هر $\mathfrak{F}$ نرمال‌ساز در یک $\mathfrak{F}$ تصویرگر G قرار دارد. هرگاه $\mathfrak{F}$ تشکلی از گروههای پوچ‌توان متناهی باشد، $\mathfrak{F}$ نرمال‌سازهای G همان دستگاه نرمال‌سازهای G هستند.

از پیشرفتهای مهم دیگر در سال ۱۹۶۷ کشف زیرگروههایی است که توسط ب. فیشر[3] و. گاشوتس و ب. هارتلی[4] [a۲۴]، انجام گرفت که به تعبیری برای تصویرگرها دوگان هستند. یک ردهٔ $\mathfrak{R}$ از گروههای متناهی یک ردهٔ فیتینگ[5] نامیده می‌شود هرگاه دو ویژگی زیر را داشته باشد: (i) هر زیرگروه نرمال از هر $\mathfrak{R}$گروه یک $\mathfrak{R}$گروه باشد، (ii) هر گروه متناهی دلخواه یک $\mathfrak{R}$ رادیکال[6] داشته باشد (۴۵.۳). این دو ویژگی، دوگانِ دو ویژگی معرف یک تشکل هستند. ردهٔ ϖ گروههای متناهی و همچنین ردهٔ گروههای پوچ‌توان متناهی یک ردهٔ فیتینگ‌اند (۴۳.۳ و ۶۳.۷ را ببینید).

زیرگروه V از G یک $\mathfrak{R}$ تزریقگر[7] G نامیده می‌شود اگر برای هر زیرگروه زیرنرمال K از G، $V \cap K$ یک $\mathfrak{R}$ زیرگروه ماکسیمال K باشد. فیشر، گاشوتس و هارتلی ثابت کردند که برای هر ردهٔ فیتینگ $\mathfrak{R}$ هرگروه حل‌پذیر متناهی G دارای $\mathfrak{R}$ تزریقگرهایی است که یک ردهٔ تزویج واحد تشکیل می‌دهند. (در اینجا در مقایسه با شرط اشباع‌شدگی برای تشکلها هیچ شرط اضافی برای ردهٔ فیتینگ لازم به نظر نمی‌رسد). وقتی $\mathfrak{R}$ ردهٔ فیتینگ ϖ گروههای متناهی است $\mathfrak{R}$ تزریقگرهای G مجدداً ϖ زیرگروههای هال G هستند؛ اما هروقت $\mathfrak{R}$ ردهٔ فیتینگ گروههای پوچ‌توان متناهی است، $\mathfrak{R}$ تزریقگرهای G عموماً از زیرگروههای کارتر G متمایزند.

اهمیت دقیق این رده‌های تزویجِ متمایز مختلفِ زیرگروهها در نظریهٔ گروههای حل‌پذیر متناهی هنوز یک موضوع فعال و قابل بررسی است.

1. $\mathfrak{F}$Projectors 2. T. O. Hawkes 3. B. Fischer 4. B. Hartley 5. Fitting class 6. $\mathfrak{R}$radical 7. $\mathfrak{R}$injector

مراجع

Articles

[a1] J. L. Alperin, Sylow intersections and fusion, *J. Algebra* **6** (1967), 222–41.
[a2] J. L. Alperin and D. Gorenstein, Transfer and fusion in finite groups, *J. Algebra* **6** (1967), 242–55.
[a3] R. Baer, Erweiterung von Gruppen und ihren Isomorphismen, *Math. Z.* **38** (1934), 375–416.
[a4] R. Baer, The subgroup of the elements of finite order of an abelian group, *Ann. of Math.* (2) **37** (1936), 766–81.
[a5] R. Baer, Das Hyperzentrum einer Gruppe III, *Math. Z.* **59** (1953), 299–338.
[a6] R. Baer, Nilpotent characteristic subgroups of finite groups, *Amer. J. Math.* **75** (1953), 633–64.
[a7] H. Bender, A group theoretic proof of Burnside's $p^a q^b$-theorem, *Math. Z.* **126** (1972), 327–38.
[a8] R. Brauer and K. A. Fowler, On groups of even order, *Ann. of Math.* (2) **62** (1955), 565–83.
[a9] W. Burnside, On some properties of groups of odd order II, *Proc. London Math. Soc.* **33** (1901), 257–68.
[a10] W. Burnside, On an unsettled question in the theory of discontinuous groups, *Quart. J. Math.* **33** (1902), 230–8.
[a11] W. Burnside, On groups of order $p^\alpha q^\beta$, *Proc. London Math. Soc.* (2) **1** (1904), 388–92.
[a12] W. Burnside, On the theory of groups of finite order, *Proc. London Math. Soc.* (2) 7 (1909), 1–7.
[a13] R. W. Carter, Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, *Math. Z.* **75** (1961), 136–9.
[a14] R. W. Carter, Simple groups and simple Lie algebras, *J. London Math. Soc.* **40** (1965), 193–240.
[a15] R. W. Carter and T. O. Hawkes, The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group, *J. Algebra* **5** (1967), 175–202.
[a16] A. Cayley, On the theory of groups as depending on the symbolical equation $\theta^n = 1$, *Philos. Mag.* (4) 7 (1854), 40–7 (*Collected Mathematical Papers*, Cambridge 1889, vol. 2, pp. 123–30).
[a17] C. Chevalley, Sur certains groupes simples, *Tôhuku Math. J.* (2) **7** (1955), 14–66.
[a18] A. L. S. Corner, On a conjecture of Pierce concerning direct decompositions of abelian groups, *Proc. Colloq. Abelian Groups*, Akadémiai Kiadó, Budapest (1964), 43–8.
[a19] L. E. Dickson, A new system of simple groups, *Math. Ann.* **60** (1905), 137–50.
[a20] A. P. Ditsman, On p-groups (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **15** (1937), 71–6.
[a21] W. Feit, The current situation in the theory of finite simple groups, *Actes Congrès Intern. Math.* (Nice, 1970), vol. 1, 55–93.

[a22] W. Feit and J. G. Thompson, A solvability criterion for finite groups and some consequences, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **48** (1962), 968–70.
[a23] W. Feit and J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, *Pacific J. Math.* **13** (1963), 775–1029.
[a24] B. Fischer, W. Gaschütz and B. Hartley, Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen, *Math. Z.* **102** (1967), 337–9.
[a25] H. Fitting, Die Theorie der Automorphismenringe Abelscher Gruppen und ihr Analogon bei nicht kommutativen Gruppen, *Math. Ann.* 107 (1933), 514–42.
[a26] H. Fitting, Über die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren, *Math. Z.* **39** (1934), 16–30.
[a27] H. Fitting, Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung, *Jber. Deutsch. Math. Verein.* **48** (1938), 77–141.
[a28] S. B. Fomin, Über periodische Untergruppen der unendlichen abelschen Gruppen, *Mat. Sb.* **2** (1937), 1007–9.
[a29] G. Frattini, Intorno alla generazione dei gruppi di operazioni, *Rend. Atti Accad. Lincei* (4) **1** (1885), 281–5, 455–7.
[a30] F. G. Frobenius, Über auflösbare Gruppen III, S.-B. Preuss. Akad. Berlin (1901), 849–57 (*Gesamm. Abh.*, Springer 1968, vol. 3, pp. 180–8).
[a31] F. G. Frobenius, Über auflösbare Gruppen IV, S.-B. Preuss. Akad. Berlin (1901), 1216–30 (*Gesamm. Abh.*, Springer 1968, vol. 3, pp. 189–203).
[a32] F. G. Frobenius, Über auflösbare Gruppen V, S.-B. Preuss. Akad. Berlin (1901), 1324–9 (*Gesamm. Abh.*, Springer 1968, vol. 3, pp. 204–9).
[a33] F. G. Frobenius and L. Stickelberger, Über Gruppen von vertauschbaren Elementen, *J. reine angew. Math.* **86** (1879), 217–62 (*Gesamm. Abh.*, Springer 1968, vol. 1, pp. 545–90).
[a34] W. Gaschütz, Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen, *J. reine angew. Math.* **190** (1952), 93–107.
[a35] W. Gaschütz, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, *Math. Z.* **58** (1953), 160–70.
[a36] W. Gaschütz, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, *Math. Z.* **80** (1963), 300–5.
[a37] W. Gaschütz, Nichtabelsche p-Gruppen besitzen äussere p-Automorphismen, *J. Algebra* **4** (1966), 1–2.
[a38] W. Gaschütz and U. Lubeseder, Kennzeichnung gesättigter Formationen, *Math. Z.* **82** (1963), 198–9.
[a39] G. Glauberman, A characteristic subgroup of a p-stable group, *Canad. J. Math.* **20** (1968), 1101–35.
[a40] D. M. Goldschmidt, A group theoretic proof of the $p^a q^b$ theorem for odd primes, *Math. Z.* **113** (1970), 373–5.
[a41] E. S. Golod, On nil-algebras and finitely approximable p-groups (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28** (1964), 273–6 (*Amer. Math. Soc. Translations* (2) **48** (1965), 103–6).
[a42] E. S. Golod and I. R. Shafarevich, On class field towers (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **28** (1964), 261–72 (*Amer. Math. Soc. Translations* (2) **48** (1965), 91–102).
[a43] D. Gorenstein, Finite groups in which Sylow 2-subgroups are abelian and centralizers of involutions are solvable, *Canad. J. Math.* 17 (1965), 860–906.
[a44] D. Gorenstein, Finite simple groups and their classification, *Israel J. Math.* **19** (1974), 5–66.
[a45] O. Grün, Beiträge zur Gruppentheorie I, *J. reine angew. Math.* 174 (1935), 1–14.

[a46] M. Hall Jr., Solution of the Burnside problem for exponent six. *Illinois J. Math.* **2** (1958), 764–86.
[a47] P. Hall, A note on soluble groups, *J. London Math. Soc.* **3** (1928), 98–105.
[a48] P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime-power order, *Proc. London Math. Soc.* (2) **36** (1933), 29–95.
[a49] P. Hall, A characteristic property of soluble groups, *J. London Math. Soc.* **12** (1937), 198–200.
[a50] P. Hall, On the Sylow systems of a soluble group, *Proc. London Math. Soc.* (2) **43** (1937), 316–23.
[a51] P. Hall, On the system normalizers of a soluble group, *Proc. London Math. Soc.* (2) **43** (1937), 507–28.
[a52] P. Hall and G. Higman, On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem, *Proc. London Math. Soc.* (3) **6** (1956), 1–42.
[a53] T. O. Hawkes, On formation subgroups of a finite soluble group, *J. London Math. Soc.* **44** (1969), 243–50.
[a54] H. Heineken and I. J. Mohamed, A group with trivial centre satisfying the normalizer condition, *J. Algebra* **10** (1968), 368–76.
[a55] I. N. Herstein, A remark on finite groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958), 255–7.
[a56] D. G. Higman, Focal series in finite groups, *Canad. J. Math.* **5** (1953), 477–97.
[a57] G. Higman, A finitely generated infinite simple group, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 61–4.
[a58] G. Higman, B. H. Neumann and H. Neumann, Embedding theorems for groups, *J. London Math. Soc.* **24** (1949), 247–54.
[a59] O. Hölder, Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen, *Math. Ann.* **34** (1889), 26–56.
[a60] O. Hölder, Bildung zusammengesetzter Gruppen, *Math. Ann.* **46** (1895), 321–422.
[a61] B. Huppert, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, *Math. Z.* **60** (1954), 409–34.
[a62] N. Itô, Note on (LM)-groups of finite orders, *Kōdai Math. Sem. Rep.* (1951), 1–6.
[a63] N. Itô, Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen, *Math. Z.* **62** (1955), 400–1.
[a64] K. Iwasawa, Ueber die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan* (3) **23** (1941), 1–4.
[a65] Z. Janko, A new finite simple group with abelian Sylow 2-subgroups and its characterization, *J. Algebra* **3** (1966), 147–86.
[a66] C. Jordan, Commentaire sur Galois, *Math. Ann.* **1** (1869), 141–60 (*Oeuvres*, Gauthier-Villars 1961, vol. 1, pp. 211–30).
[a67] O. H. Kegel, Produkte nilpotenter Gruppen, *Arch. Math.* **12** (1961), 90–3.
[a68] W. Krull, Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen, *Math. Z.* **23** (1925), 161–96.
[a69] E. Landau, Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante, *Math. Ann.* **56** (1903), 671–6.
[a70] F. Levi and B. L. van der Waerden, Über eine besondere Klasse von Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **9** (1933), 154–8.
[a71] E. Mathieu, Mémoire sur l'étude des fonctions de plusieurs quantités, *J. Math. Pures Appl.* (2) **6** (1861), 241–323.
[a72] E. Mathieu, Sur la fonction cinq fois transitive de 24 quantités, *J. Math. Pures Appl.* (2) **18** (1873), 25–46.

[a73] H. Matsuyama, Solvability of groups of order $2^a p^b$, *Osaka J. Math.* **10** (1973), 375–8.
[a74] D. H. McLain, The existence of subgroups of given order in finite groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 278–85.
[a75] P. S. Novikov and S. I. Adyan, Infinite periodic groups (in Russian), *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math.* **32** (1968), 212–44, 251–524, 709–31 (translation in *Math. USSR Izv.* **2** (1968), 209–36, 241–479, 665–85).
[a76] O. Ore, Contributions to the theory of groups of finite order, *Duke Math. J.* **5** (1939), 431–60.
[a77] R. Rado, A proof of the basis theorem for finitely generated Abelian groups, *J. London Math. Soc.* **26** (1951), 74–5, 160.
[a78] R. Remak, Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren, *J. reine angew. Math.* **139** (1911), 293–308.
[a79] R. Remak, Über minimale invariante Untergruppen in der Theorie der endlichen Gruppen, *J. reine angew. Math.* **162** (1930), 1–16.
[a80] R. Remak, Über die Darstellung der endlichen Gruppen als Untergruppen direkter Produkte, *J. reine angew. Math.* **163** (1930), 1–44.
[a81] J. E. Roseblade, On groups in which every subgroup is subnormal, *J. Algebra* **2** (1965), 402–12.
[a82] I. N. Sanov, Solution of Burnside's problem for exponent 4 (in Russian), *Leningrad State Univ. Annals (Uchenye Zapiski) Math. Ser.* **10** (1940), 166–70.
[a83] O. J. Schmidt, Sur les produits directs, *Bull. Soc. Math. France* **41** (1913), 161–4.
[a84] O. J. Schmidt, Über Gruppen, deren sämtliche Teiler spezielle Gruppen sind, *Rec. Math. Moscou* **31** (1924), 366–72.
[a85] O. J. Schmidt, Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette, *Math. Z.* **29** (1928), 34–41.
[a86] O. J. Schmidt, Infinite soluble groups (in Russian), *Mat. Sb.* **17** (1945), 145–62.
[a87] O. Schreier, Die Untergruppen der freien Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5** (1927), 161–83.
[a88] O. Schreier, Über den Jordan-Hölderschen Satz, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **6** (1928), 300–2.
[a89] O. Schreier and B. L. van der Waerden, Die Automorphismen der projektiven Gruppen, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **6** (1928), 303–22.
[a90] I. Schur, Neuer Beweis eines Satzes über endliche Gruppen, *S.-B. Preuss. Akad. Berlin* (1902), 1013–19 (*Gesamm. Abh.*, Springer 1973, vol. 1, pp.79–85).
[a91] I. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. reine angew. Math.* **127** (1904), 20–50 (*Gesamm. Abh.*, Springer 1973, vol. 1, pp. 86–116).
[a92] M. Suzuki, A new type of simple groups of finite order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **46** (1960), 868–70.
[a93] M. Suzuki, On a class of doubly transitive groups, *Ann. of Math.* (2) **75** (1962), 105–45.
[a94] M. Suzuki, On the existence of a Hall normal subgroup, *J. Math. Soc. Japan* **15** (1963), 387–91.
[a95] L. Sylow, Théorèmes sur les groupes de substitutions, *Math. Ann.* **5** (1872), 584–94.
[a96] J. G. Thompson, Finite groups with fixed-point-free automorphisms of prime order, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **45** (1959), 578–81.
[a97] J. G. Thompson, Normal p-complements for finite groups, *J. Algebra* **1** (1964), 43–6.

[a98] J. G. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 383–437, *Pacific J. Math.* **33** (1970), 451–536, *ibid.* **39** (1971), 483–534, *ibid.* **48** (1973), 511–92, *ibid.* **50** (1974), 215–97, *ibid.* **51** (1974) 573–630.
[a99] J. Wiegold, Multiplicators and groups with finite central factor-groups, *Math. Z.* **89** (1965), 345–7.
[a100] H. Wielandt, Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen, *Math. Z.* **45** (1939), 209–44.
[a101] H. Wielandt, Über Produkte von nilpotenten Gruppen, *Illinois J. Math.* **2** (1958), 611–8.
[a102] H. Wielandt, Ein Beweis für die Existenz der Sylowgruppen, *Arch. Math.* **10** (1959), 401–2.
[a103] H. Wielandt, Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierten Gruppen, *J. Austral. Math. Soc.* **1** (1960), 143–6.
[a104] G. Zappa, Remark on a recent paper of O. Ore, *Duke Math. J.* **6** (1940), 511–2.
[a105] G. Zappa, Generalizzazione di un teorema di Kochendörffer, *Matematiche (Catania)* **13** (1958), 61–4.
[a106] G. Zappa, Sur les systèmes distingués de représentants et sur les compléments normaux des sous-groupes de Hall, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **13** (1962), 227–30.
[a107] H. Zassenhaus, Zum Satz von Jordan-Hölder-Schreier, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **10** (1934), 106–8.
[a108] H. Zassenhaus, Über endliche Fastkörper, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **11** (1936), 187–220.

Books

[b1] E. Artin, *Galois theory* (edited and supplemented by A. N. Milgram), 2nd ed., Notre Dame 1944.
[b2] E. Artin, *Geometric algebra*, Interscience 1957.
[b3] W. Burnside, *Theory of groups of finite order*, 2nd ed., Cambridge 1911 (Dover reprint 1955).
[b4] R. W. Carter, *Simple groups of Lie type*, Wiley-Interscience 1972.
[b5] H. S. M. Coxeter, *Introduction to geometry*, Wiley 1961.
[b6] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and relations for discrete groups*, 3rd ed., Springer 1972.
[b7] C. W. Curtis and I. Reiner, *Representation theory of finite groups and associative algebras*, Interscience 1962.
[b8] L. E. Dickson, *Linear groups with an exposition of the Galois field theory*, Teubner 1901 (Dover reprint 1958, with an introduction by W. Magnus).
[b9] J. Dieudonné, *Sur les groupes classiques*, 3rd ed., Hermann 1967.
[b10] J. Dieudonné, *La géometrie des groupes classiques*, 3rd ed., Springer 1971.
[b11] L. Fuchs, *Infinite abelian groups* (2 vols.), Academic 1970, 1973.
[b12] T. M. Gagen, *Topics in finite groups*, London Math. Soc. Lecture Note Series 16, Cambridge 1975.
[b13] D. Gorenstein, *Finite groups*, Harper and Row, 1968.
[b14] J. A. Green, *Sets and groups*, Routledge and Kegan Paul, 1965.
[b15] P. A. Griffith, *Infinite abelian group theory*, Chicago 1970.
[b16] K. W. Gruenberg, *Cohomological topics in group theory*, Springer 1970.
[b17] M. Hall Jr., *The theory of groups*, Macmillan 1959.
[b18] B. Hartley and T. O. Hawkes, *Rings, modules and linear algebra*, Chapman and Hall 1970.

[b19] I. N. Herstein, *Topics in algebra*, Blaisdell 1964.
[b20] I. N. Herstein, *Noncommutative rings*, Carus Mathematical Monographs No. 15, Math. Assoc. of Amer. 1968.
[b21] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer 1967.
[b22] D. L. Johnson, *Presentations of groups*, London Math. Soc. Lecture Note Series 22, Cambridge 1976.
[b23] C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars 1870 (Blanchard reprint 1957).
[b24] I. Kaplansky, *Infinite abelian groups*, 2nd ed., Michigan 1969.
[b25] I. Kaplansky, *Fields and rings*, Chicago 1969.
[b26] F. Klein and R. Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, vol. 1, Teubner 1890.
[b27] A. G. Kurosh, *The theory of groups* (2 vols., translated from Russian and edited by K. A. Hirsch), 2nd English ed., Chelsea 1960.
[b28] S. Lang, *Algebra*, Addison-Wesley 1965.
[b29] W. Ledermann, *Introduction to group theory*, Oliver and Boyd 1973.
[b30] I. D. Macdonald, *The theory of groups*, Oxford 1968.
[b31] S. MacLane, *Homology*, Springer 1963.
[b32] D. S. Passman, *Permutation groups*, Benjamin 1968.
[b33] M. B. Powell and G. Higman, Editors, *Finite simple groups*, Academic 1971.
[b34] J. J. Rotman, *The theory of groups, an introduction*, 2nd ed., Allyn and Bacon 1973.
[b35] E. Schenkman, *Group theory*, Van Nostrand 1965.
[b36] W. R. Scott, *Group theory*, Prentice-Hall 1964.
[b37] J.-P. Serre, *Representations linéaires des groupes finis*, Hermann 1967.
[b38] H. Wielandt, *Finite permutation groups* (translated from German by R. Bercov), Academic 1964.
[b39] R. J. Wilson, *Introduction to graph theory*, Oliver and Boyd 1972.
[b40] H. Wussing, *Die Genesis des abstrakten Gruppenbegriffes*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1969.
[b41] H. Zassenhaus, *The theory of groups*, 2nd English ed., Chelsea 1958.

نمایه