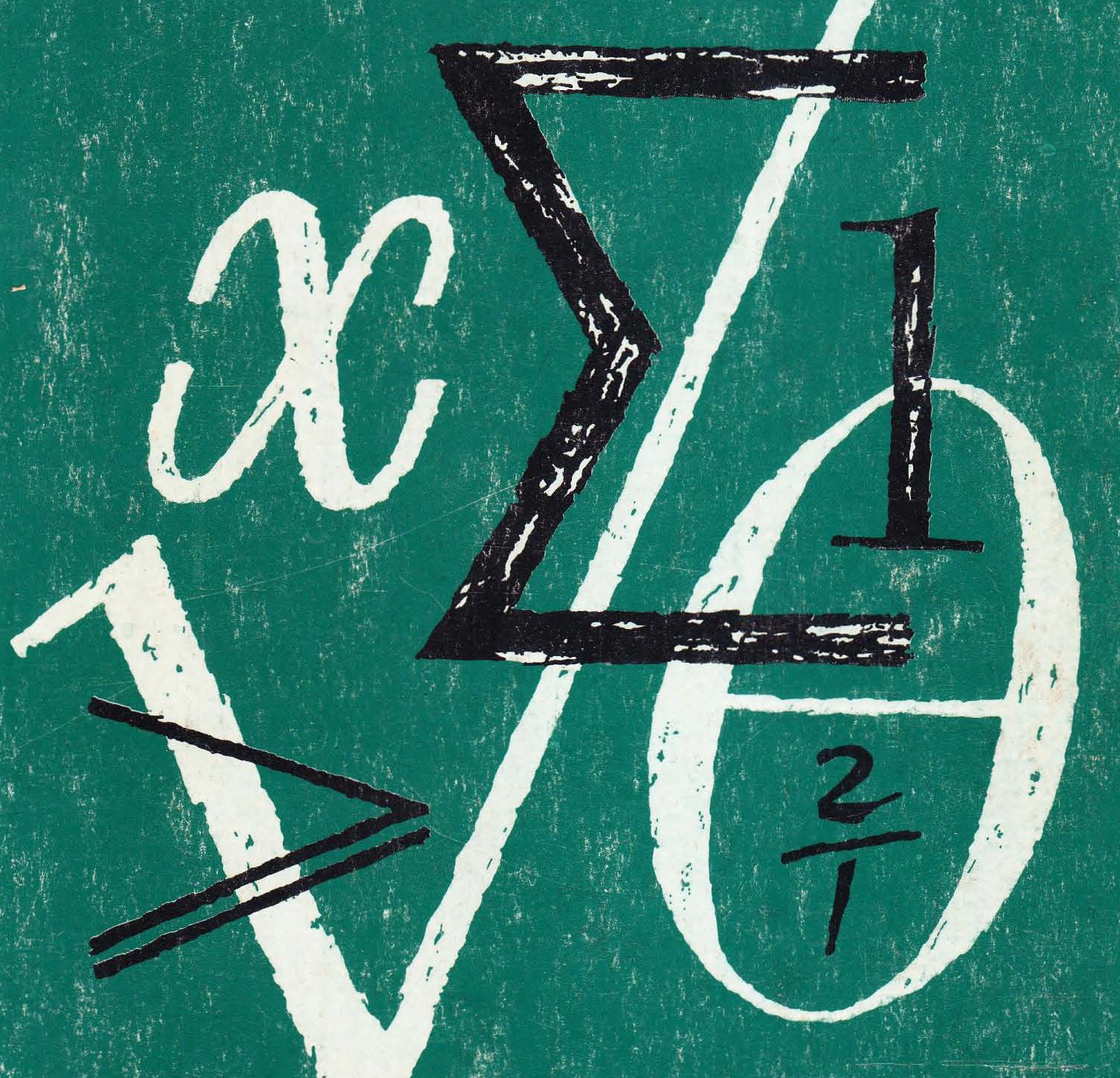
نخستین درس در
آنالیز ریاضی

تألیف: جی. سی. بورکیل

ترجمهٔ علی اکبر رحیم زاده / جواد لآلی / دکتر محمد قاسم وحیدی



انتشارات فاطمی

نخستین درس در

آنالیز ریاضی

تألیف جِی. سی. بورکیل

ترجمهٔ علی اکبر رحیم زاده
جواد لاآلی
دکتر محمد قاسم وحیدی

مؤسسهٔ انتشارات فاطمی

تهران ــ ۱۳۶۷

ترجمهٔ این کتاب در زمان تعطیلی دانشگاهها از طرف مرکز نشر دانشگاهی به مترجمین واگذار شده است.

نخستین درس در آنالیز ریاضی

A FIRST COURSE IN MATHEMATICAL ANALYSIS

مؤلف: جی . سی . بورکیل **J. C. Burkill**

مترجم: علی اکبر رحیم‌زاده / جواد لآلی / دکتر محمد قاسم وحیدی

چاپ اول: مردادماه ۱۳٦۷

تیراژ: ٦۷۰۰ نسخه

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ صنوبر

نشانی: تهران، خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹

تلفن: ٦۵۱٤۲۲

فهرست مطالب

به نام خدا

پیشگفتار مترجمین

«این درس سر راست که برمفهوم حد بنا شده است، برای دانشجویانی در نظر گرفته‌شده‌است که دانشی کاری‌درحسابان تحصیل کرده‌اند و برای بحثی‌منظمتر؛ که سایر فرایندهای حدی، نظیر مجموعیابی سریهای نامتناهی و بسط تابعهای مثلثاتی به‌عنوان سریهای توانی‌را هم مطرح می‌کند، آماده‌اند.

به‌وضوح در بیان و بسط منطقی موضوع، توجه خاصی مبذول شده است. مثالهای بسیاری همراه باراهنمایی حل تعداد زیادی‌از آنها در کتاب گنجانده شده است.

کتبی با این کیفیت . . . که اساساً کتابی مقدماتی برای خبرگان ریاضی است، بندرت (از جانب عامه) مورد استقبال قرار می‌گیرد. امـا نحوهٔ پروردن مفاهیم وروشنی سبك در آن چنان است که هر کسی را که علاقه‌ای کلی به‌ریاضیات داشته باشد، به‌خود جلب کند.»

متمم آموزشی روزنامهٔ تایمز لندن (The Times Educational Supplement)

«این یك کتاب عالی است . . . اگر می‌خواستم برای دانشجویان پیشرفته که توصیف کردم، درسی عرضه کنم ؛ این کتاب در بین کتابهای درسی که ممکن بود انتخاب کنم، درردیفهای بالا قرارمی‌گرفت.»

بولتن ریاضی کانادا (Canadian Mathematical Bulletin)

«. . . باعث مسرت است که مقدم کتابی درآنالین را گرامی می‌داریم که توسط مؤلفی صاحب سبك نوشته شده که از استفادهٔ مفرط ازنمـاد گرایی، که می‌تواند مطلب را برای دانشجو دشوار نماید، احتراز دارد.»

گزارشهای انجمن ریاضی ادینبورو
(Proceedings of The Edinburg Mathematical Society)

هرچه راکه دربارهٔ محتوا، کیفیت و سبك این کتاب می‌شود گفت، در این اظهـار نظرهای سه نهاد معتبر علمی درج است. ترجمهٔ چنین کتابی را به‌فارسی به‌این دلیل‌لازم دیدیم که دانشجو معمولاً رخنه‌ای بین مقاصد دروس حساب دیفرانسیل وانتگرال، که در آن تکیه عمدتاً برفنون حل مسئله است، وآنالیز، که دقت ریـاضی در آن ملحوظ است، حس می‌کند. این کتاب گذرگاهی مطمئن و سریع بین ریاضیات عمومی و آنالیز است. به‌علاوه‌کتاب برای دانش آموزان پیشرفته‌ای‌که خواهان آشنایی با مقدمات آنالیزند، و دبیرانی‌که در طرح درس خود به‌نگرشی دیگر وبه‌مسائلی متنوع نیاز دارند، قابل استفاده است. خواننده بعد از اتمام کتاب، با ما هم‌آوا خواهد شد که کلیهٔ مطـالب مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال، بادقتی‌که در آنالیز رعایت می‌شود، درمتن و تمرینهای این کتاب کم حجم دوره شده است.

علی‌اکبر رحیم‌زاده
جواد لآلی
محمدقاسم وحیدی

پیشگفتار مؤلف

این درس آنالیز برای دانشجویانی در نظر گرفته شده است که دانشی کاری در حسابان دارند و برای بحثی منظمتر آماده‌اند. در این مرحله تنها دانشجویان استثنایی پختگی کافی برای بسط اصل موضوعی آنالیز درفضاهای متریك دارند، و اینها می‌توانند درس را پیش خود بیاموزند. بقیهٔ دانشجویان معمولا درس سرراستی بر پایهٔ حد را دنبال می‌کنند، و این کتاب کوششی برای تدارك چنین درسی است. من به‌دنباله‌های کوشی[1]، حدهای بالایی و پایینی، قضیهٔ هاینه[2]ـ بورل[3] وهمگرایی یکنواخت نپرداخته‌ام؛ مطابق تجربهٔ من، درصورتی که این مطالب به‌مرحلهٔ بعد واگذار شوند، فهم آنها برای عدهٔ بسیاری ساده‌ترمی‌شود.

از پروفسور جی . ای . اچ . رویتر[4] و دکتر اچ . بورکیل[5] به‌خاطر بررسی دقیق متن دستنویس سپاسگزارم.

جی . سی . بی .

---

1) Cauchy
2) Heine
3) Borel
4) G. E. H. Reuter
5) H. Burkill

۱

اعداد

۱.۱. شاخه‌های ریاضیات محض

این کتاب، یك کتاب درسی آنالیز ریاضی است. ابتدا لازم است گفته شود که این عنوان چه مطالبی را شامل می‌شود. برای این منظور، بحث را با بررسی مجملی از شاخه‌های ریاضیات محض آغاز می‌کنیم. ما توجه خود را به مکانیك و یا هر نوع کاربرد دیگر ریاضیات در علوم طبیعی معطوف نمی‌کنیم.

ریاضیاتی که در مدارس متوسطه و عالی تدریس می‌شود شامل حساب، جبر، هندسه، مثلثات و حسابان است، و هیچگونه مرز سخت و محکمی بین این موضوعات قرار ندارد. هر دانشجویی برای حل مسئله می‌تواند مفاهیم و روشهای هریك از آنها را به‌کار گیرد.

یکی از وجوه مشخصهٔ حسابان آن است که بر فرایندهای حدی بنا شده است. گرادیان یك منحنی در نقطهٔ P، حد شیب وترقوسی مانند PQ است وقتی که در طول منحنی Q به P میل کند. برحسب نمادها، اگر معادلهٔ این منحنی $y=f(x)$ باشد، در این صورت، گرادیان آن عبارت از مشتق آن dy/dx، یا $f'(x)$ است، که به‌وسیله

$$f'(x)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تعریف می‌شود. حساب انتگرال نیز بر مفهوم حد استوار است و یك مسئلهٔ بنیادی آن محاسبهٔ مساحت محدود به‌وسیلهٔ یك منحنی است. تنها راهی که چنین مساحتی را می‌توان از مساحتهای تعریف شده در هندسه به‌دست آورد، عبارت از حد مساحتهای چند ضلعیهایی است که به منحنی میل می‌کنند.

در جبر نیز مفهوم حد در فصل تصاعدها مطرح می‌شود، که در آنجا مشاهده می‌شود که مجموع بی‌نهایت جملهٔ تصاعدهای هندسی را می‌توان پیدا کرد. به مفهوم مشخصی که به آسانی

قابل درك است، سری بی‌پایان

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots$$

که n مین جملهٔ آن ۲^{-n} است، دارای مجموع یك است. این بدین‌معنی است که اگر n را به‌اندازهٔکافی بزرگ انتخاب کنیم، می‌توانیم مجموع n جملهٔ آن را هراندازه که‌بخواهیم به‌یك نزدیك کنیم.

مفهوم حد به‌مفهوم تابع بستگی دارد. منحنیی که منظوریافتن گرادیان آن بود به‌وسیلهٔ تابع $f(x)$ مشخص می‌شود. مجموع s_n از n جملهٔ تصاعد هندسی، به‌عنوان تابعی از n، به‌وسیلهٔ رابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$s_n = ۱ - ۲^{-n}$$

مفهوم تابع به‌نوبهٔ خود، مبتنی برمفهوم عدد است. معادلهٔ $y=f(x)$ از منحنی ارتباطی بین عدد x و عدد y را بیان می‌کند. مجموع s_n در تصاعد هندسی به‌عدد n بستگی دارد (که نمی‌تواند مانند x به‌طور پیوسته تغییر کند، بلکه محدود به‌اعداد صحیح مثبت است).

۲.۱. محدودهٔ آنالیز ریاضی

اکنون می‌توانیم آنالیز ریاضی را دربرگیرندهٔ مباحثی توصیف کنیم که به‌مفهوم حد بستگی‌دارند. بنابراین، آنالیز ریاضی شامل حساب دیفرانسیل وانتگرال خواهد بود وممکن است شما سؤال نمایید که آیا به‌این عنوان جدید نیازی هست؟ آیا حسابان این موضوع اصلی را به‌قدرکافی مشخص نمی‌کند؟ به‌یك معنی چنین است، واصولا تنها بنابر عرف و عادت است که آنالیز دلالت بریك معرفی صوریتر (یاپیشرفته‌تر) همراه باتوجه بیشتر به‌مبانی وتأکید بیشتر براستنتاج منطقی‌می‌کند. به‌کاربردن لغت آنالیزدارای این مزیت است که بوضوح جمع زنی سریهای نامتناهی را هم شامل می‌شود (که محصلین به‌طور منطقی معمولا آن‌را جزو جبر می‌دانند، نه حسابان).

اعمالی‌که باتعداد متناهی مراحل‌کامل می‌شوند، نظیر محاسبهٔ یك دترمینان، به‌جبر تعلق دارند نه‌به‌آنالیز. درقضیهٔ دوجمله‌ای اگر اندیس، عدد صحیح مثبتی باشد، یك قضیهٔ جبری است ودرغیراین صورت به‌آنالیز تعلق دارد.

هندسه، موضوعی جدا ازآنالیز است، و بااصول موضوعهٔ خودش بسط یافته است.

تنها تأثیر آن بر آنالیز این است که اغلب استفاده از زبان و اشکال هندسی، مفید خواهد بود.

به لحاظ آنچه گفته‌ایم، ملاحظه می‌شود که موضوع مثلثات بر دو قسمت است. حل مثلثها، «مسائل ارتفاع و فاصله»، و خواص توابع مثلثاتی مورد لزوم آنها، تشکیل نوعی هندسهٔ عملی را می‌دهد. نتایجی مانند

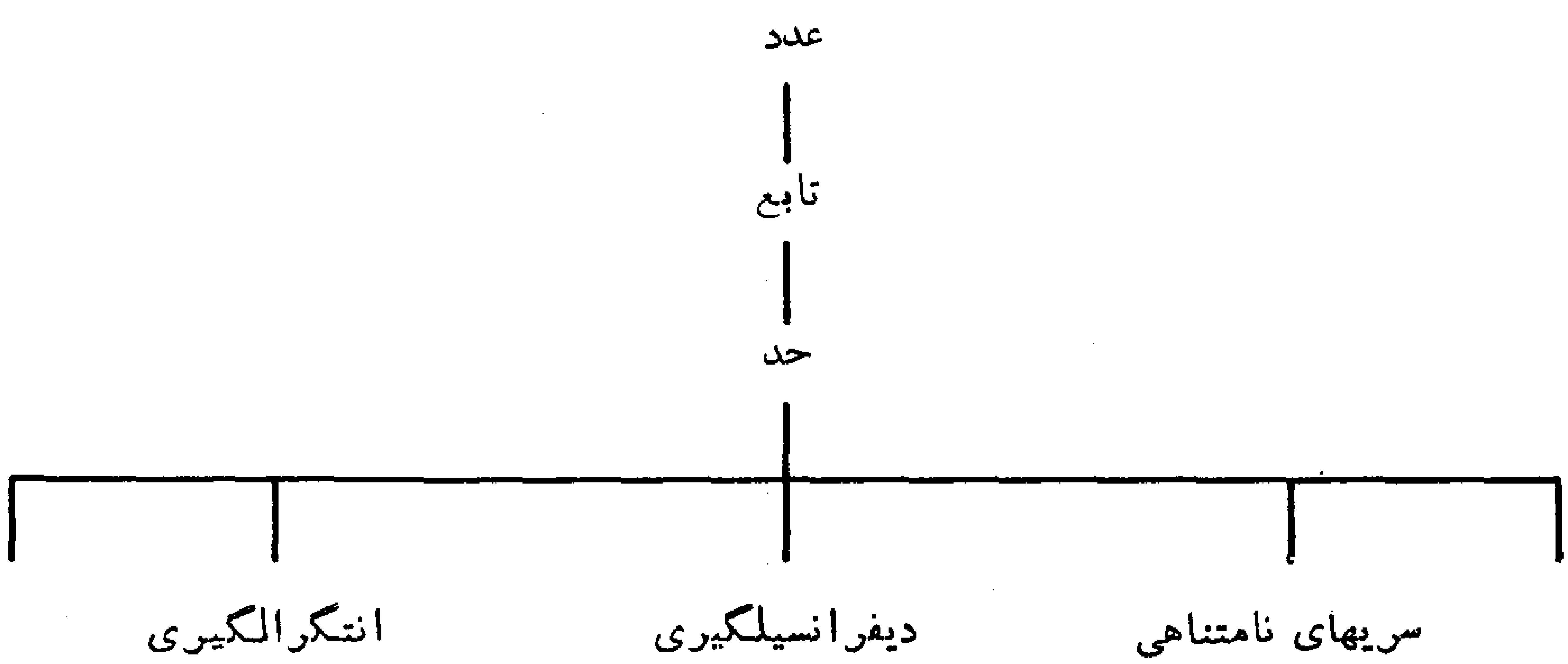
$$\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \dots$$

که هر کس جالب‌تر بودن آن را تشخیص می‌دهد، متعلق به‌آنالیز است. بعد از یك درس مقدماتی در مثلثات، نقطه نظر بایستی تغییر کند. تابع سینوسی و سایر توابع مثلثاتی، که بدواً به‌صورت نسبت طول خطوط تعریف شدند توابع مهمی از آنالیز تلقی می‌شوند و $\sin x$ باید برحسب متغیر x بااستفاده از سریهای نامتناهی که درفصل ۶ این کتاب آمده است تعریف شود.

اطلاعات کمی از توابع مثلثاتی (ونیز توابع نمایی ولگاریتمی) درفصول اولیه نیز، به‌منظور ایجاد تنوع در مثالها، مفید خواهد بود. هر اشاره‌ای به توابع، قبل از فصل ۶، را می‌توان بدون تأثیری بر تداوم منطقی قضیه‌ها نادیده گرفت.

۳.۱. اعداد

قبلا دیده‌ایم که ترتیب منطقی بسط آنالیز ریاضی عبارت است از



که در آن جاهای خالی خطوط انتهایی را می‌توان به‌وسیلهٔ سایر فرایندهای حدی، جز آنهایی که قبلا ذکرشده، پرنمود.

اولین مبحث مورد تحقیق، عدد است. وقتی که عدد به‌طور جامع مورد بحث قرار می گیرد، با توجه به‌مسائلی که ریشه‌هایی هم درریاضیات وهم درفلسفه دارند، موضوع مشکلی می گردد. ازآنجایی که این اولین درس آنالیزاست، ما بحث عدد را حتی‌المقدور درسطح ساده‌ای نگاه می‌داریم، مشروط برآنکه دراین سطح اعداد شالودهٔ محکمی برای ساختمان تعاریف وقضایای بعدی که مبتنی برآن وضع می گردد، باشند. خواننده‌ای که مایل است تعمق بیشتری برمفهوم عدد داشته باشد می‌تواند به اچ. ا. ترستون[1]، دستگاه اعداد (بلکی[2]، ۱۹۵۶)، یا ـ ئی. لانداو[3]، مبانی آنالیز (شرکت انتشارات چلسی[4]، ۱۹۵۱) مراجعه کند.

مجموعه‌ها. قبل ازآنکه وارد بحث عدد شویم باید بگوییم منظور از یك مجموعه چیست. اغلب‌اوقات مجبوریم همهٔافراد یااشیایی‌را درنظربگیریم که‌مشخصهٔ معین ومشترکی دارند. مثالهایی در این مورد عبارت‌اند از: (i) همهٔ اتباع ذکور ایرانی که درزمان مفروضی حداقل سن‌آنها ۱۸ سال است و از ۶۰ سال کمتر عمر دارند، (ii) همهٔ قله کوههای روی زمین که بیشتر از ۳۰۰۰ مترارتفاع دارند، (iii) همهٔ اعداد صحیح‌مثبت، (iv) همهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع واقع دریك صفحهٔ مفروض. چنین گردایه‌هایی راکه به‌وسیلهٔ یك خاصیت معرف معین می‌شوند مجموعه می‌خوانیم. همچنین کلمات رده و کوده به‌همین معنی به‌کار می‌روند. تأکید می کنیم که هرمجموعه بدون ابهام مشخص می‌شودهرگاه قواعد معرف آن مارا قادر سازند که بگوییم هر چیز مورد نظر، عضوی از آن مجموعه هست یا نیست. مثلا، بعضی ازخوانندگان مشمول درمجموعهٔ (i) هستند و دیگران چنین نیستند. اما، قواعد روشن هستند وبرای هیچکس تردیدی باقی نمی‌ماند.

مثالهای (i) تا (iv) تمایز بین مجموعه‌های متناهی ونامتناهی‌را روشن می‌سازند. مجموعه‌های (i) و (ii) متناهی هستند و بااطلاعات وشکیبایی‌کافی می‌توان فهرست کاملی از اعضای هر یك از آنها را تهیه‌کرد. از طرف دیگر، مجموعه‌های (iii) و (iv) نامتناهی‌اند، در (iii) هر چقدر هم‌که اعداد صحیح مثبت را بنویسیم، بازهم عدد دیگری به‌دنبال آنها می‌آید.

می‌توان یك خاصیت معرف را درنظر گرفت‌که هیچ شیئی آن خاصیت را نداشته باشد. دراین صورت، مجموعهٔ متناظر آن هیچ عضوی‌ندارد، وآن‌را مجموعهٔ تهی (یاپوچ) می‌نامند. مجموعهٔ کوههای روی زمین‌که بیشتر از ۱۰۰۰۰ متر ارتفاع دارند، یا مجموعهٔ

---

1) H.A. Thurston
2) Blackie
3) E. Landau
4) Chelsea

مقادیر حقیقی x که در $x^۲+۱=۰$ صدق می‌کنند، تهی هستند.

اعداد صحیح. دستگاه اعداد صحیح مثبت

$$۱, ۲, ۳, \cdots$$

را دانسته فرض می‌کنیم و تنها برحقایقی تأکید می‌کنیم که برای بسط بیشتر دستگاه اعداد بیشترین اهمیت را دارند.

اعداد صحیح مثبت a و b را می‌توان جمع یاضرب کرد و اعداد صحیح مثبتی مانند c و d وجود دارند به‌طوری که

$$a+b=c \text{ و } ab=d$$

عدد صحیح ۱ دارای این خاصیت است که به‌ازای هرعدد صحیح مثبت a،

$$۱\cdot a=a\cdot ۱=a$$

اعداد صحیح دارای ترتیبی هستند که به‌وسیلهٔ $>$ یا $<$ بیان می‌شود.

حرف n همیشه نشان دهندهٔ یك عدد صحیح مثبت است.

اصل استقراء. اگر $P(n)$ گزاره‌ای باشد که

(i) به‌ازای $n=۱$ برقرار است،

(ii) اگربه‌ازای n برقرار باشد آنگاه برای $n+۱$ نیزبرقرار است،

دراین صورت، این گزاره به‌ازای هرعدد صحیح مثبت n، برقرار است.

اصل استقراء اغلب به‌عنوان یك روش اثبات مفید است (تمرین ۱ (الف)را ببینید).

مابه‌جمع وضرب‌اعداد صحیح مثبت‌اشاره کرده‌ایم، حال به‌تفریق وپس‌ازآن به‌تقسیم می‌پردازیم.

در دستگاه اعداد صحیح مثبت معادلهٔ

$$a+x=b$$

فقط وقتی نسبت به x قابل حل است که $a<b$. برای اینکه معادله در حالت $a=b$ یا $a>b$ دارای جوابی باشد، لازم است که صفر و اعداد صحیح منفی را معرفی کنیم. در این صورت، دستگاه اعداد را گسترش داده‌ایم تاهمهٔ اعداد صحیح را شامل‌شود، که‌می‌توان آنها را به‌ترتیب ذیل مرتب کرد

$$\cdots, -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, \cdots$$

اعداد منطق. اگر a و b اعداد صحیح باشند، معادلهٔ

$$bx=a$$

درحالت کلی، برای مقادیرصحیح x برقرار نیست. برای اینکه این معادله همیشه دارای جواب باشد (b صفر نیست) باید دستگاه را گسترش دهیم تا شامل اعداد منطق a/b شود. دردستگاه اعداد منطق، اعمال مربوط به‌حساب آسان است وخوانندگان با آن مأنوس‌اند.

برای اعداد منطق، یك رابطهٔ ترتیبی به‌طور طبیعی مطرح می‌شود. بافرض اینکه b و d اعداد صحیح مثبتی باشند،

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

را به‌معنی $ad > bc$ تعریف می‌کنیم.

بین هردوعدد منطق عدد منطق دیگری وجود دارد.(وبنابراین، تعداد اعداد منطق بین هر دو عدد منطق نامتناهی است.)

برای اثبات، ملاحظه می‌کنیم که اگر b و d اعداد صحیح مثبت باشند، عدد منطق

$$\frac{a+mc}{b+md}$$

به‌ازای هرعدد صحیح مثبت m، بین a/b و c/d قرار دارد.

می‌توان این خاصیت اعداد منطق‌را با گفتن اینکه آنها درهر بازه چگال‌اند، توصیف نمود.

تمرین ۱ (الف)

روش استقرائی را می‌توان برای ۱ — ۶ به‌کاربرد.

۱- $\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ که در آن $\sum_{r=1}^{n} r^2$ به معنی $1^2+2^2+\dots+n^2$ است.

۲- $1^2+3^2+5^2+\dots+(2n-1)^2 = ?$

۳- $1.1+3.2+5.2^2+\dots+(2n+1)2^n = A+(B+Cn)2^n$ که در آن A، B، و C اعداد ثابتی هستند (که به n بستگی ندارند) و باید پیدا شوند.

۴- $$\sum_{r=1}^{n} \frac{x^{2^{r-1}}}{1-x^{2^r}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2^n}}$$

۵- اگر $n > 9$ آنگاه $2^n > n^3$.

۶- $5^{2n} - 6n + 8$ بر ۹ قابل قسمت است.

۷ـ اگر b، d، و q اعداد صحیح مثبت باشند و

$$\frac{a}{b}>\frac{p}{q}>\frac{c}{d}$$

ثابت کنید که می‌توان اعداد m و n را طوری به‌دست‌آورد که

$$\frac{p}{q}=\frac{ma+nc}{mb+nd}$$

مثال عددی بزنید و آن را حل کنید.

۸ـ خاصیت چگال بودن اعداد منطق معادل این است که بگوییم هیچ دوعدد منطق را نمی‌توان یافت که مجاورهم باشند. طرح زیررا برای مرتب کردن اعداد منطق مثبت (نه برحسب بزرگی) که مکان معینی را به‌هر یك اختصاص می‌دهد، مورد بررسی قرار دهید.

$$\frac{۱}{۱}; \frac{۲}{۱}, \frac{۱}{۲}; \frac{۳}{۱}, \frac{۲}{۲}, \frac{۱}{۳}; \frac{۴}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۱}{۴}; \frac{۵}{۱}, \ldots$$

ثابت کنید که p/q مکان $\{\frac{۱}{۲}(p+q-۱)(p+q-۲)+q\}$ ام را اشغال می‌کند. (هر عدد منطق بی‌نهایت بار رخ می‌دهد، مثلا، ۱ به صورت ... $\frac{۳}{۳}$ و $\frac{۲}{۲}$ و $\frac{۱}{۱}$ ظاهر می‌گردد.)

۴.۱. اعداد اصم

یونانیان بیش از ۲۰۰۰ سال پیش دریافتند که نقصی در دستگاه اعداد منطق وجود دارد. قطرمربعی با اضلاع واحد دارای طول اصم است. به‌زبان جبری، معادلهٔ زیر برحسب

$$x^{۲}=a$$

تنها وقتی دارای جواب منطق است که a مقادیر استثنایی منطق داشته باشد (برای مثال، ۴ یا $\frac{۴}{۹}$) واگر a، مثلا، ۲ یا ۳ یا $\frac{۵}{۹}$ باشد قابل حل نیست.

اولین قضیهٔ این کتاب یك برهان صوری این مطلب خواهد بود که جذر ۲ اصم است. برطبق ضابطهٔ مادربخش ۲.۱، درحقیقت، این یك قضیه درجبراست تا درآنالیز. اما این قضیه، ابتدا به‌سبب اهمیت تاریخی‌اش - که به‌وسیله فیثاغورس یا یکی ازپیروانش ثابت شد - ثانیاً، به‌دلیل اختصار وزیبایی استدلال آن، منزلت خاص خودرا می‌یابد.

قضیهٔ ۱.۴. عدد ۲ مربع هیچ عدد منطقی نیست.

برهان. فرض کنیم که چنین نباشد و عدد منطق a/b دارای مربع ۲ باشد، که در آن a و b اعداد صحیح بدون عامل مشترك هستند. دراین صورت

$$a^۲ = ۲b^۲$$

چون ۲ عدد $a^۲$ را عاد می‌کند، عدد صحیح a باید زوج باشد.

می‌نویسیم $a = ۲c$، که در آن c عددی صحیح است. دراین صورت

$$۲c^۲ = b^۲$$

بنابراین ۲ عدد $b^۲$ راعاد می‌کند و لذا b باید زوج باشد.

درنتیجه، a و b هردوعامل ۲ دارند، که ناقض فرض است.❙ (گاهی با به‌کار بردن این خط عمودی ضخیم مشخص می‌کنیم که برهان قضیه کامل شده است.)

تاکنون، تنها ساده‌ترین انواع اعدادی راکه منطق نیستند ارائه داده‌ایم. اعداد دیگری راکه سادگی کمتری دارند به‌آن می‌افزاییم.

(۱) x عدد مثبتی است که درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند.

$$x^۳ = x + ۷$$

(می‌توان ثابت‌کرد که تنها یك چنین xی موجود است). به‌وسیلهٔ روشهای نظریهٔ معادلات، x را می‌توان برحسب ریشه‌های سوم اعداد منطق بیان کرد.

(۲) x عدد مثبتی است که درمعادلهٔ زیرصدق می‌کند.

$$x^۵ = x + ۷$$

شاید انتظار ماآن باشدکه x را بتوان به‌صورت ترکیبی از ریشه‌های اعداد منطق، شاید ریشه‌های پنجم، نمایش داد. ولی چنین نیست. قضیهٔ مشکلی در جبر ثابت می‌کندکه در حالت‌کلی نمی‌توان ریشه‌های معادلات درجات بالاتر ازچهار را بدین صورت بیان کرد.

(۳) عدد π، نسبت محیط یك دایره به‌قطرش.

روشی برای اثبات اصم بودن π درتمرین ۷(و)، ۷ باختصار شرح داده شده است. می‌توان ثابت کرد (بایك‌استدلال مشکلتر) که x درهیچ معادلهٔ جبری باضرایب صحیح‌صدق نمی‌کند. بنابراینπ عددی‌است که، به‌یك معنی، مشکلتر ازاعداد(۱) و(۲)قابل‌حصول‌است.

تمرین ۱ (ب)

۱ــ با جرح و تعدیل استدلال قضیهٔ ۱.۴ ثابت‌کنیدکه هیچ عدد منطقی نیست که مکعب

آن‌مساوی ۱۶ باشد.

۲ــ نتیجهٔ تمرین ۱ را تعمیم داده نشان دهید که عددمنطق p/q، درشکل تحویل‌ناپذیرش، تنها وقتی می‌تواند مکعب یك عدد منطق باشد که p و q مکعب اعداد صحیح منطق باشند.

۳ــ این قضیهٔ کلیتر (گاوس، ۱۷۷۷ ــ ۱۸۵۵) را ثابت کنید که، اگر $p_1, p_2, \dots, p_n$ اعداد صحیح باشند، ریشه‌های منطق ممکن معادلهٔ

$$x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\dots+p_n=0$$

تنها آن اعداد صحیحی هستند که p_n را عاد می‌کنند.

۴ــ این معادلات راحل کنید:

$$x^4-x^3-16x^2+4x+48=0,$$

$$4x^3-8x^2-3x+9=0$$

۵.۱. برشهای اعداد منطق

دربخش ۴.۱ لزوم تکمیل دستگاه اعداد رابه‌وسیلهٔ «پرسازی رخنه‌ها»یی که درمیان اعداد منطق وجوددارد، نشان دادیم. می‌توان ساختمانهای متفاوتی برای پرسازی رخنه‌ها ارائه داد، ما ازرویه ددکیند (۱۸۷۲) پیروی می‌کنیم.

قبل‌از بیان‌آن به‌صورت کلی، به‌نظرما سودمند است ثابت‌کنیم که عدد اصم خاصی، مانند $\sqrt{2}$، چه جایی در میان اعداد منطق دارد.

برای مشخص نمودن عــددی که مربــع آن ۲ است، ابتــدا از قضیهٔ ۴.۱ ملاحظه می‌کنیم که اعداد منطق مثبت در دو دسته قرار می‌گــیرند، یکی اعدادی که مربع آنــها کوچکتر از ۲ ودیگری آنهایی که مربع‌آنها بزرگتر از ۲ است. این دسته‌هارا، متناظر با وضعیت نسبی‌آنها درمــوقع نمایش نموداری بریك خط افــقی، دستهٔ طرف چپ L و دستهٔ طرف راست R می‌نامیم. مثالهایی از اعداد l در L، عدد $\frac{7}{5}$ و ۱/۴۱ هستند و rهایی در R اعداد $\frac{17}{12}$ و ۱/۴۲ می‌باشند. خواننده خود را متقاعد خواهد کرد که هر r بزرگتر ازهر l است و ــ باکمی‌تأمل بیشتر ــ هیچ عضوی مانند l از L، که بزرگتر از همهٔ اعضای دیگر باشد، وجود ندارد، همچنین، هیچ rی که کوچکترین عضو R باشد وجود ندارد.

احکام آخرین پاراگــراف ملموستر می‌شوند درصورتی که ما قاعدهٔ مربــوط به علم حساب را برای یافتن جذر، تا هرتعداد ارقام اعشاری که موردنظرما باشد، به‌کار ببریم.

در این صورت مجموعهٔ اعدادی مانند l به‌صورت ذیل حاصل می‌شود

$$۱,\ ۱/۴,\ ۱/۴۱,\ ۱/۴۱۴,\ ۱/۴۱۴۲,\ \cdots,$$

که هر یک از آنها بزرگتر از عدد ماقبل است (یا مساوی آن اگر آخرین رقم صفر باشد) ومربع هریك از آن کوچکتر از ۲ است. بعلاوه، اعدادی که به‌وسیلهٔ اضافه کردن ۱ به آخرین رقم اعداد l به‌دست می‌آیند تشکیل مجموعه‌ای از اعداد مانند r به‌صورت زیر می‌دهند:

$$۲,\ ۱/۵,\ ۱/۴۲,\ ۱/۴۱۵,\ ۱/۴۱۴۳,\ \cdots,$$

هریك از آنها مربعی بزرگتر از ۲ دارد، و هر کدام کوچکتر از (یا مساوی) جملهٔ قبلی است.

حال اگر عدد منطق خاصی مانند a، که مربع آن کوچکتر از ۲ است، درنظر گرفته شود باپیش‌رفتن درطول اعداد مجموعهٔ ... ,۱/۴۱۴ ,۱/۴۱ ,۱/۴ ,۱ به‌اندازهٔ کافی، به‌عددی خواهیم رسید که از a بزرگتراست. (این را می‌توان به‌طریق دیگری باتوجه به‌روش تمرین ۱(ج)، ۱ ثابت کرد.)

دراین صورت اگر بخواهیم دستگاه اعداد را باشروع از اعداد صحیح و سپس مشمول کردن اعداد منطق، بسازیم می‌بینیم که هرعدد اصم (مانند $\sqrt{۲}$) متناظر و قابل تعریف با یك برش از اعداد منطق به دو دستهٔ L و R است که در آن، L عضو اکثر و R عضو اقل ندارد. این تعریف ددکیند از اعداد اصم به‌وسیلهٔ برشها است.

تمرین ۱ (ج)

۱ــ ثابت کنید که اگر m/n یك تقریب نقصانی برای $\sqrt{۲}$ باشد، در این صورت، $(m+۲n)/(m+n)$ یك تقریب اضافی نزدیکتری است. بدین ترتیب، تقریبهایی برای $\sqrt{۲}$ بنویسید ودو تقریب، که اختلاف آنها کوچکتر از $\frac{۱}{۱۰۰۰۰}$ باشد، به‌دست آورید.

۲ــ به‌همین نحو، تقریبهایی برای $\sqrt{۳}$ پیدا کنید.

۳ــ ثابت کنید که اگر a، b، c، و d اعداد منطق باشند و

$$a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}$$

در این صورت، یا (i) $a=c$، $b=d$ یا (ii) b و d هردو مربعهای اعداد منطق هستند.

۴ـ ثابت کنید که اگر a ، b ، c اعداد منطق باشند و

$$a+b\sqrt{۲}+c\sqrt{۳}=۰$$

آنگاه

$$.a=b=c=۰$$

۵ـ اگر a ، b ، c اعداد منطق باشند و

$$a+b\sqrt[۳]{۲}+c\sqrt[۳]{۴}=۰$$

چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟

۶ـ اگر a ، b ، c ، d اعداد منطق و x اصم باشد، درچه شرایطی

$$\frac{ax+b}{cx+d}$$

منطق است؟

۶.۱. میدان اعداد حقیقی

دربخشهای ۳.۱ ـ ۵.۱، با شروع از اعداد صحیح، ساختن دستگاه اعداد را به‌طور خلاصه شرح داده‌ایم. درج کردن همهٔ جزئیات آن می‌تواند کار یك ترم باشد. باید ثابت می‌کردیم که اعداد از قواعد مأنوس جبر که

$$a(b+c)=ab+ac$$

یك نمونه آن است، پیروی می‌کنند. خواننده‌ای کــه مــایل باشد وارد جزئیات بررسی مختصر، از این موضوع شود می‌تواند به‌یکی از کتابهای اشاره شده دربخش ۳.۱ مراجعه نماید.

ما در این مرحله درصدد تهیهٔ فهرستی از خاصیتهای اساسی هستیم که اعداد حقیقی درآن صدق می‌کنند. چون هیچ برهانی از این خواص ارائه نمی‌دهیم، اینها را به‌عنوان اصول موضوعه تلقی می‌کنیم. این اصول به‌طور طبیعی بــه سه‌دسته منشعب می‌شوند کــه به‌ترتیب اعمال جبری، ترتیب وتمامیت را شامل می‌شوند.

خواننده‌ای که جبر نوین را در سطحی مشابه با این درس آنالیز مطالعه می‌کند در آنجا درمی‌یابد که اولین مجموعه از اصول موضوعــه همانهایی هستند که یك میدان را تعریف می‌کنند.

یك دستگاه، درجبر، به‌معنی مجموعه‌ای از اشیاء یا عناصر، همراه باعملهایی برآنهاست. یك میدان، که بــا F نشان داده می‌شود، بنابر تعریف، دستگاهی است کــه اعضای آن $a, b, c, \ldots$ ، از دو عمل $+$ و $\times$ پیروی می‌کنند، و این اعمال در اصول مــوضوعهٔ

جبری الف ۱ــ ۱۱ ذیل صدق می کنند:

الف ۱ . هر دوعضو a و b در F ، مجموعی مانند $a+b$ در F دارند.

الف ۲ . $a+b=b+a$.

الف ۳ . $(a+b)+c=a+(b+c)$.

الف ۴ . عضوی مانند ۰ در F هست به‌طوری که، به ازای هر a ، $0+a=a$.

الف ۵ . به‌ازای هر a در F ، xی در F هست به‌طوری که $a+x=0$. به‌جای این x (منحصر به فرد) می‌نویسیم $-a$.

اصول موضوعهٔ الف ۶ـ۱۰، که ذیلا برای عمل $\times$ می‌آیند، شبیه الف ۱ـ۵ برای عمل $+$ هستند.

الف ۶ . هردوعضو a و b در F حاصلضربی مانند $a\times b$ در F دارند. به‌تأسی از رسم متداول، به‌طور کلی، می‌توانیم $a\times b$ را به‌صورت ab خلاصه کنیم.

الف ۷ . $ab=ba$.

الف ۸ . $(ab)c=a(bc)$.

الف ۹ . عضوی مانند ۱ در F هست به‌طوری که، به‌ازای هرعضو a ، $1a=a$.

الف ۱۰. به‌ازای هر a در F به‌غیر از ۰، عضوی مانند y در F هست به طوری که، $ay=1$. به‌جای این y (منحصر به فرد) می‌نویسیم $1/a$.

اصل موضوع نهایی الف ۱۱، دوعمل $+$ ، و $\times$ را به‌هم مربوط می‌سازد.

الف ۱۱. $(a+b)c=ac+bc$.

از اصول موضوعهٔ الف ۱ــ ۱۱ می‌توان قواعد مأنوس اعمال روی اعدادحقیقی را نتیجه گرفت. دراینجا برهان دوتا ازآنها به‌عنوان مثالهایی آورده می‌شود.

(۱) قانون اسقاط. اگر $ab=ac$ و $a\neq 0$ آنگاه $b=c$.

برهان.

$$
\begin{aligned}
b &= \left(\frac{1}{a}a\right)b && \text{(الف ۱۰)}\\
&= \frac{1}{a}(ab) && \text{(الف ۸)}\\
&= \frac{1}{a}(ac) && \text{(بنابرفرض)}\\
&= \left(\frac{1}{a}a\right)c && \text{(الف۸)}\\
&= c
\end{aligned}
$$

(۲) حاصل‌ضرب دو منها به‌اضافه می‌شود. $(-a)(-b)=ab$.

برهان.

(الف ۱۱) $ab+a(-b)=a(b+(-b))=$

$$a\circ=\circ$$

همچنین، $(-a)(-b)+a(-b)=(-a+a)(-b)=\circ$

از الف ۵، $ab=(-a)(-b)$

در یك میدان کلی هیچ نسبت ترتیبی وجود ندارد که به‌وسیلهٔ آن بتوان گفت از هردو عضو آن یکی پیش ازدیگری قرار دارد. چون میدان اعداد حقیقی دارای نسبت ترتیبی (یعنی نسبت $>$) می‌باشد، اینك اصول موضوعهٔ «ت» مربوط به‌یك میدان مرتب را اضافه می‌کنیم:

ت ۱. به‌ازای هر a و b در F، یکی وتنها یکی از

$$a>b,\ a=b,\ b>a$$

درست است.

ت ۲. اگر $a>b$ و $b>c$، آنگاه $a>c$.

ت ۳. اگر $a>b$، آنگاه $a+c>b+c$.

ت ۴. اگر $a>b$ و $c>\circ$، آنگاه $ac>bc$.

از معلوماتمان درباب اعداد منطق درمی‌یابیم که اصول موضوعهٔ الف وت در مورد آنها مناسب هستند، و اینکه آنها تشکیل یك میدان مرتب می‌دهند. ملاحظه کنید که اعداد صحیح تشکیل یك میدان نمی‌دهند، زیرا آنها درالف ۱۰ صدق نمی‌کنند.

برای وضع مجموعه‌ای ازاصول موضوعه برای اعداد حقیقی که متمایز از اصول موضوعهٔ اعداد منطق‌است بایداصلی راکه بیان‌کنندهٔ تمامیت‌است بدان اضافه‌کنیم ومنظور از آن پرکردن رخنه‌های بین اعداد منطق است.

اصل موضوع تمامیت، که ما آن‌را به‌صورتی که منسوب به‌ددکیند است بیان‌خواهیم کرد، ضرورتاً مجردتر وبغرنجتر ازاصول موضوعهٔ الف و ت است. این‌را باید هم‌اکنون بخوانید ودرموقعی که در براهین قضایا از آن استفاده می‌شود مجدداً برای مطالعه به‌آن مراجعه نمائید (مثلا ۸.۱).

اصل موضوع ددکیند فرض‌کنیدکه دستگاه متشکل ازکلیهٔ اعداد حقیقی به‌دودستهٔ L و R تقسیم شده باشد، وهرعضو l در L کوچکتر ازهرعضو r در R باشد (وهیچکدام ازاین دو تهی

نباشد). دراین صورت، عدد تقسیم‌کننده‌ای مانند ξ هست که هرعضوکوچکتر از ξ به L وهرعضو بزرگتر از ξ به R تعلق دارد، خود عدد ξ ممکن است به L یا به R تعلق داشته باشد. اگر ξ در L باشد بزرگترین عضو L است، و اگر در R باشد، کوچکترین عضو R است.

یك چنین تقسیمی از اعداد حقیقی به‌دو دسته را، که مطابق با قاعده‌ای صورت گیرد، یك برش ددکیند می‌نامند.

۱.۷. مجموعه‌های کراندار از اعداد

مجموعه‌های زیر ازاعداد حقیقی را درنظر بگیرید:

(۱) همهٔ اعداد اول.

(۲) همهٔ اعداد صحیح مثبت کوچکتر از ۱۰۰۰.

(۳) همهٔ اعداد صحیح بزرگتر از ۱۰۰۰ که مربع کامل‌اند.

(۴) همهٔ اعداد منطق مانند x به‌طوری که $1 \leqslant x \leqslant 3$.

(۵) همهٔ اعداد حقیقی مانند x به‌طوری که $1 \leqslant x \leqslant 3$.

(۶) همهٔ اعداد حقیقی مانند x به‌طوری که $1 < x < 3$.

توجه کنید که این مجموعه‌ها بجز مجموعهٔ (۲) که تعداد متناهی، یعنی ۹۹۹، عضو دارد نامتناهی هستند. ممکن است مثالهای (۱) و (۳) این تصوررا ایجاد کنند که یك مجموعهٔ نامتناهی باید شامل اعضایی باشدکه اعداد بزرگی هستند، این تصور غلط را مثالهای (۴) تا (۶) تصحیح می‌کنند.

مجموعه‌های (۵) و (۶) ازنوع ساده ومهمی هستند، وهر کدام‌را یك بازه می‌نامند. اولی، که در آن نقاط انتهایی ۱ و۳ اعضای مجموعه هستند، یك بازهٔ‌بسته است، و دومی، که در آن نقاط انتهایی ازمجموعه مستثنی شده‌اند، یك بازهٔ باز است. درغالب اوقات، بازهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ یا $a < x < b$ به‌صورت (a, b) نوشته خواهد شد.

بعضی از نویسندگان ازعلائم متمایزی استفاده می‌کنند که نشان می‌دهد یك بازه، باز یا بسته است، مثلا، (a, b) برای یك بازهٔ باز و $[a, b]$ برای یك بازهٔ بسته. ما چنین قراردادی را دراین کتاب اختیار نخواهیم کرد، ولی خوانندگان درصورتی که مایل باشند می‌توانند چنین کنند.

بازهٔ (a,b) یك‌بازهٔ محدود نامیده می‌شود. مجموعه xهایی که به‌ازای آنها $x \geqslant a$، تشکیل یك بازهٔ نامحدود می‌دهد.

بزرگترین وکوچکترین اعداد یك مجموعه. اگر S مجموعه‌ای شامل تعدادمتناهی اعداد حقیقی متمایز باشد، آشکارا، عضوی ازاین مجموعه که ازهمهٔ اعضای دیگر بزرگتر است وعضوی که ازهمهٔ اعضای دیگر کوچکتر باشد وجود دارد. علایم اختصاری مناسبی برای بزرگترین و کوچکترین عضو، max و min هستند.

مثال. اگر S شامل همهٔ اعداد صحیح زوج سه رقمی باشد $\max S$ عدد ۹۹۸ و $\min S$ عدد ۱۰۰ است.

حال اگر S مجموعه‌ای با تعدادی نامتناهی عضو باشد، ممکن است عضوی از S، که بزرگتر ازهمهٔ اعضای دیگر است، موجود باشد یا نباشد (یا عضوی که ازهمهٔ اعضای دیگر کوچکتر باشد). بامثالهایی این موضوع را شرح می‌دهیم.

(۱) اگر S بازهٔ بستهٔ $(-۱, ۱)$ باشد، یعنی مجموعهٔ همهٔ xهایی که به‌ازای آنها $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$، آنگاه عدد ۱ بزرگتر ازهمهٔ اعداد دیگر S است.

(۲) اگر S بازهٔ باز $(-۱, ۱)$ باشد، یعنی مجموعهٔ همهٔ xهایی که به‌ازای آنها $-۱ < x < ۱$، هیچ عضوی از S وجود ندارد که ازهمهٔ اعضای دیگر بزرگتر باشد. اگر k عضودلخواهی از S باشد آنگاه $۱ > \frac{۱}{۲}(k+۱) > k$ و $\frac{۱}{۲}(k+۱)$ عضوی از S واز k بزرگتر است.

(۳) اگر S مجموعهٔ اعداد صحیحی باشد که مربع کامل‌اند، یعنی، ۱، ۴، ۹، ...، کوچکترین عضوموجود است، ولی بزرگترین عضو وجود ندارد.

تعریفها. فرض کنید S مجموعه‌ای ازاعداد حقیقی باشد. اگرعضوی مانند K موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هرعضو x از S،

$$x \leqslant K,$$

گوییم که S از بالا کراندار است. K یك کران بالای S نامیده می‌شود. به‌طریق مشابه، اگر Kای باشد که، به‌ازای هر x از S،

$$x \geqslant K,$$

آنگاه S از پایین‌کراندار است، و K یك کران پایین S است.

اگر S هم از بالا وهم ازپایین کراندار باشد، آن را صرفاً کراندارگوییم. مجموعه‌ای که کراندار نباشد بی‌کران نامیده می‌شود.

مثالها. (۱) هرمجموعهٔ متناهی مانند S کراندار است، و $\max S$ و $\min S$ را می‌توان به‌عنوان کرانهای بالا وپایین درنظر گرفت.

(۲) مجموعهٔ اعداد

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \dots, \frac{n}{n+۱}, \dots,$$

که در آن n همهٔ مقادیرصحیح مثبت را اختیار می‌کند،کراندار است. عدد $\frac{۱}{۲}$ (یا هرعدد کوچکتر از آن) به‌عنوان یك‌کران پایین به‌کار می‌رود، و ۱ (یاهــر عدد بزرگتـر از آن) به‌عنون یك‌کران بالا. دقیقاً توجه کنید که این مجموعه بزرگترین عضو ندارد.

(۳) مجموعهٔ، $-۱, -\sqrt{۲}, -\sqrt{۳}, \dots, -\sqrt{n}, \dots$ از بالاکرانداراست ولی ازپایین کراندارنیست.

اگر K یك‌کران بالایی برای مجموعه‌ای مانند S باشدآنگاه هرعدد بزرگتر از K نیز یك‌کران بالااست. اگرنظر ما صرفاً بیان‌کراندار بودن یك مجموعه باشد، هرکــران بالایی به‌خوبی دیگری برای این منظورکفایت می‌کند.

اگر بخواهیم دقیقترین بیان ممکن را به‌عمل آوریم ومجموعه را تا سرحـد امکان محصورکنیم، هدف را انتخاب کوچکترین‌کران بالا قرار می‌دهیم، یعنی، عددی مـانند K انتخاب می‌کنیم که یك‌کران بالااست، ولی عضوی ازمجموعهٔ S از $K-\varepsilon$ (که درآن ε عدد مثبت دلخواه بسیارکوچکی است) بزرگتراست. به‌طریق مشابه، باید بزرگترین کران پایین را پیداکنیم.

در بخش ۸.۱ ثابت خواهیم‌کردکه اگر مجموعه‌ای مانند S از بالاکراندار باشد، این امکان همواره وجود داردکه باصرفه‌ترین انتخاب‌را برای یك‌کران بالابه‌عمل‌آوریم.

مثال. درمثال (۲) بالا، ۱ کوچکترین‌کران بالا است. در صورتی‌که n به‌انـدازهٔ کافی بزرگ باشد، عضو $n/(n+۱)$ از هرعضوی تجاوزمی‌کند (مثلا عدد ۰٫۹۹ که از یك کوچکتر است واگر $n > ۹۹$ آنگاه $n/(n+۱)$ ازآن تجاوز می‌کند).

۸.۱ کوچکترین‌کران بالا (سوپرموم)

قضیهٔ بعدی یکی از اساسی‌ترین قضایـای آنالیزاست و درهر بسط منظمی از این موضوع، باید دراوایل قرارگیرد. خواننده باید برمعنی آن تسلط بیابد و درستی آن را به‌وسیلهٔ ساختن‌مثالهایی برای خودش آزمایش‌کند (نظیرآنهایی که درپایان این بخش‌آمده است). اگربرهان‌آن‌راکه برمبنای اصل موضوع ددکینداست، طبیعی وقابل درك‌تشخیص داد چه بهتر، واگرآن را مشکلتر ازاستدلالهایی‌که تاکنون درجبر باآن مواجه بوده است تشخیص داد، نباید دلسرد شود، بلکه لازم است‌که فصول آینده را بخوانند و بعداً بـرای مطالعهٔ این مبانی بازگردد.

قضیهٔ ۸۰۱. اگر S مجموعه‌ای (غیر تهی) از اعداد باشد که از بالا کراندار است آنگاه بین کرانهای بالا یکی کوچکترین است.

برهان. اعداد حقیقی x را، به وسیلهٔ قواعد ذیل، به دو دستهٔ L و R تقسیم کنید:

در صورتی که عضوی مانند s از S موجود باشد به طوری که $x<s$، x را در L قرار دهید.

درصورتی که به‌ازای هرعضوی که از S گرفته شود، $s \leqslant x$، x رادر R قراردهید.

دراین‌صورت هر x یا در L و یا در R است. بعلاوه، نه L و نه R هیچکدام خالی نیستند. زیرا اگر s عضوی از S باشد، آنگاه (مثلا) $x=s-۱$ در L است و و چون S از بالا کراندار است، هرکران بالای آن مانند K، که در مورد آن به‌ازای هر s، $s \leqslant K$، در R است.

هر lی در L کوچکتر ازهر rی در R است. زیرا، sی موجوداست که بزرگتر از l است و این s کوچکتر یا مساوی r است.

با توجه به اصل موضوع ددکیند، عضو تقسیم کننده‌ای مانند ξ هست به‌طوری که به‌ازای هر ε مثبت، $\xi-\varepsilon$ در L است و $\xi+\varepsilon$ در R. دراصل موضوع ددکیند خود ξ ممکن‌است متعلق به L باشد یا متعلق به R. ثابت خواهیم کرد که درکاربرد اخیر، ξ متعلق به R است.

فرض کنیم، درصورت امکان، ξ متعلق به L باشد. دراین‌صورت، عضوی مانند s از S موجود است که $\xi<s$.

عدد $\eta=\frac{۱}{۲}(s+\xi)$ در $\xi<\eta<s$ صدق می‌کند: η در R است. زیرا، بزرگتر ازعضو تقسیم کنندهٔ ξ است. بنابراین، باتوجه به قاعدهٔ تشکیل R، $s \leqslant \eta$. این بانامساوی قبلی ما که $\eta<s$ متناقض است. در نتیجه، ξ به R تعلق دارد.

ثابت کرده‌ایم که ξ در

(۱) به‌ازای هر s در S، $s \leqslant \xi$.

(۲) چون $\xi-\varepsilon$ عدد دلخواهی کوچکتر از ξ است، sی هست که $\xi-\varepsilon<s$، صدق می‌کند.

خاصیت (۱) ثابت می‌کند که ξ یك کران بالای S است، و (۲) ثابت می‌کند که ξ کوچکترین کران بالا است. بدین‌ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

مثالها. (۱) فرض کنیم S مجموعهٔ x هایی از اعداد منطق باشد به طوری که $۰ \leqslant x \leqslant \frac{۱}{۲}$. دراین صورت، $\frac{۱}{۲}$ کوچکترین کران بالای آن است. این‌عدد بزرگترین عضو مجموعهٔ S نیز می‌باشد.

(۲) فرض‌کنیم S مجموعهٔ x هایی ازاعداد منطق باشد به‌طوری‌که $x^2 < 2$. عدد $\sqrt{2}$ کوچکترین کران بالای آن است.

رابطهٔ کوچکترین کرانهای بالایی یك مجموعه بـا آن، به‌قدری اساسی است که سزاوار نامی مختص به خود می‌باشد. بعضی از مؤلفین آن را کران بـالا می‌نامند (متمایز از «یك کران» نـامعین)، و بعضی دیگر به‌صورت اختصار ك. ك. ب. را به‌کار می‌برنـد. اصطلاحی رسا و مختصر، سوپرموم است کـه مختصر آن sup می‌بـاشد. به‌طور خلاصه می‌توان گفت:

تعریف. اگر به ازای مجموعهٔ مفروض از اعداد مـانند S، عددی مـانند K موجود باشد به‌طوری‌که

(۱) به‌ازای هر s در S، $s \leqslant K$،

(۲) به‌ازای هر ε مثبت، sی در S موجود باشدکه به‌ازای آن

$$s > K - \varepsilon$$

در این صورت، می‌نویسیم $K = \sup S$.

قضیهٔ ۸.۱ وجود K را، درصورتی‌که مجموعهٔ S از بالا کراندار باشد، ثابت‌کرد.

با تعویض جهت علامت نامساویهـا، می‌توانیم نظریهٔ مشابهی مربوط به‌کرانهـای پایین و بزرگترین کرانهای پایین اقامه‌کنیم (اینفیموم، مختصر شدهٔ آن inf است).

تعریف. اگر به ازای مجموعهٔ مفروضی از اعداد مانند S، عددی مانند k موجود باشدکه

(۱) به‌ازای هر s در S، $s \geqslant k$،

(۲) به‌ازای هر ε مثبت، sی در S موجود باشدکه به‌ازای آن

$$s < k + \varepsilon,$$

دراین‌صورت، می‌نویسیم $k = \inf S$.

می‌توان ثـابت‌کردکه هر مجموعهٔ Sی که ازپایین‌کراندار بـاشد دارای اینفیموم است.

تمرین ۱ (د)

تذکر. روابط نامساویهـای تمرینات ۵-۸ مکرراً در آنالیز مـورد استفـاده قرار می‌گیرند و ارزش این را دارندکه بـا آنهـا آشنا شویم. این تمرینات ممکن است قبلا به عنوان نتایجی در جبر برای خوانندگان معلوم باشند. برهانهای آنهـا در صفحهٔ ۲۱۲ داده شده است.

۱ـ اگر a و b اعدادی باشند و به‌ازای هر عدد مثبت n

$$a<b+\frac{1}{n}$$

ثابت کنید که $a \leqslant b$.

اگر به جای $1/n$ عدد ε را بنویسیم، که در آن، ε می‌تواند هر مقدار بزرگتر از ۰ را اختیار کند، آنگاه نتیجه بازهم بر قرار است.

۲ـ فرض کنیم A و B دو مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی باشند و فرض کنیم $A \cup B$ معرف مجموعهٔ همهٔ اعدادی که در A یا در B (یا درهردو) هستند، باشد. ثابت کنید که

$$\sup(A \cup B)=\max(\sup A, \sup B)$$

آیا نتیجهٔ متناظری برای $A \cap B$، که مجموعهٔ اعدادی است که در هردوی A و B قرار دارند، وجود دارد؟

۳ـ فرض کنیم A و B مجموعه‌هایی کراندارازاعداد حقیقی باشند وفرض کنیم C مجموعهٔ همهٔ اعدادی مانند c باشد، که در آن $c=a+b$ و a عضو دلخواهی از A و b عضو دلخواهی از B است. ثابت کنید که

$$\sup C=\sup A+\sup B$$

آیا نتیجهٔ متناظری برای مجموعهٔ D از اعداد d که به‌صورت $d=ab$ است، وجود دارد؟

۴ـ مطلوب است سوپرموم واینفیموم مجموعهٔ اعدادی به‌صورت $2^{-m}+3^{-n}$، که در آن، m و n همهٔ مقادیر صحیح مثبت را اختیار می‌کنند.

۵ـ (نامساوی واسطه های هندسی و حسابی) اگر $a_1, a_2, \dots, a_n$ مثبت باشند و

$$A=\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}, \ G=(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n}$$

آنگاه $A \geqslant G$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که همهٔ a_rها مساوی باشند.

۶ـ (نامساوی کوشی) به ازای هر دو مجموعه از اعداد حقیقی $a_1, a_2, \dots, a_n$ و $b_1, b_2, \dots, b_n$

$$(\Sigma a_r b_r)^2 \leqslant (\Sigma a_r^2)(\Sigma b_r^2)$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که اعداد ثابتی مانند k و l موجود باشند به‌طوری که به‌ازای همهٔ rها، $ka_r=lb_r$ (یعنی، درصورتی که a_r و b_r متناسب باشند).

۷ـ اگر $a>1$ و r و s اعداد منطقی با $r>s>0$ باشند، آنگاه

$$\frac{a^r-1}{r}>\frac{a^s-1}{s}$$

۸ـ اگر $a<1$ و r و s همان اعداد تمرین ۷ باشند، آنگاه

$$\frac{1-a^r}{r}<\frac{1-a^s}{s}$$

۱.۹. اعداد مختلط

دستگاه اعداد حقیقی برای پیشبرد تعداد زیادی از قضایای آنالیز ریاضی به اندازهٔ کافی جامع است. ممکن است سؤال شود که با دخالت ندادن اعدادی غیر از اعداد حقیقی در هر مرحله‌ای چه چیزی را ازدست می‌دهیم. برای پاسخ بدین سؤال معمولاً چنین خاطر نشان می‌شود که بعضی از معادلات درجهٔ دوم، که ساده‌ترین آن

$$x^2+1=0$$

است، در دستگاه اعداد حقیقی ریشه ندارند. این یك نقصان است تا یك فاجعه. درحقیقت باعث خوشنودی است که معرفی اعداد مختلط ما را به اثبات این قضیه که هر معادلهٔ جبری دارای یك ریشه است قادر می‌سازد. ولی مورد متقاعدکننده‌تردیگری برای پذیرش اعداد مختلط بدین لحاظ است که این اعداد ارتباط نزدیك بین بعضی از رایج ترین توابع آنالیز، تابع نمایی از یك طرف و تابع مثلثاتی ــ سینوس و کسینوس ــ از طرف دیگر را معلوم می‌کنند. اگر متغیرها حقیقی باشند این توابع مطلقاً بی‌ارتباط هستند. بالاخره، مشمول کردن اعداد مختلط درآنالیز معمولی، به خاطر زیبایی و عمومیت بعضی از قضایای اخیر می‌باشد که بر مبنای اعداد مختلط قرار داده شده‌اند (که خارج از قلمرو این‌درس‌است).

حال، روشی را برای معرفی‌کردن اعداد مختلط درآنالیز به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم. میدان اعداد حقیقی را می‌توانیم با الحاق یك عنصر یا عناصر جدیدتری که با اعضای اصلی میدان به‌وسیلهٔ اعمال $+$ و $\times$، مطابق با اصول موضوعه الف ترکیب می‌شوند گسترش دهیم. عنصر جدیدی که برای به‌دست‌آوردن اعداد مختلط باید به میدان اعدادحقیقی‌ملحق شود، i است که به‌موجب تعریف در $i^2+1=0$ صدق می‌کند. اعداد $a+bi$، که در آن a و b حقیقی هستند، اعضای میدان گسترش‌یافته هستند ومطابق بااصول موضوعهٔ جبری الف ۱ـ۱۱ جمع و ضرب می‌شوند. رفتار عدد $a+0i$ از هرحیث شبیه عدد حقیقی a است.

هیچیك از اصول موضوعهٔ نوع ت (ترتیب)، درمیدان گسترش‌یافته صدق نمی‌کند. امکان ندارد که اعداد مختلط را برحسب بزرگی‌آنها، به‌همان طریقی که اعداد حقیقی را

می‌توان مرتب نمود، مرتب کرد.

تمرین ۱ (ه)

۱ـ بر اساس اصول موضوعه، ثابت کنید که اگر a و b و c اعداد حقیقی باشند و $a+bi=c+di$ آنگاه $a=c$ و $b=d$.

۲ـ معکوس (الف ۱۰) عدد مختلط $a+bi$ عدد $(a-bi)/(a^2+b^2)$ است به شرط آنکه a و b هر دو صفر نباشند.

۳ـ ثابت کنید که اگر حاصلضرب دو عدد مختلط صفر شود، حداقل یکی از آنها صفر است.

۴ـ از فرمولهای جمع کسینوس و سینوس نتیجه بگیرید که

$$(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)=\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)$$

۵ـ به وسیلهٔ استقراء، یا طریقهٔ دیگری، قضیه دموآور را ثابت کنید

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

۶ـ قضیهٔ دموآور را وقتی که اندیس آن (i) یك عدد صحیح منفی است، (ii) عدد منطق p/q است، تعمیم دهید.

۱۰.۱. هنگ و فاز

علامت معمول برای یك عدد مختلط متغیر، $z=x+yi$ است که در آن، x و y حقیقی هستند. در بخش ۲.۱ متذکر شدیم که اشکال هندسی اغلب به آنالیز کمك می‌کنند. نمایش هندسی اعداد مختلط به ویژه راهنمایی کننده است. با اختیار صفحه‌ای با یك جفت محور متعامد Ox و Oy، عدد مختلط $z=x+yi$ را به وسیلهٔ نقطه‌ای که مختصات آن (x, y) است نمایش می‌دهیم. عدد x را جزء حقیقی و y را جزء موهومی z می‌نامند، و به صورت

$$x=\operatorname{re} z,\qquad y=\operatorname{im} z$$

می‌نویسند. مزیت اصلی این نمایش آن است که مجموع دو عدد مختلط z_1 و z_2 متناظر نقطهٔ P است که در آن بردار OP مجموع بردارهایی از O تا نقاطی با نمایش z_1 و z_2 است.

اگر $z=x+yi$، آنگاه عدد مثبت $r=\sqrt{x^2+y^2}$ هنگ z نامیده شده و به صورت $|z|$ نوشته می‌شود. زاویهٔ θ، به‌طوری که $\cos\theta=x/r$ و $\sin\theta=y/r$، $r\neq 0$، فاز

z، $\operatorname{ph} z$، است و بعضی از مؤلفین آن را دامنه یا شناسه می‌نامند. زاویهٔ θ نامعین است، بدین معنی که هرمضربی از 2π را می‌توان به آن افزود یا از آن کم کرد. اغلب داشتن یك مقدار اصلی برای فاز مناسب است، و بنا بر تعریف این، عبارت از آن مقدار θ است که $-\pi<\theta\leqslant\pi$. در نتیجه،

$$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

اعداد $x+yi$ و $x-yi$ مزدوج نامیده شده و با z و $\bar{z}$ نشان داده می‌شوند. ملاحظه کنید که مجموع و حاصلضرب دو عدد مختلط مزدوج، حقیقی هستند و نیز

$$z\bar{z}=|z|^2$$

قضیه ۱۰۰۱. (هنگ حاصلضرب و مجموع)

اگر $z=x+yi$ و $w=u+vi$ آنگاه

$$|zw|=|z|\cdot|w| \quad (1)$$

$$|z+w|\leqslant|z|+|w| \quad (2)$$

وعلامت «$=$» فقط وفقط وقتی بر قراراست که فاز z و w یکسان باشند (یا اختلافی به‌اندازهٔ مضربی از 2π داشته باشند).

ملاحظه کنید که همتای هندسی قضیهٔ مجموع آن است که هر ضلع مثلث کوچکتر از مجموع دو ضلع دیگر است. البته، باید یك برهان تحلیلی برای آن ارائه دهیم.

برهان. (۱) برای اثبات حکم مربوط به حاصلضرب zw، داریم

$$|zw|^2=(zw)(\overline{zw})=(z\bar{z})(w\bar{w})=|z|^2|w|^2$$

چون هنگها مثبت‌اند، با گرفتن جذر نتیجه به‌دست می‌آید.

$$|z+w|^2=(z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \quad (2)$$

$$=z\bar{z}+(z\bar{w}+w\bar{z})+w\bar{w}$$

$$=|z|^2+2\operatorname{re}(z\bar{w})+|w|^2$$

چون

$$-|zw|\leqslant\operatorname{re}(z\bar{w})\leqslant|zw|$$

و $\operatorname{re}(z\bar{w})=|zw|$ فقط و فقط وقتی که $z\bar{w}$ حقیقی و مثبت باشد، یعنی z و w دارای فاز یکسان باشند. بنابراین $|z+w|\leqslant|z|+|w|$، و علامت «$=$» فقط و فقط وقتی برقرار است که z و w دارای فاز یکسان باشند. ▌

آیا توسیعهای دیگری از دستگاه اعداد ممکن است؟ شاید هم خواننده سؤال کند که

آیا توسعه دادن مفهوم عدد فراتر از عـدد مختلط ، مفید است؟ چون فضایی که مـا در آن حرکت می کنیم سه بعد دارد این وسوسه در ما پیدا می‌شود که گمان کنیم توصیف ریاضی پدیده‌های طبیعی به خوبی می‌تواند از اعدادی به‌صورت $x+iy+jz$ استفاده نماید که در آن، x و y و z مختصات دکارتی حقیقی است و j عنصری است که مـانند i می‌تواند به میدان اعداد حقیقی منضم شود. نتیجه این می‌شود که این توسیعها اگرچه امکان‌پذیرند، ولی سودمند نیستند. بهایی که به علت ازدیاد پیچیدگی و از بین رفتن خاصیتهـای مطلوب باید پرداخت بسیارسنگین است. قبلا ، مرحله عبور از اعداد حقیقی به اعـداد مختلط ، به بهـای فدا نمودن نسبت ترتیبی پرداخت شده است. در حقیقت ، مرحله بعدی مـا را به‌دستگاه کواترنیونها به‌صورت $x+yi+zj+wk$ هدایت‌می کند،این‌اعدادخاصیتهای جالبی دارند، اما، دارای عیب عمدهٔ عدم پیروی از قانون تعویضپذیری ضرب، $ab=ba$ هستند.

تمرین ۱ (۹)

۱ ــ باانتخاب مقدارساده‌ای برای z (مانند $۲+i$)، نقاط معرف $z+۱$، z، $۲z$، iz، $۱/z$، $\bar{z}$، $z+\bar{z}$، $z\bar{z}$ را در یك نمودار مشخص کنید.

۲ ــ مکانهای هندسی

$$|z-۱|=k|z+۱|+l$$

را به ازای زوج مقادیر

$$(k,l)=(۰,۲),(۱,۰),(۲,۰),(۱,۱),(۱,۳)$$

چه هستند؟ هر یك از مکانها چه رابطه‌ای با نقاط $z=۱$ و $z=-۱$ دارند؟

ــ این معادلات را حل کنید:

$$z^۴=۲۸+۹۶i \qquad (i)$$

$$z^۶-۳z^۳+۲=۰ \qquad (ii)$$

$$۲z^۳+\bar{z}^۳=۳ \qquad (iii)$$

۴ ــ ثابت کنید که ریشه‌های

$$z^۳+۳pz^۲+۳qz+r=۰$$

فقط و فقط وقتی تشکیل یك مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند که $p^۲=q$.

۵ ــ ثابت کنید که اگر به‌ازای $۱\leqslant r\leqslant n$، $|a_r|\leqslant ۲$، آنگاه هر ریشهٔ

$$1+a_1z+\dots+a_nz^n=0$$

دارای هنگ بزرگتر از $\frac{1}{3}$ است.

۶ ـ اگر a و c حقیقی باشند، معادلهٔ زیر چه نوع مکان هندسی است؟

$$az\bar{z}+b\bar{z}+bz+c=0$$

۷ ـ بر روی اضلاع مثلثی مانند $Z_1Z_2Z_3$ مثلثهای متساوی‌الساقین $Z_2Z_3W_1$، $Z_3Z_1W_2$، $Z_1Z_2W_3$ را خارج از این مثلث می‌سازیم. زوایای W_1، W_2، W_3 هریك عدد $2\pi/3$ است. ثابت کنید که مثلث $W_1W_2W_3$ متساوی‌الاضلاع است.

۸ ـ فرض کنیم $a\neq 0$ و $a\bar{a}\neq c\bar{c}$ ثابت کنید که یك ریشهٔ

$$az^2+bz+c=0$$

فقط و فقط وقتی دارای هنگ ۱ است که

$$|\bar{a}b-\bar{b}c|=|a\bar{a}-c\bar{c}|$$

۹ ـ اگر v یك ریشهٔ مختلط $x^7-1=0$ باشد، شش ریشهٔ دیگر آن را برحسب v بیان کنید. معادلهٔ درجه دومی با ضرایب حقیقی و با یك ریشهٔ $v+v^2+v^4$ پیدا کنید. ثابت کنید که

$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2},$$

$$-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}\sqrt{7}$$

در تمرینهای ۱۰–۱۳، $P(z)$ یك چند جمله‌ای برحسب z به‌صورت

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\dots+a_n$$

است، که در آن ضرایب a_0، a_1، ...، a_n مختلط‌اند (مگر آنکه حقیقی بودن آنها تأکید شوند).

۱۰ ـ ثابت کنید که $P(z)=A+Bi$، که در آن A و B چند جمله‌ایهایی برحسب x و y با ضرایب حقیقی هستند.

۱۱ ـ ثابت کنید که تابعی منطق مانند $R(z)$، که به‌شکل خارج قسمت دو چندجمله‌ای تعریف می‌شود، می‌تواند به‌صورت $X+Yi$ تبدیل یابد که در آن، X و Y توابع منطقی از x و y با ضرایب حقیقی‌اند.

۱۲ــ اگر ضرایب قوای z در $R(z)$ حقیقی باشند و

$$R(x+yi)=X+Yi$$

ثابت کنید که

$$R(x-yi)=X-Yi$$

۱۳ــ اگر ضرایب a_0، ...، a_n در $P(z)$ حقیقی باشند، ثابت کنید که ریشه‌های معادلهٔ $P(z)=0$ حقیقی یا متشکل از زوجهای مزدوج است.

۲

دنباله‌ها

۱.۲. دنباله‌ها

در بخشهای۲ـ۴ ما فقط با اعداد حقیقی کارمی کنیم. اعداد مختلط در فصل ۵ مورد احتیاج خواهند بود. یك دنباله مجموعه‌ای از اعداد است که دارای ترتیب باشند. به‌این معنی که اولین عددی موجود است، دومین عددی موجود است، وغیره. اگردنباله بی‌پایان باشد، یا به‌عبارت دیگر، عدد طبیعی n هرچه گرفته شود، n مین عدد متناظر آن در دنباله موجود باشد، دراین صورت یك دنبالهٔ نامتناهی داریم. یك‌دنباله درحالات ساده به‌وسیلهٔ فرمولی صریح که n مین عدد را برحسب n مشخص می کند، تعریف می‌شود. عدد n م یك دنباله‌را برای راحتی با s_n (یا t_n یا u_n وغیره) نشان می‌دهند.

مثالها.

(۱) $s_n = ۱/n$. این دنباله عبارت است از

$$۱,\ \frac{۱}{۲},\ \frac{۱}{۳},\ \dots$$

(۲) $s_n = (-۱)^n/\sqrt{n}$.

(۳) $s_n = n^۲$.

دنباله‌ها ساده‌ترین مقدمه را برای مفهوم حد فراهم می‌نمایند که، همچنان که گفتیم، برای آنالیز ریاضی جنبهٔ بنیادی دارند. مثالهای خاصی راجهت آماده‌کردن ذهن شما برای ارائه صوری مطلب، که متعاقباً خواهدآمد، مورد بحث قرارمی‌دهیم.

۲.۲. دنباله‌های پوچ

درمثال (۱)، عضو (یا جملهٔ) nم دنباله، یعنی $n/۱$، وقتی که n بزرگ می‌شود، کوچکتر می‌گردد، و با به‌حدکافی بزرگ اختیار نمودن n می‌توانیم s_n را هراندازه که بخواهیم به‌صفر نزدیک کنیم. به‌عنوان یك مثال عددی، به‌ازای هرعدد صحیح n بزرگتر از $۱۰^۴$، s_n کوچکتراز ۰/۰۰۰۱ می‌شود. یك چنین دنباله‌ای را دنبالهٔ پوچ می‌نامند. مثال(۲) دنبالهٔ پوچ دیگری‌را نشان می‌دهد، اعداد این‌دنباله وقتی ازجملهٔ n به‌جملهٔ $n+۱$ می‌رویم‌مانند اعداد (۱)کاهش پیدا نمی‌کنند، ولی درشرط به‌طور دلخواه نزدیك شدن به‌صفر صدق می‌کنند. حال برای بیان دقیق مطلب آماده‌ایم.

تعریف. s_n یك دنبالهٔ پوچ است هرگاه، به هر عدد مثبت ε، عدد صحیحی مانند N متناظرشود، به طوری که

به‌ازای هر n بزرگتر از N، $|s_n| < \varepsilon$.

باید این تعریف را به‌دقت مطالعه کرده و باطرح مثالهایی آن را امتحان کنید. توجه کنید که معیار دنبالهٔ پوچ بودن را می‌توان بانوشتن مقادیر ε و N دردوستون نمایش داد. درمثال توضیحی (۲) بالا، اقلام ستونها ممکن است چنین باشند

ε	N
۰/۰۰۱	$۱۰^۶$
۰/۰۰۰۰۱	$۱۰^{۱۰}$

و در حقیقت می‌توان این قاعده را بیان کرد که N را می‌توان هر عدد صحیح ناکمتر از $\frac{۱}{\varepsilon^۲}$ گرفت. اختیار نمودن کوچکترین مقدار ممکن N الزامی نیست. نماد ε (و گاهی δ یا η) علامت جا افتاده‌ای برای یك عدد مثبت کوچك است. درآتیه، بدون ذکر صریح، ε مقدار مثبتی فرض خواهد شد.

درمورد هریك ازدنباله‌های زیر باید معین کنید که دنبالهٔ پوچ هستند یا نه،

(۴) $\sin n\pi$

(۵) $\sin \frac{۱}{۲} n\pi$

(۶) $n^{-۱} \sin \frac{۱}{۴} n\pi$

(۷) $\frac{n}{(n^۲+۱)}$

نکات زیر باید مورد توجه قرار گیرند.

الف) تغییر مقادیر s_n برای تعداد متناهی از nها درمسئلهٔ دنبالهٔ پوچ یانبودن تأثیری ندارد. برای مثال، فرض کنیم $s_n = ۱/(n-۱۰)$. دراین صورت s_n برای $n = ۱۰$ تعریف نشده و عمل طبیعی آن است که دنباله را از $n = ۱۱$ شروع کنیم. این، یك دنبالهٔ پوچ است.

با این‌حال، از تغییر مقادیر s_n به‌ازای تعداد نامتناهی از nها، دنباله‌ای اساساً متفاوت حاصل می‌شود. برای مثال فرض کنیم که برای تمام مقادیر n بجز قوای ۲، $s_n = ۱/n$، و برای $n = ۲, ۴, ۸, ۱۶, \ldots$، $s_n = ۱$. دراین صورت s_n یك دنبالهٔ پوچ *نیست*.

ب) یك دنبالهٔ پوچ ممکن است مقادیر صفر را اختیار کند یا نکند. دو حالت ممکن به‌وسیلهٔ دومثال قبل نشان داده شده‌اند.

(۱) $s_n = ۱/n$. هیچ یك ازاعداد s_n مساوی صفر نیستند.

(۶) $s_n = n^{-۱} \sin \frac{۱}{۴} n\pi$. $s_n = ۰$ وقتی که n مضرب ۴ است.

۳.۲. دنباله‌ای که به‌یك حد میل می‌کند

یك دنبالهٔ پوچ، دنباله‌ای است که جملات آن به‌صفر میل می‌کنند. به‌آسانی این تعریف را می‌توان برای دنباله‌ای که جملات آن به‌یك عدد میل‌می‌کنند تطبیق داد.

مثال. اعداد دنبالهٔ $\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \ldots n/(n+۱), \ldots$ به‌مقدار ۱ میل می‌کنند.

تعریف. گوییم دنبالهٔ s_n به‌حد s میل می‌کند اگر به‌ازای هرعدد مثبت ε، Nی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر n که $n > N$، آنگاه $|s_n - s| < \varepsilon$. دراین صورت می‌نویسیم

$$\lim s_n = s$$

تبصره‌ها

(۱) روشن‌است که، $\lim s_n = s$ فقط وفقط وقتی که $s_n - s$ یك دنبالهٔ پوچ باشد.

(۲) نامساوی $|s_n - s| < \varepsilon$ معادل دو نامساوی

$$s-\varepsilon < s_n < s+\varepsilon$$

است. اغلب، این صورت بسط یافته روشنتراست.

(۳) علامت کوتاه ورسایی، پیکان، وجود دارد

$$s_n \longrightarrow s$$

که به‌معنی $\lim s_n = s$ است.

(۴) نمایش علامتی دیگری وجود دارد که موجب صرفه‌جویی در نوشتن می‌شود، و هروقت درمعنی‌آن تسلط پیدا کردید (البته نه‌قبل ازآن) می‌توانید به‌کار ببرید. تعریف بالا ممکن است چنین نوشته شود، $s_n \to s$ هرگاه،

$$\varepsilon > \circ \,;\, \exists N.\ (\,|\,s_n - s\,| < \varepsilon \ \text{،}\ n > N \ \text{(به‌ازای هر)}$$

دراین نمادگذاری، هر چیزی که مفروض باشد قبل ازنقطه ویرگول نوشته می‌شود، که دراینجا، عبارت از «ε بزرگتر از ۰ است». نماد $\exists$ (عکس E) همراه بانقطهٔ بعدازآن به‌این معنی است که:

« ...ی هست (یا وجود دارد) به‌طوری‌که ...)». دراینجا «Nی هست به‌طوری که به‌ازای هر n که $n > N$ ، $|\,s_n - s\,| < \varepsilon$ ».

دراین کتاب این نوع نمایش علامتی گاهگاهی، ولی نه‌درهرحالت ممکن، به‌کار برده می‌شود. اغلب دانشجویان رشتهٔ ریاضی به‌این تجربه دست یافته‌اند که اگر اختصار در درجهٔ اول توجه نباشد و در عبارات همراه با نمادها توضیح لفظی هم استفاده شود درك استدلالها ساده‌ترخواهند بود.

(۵) ممکن است که نمایش تصویری را درروشن شدن مفهوم حد مفید بیابید. نسبت به‌محورهای Ox و Oy، یك دنباله را می‌توان به‌وسیلهٔ مجموعه‌ای ازنقاط تنها نمایش داد که مختص x آنها اعداد ... ,۳ ,۲ ,۱ بوده و مختص y نقطهٔ nم دنباله یعنی، s_n است. خط $y = s$ وبه‌موازات‌آن دوخط $y = s - \varepsilon$ و $y = s + \varepsilon$ را رسم کنید، قسمتی از صفحه بین این دوخط موازی نواری به‌عرض 2ε می‌سازد.

دراین صورت، عبارت $s_n \to s$ به‌این معنی است که، ε هراندازه کوچك باشد، یك خط‌قائم مانند $x = N$ وجود دارد به‌طوری‌که همهٔ نقاطی‌ازدنباله که درسمت راست آن خط واقع‌اند درداخل نواربین $y = s - \varepsilon$ و $y = s + \varepsilon$ قرار می‌گیرند.

تمرین ۲ (الف)

۱ــ دنباله‌ای مانند s_n تعریف کنید که درشرایط زیر صدق کند:

(الف) به‌ازای هر n، $\circ < s_n < 1$.

(ب) هیچ nی نباشد که $s_n = \frac{1}{2}$.

(ج) $s_n \to \frac{1}{2}$ درصورتی که $n \to \infty$.

برای هریك از دنباله‌هایی که در ۲ــ۶ تعریف می‌شوند، میل نمودن یا ننمودن آنها

را به‌یك حدمشخص کنید. اگر دنباله‌ای دارای حد باشد، یك جدول $(\varepsilon\ ,\ N)$، مانند بخش ۲.۲، با اختیار کردن $\varepsilon = ۱۰^{-۳}$ و یا هرمقدار دیگری که در نظر دارید، تشکیل دهید.

۲- $s_n = \dfrac{۳n}{n+۳}$

۳- $s_n = \left(\dfrac{۳n}{n+۳}\right)^۲$

۴- وقتی n اول است $s_n = ۱/n$ ، وقتی n اول نیست $s_n = ۰$.

۵- $s_n = \sqrt{n+۱} - \sqrt{n}$.

۶- $s_n = ۱/\phi(n)$، که در آن، $\phi(n)$ تعداد مقسوم علیه‌های مثبت n است (با احتساب ۱ و n به‌عنوان مقسوم علیه).

۷- ثابت کنید که اگر $s_n \to ۰$ و به‌ازای هر n، $|t_n| < |s_n|$، آنگاه $t_n \to ۰$.

۸- ثابت کنید (همچنانکه در بخش ۳.۲ به‌طور ضمنی فرض شده) یك دنباله نمی‌تواند به‌بیش از یك حد میل کند ، یعنی، ثابت کنید که اگر $s_n \to s$ و $s_n \to s'$ آنگاه $s = s'$.

۴.۲ . دنباله‌هایی که به‌بی‌نهایت میل می‌کنند

ما به‌بررسی اجمالی رفتار دنباله‌هایی ازقبیل

$$۱,\ \sqrt{۲},\ \sqrt{۳},\ \cdots,\ \sqrt{n},\ \cdots,$$

که اعدادآن برای مقادیر بزرگ n ازهرعدد مفروضی تجاوز می‌کنند، احتیاج داریم.

تعریف. گوییم دنبالهٔ s_n به‌بی‌نهایت میل‌می‌کند، اگربه‌ازای هر A (هراندازه بزرگ) N ی باشد به‌طوری‌که به‌ازای هر n که $n > N$ ، $s_n > A$.

علامت پیکان را به‌کاربرده ومی‌نویسیم

$$s_n \to \infty$$

باید برتفاوت بین $s_n \to s$ و $s_n \to \infty$ تأکید کنیم. دراولی، s یك عدد است و درصورت تمایل می‌توانیم نزدیکی s_n به s را، باتوجه به‌کوچکی $s - s_n$ اندازه‌بگیریم. بی‌نهایت (∞) یك عدد نیست و کلمهٔ «بی‌نهایت» تابه‌حال دراین کتاب دارای معنی نبوده، جزدرمواردی‌که بعد ازعبارت «میل می‌کند» آمده باشد. هرگونه تلاشی درساختن

ترکیباتی از ∞، مثل $s_n - \infty$، بی‌معنی است. به خواننده یادآوری می‌شود که صفت نامتناهی، که در بخش ۱.۲ به‌کار رفت، به‌معنی «بی‌پایان» است و نه برای سنجش بزرگی یك عدد.

عبارت «$s_n \to \infty$» را شرح داده‌ایم. عبارت «n به‌بی‌نهایت میل می‌کند» و نیز بیان نمادی «$n \to \infty$» متناظر آن، رشد بی‌پایان n را که دروضع کلیهٔ تعاریف درمدنظر بوده است بیان می‌کند، و به‌نوبهٔ خود شامل موارد ذیل نیز هست

$$s_n \to 0, \; s_n \to s, \; s_n \to \infty$$

بعد ازهمهٔ اینها، احتیاجی نیست که از بی‌معنی بودن «$n = \infty$» آگاهتان کنیم.

بعضی وقتها علامت صریحتر

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s$$

به‌جای $\lim s_n = s$، به‌کار می‌رود. برای نشان دادن سودمندی آن، تمرین ۲(د)، ۱۰ را ببینید، که در آن، دومتغیر n و x موجود است.

مطالعهٔ سایر حالات ممکن در رفتار دنبالهٔ s_n را وقتی‌که $n \to \infty$ ادامه می‌دهیم. فرض کنیم که

$$s_n = 1000 - 2^n$$

دراینجا همین‌که n بزرگتر از ۹ باشد s_n منفی است، اگر n به‌حد کافی بزرگ باشد، s_n به‌طورعددی ازهرعدد مفروضی بزرگتر (ازنظر جبری کوچکتر) می‌شود. تعریف ذیل مناسب است.

تعریف. $s_n \to -\infty$ وقتی‌که $n \to \infty$، هرگاه

$$(\text{به‌ازای هر } A; \exists N \cdot (s_n < -A \text{ ، } n > N)$$

درمواردی‌که تأکید برتمایز بین $s_n \to \infty$ و $s_n \to -\infty$ لازم است، اولی را ممکن است به‌صورت $s_n \to +\infty$ نوشت.

دنباله‌هایی مثل $s_n = (-1)^n$ یا $s_n = (-1)^n n$ به‌یك حد یا به $+\infty$ یا به $-\infty$ میل نمی‌کنند. بهتر است (البته، حیاتی نیست) که نامی برای چنین دنباله‌هایی داشته باشیم.

تعریف. اگر s_n به $+\infty$ یا به $-\infty$ یا به‌حدی میل نکند، گوییم s_n نوسان می‌کند (یایك دنبالهٔ نوسانی است). اگر s_n نوسان‌کند وکراندار باشد، در این صورت، s_n نوسانی

کراندار است. اگر s_n نوسان کند ولی کراندار نباشد، s_n نوسانی بی‌کران است.

توجه. $s_n = (-1)^n/n$ یك دنبالهٔ نوسانی نیست.

تمرین ۲ (ب)

برای هر یك از دنباله‌هایی که در ۱ـ۶ تعریف شده‌اند، بیان کنید که آیا به‌حدی (متناهی یا نامتناهی) میل می‌کنند یا نوسان می‌کنند.

۱ـ $(-1)^n$، $100n^{-1}+(-1)^n$، $100+(-1)^n n^{-1}$، $100+(-1)^n n$

۲ـ $a+b(-1)^n$ که در آن a و b اعداد ثابتی هستند.

۳ـ $n^2\{1+(-1)^n\}$، $n^2+(-1)^n n$، $an^2+b(-1)^n n$

۴ـ باقیماندهٔ تقسیم n بر ۳.

۵ـ $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

۶ـ $(1+2+3+\dots+n)/n^2$، $\{1-2+3-4+\dots-(-1)^n n\}/n$

۷ـ مقدار N را چنان بیابید که اگر $n > N$ آنگاه $n^2-4n > 10^6$.

در هر یك از تمرینات ۸ـ۱۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های مذکور را ثابت کنید. بدین معنی که اگر گزاره درست باشد، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقضی بیاورید، یعنی، مثالی که درمفروضات صدق کند ولی درحکم صدق نکند.

۸ـ اگر $s_{n+1}-s_n$ نوسانی کراندار باشد، s_n نوسان می‌کند.

۹ـ اگر $s_{n+1}-s_n$ نوسانی بی‌کران باشد، s_n نوسانی بی‌کران است.

۱۰ـ اگر به‌ازای هر K مفروض (هر اندازه بزرگ باشد) Nی باشد که به‌ازای آن $s_N > K$ آنگاه $s_n \to \infty$.

۵.۲ مجموع وحاصلضرب دنباله‌ها

قضایای این قسمت درپرسشهایی نظیر پرسشهای زیر، استعمال روزمره دارند.

مثال. رفتاردنبالهٔ

$$\frac{n^2+4n-3}{2n^2+3n+5}$$

وقتی $n \to \infty$، چگونه است؟

استنباط شهودی ما این است که مضارب n وجملات ثابت برای مقادیر بزرگ n در مقایسه با جملات برحسب $n^{۲}$ ناچیزهستند. لذا، دنباله دارای همان حدی است که $n^{۲}/۲n^{۲}$ دارد، یعنی، $\frac{۱}{۲}$. بررسی نسبتاً بهتری را باید بانوشتن

$$s_n = \frac{۱+(۴/n)-(۳/n^{۲})}{۲+(۳/n)+(۵/n^{۲})}$$

شروع کرد.

اگرفرض کنیم که حد مجموع دو یاچند دنباله برابر مجموع حدود تك‌تك آنهاباشد، دراین‌صورت می‌توان گفت:

$$\lim\left(۱+\frac{۴}{n}-\frac{۳}{n^{۲}}\right)=۱+\lim\frac{۴}{n}-\lim\frac{۳}{n^{۲}}=۱+۰+۰=۱$$

و به‌طریق مشابه، حد مخرج کسر s_n برابر ۲ است.

بعلاوه، اگرفرض کنیم حد خارج قسمت دو دنباله برابر خارج قسمت حدود آنها است، خواهیم داشت

$$\lim s_n = \frac{۱}{۲}$$

اینك به‌بیان و اثبات دقیق قضایایی، از قبیل آنچه‌که در مثال فوق به‌کار رفت، می‌پردازیم.

۱.۵.۲. قضیه. اگر s_n و t_n دنباله‌های پوچ باشند، s_n+t_n نیز یك دنبالهٔ پوچ است.

صحت این قضیه آشکار است. برای تحلیل صحت آن برای خودمان، گوییم که اگر n به‌حد کافی بزرگ اختیار شود، می‌توان s_n وهمچنین t_n را به‌قدر کافی کوچك نمود، و این کوچکی s_n+t_n را نتیجه می‌دهد. لازم است که این را بااستدلال دقیقی بیان کنیم.

برهان. برای ε مفروضی می‌توان $N_۱$ی چنان یافت که به‌ازای هر n که $n>N_۱$،

$$-\varepsilon < s_n < \varepsilon$$

همچنین می‌توان $N_۲$ را طوری پیداکرد که اگر $n>N_۲$ آنگاه

$$-\varepsilon < t_n < \varepsilon$$

اگر N ماکزیموم $N_۱$ و $N_۲$ باشد، یعنی به‌مفهوم بخش ۷.۱، $N=\max(N_۱, N_۲)$ دراین صورت، برای $n>N$، هر دو نامساوی بالا برقرار است و باجمع‌کردن آنها،

خواهیم داشت

$$-۲\varepsilon < s_n + t_n < ۲\varepsilon$$

(حال مشاهده کنید که، وقتی ε بتواند هرمقدارمثبتی‌را اختیار کند، ۲ε نیزعیناً مثلε می‌تواند به‌عنوان «مقدار مثبتی، هر اندازه کوچك» به‌کاررود). بنابراین $s_n + t_n$ یك دنبالهٔ پوچ است وقضیه ثابت می‌شود.

۲.۵.۲. قضیه. اگر s_n یك دنبالهٔ پوچ و t_n دنباله‌ای کراندار باشد، $s_n t_n$ یك دنبالهٔ پوچ است.

برهان. $\exists K \cdot (|t_n| < K$ ، برای هر $n)$

همچنین، $\varepsilon > ۰; \exists N. (|s_n| < \varepsilon$ ، به‌ازای هر $n > N)$

بنابراین، $|s_n t_n| < K\varepsilon$ ، به‌ازای هر n که $n > N$

درنتیجه، $s_n t_n$ یك دنبالهٔ پوچ است. (به‌توضیح داخل پرانتز در آخر برهان قبل توجه کنید) ▎

نتیجه. اگر c مقداری ثابت و s_n یك دنبالهٔ پوچ باشد، cs_n یك دنبالهٔ پوچ است.

اینك، ازدنباله‌های پوچ به‌دنباله‌های کلی می‌رویم.

۳.۵.۲. قضیه. اگر $s_n \to s$ و $t_n \to t$، دراین صورت

$$\text{(i)}\quad s_n + t_n \to s + t$$

$$\text{(ii)}\quad s_n t_n \to st$$

برهان. (i) $s_n - s$ و $t_n - t$ دنباله‌های پوچ هستند، بنابراین، مجموع آنها، یعنی، $s_n + t_n - (s+t)$، نیزیك دنبالهٔ پوچ است. این (i) را ثابت می‌کند.

$$\text{(ii)}\quad s_n t_n - st = (s_n - s)t_n + s(t_n - t)$$

درجملهٔ اول سمت راست، $s_n - s$ یك دنبالهٔ پوچ بوده و t_n کراندار است، در نتیجه، حاصلضرب آنها یك دنبالهٔ پوچ است. جملهٔ دوم سمت راست که برابر حاصلضرب دنبالهٔ پوچ $t_n - t$ درمقدار ثابت s می‌باشد یك دنبالهٔ پوچ است. پس طرف راست که مجموع دو دنبالهٔ پوچ است یك دنبالهٔ پوچ می‌باشد. بنابراین

$$s_n t_n \to st \quad ▎$$

۴.۵.۲. قضیه. اگر $s_n \to s$ و $t_n \to t$ که درآن $t \neq 0$، دراین صورت،

$$\frac{s_n}{t_n} \to \frac{s}{t}$$

برهان. ثابت خواهیم کرد که

$$\frac{1}{t_n} \to \frac{1}{t}$$

قضیهٔ ۴.۵.۲ ازاعمال قضیهٔ ۳.۵.۲ برای دنباله‌های s_n و $1/t_n$ نتیجه خواهد شد.

بنابراین، می‌خواهیم ثابت کنیم که $\frac{1}{t} - \frac{1}{t_n}$، یعنی، $\frac{t - t_n}{t_n t}$، یك دنبالهٔ پوچ است.

می‌توانیم N را چنان بزرگ اختیار کنیم که

به‌ازای‌هر n که $n > N$. $\quad |t_n| > \frac{1}{2}|t|$

و در نتیجه،

$$\frac{1}{|t_n t|} < \frac{2}{|t|^2}$$

دراین‌صورت $t - t_n$ یك دنبالهٔ پوچ و $1/t_n t$ دنباله‌ای کراندار است وقضیهٔ ۲.۵.۲ نشان می‌دهد که $(t - t_n)/t_n t$ یك دنبالهٔ پوچ است. ▌

تمرین ۲ (ج)

۱ــ دررفتار دنباله‌هایی که جملهٔ n م آنها درزیرآمده است، وقتی $n \to \infty$، بحث کنید.

$$\left(\frac{n-3}{3n+1}\right)^3,\ \left(\frac{3n+1}{n-3}\right)^3,\ \frac{n(n-1)}{(n-2)(n-3)(n-4)}$$

۲ــ در رفتار تابع گویای کلی از n،

$$R(n) = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}$$

وقتی که $n \to \infty$، بحث کنید، که درآن p و q اعداد صحیح مثبت هستند.

۶.۲. دنباله‌های صعودی

تعریف. اگر به‌ازای همهٔ مقادیر n، $s_{n+1} \geqslant s_n$ آنگاه s_n را صعودی می‌نامیم

سودمند است که صعودی بودن به‌معنی وسیع کلمه تلقی شود، یعنی، امکان تساوی در هرمرحله از n به $n+1$ پذیرفته‌شود. اگر به‌ازای هرمقدار n، $s_{n+1} > s_n$، دراین‌صورت، دنبالهٔ s_n را اکیداً صعودی می‌نامیم.

اگر به‌ازای همهٔ مقادیر n، $s_{n+1} \leqslant s_n$ دنبالهٔ s_n را نزولی می‌خوانیم. کلمه‌ای که به‌خوبی حاوی صعودی ونزولی بودن است یکنواخت می‌باشد.

مثالها. کدام یك ازدنباله‌های زیرصعودی یا نزولی است؟

$$(۱)\ \frac{n}{n^۲+۱}،\ (۲)\ \frac{n^۲+۱}{n}،\ (۳)\ ۱،\ (۴)\ n+(-۱)^n،\ (۵)\ ۲n+(-۱)^n$$

ثابت خواهیم کرد که یك دنبالهٔ یکنواخت دارای این خاصیت خیلی مهم است که باید به‌یك حد یا $+\infty$ یا $-\infty$ میل کند. به‌عبارت دیگر، یك دنبالهٔ یکنواخت نمی‌تواند نوسان کند.

قضیه ۶.۲. یك دنبالهٔ صعودی، یا به‌یك حد یا به $+\infty$ میل می‌کند.

برهان. فرض کنیم s_n این دنباله باشد. دوامکان وجود دارد. یا

(۱) عددی مانند A می‌توان یافت به‌طوری‌که، بهازای هر n ، $s_n \leqslant A$، یا

(۲) عدد A هرچه گرفته شود، مقداری از N هست که به‌ازای آن $s_N > A$.

ابتدا درامکان (۲) بحث می‌کنیم. چون s_n صعودی است، نه‌تنها به‌ازای $n=N$ بلکه به‌ازای هر $n \geqslant N$ داریم، $s_n > A$. بنابراین، مستقیماً از تعریف، نتیجه می‌شود که $s_n \to \infty$.

حال مورد (۱) را درنظر می‌گیریم. عدد A یك کران بالای s_n است. بنابرقضیهٔ ۸.۱ عددی، $s=\sup s_n$، بااین خواص هست که

به‌ازای هر n، $s_n \leqslant s$ وبرای یك مقدارخاص n، $s_n > s-\varepsilon$.

چون s_n صعودی‌است، نامساوی دوم برای همهٔ مقادیر بزرگترازاین مقدار خاص n نیز برقراراست. دونامساوی فوق نشان می‌دهندکه $s_n \to s$ وقضیه ثابت می‌شود. ▌

مفیدترین حالت قضیهٔ فوق را می‌توان درعبارت ذیل خلاصه کرد.

یك دنبالهٔ صعودی کراندار به‌حدی میل می‌کند.

نظیرقضیهٔ فوق، یعنی، یك دنبالهٔ نزولی به یك حد یا به $-\infty$ میل می‌کند، را با برهانی مشابه یا باتوجه به‌این حقیقت‌که، اگر s_n نزولی باشد $-s_n$ صعودی است، می‌توان ثابت کرد.

۷.۲. دنبالهٔ مهم a^n

فرض کنیم $s_n = a^n$، که در آن، a مقدار ثابتی است. رفتار این دنباله وقتی که $n \to \infty$، به‌مقدار a بستگی دارد.

(۱) اگر $a = 1$، به‌ازای هر n، $s_n = 1$ و $\lim s_n = 1$. اگر $a = 0$ آنگاه $\lim s_n = 0$.

(۲) فرض کنیم $a > 1$ وفرض کنیم $a = 1 + k$، که در آن، $k > 0$. در این صورت، (تنها با اختیار نمودن دوجملهٔ اول بسط دوجمله‌ای)،

$$s_n = (1+k)^n > 1 + nk$$

وقتی $n \to \infty$، $1 + nk \to \infty$ و بنابراین $s_n \to \infty$.

(۳) فرض کنیم $0 < a < 1$، وفرض کنیم $a^{-1} = 1 + l$ که درآن $l > 0$. دراین صورت،

$$0 < s_n = \frac{1}{(1+l)^n} < \frac{1}{1+nl}$$

وقتی $n \to \infty$، $1/(1+nl) \to 0$ ودرنتیجه، $s_n \to 0$.

(۴) فرض کنیم a منفی باشد. اگر $-1 < a < 0$ و $a = -b$، دراین صورت، $0 < b < 1$ واز (۳) نتیجه خواهد شدکه $b^n \to 0$ ولذا $s_n = (-b)^n \to 0$.

اگر $a = -1$، s_n مقادیر $+1$ و -1 را به‌تناوب اختیارمی‌کند و به‌طور متناهی نوسان خواهدکرد.

اگر $a < -1$ و $a = -b$، $b > 1$، در این صورت از (۲) خواهیم داشت $b^n \to \infty$. لذا $s_n = (-b)^n$ به‌تناوب مقادیر منفی ومثبت وازنظر مقدارعددی از هرعدد مفروضی بزرگتررا اختیارمی‌کند. یعنی، s_n نوسانی بی‌کران است. به‌طورخلاصه داریم

$(a > 1)$	$a^n \to \infty$	
$(a = 1)$	$a^n \to 1$	
$(-1 < a < 1)$	$a^n \to 0$	
$(a = -1)$	a^n	نوسانی کراندار است.
$(a < -1)$	a^n	نوسانی بی‌کران است.

تمرین ۲ (د)

۱ ـ اگر $s_1 > 0$ و به‌ازای همهٔ مقادیر n، $s_{n+1} \geqslant K s_n$، که در آن $K > 1$، آنگاه $s_n \to +\infty$.

۲ ـ اگر به ازای همهٔ مقادیر n، $|s_{n+1}| \leqslant K |s_n|$ که در آن $0 < K < 1$، آنگاه $s_n \to 0$. اگر مفروضات تنها برای $n > N$ صادق باشد، باز هم حکم برقرار می‌ماند.

۳ ـ اگر $\lim \dfrac{s_{n+1}}{s_n} = l$، $-1 < l < 1$، ثابت کنید $s_n \to 0$.

۴ ـ رفتار دنبالهٔ a^n/n^k را وقتی $n \to \infty$، بررسی کنید که در آن k یك عدد صحیح مثبت است.

۵ ـ ثابت کنید اگر $a > 0$ آنگاه وقتی که $n \to \infty$، $\sqrt[n]{a} \to 1$.

۶ ـ ثابت کنید وقتی n صعود می کند دنبالهٔ $\{1 + (1/n)\}^n$ نیز صعود می‌کند و به‌یك حد میل می‌کند. (این حد عدد بسیار مهم e است ــ فصل ۶ دیده شود).

۷ ـ ثابت کنید وقتی n صعود کند، $\sqrt[n]{n}$ نزولی است، و نتیجه بگیرید که حد دنباله به ۱ میل می‌کند.

۸ ـ دنباله‌ای مانند s_n مثال بزنید که برای آن

$$\lim \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$$

و (الف) $s_n \to \infty$، (ب) $s_n \to 3$، (ج) $s_n \to 0$.

۹ ـ اگر $R(n)$ دارای معنی تمرین ۲ (ج)، ۲ باشد، ثابت کنید که اگر $-1 < x < 1$ آنگاه

$$\lim R(n) x^n = 0$$

به‌ازای سایر مقادیر x رفتار $R(n)x^n$ را وقتی $n \to \infty$، بررسی کنید.

۱۰ـ ثابت کنید اگر $x \neq -1$ آنگاه

$$u_n(x) = \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$$

وقتی $n \to \infty$، به‌یك حد میل می‌کند. دریك نمودار، منحنی

$$y=\lim_{n\to\infty} u_n(x)$$

را نشان دهید.

۱۱ – ثابت کنید اگر $-1 < x < 1$، آنگاه

$$u_n=\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n=\binom{m}{n}x^n$$

وقتی $n\to\infty$، به‌صفر میل می‌کند.

۱۲– بررسی کنید که آیا دنباله‌های زیر، وقتی $n\to\infty$، دارای حد هستند و در این صورت، حدود را مشخص کنید.

(i) $\sqrt[n]{3^n+2^n}$، و برای اعداد غیر از ۲ و ۳ تعمیم دهید.

(ii) $\dfrac{a^n-b^n}{a^n+b^n}$، که در آن $a>0$ و $b>0$.

(iii) $\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\dots+\dfrac{n}{n^2+n}$

(iv) $\sqrt[n]{n!}$

(v) $n-\sqrt{(n+a)(n+b)}$

(vi) $2^{n^2}/n!$

۸.۲. روابط تراجعی

تا اینجا فرض کرده‌ایم که s_n بافرمولی صریح برحسب n داده شده است. در عمل، یك دنباله غالباً به‌وسیلهٔ رابطه‌ای که دو یا چند عضو متوالی آن را به‌هم مربوط می‌کند، داده می‌شود وممکن است که بتوان نتوان آن‌را برحسب s_n حل کرد. ما به‌وسیلهٔ مثالهای مفیدی آن را شرح می‌دهیم.

مثال ۱. رابطهٔ تراجعی خطی (یا معادلهٔ تفاضلی) باضرایب ثابت. فرض کنیم که داشته باشیم

$$s_n=s_{n-1}+s_{n-2} \qquad (n\geqslant 2)$$

$$s_0=1,\ s_1=1$$

(این یکی از حالتهایی است که در آن $n=0$ شروع مناسبتری است تا $n=1$، زیرا همچنان که در کتابهای جبر نشان داده می‌شود، متناظر نمودن یک تابع مولد $s_0+s_1x+s_2x^2+\dots$ بادنباله سودمند است).

این مفروضات مارا قادر می‌سازند هرچند جمله راکه بخواهیم بنویسیم،

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \dots$$

می‌خواهیم فرمول صریحی برای s_n به‌دست بیاوریم. برای این‌کار، جواب آزمایشی

$$s_n=A\alpha^n+B\beta^n$$

راجانشین می‌کنیم، که‌درآن A، B، α، و β مقادیر ثابت‌اند. می‌بینیم که اگر α و β ریشه‌های معادلۀ

$$t^2-t-1=0$$

باشند، آنگاه $s_n=s_{n-1}+s_{n-2}$.

باداشتن α و β می‌توانیم A و B را ازمقادیر داده شدۀ $s_0=1$ و $s_1=1$ معین کنیم.

بنابراین،

$$\alpha=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad \beta=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$$

$$A+B=1,\quad A\alpha+B\beta=1$$

ودر نتیجه

$$s_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

مثال۲. دنباله‌ای راکه به‌وسیلۀ

$$s_{n+1}=\sqrt{(s_n+a)},\quad s_1=b$$

تعریف شده است، بررسی کنید که درآن a و b دوعدد مثبت مفروض هستند.

تبصره‌ها. (۱) هیچ راهی برای پیداکردن s_n برحسب فرمول فشرده‌ای از n، وجود ندارد.

(۲) اگر موقتاً فرض کنیم که s_n به‌حد s میل می‌کند، می‌توانیم بگوییم این حدچه باید باشد. زیرا، اگرفرض‌کنیم $n\to\infty$، خواهیم داشت

$$s=\sqrt{s+a}$$

چون هر s_nی مثبت است، پس، s ریشهٔ مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم $s^2=s+a$ است.

(۳) دنباله‌هایی که از روابط تراجعی ساده‌ای پیروی می‌کنند، عموماً یکنواخت هستند. باید دید که آیا $s_{n+1}-s_n$ دارای علامت ثابتی است یا نه.

حل مثال ۲. فرض کنیم α ریشهٔ مثبت معادلهٔ درجهٔ دوم $s^2=s+a$ باشد. داریم

$$s^2_{n+1}-s_n^2=a+s_n-s_n^2$$

اگر $s_n>\alpha$، طرف راست رابطهٔ فوق منفی است، و لذا

$$s_{n+1}<s_n$$

همچنین،

$$s^2_{n+1}-\alpha^2=(s_n+a)-(\alpha+a)=s_n-\alpha$$

این نشان می‌دهد که اگر $s_n>\alpha$ آنگاه $s_{n+1}>\alpha$.

فرض کنیم که $b=s_1>\alpha$. دراین صورت به‌استقراء ثابت می‌شود که، s_n تشکیل دنباله‌ای نزولی را می‌دهد، وچون به‌ازای هر n، $s_n>\alpha$، بنابرقضیهٔ ۶.۲، s_n به‌حدی مانند s، که $s\geqslant\alpha$، میل می‌کند و بنابراستدلال تبصرهٔ (۲)، $s=\alpha$. به‌طریق مشابه، اگر $s_1<\alpha$ آنگاه s_n تشکیل دنباله‌ای صعودی با حد α را می‌دهد. اگر $s_1=\alpha$ آنگاه همواره $s_n=\alpha$.

نمایش نموداری. برای‌روابط تراجعی، به‌صورت خاص $s_{n+1}=f(s_n)$،تغییرات s_n را می‌توان به‌وسیلهٔ رسم منحنی C وخط L، که معادلهٔ متناظرآنها، به‌ترتیب،$y=f(x)$ و $y=x$ است، وانجام روشی که ذیلا می‌آید، دنبال نمود. (شکل ۱).

فرض کنیم P_1 نقطه‌ای روی C باشد به‌طوری که مختص x آن s_1 است. بنابراین مختص y آن $s_2=f(s_1)$ است. از P_1 خطی افقی بکشید تا L را در Q_1 قطع کند، و سپس خط قائمی از Q_1 رسم نمایید تا C را در P_2 قطع کند. P_2 دارای مختصات (s_2,s_3) است. همچنان که در P_1 عمل کردیم، از P_2 ادامه می‌دهیم.

تمرین ۲ (ه)

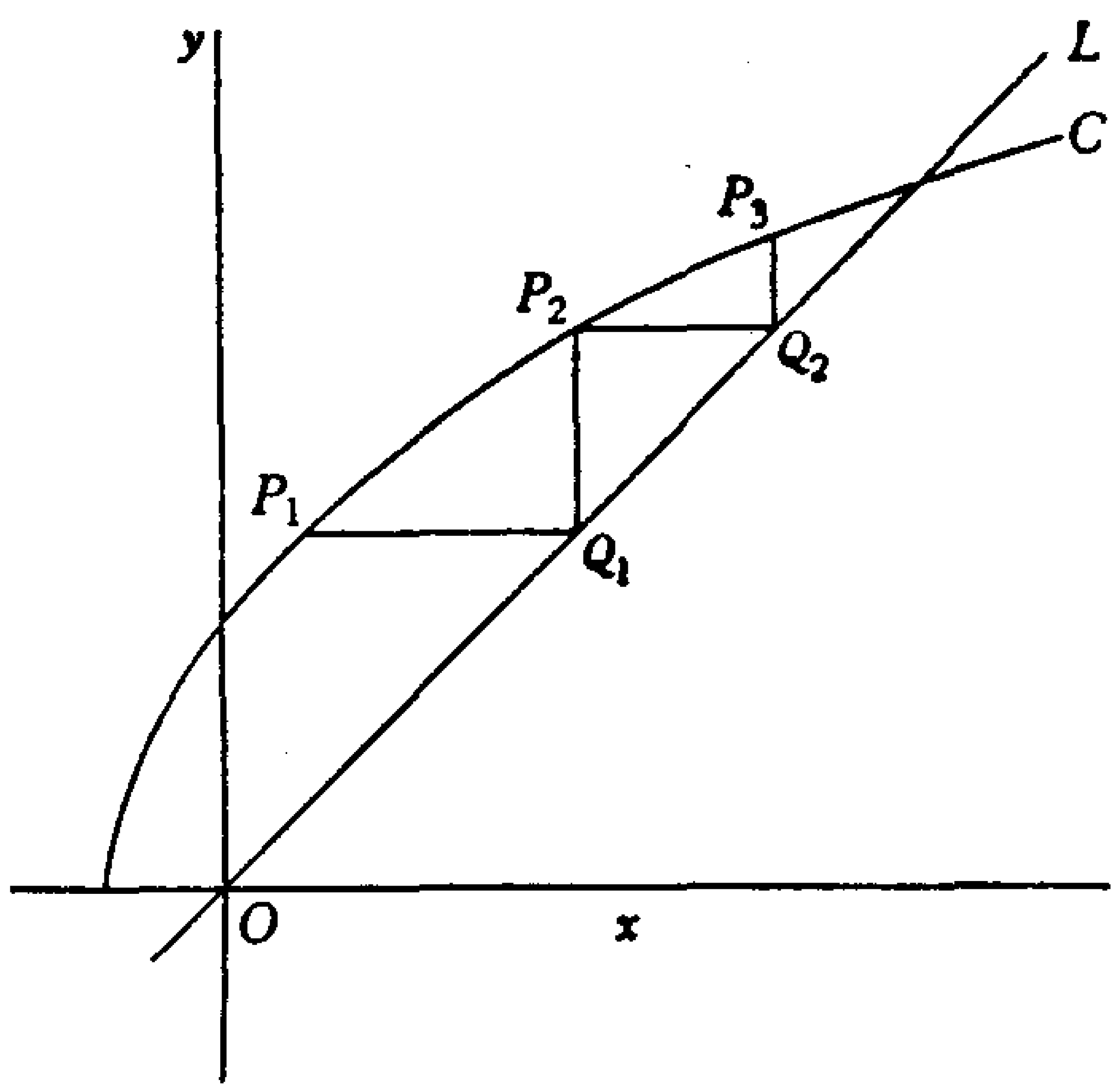
اگر s_n به‌وسیلهٔ روابط تراجعی مذکور در ۶.۱ داده شده باشند، رفتار s_n را، وقتی $n\to\infty$، بررسی کنید.

۱- $3s_n=2s_{n-1}+s_{n-2}$، $(s_0=7,\ s_1=3)$.

۲- $s_{n+1}=2/(1+s_n)$، $(s_1=0)$.

۳ـ $s_{n+1}=s_n^{2}+k$ ، که در آن ، $0<k<\frac{1}{4}$ و s_1 بیـن ریشه هـای معادلـهٔ $x^{2}-x+k=0$ قرار دارد.

۴ـ $s_{n+1}=\frac{2(2s_n+1)}{s_n+3}$ ، $(s_1=3)$.



شکل ۱

۵ـ $s_{n+1}=\frac{5s_n-3}{s_n+1}$ ، $(s_1=2)$.

همچنین سایر مقادیر s_1 (مثل $s_1=\frac{1}{5}$) را درنظر بگیرید. اگر $s_1=\frac{5}{7}$ ، چه اتفاقی می‌افتد؟

۶ـ $s_n=(s^{2}_{n-1}+s_{n-2}+2)^{1/3}$ ، $\left(s_1=1,\ s_2=\frac{3}{2}\right)$.

۷ـ ثابت کنید اگر

$$u_1=3 \text{ و } u_{n+1}=(u_n+5)^{1/2}$$

آنگاه u_n به‌یك حد l میل می‌کند و l را تا دورقم اعشار پیدا کنید. ثابت کنید

$$0<u_{2n+1}-l<30^{-n}(u_1-l)$$

تبصره. درکاربردهای عددی آنالیز، دانستن اینکه یك‌دنباله باچه سرعتی به حد خود میل می‌کند، اساسی است. این اطلاع به‌وسیلهٔ نامساوی اخیر داده شده است.

۸ـ درحدهای ممکن دنباله‌ای که باضابطهٔ

$$s_{n+1}=\frac{6s_n^2+6}{s_n^2+11}$$

تعریف می‌شود، بحث کنید. ثابت کنید اگر $s_n > 3$ آنگاه

(i) $3 < s_{n+1} < s_n$، (ii) $s_{n+1}-3 < \frac{9}{10}(s_n-3)$.

۹ـ ثابت کنید که، اگر

$$a_1 > b_1 > 0 \text{ و } a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n) \text{ و } b_{n+1}=2a_nb_n/(a_n+b_n)$$

آنگاه $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$. ثابت کنید که، وقتی $n\to\infty$، a_n و b_n هردو به حد $\sqrt{a_1b_1}$ میل می‌کنند.

۹.۲. سریهای نامتناهی

احتمالا درکتابهای جبر یاد گرفته‌اید که اگرمقدارعددی قدرنسبت یك تصاعد هندسی کوچکتر از یك باشد، تصاعد دارای «مجموع تا بی‌نهایت» متناهی است. ساده‌ترین مثال ازاین قبیل عبارت است از:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots$$

دراینجا، مجموع n جملهٔ اول، s_n، چنین است

$$s_n=1-2^{-n}$$

وقتی $n\to\infty$، $s_n\to 1$ ومجموع تا بی‌نهایت آن برابر ۱ است. بنابراین در جمع یك‌سری نامتناهی هیچ مطلب جدیدی نیست، ما تنها باید رفتار دنبالهٔ عددی s_n را، وقتی $n\to\infty$، بررسی کنیم، که درآن s_n مجموع n جملهٔ اول‌است. این‌مطلب‌را به‌طورصوری بیان می‌کنیم.

فرض‌کنیم u_n برای تمام مقادیر صحیح و مثبت n تعریف شده باشد. s_n را به‌صورت

$$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$$

یا خیلی خلاصه‌تر، $s_n=\sum_{r=1}^{n} u_r$ تعریف می‌کنیم.

اگر، وقتی $n\to\infty$، s_n به‌حد متناهی s میل‌کند گوییم سری نامتناهی

$$u_{1}+u_{2}+u_{3}+\cdots$$

یا $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ همگراست و s مجموع آن است.

عدد u_n جملهٔ nم سری نامتناهی و s_n مجموع n جملهٔ اول آن است. (گاهی‌شروع کردن سری ازجمله‌ای باانديس صفر، u_0، ممکن است خیلی منـاسب باشد، مثلا درسری $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$، s_n مجموع $n+1$ جمله را نشان می‌دهد.)

باید دقیقاً توجه نمایید که کلمهٔ مجموع در موقع اطلاق به‌سری نـامتناهی در معنی وسیعتری نسبت به‌معنی آن درجبر به‌کارمی‌رود. تاکنون منظوراز آن عددی بود کـه از جمع کردن اعداد یك مجموعهٔ متناهی حاصل می‌شد. حالامجموع می‌تواند حدیك دنباله باشد. دلیل اصلی این تذکراحتیاطی‌این‌است‌که خودمان را درمقابل این‌فرض ضمنی‌که خواص یك مجموع (به‌معنی محدود) را، کـه به‌یك مجموع (به‌معنی عمومی) منتقل می‌شود، حفظ کنیم. برای‌مثال، اگر $a+b+c=s$، دراین‌صورت، باتوجه‌به‌قانون توزیعپذیری درجبر،

$$ka+kb+kc=ks$$

درحقیقت خاصیت نظیرآن در مجموع یك سری نـامتناهی نیزبرقـرار است. یعنی، اگـر $u_1+u_2+u_3+\cdots$ به‌مجموع s همگرا باشد، دراین‌صورت، $ku_1+ku_2+ku_3+\cdots$ به‌مجموع ks همگرا می‌شود. ولی این‌یك خاصیت مربوط به‌حدود است وبدین‌جهت‌باید اثبات شود.

یك سری نامتناهی‌که همگـرا نباشد واگرا نامیده می‌شود. برای مثال، هـریك از سریهای

$$1+1+1+\cdots$$

و

$$1-1+1-\cdots$$

واگرا هستند. از بخش ۴.۲ درمی‌یابیم‌که یك سری واگرا ممکن است به‌چهار صـورت متفاوت، رفتارکند. ممکن است به‌$+\infty$ یا $-\infty$ میل کند. یاممکن است به‌طورکراندار یا بی‌کران نوسان‌کند. اگریك سری همگرانباشد، درحالت‌کلی‌کافی است‌که آن‌راواگرا بنامیم، ولی اغلب ساده وراحت است‌که اطلاعـات بیشتری به‌دست آوریم. بـرای مثال، می‌شودگفت‌که سری $\sum(-1)^n$ نوسان می‌کند و سری

$$\sum\{(-1)+(-1)^n\}$$

واگرا به $-\infty$ است.

کلمات همگرا و واگرا، به‌همان طریقی‌که برای سریها به‌کار می‌بریم، معمولاً درمورد دنباله‌ها نیز به‌کارمی‌روند. مثلاً، اگر $s_n = ۲ - (\frac{۱}{۲})^n$، در این صورت، s_n همگرا به حد ۲ است. اگر s_n به حدی متناهی میل نکندآن را واگرا می‌نامیم، می‌توان عبارت صریحتری نیزازاین قبیل‌که $s_n = -۲^n$ واگرا به $-\infty$ است، ایراد نمود.

قبل ازبررسی خواص کلی‌سریهای نامتناهی، برای خواننده مفیدخواهد بود باچند سری مخصوص ازانواع سادهٔ‌آن‌که قضایای بعدی‌را روشن می‌نمایندکاملاً آشنا شود. مادو سری مهم‌را انتخاب می‌کنیم که اولی سری تصاعد هندسی است.

۲.۱۰. سری هندسی

قضیه ۲.۱۰. سری نامتناهی $۱ + x + x^۲ + \dots + x^n + \dots$ فقط وفقط وقتی همگرا است که $-۱ < x < ۱$.

برهان. دراینجا، $u_n = x^{n-۱}$ و

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{۱ - x^n}{۱ - x} & (x \neq ۱) \\ n & (x = ۱) \end{cases}$$

اگر $x = ۱$، وقتی‌که $n \to \infty$، $s_n \to \infty$. اگر $x \neq ۱$،

$$s_n = \frac{۱}{۱ - x} - \frac{x^n}{۱ - x}$$

بنابربخش ۷.۲، اگر $-۱ < x < ۱$ آنگاه $x^n \to ۰$ وسری،وقتی $-۱ < x < ۱$، همگرا است ومجموع آن $۱/(۱ - x)$ می‌باشد.

اگر $x > ۱$، $x^n \to \infty$ و $s_n \to \infty$.

اگر $x = -۱$، وقتی‌که n زوج است $s_n = ۱$، و وقتی کـه n فرد است $s_n = ۰$، لذا به‌طورکراندار نوسان می‌کند.

اگر $x < -۱$، s_n به طور بی‌کران نوسان می‌کند.

بنابراین، سری همگرااست فقط وقتی‌که $-۱ < x < ۱$.

۱۱.۲. سری $\sum n^{-k}$

ملاحظه کنید که مفهوم توان n^k فقط وقتی که k منطق است باقانون اندیس جبرمعین می‌شود. تعمیم آن برای عدد اصم k تافصل ۶ به‌تأخیر انداخته می‌شود. فعلا فرض می کنیم که اندیسهای تمام قوایی که باآنهاکار می کنیم اعداد منطق باشند. قضایـای مربوط (مثل قضیهٔ ۱۱.۲) وقتی که اندیسهای آنها منطق یااصم باشند، بازهم برقرار هستند.

قضیهٔ ۱۱.۲. سری نامتناهی

$$\frac{1}{1^k}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots$$

(که درآن k ثابت است) وقتی $k>1$ همگرا و وقتی $k \leqslant 1$ واگرا است.

تبصره. اگر $k=1$، جملات آن تشکیل «تصـاعد توافقی» می‌دهنـد و اغلب سری $\sum(1/n)$ را سری توافقی می‌نامند.

بررسی سری هندسی قضیهٔ ۱۰.۲ آسان بود، به‌این دلیل که مـا می‌توانستیم s_n را بافرمول صریحی برحسب n پیدا کنیم. این‌کار برای سری $\sum(1/n)^k$، حتی برای‌مقادیر سادهٔ k، مثل ۱ و ۲، آسان نیست. درعمل، برای یك سری مفروض کاملا غیرمحتمل است که برای مجموع n جمله یك نمایش ساده بتوان یافت. عموماً نوعی تقریب کردن همیشه‌لازم است. خواننده بزودی وسیله‌ای‌را برای انجام‌آن دراین سریهای بخصوص خواهد دید. روشهای کلیتری درفصل ۵ توسعه خواهند یافت.

ابتدا قضیهٔ ۱۱.۲ را برای مقدار «مرزی» $k=1$ ثابت می کنیم که بزرگترین‌مقدار k است که به‌واگرایی منجرمی‌شود. این حالتی ازقضیه است، که در آن بین‌همگـرایی و واگرایی تعادل ظریفی برقراراست ومی‌توان انتظار داشت که مشکلترین حالت باشد. در حقیقت، به‌دلیل سادگی جزئیات اثبات، این حالت نیزمثل سایرحالات ساده است.

برهان قضیه. می‌خواهیم ثابت کنیم که سری

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

واگراست. این‌کاردرصورتی میسرخواهد بود که بتوانیم مجموع جمله‌هارا، بااختیارنمودن تعدادکافی جمله، ازهرعدد مفروضی بزرگتر کنیم. درنامساویهای ذیل، ازاین‌امر که‌جمله‌ها نزولی‌اند، استفاده می کنیم.

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}>8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

وغیره. مجموع جمله‌ها درهر یك از دسته‌های متوالی، که مشتمل بر۲، ۴، ۸، ۱۶، و ... جمله هستند، از $\frac{1}{2}$ بزرگتر می‌باشد. اینك با احتساب جملات اول ودوم، یعنی، ۱ و $\frac{1}{2}$، ثابت کرده‌ایم که مجموع $2+2+4+8+\dots+2^{m-1}$ (یعنی 2^m) جملهٔ سری بزرگتر است از $\frac{1}{2}m+1$. بنابراین، سری $\sum(1/n)$ واگرا به $+\infty$ است.

حال فرض کنیم $k<1$. دراین صورت، $1/n^k>1/n$، درنتیجه مجموع هر تعداد از جمله‌های $\sum(1/n)^k$ ازمجموع جمله‌های متناظر در $\sum(1/n)$ بزرگتر است. ثابت شد که این سری اخیر واگرا به $+\infty$ است. بنابراین برای هر $k<1$، سری $\sum(1/n^k)$ نیز واگراست.

حالا $k>1$ می‌گیریم. باید همگرایی را ثابت کنیم. همان تدبیر سابق، یعنی، دسته بندی جمله‌ها درقسمتهای ۲، ۴، ۸ و ... تایی متوالی را می‌توان به‌کار برد. اما حالا باید تقریبهایی را پیدا کنیم که ازمجموع بلوکها بزرگترباشند. داریم

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}<\frac{2}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}$$

$$\frac{1}{4^k}+\frac{1}{5^k}+\frac{1}{6^k}+\frac{1}{7^k}<\frac{4}{4^k}=\frac{1}{4^{k-1}}$$

$$\frac{1}{8^k}+\frac{1}{9^k}+\dots+\frac{1}{15^k}<\frac{8}{8^k}=\frac{1}{8^{k-1}}$$

اما سری

$$1+\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{4^{k-1}}+\frac{1}{8^{k-1}}+\dots$$

یك سری هندسی همگراست و مجموعی مانند t دارد.

دراین صورت s_N، مجموع N جملهٔ اول سری $\sum(1/n^k)$، با N افزایش می‌یابد، و همواره از t کوچکتراست. لذا، بنابرقضیهٔ ۶.۲، s_N وقتی $N\to\infty$، به‌یك حد متناهی میل خواهد کرد، یعنی، سری همگراست.

تذکر درمورد حالت $k < 1$. این حالت را، به‌جای نتیجه گیری از حالت $k = 1$، می‌توان مستقیماً از

$$1 + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{n^k} > n\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

و $n^{1-k} \to \infty$ نتیجه گرفت.

مثال عددی. مقداری از n را، به‌اندازه‌کافی بزرگ، چنان بیابید که مجموع n جملهٔ اول،

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

از ۲۰ بزرگتر باشد.

خواننده نباید کارهای عددی را، که او را باحقیقت درتماس نگه می‌دارد، دست کم بگیرد. ما این مثال را برای او حل می‌کنیم. برهان نشان می‌دهد که مجموع 2^m جملهٔ اول از $1 + \frac{1}{2}m$ بزرگتر است. بنابراین 2^{38} جمله تحقیقاً کافی خواهد بود. حال $2^{38} > 10^{11}$ و در این مورد، عددی دوازده رقمی به‌طور شگفت‌آوری بزرگ است. طبعاً ما در محاسبهٔ مجموع دسته‌هایی متشکل ازجمله‌ها دقت را فدا می‌کنیم. ولی روشهای ظریفتری نشان می‌دهند که عدهٔ جمله‌های لازم برای بزرگتر از ۲۰ کردن مجموع، از 10^8 بیشتر می‌شود. این محاسبات نشان می‌دهند که، به‌زبان ساده واگرایی این سری کند است.

تمرین ۲ (۹)

۱ــ مقداری از N را برای سری $\sum 1/n^2$ چنان تخمین بزنید که مجموع همهٔ جمل بعد ازجملهٔ Nام کوچکتر از 10^{-4} باشد.
برای سری هندسی $\sum (0/99)^n$ نیزمحاسبات مشابهی را انجام دهید. چه‌نتیجه‌ای از کندی یا تندی نسبی همگرایی دوسری به‌دست می‌آید؟

۲ــ مقادیری از r را پیدا کنید که سریهای ذیل همگرا باشند ومجموع آنهارا پیدا کنید.

$$r + \frac{r}{1+r} + \frac{r}{(1+r)^2} + \frac{r}{(1+r)^3} + \cdots,$$

$$r^۲-\frac{r^۲}{۱+r^۲}+\frac{r^۲}{(۱+r^۲)^۲}-\frac{r^۲}{(۱+r^۲)^۳}+\cdots,$$
$$۱+۲r+۳r^۲+۴r^۳+\cdots$$

۳ـ مجموع زیررا برآوردکنید

$$\sum_{n=۰}^{۶۰}\left(\frac{۲}{۳}\right)^n$$

۴ـ ثابت کنیدکه اگر $a>۰$ و $b>۰$ آنگاه سری با جملهٔ nم $۱/(a+nb)$ واگراست.

۵ـ مجموع تا m جمله ومجموع تا بی‌نهایت سری باجملهٔ nم

$$\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}$$

را محاسبه کنید. همگرایی $\sum n^{-۳}$ را نتیجه بگیرید. این را به‌یك سری تعمیم دهید که مخرج جملهٔ nم آن به‌جای حاصلضرب سه‌عدد صحیح متوالی ازحاصلضرب k عدد صحیح متوالی تشکیل شده باشد.

۱۲۰۲. خواص سریهای نامتناهی

خواص زیربرای سریهای نامتناهی، دربیشترقسمتها، نتایج تعدیل‌یافتهٔ فوری حدود برای دنباله‌هاست که خواننده می‌تواند برهان آنهارا تکمیل کند.

(۱) اگریك تعداد متناهی جمله، برجمله‌های یك سری اضافه یا از آن حذف، و یا تعدادی متناهی ازجملات آن تغییرکنند دراین‌صورت در واگرایی یاهمگرایی آن تغییرحاصل نمی‌شود.

مثال. اگر $\sum_{۱} u_n$ به‌مجموع s همگرا باشد، دراین‌صورت $\sum_{k+۱}^{\infty}u_n$ به $s-u_۱-\cdots-u_k$ همگراست. اگرسری قبلی واگرا باشد سری دوم نیزواگراست.

(۲) اگر $u_۱+u_۲+\cdots$ به‌مجموع s وسری $v_۱+v_۲+\cdots$ به‌مجموع t همگرا باشد آنگاه‌سری

$$(u_۱+v_۱)+(u_۲+v_۲)+\cdots$$

به‌مجموع $s+t$ همگراست.

تمرین. درحالت کلیتر ثابت کنید یك سری با جملهٔ nام au_n+bv_n، که در آن a و b مقادیر ثابت‌اند، به‌حد $as+bt$ همگراست.

(۳) اگر $u_1+u_2+\dots$ همگرا باشد آنگاه $\lim u_n=0$.

برهان. $u_n=s_n-s_{n-1}$. s_n و s_{n+1} هردو به‌حد s میل می‌کنند، لذا، بنا برقضیه ۳.۵.۲ (i) $\lim u_n$ موجود است و $\lim u_n=s-s=0$. ▌

دقت شود که عکس (۳) برقرار نیست. مثال $u_n=1/n$ نشان می‌دهد که‌ممکن است داشته باشیم $\lim u_n=0$، ولی $\sum u_n$ واگرا باشد. به‌عبارت دیگر (تمرین ۲ (ز)، ۱ را ببینید)،

شرط $\lim u_n=0$ برای همگرایی $\sum u_n$ لازم است ولی‌کافی نیست.

(۴) اگر $\sum u_n$ همگرا باشد، دراین‌صورت هرسری حاصل ازدرج پرانتزهای دلخواه‌در $\sum u_n$ نیزهمگراست، وهردوسری دارای یك مجموع هستند.

بنابراین درج پرانتزدریك سری همگرا مجازاست ولی اسقاط آنها مجازنمی‌باشد.

سری $1-1+1-1+\dots$ نوسان می‌کند ولی سری

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$$

همگرا به مجموع 0 است.

(۵) اگر به‌ازای هر n، $u_n\geqslant 0$، دراین صورت $\sum u_n$ همگراست یا واگرا به‌$+\infty$ است.

یك شرط لازم وکافی برای همگرایی آن‌است‌که عددی مثل K موجودباشدبه‌طوری که به‌ازای‌هر N، $\sum_1^N u_n<K$؛ و دراین‌صورت $\sum_1^\infty u_n\leqslant K$.

این، بیان دوبارهٔ قضیهٔ ۶.۲ است.

(۶) اگر به‌ازای هر n،

(i) $u_n\geqslant 0$، $v_n\geqslant 0$،

(ii) $u_n\leqslant Kv_n$، که درآن K عددی است ثابت،

(iii) $\sum v_n$ همگراست.

دراین‌صورت، $\sum u_n$ همگراست. همچنین $\sum u_n\leqslant K\sum v_n$.

خواننده باید این‌حکم‌را از (۵) نتیجه بگیرد و نتیجهٔ مشابهی را برای واگرایی بیان کند.

مادرفصل ۵ تحقیق اصولی بیشتری درسریهای نامتناهی به‌عمل خواهیم آورد.

تمرین ۲ (ز)

۱ ـ (توجه) شرط لازم و شرط کافی را شرح دهید. کدام یك از شرایط زیر، برای تساوی اعداد حقیقی p و q اولاً، لازم، ثانیاً کافی هستند

$$p^۲+q^۲=۲pq \text{ (i)}، \quad p^۲=q^۲ \text{ (ii)}، \quad p+\frac{1}{q}=q+\frac{1}{p} \text{ (iii)}$$

۲ ـ درمورد هریك ازشرایط ذیل بگویید که، (الف) لازم، (ب) کافی، است.

(i) شرطی برای اینکه یك‌سال میلادی n، سال کبیسه‌ای باشد آن است که n مضرب ۴ باشد.

(ii) شرطی برای اینکه $pq=۰$، آن است که $p=۰$ و $q=۰$.

(iii) شرطی برای اینکه زوایای متناظر در دومثلث ABC و DEF برابرباشند آن است که

$$\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{AB}{DE}$$

۳ ـ همگرایی یا واگرایی هریك ازسریهای ذیل‌را معین کنید.

$$\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}+\frac{۳}{۷}+\cdots+\frac{n}{۲n+۱}+\cdots,$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n/۲}}+\cdots,$$

$$۱-۱+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}+\cdots,$$

$$۱+\frac{۱}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۱}{۳!}+\cdots$$

۴ ـ ثابت کنید که اگر $۰ \leqslant a_n \leqslant ۱$، دراین‌صورت، سری $a+a_۱x+\cdots+a_nx^n+\cdots$ به‌ازای هر x، $۰ \leqslant x < ۱$ همگراست. با فرض $|a_n| \leqslant k$، نتیجه‌را تعمیم دهید.

۵ ـ مجموع سریهای متناهی

$$\sum_{r=۱}^{n}\frac{ar+b}{r(r+۱)(r+۲)}, \quad \sum_{r=۱}^{n}\frac{۱}{r(r+۲)(r+۴)}$$

را پیدا کنید. مجموع تا بی‌نهایت را نتیجه بگیرید.

۶ ـ (توجه) اگر

$$s_n=\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n \quad \text{و} \quad t_n=\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{-n}$$

ثابت کنید که، s_n دنباله‌ای صعودی و t_n دنباله‌ای نزولی است. علاوه بر آن، ثابت کنید که وقتی $n \to \infty$، $t_n - s_n \to 0$، و اینکه s_n و t_n هردوبه‌یك حد میل می‌کنند.

۷ ــ اگر s_n و t_n نوسانی‌کراندار باشند، $s_n + t_n$ چه رفتاری می‌تواند (در رابطه باحد داشتن ویا نوسانی بودن) داشته باشد؟ برای هر یك مثالی بزنید. به‌همین سؤال در مورد $s_n t_n$ پاسخ دهید.

۸ ــ حاصلضرب

$$\frac{۲^۳-۱}{۲^۳+۱}\,\frac{۳^۳-۱}{۳^۳+۱}\,\frac{۴^۳-۱}{۴^۳+۱}\cdots\frac{n^۳-۱}{n^۳+۱}$$

را خلاصه کرده و ثابت کنید که، وقتی $n \to \infty$، این حاصلضرب به‌حدی (که باید پیدا کنید) میل می‌کند.

۹ ــ فرض کنیم $u_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(u_n + A^۲/u_n)$، که‌درآن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots,$ و $0 < A \leqslant u_۱$ ثابت کنید که

(i) $u_{n+۱} \geqslant A$ و $u_{n+۱} \leqslant u_n$.

(ii) $d_{n+۱} = d_n^۲$، که درآن $d_n = (u_n - A)/(u_n + A)$.

(iii) وقتی n به‌بی‌نهایت میل می‌کند، u_n به A میل می‌کند.

باگرفتن $A^۲ = ۹۹$ و $u_۱ = ۱۰$، $\sqrt{۱۱}$ را باچهاررقم اعشارمحاسبه کنید.

۱۰ــ نشان دهید که اگر r_0 و A اعداد مثبتی باشند، و

$$r_{n+۱} + \frac{۱}{r_n} = ۲A$$

دراین صورت، شرط $A \geqslant ۱$ برای همگرایی دنبالهٔ r_n لازم است؛ نشان دهید که در حالت $r_0 > ۱$ این شرط کافی نیزمی‌باشد، برای این‌کار ثابت‌کنید که به‌ازای هر n، $r_n > ۱$، و برای یك مقدارخاص $c > ۱$،

$$c^n\,|r_n - c| \leqslant |r_0 - c|$$

۱۱ــ یك دنبالهٔ نوسانی (درصورت امکان) تعریف کنید به‌طوری که

$$\frac{s_{n+۱}}{s_n} \to ۱$$

به‌همان سؤال باقراردادن $-\frac{۱}{۲}$ به‌جای ۱ جواب دهید.

۱۲ــ ثابت‌کنید که، اگر

$$u_n = \frac{۱.۳.۵\ldots(۲n-۱)}{۲.۴.۶\ldots(۲n)}$$

در این صورت $nu_n^۲$ یك دنبالهٔ صعودی است و $(n+\frac{۱}{۲})u_n^۲$ یك دنبالهٔ نزولی است.

نتیجه بگیرید که $nu_n^۲$ به‌یك حد میل می‌کند.

۱۳ــ درستی یا نادرستی هریك ازگزاره‌های (i)ــ(iii) را بررسی کنید.

(i) اگردنبالهٔ s_n صعودی باشد دنبالهٔ

$$(s_۱+s_۲+\ldots+s_n)/n$$

نیز صعودی است.

(ii) اگر بدانیم که به‌ازای هر n، $s_n > s_{n+۱}$، $t_n < t_{n+۱}$، و $s_n > t_n$ ، در این صورت، هردو دنبالهٔ s_n و t_n به‌حدود s و t میل می‌کنند و $s > t$.

(iii) اگر $s_{n+۱}-s_n$ نوسانی بی‌کران باشد، دراین‌صورت، s_n نوسانی بی‌کران است.

۱۴ــ ثابت‌کنید که اگر s_n به‌حد s میل کند، دراین صورت ، دنبالهٔ زیر نیز به‌حد s میل می‌کند.

$$\frac{s_۱+s_۲+\ldots+s_n}{n}$$

۱۵ــ مجموع $n+۱$ جملهٔ اول سری

$$۱+۲x+۳x^۲+\ldots+(n+۱)x^n$$

را پیدا کنید.

ثابت کنید که، اگر $|x| < ۱$ آنگاه سری به‌مجموع $۱/(۱-x)^۲$ همگراست.

۳

تابعهای پیوسته

۱.۳. تابعها

شما با وابستگی یك عدد حقیقی y به عدد حقیقی دیگری مانند x آشنا هستید که معمولاً به وسیلهٔ فرمولهایی مانند

$$y=۱/(x^۲+۱) \quad \text{یا} \quad y=\sqrt{(۲-x)(x-۱)}$$

معین می‌شود. در اولی، y به‌ازای جمیع مقادیر x، و در دومی، تنها به‌ازای $۱ \leqslant x \leqslant ۲$ تعریف می‌شود. در هر حالت، اگر مقداری برای x داده شود، می‌توانیم مقدار y را که متناظر آن است محاسبه‌کنیم و تنها یك چنین مقداری برای y موجود است (در صورتی که $\sqrt{\ }$ مثبت فرض شود). در اینجا، ممکن‌است x به‌عنوان متغیر مستقل و y به‌عنوان متغیر وابسته توصیف شوند.

این‌دومثال نمونه‌های ساده‌ای از توابع‌اند. ما به‌بیان مفهوم تابع در قالب عبارات کلی می‌پردازیم.

فرض‌کنیم X مجموعه‌ای از اعداد x و Y مجموعه‌ای از اعداد y باشد. اگر قواعدی داده شوندکه به‌وسیلهٔ آنها به‌ازای هر x از X، yی متناظر باآن در Y تخصیص یابد، این قواعد تابعی را که به‌ازای هر x در X تعریف می‌شود، معین می‌کنند.

تبصره‌ها. (۱) توجه کنید که، به‌ازای x مفروضی، تنها یك y نظیرآن وجود دارد. ممکن است یك y به‌بیش از یك x نظیر شود. برای نمونه، در مثال $y=۱/(x^۲+۱)$، عدد $y=\frac{۱}{۲}$ نظیر هر دو مقدار $x=۱$ و $x=-۱$ است. به‌عبارت دیگر، درحالت کلی

ممکن است تناظر بین X و Y چند به یك باشد و تنها در حالت استثنایی یك به یك است. در نمایش نموداری معمولی، هیچ خط موازی محور Oy منحنی را در بیشتر از یك نقطه قطع نمی‌کند.

(۲) ممکن است در نوشته‌های ریاضی با کلمات و اصطلاحات دیگری، معادل آنها که در اینجا به‌کار می‌روند، برخوردکنید. اغلب تابعی که بر X تعریف می‌شود و مقادیر خود را در Y اختیار می‌کند یك تبدیل، یا یك نگاشت، از X به‌توی Y نامیده می‌شود. بنابر تعریف بالا، ممکن است Y شامل yهایی باشدکه نظیر هیچ مقدار x نباشند. هرگاه به‌ازای هر مقدار y که در Y اختیار شود، xی در X باشد، می‌توانیم بگوییم که این نگاشت از X به‌روی Y است.

(۳) علامت معمولی برای یك تابع حرف f است. اگر حروف بیشتری مورد احتیاج باشد، معمولا از g، ϕ و F استفاده می‌شود. مقدار y، که یك تابع f به‌ازای x خاصی در X اختیار می‌کند، به‌صورت $f(x)$ نوشته می‌شود، بنابراین، $y=f(x)$.

(۴) به‌بیان دقیق، تابع f مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب اعدادی به‌صورت (x, y) است که باقواعدی که تناظر بین آنها را تعریف می‌کنند، به هم مربوط‌اند. $f(x)$ به‌معنی «مقدار تابع» به‌ازای عدد x است. برای راحتی، وبدون آن‌که خطایی پیش‌آید، صرفاً صحبت از تابع $f(x)$ می‌کنیم.

چند مثال دیگر مفهوم‌کامل تعریف تابع را روشن خواهدکرد. در هر یك از این مثالها، خودتان را متقاعدکنیدکه این قواعد برای تعیین یك مقدار یکتا برای y به ازای هر مقدار مورد نظر x کفایت می‌کند.

(۱) به‌ازای $0 \leqslant x \leqslant 1$ ، $y=1$

به‌ازای $x>1$ و به‌ازای $x<0$ ، $y=0$

درکاربرد فیزیکی، متغیر مطلق معمولا زمان است، این تابع می‌تواند، برای مثال، نیرویی به‌اندازهٔ یك راکه در واحد زمان عمل می‌کند و سپس از بین می‌رود نمایش‌دهد.

(۲) فرض‌کنیم $x=y^2$. این معادله به‌ازای $x\geqslant 0$، مقادیری برای y اختصاص می‌دهد و اگر $x>0$، برای y دو مقدار از حیث اندازه مساوی و با علامتهای مخالف وجود دارد. در تعریف گفتیم که یك تابع باید یك مقداری باشد. بنابراین، $x=y^2$ به تعبیری که داریم، y را به عنوان تابعی از x تعریف نمی‌کند. با وجود این، می‌توانیم این تابع را به دو تابع $y=+\sqrt{x}$ و $y=-\sqrt{x}$ تجزیه‌کنیم که هر یك به ازای $x \geqslant 0$ تعریف می‌شود.

$$y=\frac{x}{(x-۱)(x-۲)} \qquad (۳)$$

این تابع به‌ازای جمیع مقادیر x بجز $x=۱$ و $x=۲$ تعریف می‌شود.

(۴) $y=$ (بزرگترین عامل اول x).

این عبارت تنها وقتی‌که x یك عدد صحیح باشد با معنی است.

(۵) $s_n=۱/n$ که درآن، n یك عدد صحیح مثبت است. دنباله‌ها نوع خاصی از توابع هستندکه درآن متغیر مستقل منحصر به عدد صحیح مثبت می‌باشد. همین دستور با جایگزین کردن x به جای n، یعنی، $y=۱/x$، یك تابع به دست می‌دهدکه به‌ازای مقادیر x به‌غیر از اعداد صحیح مثبت نیز تعریف می گردد (در اینجا، به‌ازای جمیع مقادیر x بجز $x=۰$).

(۶) $y=۰$ اگر x اصم باشد

$y=۱$ اگر x منطق باشد

یك تابع «غیرطبیعی» مانند تابع بالا ممکن‌است به نظرکم اهمیت بیاید. درحقیقت، چنین توابعی درآنالیز در تصمیم گیری اینکه قضیهٔ مورد نظری برای دسته‌ای از توابع با چه وسعتی درست است، به‌کار می‌روند. ما با این مثالها، در این کتاب، بعداً برخورد خواهیم کرد.

(۷) y درجه حرارت محل مفروض در زمان x است.

این نوع تابع در علوم و زندگی روزمره خیلی معمول است. این، از مثالهای (۱)-(۶) از این جهت متمایز است که هیچ دستور تحلیلی وجود نداردکه به‌وسیلهٔ‌آن بتوان‌آن را نمایش داد. در عمل مقادیر تابع ممکن است به وسیلهٔ یك نمودار داده شود (مثلا، به‌وسیلهٔ قلمی‌که به‌گرماسنج ثبات متصل است، ترسیم‌گردد). در این‌صورت، این مقادیر، در حدود دقتی‌که با مشاهده قابل دسترس است، معلوم می‌شود.

۲.۳ رفتار $f(x)$ به‌ازای مقادیر بزرگ

در فصل ۲ طرق مختلف رفتار دنباله‌ای مانند s_n را، وقتی‌که متغیر n به بی‌نهایت میل می‌کند، شرح دادیم. همان توصیف برای تابعی مانند $f(x)$ وقتی‌که $x\to\infty$، به‌کار می‌رود. مثلا،

تعریف. وقتی‌که $x\to\infty$، $f(x)\to\infty$ اگر

(به‌ازای هر A; $\exists X.(f(x)>A$ ، $x>X$)

همچنین، به تأسی از بخش ۳.۲، می‌توان مفهوم

$$f(x) \to l \text{ ، } x \to \infty \text{ وقتی}$$

را تعریف کرد. (دنباله‌های پوچ را بدین لحاظ که معرفی حدود دنباله‌ها به کمک آنها به‌ساده‌ترین صورت مقدور است، برگزیدیم. اینك، لزومی ندارد تا این اندازه بکندی پیش رویم و می‌توانیم اشارهٔ خاص به «تابعهای پوچ» را، که برای آنها $l=0$، حذف کنیم.)

متغیر x ممکن است مقادیر منفی دلخواه بزرگی را اختیار کند، و برای مثال داریم

تعریف. وقتی که $x \to -\infty$ ، $f(x) \to l$ اگر به ازای ε مفروض، X ی باشد که به‌ازای جمیع x هایی که

$$|f(x)-l|<\varepsilon \text{ ، } x<-X$$

حالت دیگری از حد وجود دارد که برای دنباله‌هایی مانند s_n مطرح نشده ولی برای توابعی از x مطرح می‌شوند. برای تشریح مطلب مثال ذیل را در نظر بگیرید.

$$y=\frac{1}{x-2}$$

که در آن، وقتی x با انتخاب مقادیر بزرگتر از ۲ به ۲ نزدیك می‌شود، $y \to \infty$. (همچنین، وقتی که x با مقادیر کمتر از ۲ به ۲ نزدیك می‌شود، $y \to -\infty$) می‌توانیم نزدیك شدن x را با مقادیر بزرگتر از c به‌سمت عدد c با نوشتن $x \to c+$ نشان دهیم (و با مقادیر کوچکتر از c با $x \to c-$).

تعریف. وقتی که $x \to c+$ ، $f(x) \to \infty$ اگر، با A ی مفروض، δ یی باشد که به‌ازای جمیع xهایی که در $c<x<c+\delta$ صدق کنند، $f(x)>A$.

۳.۳. رسم منحنیها

رسم بعضی از منحنیهای ساده، تمرین خوبی برای درك وابستگی تابعی است. هدف خواننده می‌باید تعیین شکل عمومی منحنی، تقریباً بدون هیچ محاسبه‌ای باشد. وی می‌تواند با پرسش سؤالهای مناسب از خود، این عمل را به سرعت انجام دهد. (اگر نمودار منحنی دقیقتری لازم باشد، بعداً می‌توان نقطه‌هایی را به‌طریقهٔ معمولی مشخص کرد.)

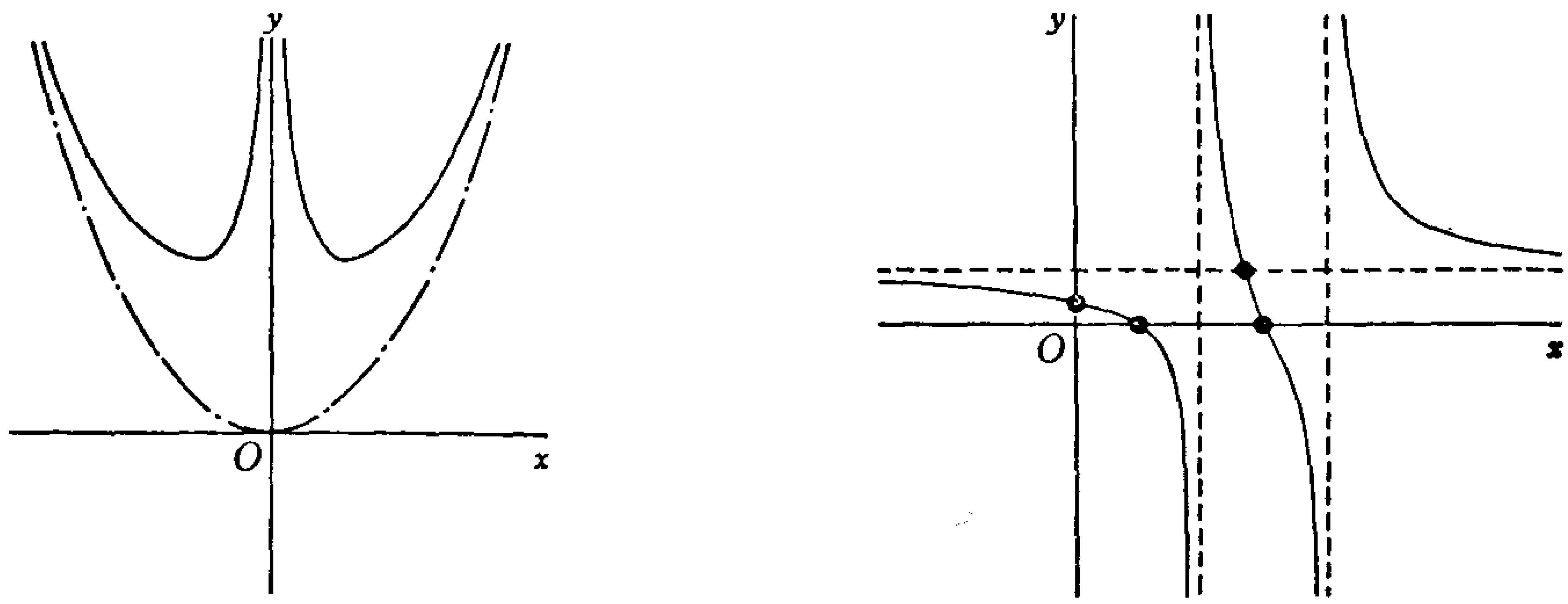
اطلاعاتی که تحت عناوین ذیل ارائه می‌گردد نقطهٔ شروع مناسبی هستند.

(۱) مجموعهٔ مقـادیری از x که به‌ازای آن y تعریف می‌شود، و هـر نوع وجوه ساده‌کننده‌ای مانند تقارن در حول یك محور؛

(۲) مقادیر y وقتی که x بزرگ می‌شود(مجانبهای افقی)؛

(۳) هر مقدار x که به‌ازای آن y بزرگ می‌شود (مجانبهای قائم)؛

(۴) هر نقطهٔ خاصی بر منحنی که می‌تواند در یك نگاه اجمالی دیده شود. مـانند نقاطی بر محورها.



(ب) (الف)

شکل ۲

مثال۱. $y=\dfrac{(x-۱)(x-۳)}{(x-۲)(x-۴)}$.

(۱) به‌ازای هر x بجز ۲ و ۴، تابع y تعریف شده است.

(۲) وقتی که $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$، $y\to ۱$. مجانب‌افقی $y=۱$ را رسم کنید. همچنین، بدیهی است که اگـر x عدد مثبت بزرگی بـاشد، $x-۱>x-۲$ و $x-۳>x-۴$، بنابراین وقتی که $x\to\infty$، منحنی ازبالا به‌این مجانب میل می‌کند.

(۳) $x=۲$ و $x=۴$ مجانبهای قائم هستند. ازعلائم عوامل در صورت و مخرج کسر نتیجه می‌شود که،

وقتی که $x\to ۴+$، $y\to+\infty$ و وقتی که $x\to ۴-$، $y\to-\infty$؛

وقتی که $x\to ۲+$، $y\to+\infty$ و وقتی که $x\to ۲-$، $y\to-\infty$.

(۴) از $y=۰$، نتیجه می‌شود، $x=۱$ یا $x=۳$
از $x=۰$، نتیجه می‌شود، $y=\dfrac{۳}{۸}$
} این نقاط را مشخص کنید.

اغلب، به‌دست آوردن محلهایی که منحنی مجانب افقی‌خود را قطع می‌کند، سودمند

است. در اینجا، به‌ازای $y=1$، به‌دست می‌آید $x=\frac{5}{2}$ (و، آنچه که مهمتر است، نقطهٔ دیگری موجود نیست).

اینك، تصور خوبی از شکل این منحنی داریم (شکل ۲ الف).

مثال ۲ . $y=x^2+\frac{1}{x^2}$

(۱) وقتی که $-x$ را به جای x قرار دهیم در y تغییری ایجاد نمی‌شود، منحنی نسبت به Oy متقارن است. y در همه جا بجز $x=0$ تعریف شده است و به‌ازای هر x، بجز ۰، مثبت است.

(۲) وقتی که $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$، $y \to \infty$. بعلاوه، وقتی x عدد بزرگی است، y کمی بزرگتر از x^2 است. بنابراین، سهمی $y=x^2$ را به‌عنوان راهنمایی برای x های بزرگ رسم می‌کنیم.

(۳) اگر $x \to 0+$ یا $x \to 0-$ آنگاه $y \to \infty$.

(۴) منحنی هیچیك از محورها را قطع نمی‌کند. اگر $x=\pm 1$ آنگاه $y=2$، (شکل ۲ ب را ببینید).

تمرین ۳ (الف)

شکلهای عمومی منحنیهایی را که به‌وسیلهٔ فرمولهای زیر داده شده‌اند، رسم کنید.

۱- $y=x^{10}$ ۲- $y=x^{-10}$ ۳- $y=x^{10}+x^{-10}$

۴- $y=\frac{x^2}{x+1}$ ۵- $y=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}$

۶- $y=\frac{x^2+1}{(x-2)(x-4)}$ ۷- $y=\frac{(2x-5)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$

۸- $y^2=\frac{x^2}{x^2+1}$ ۹- $y^2=\frac{x^2}{x+1}$

۴.۳. تابعهای پیوسته

از مثالهای فوق این تصور برای خواننده حاصل می‌شود که توابع معمولی را می‌توان به طور منطقی پیوسته نامید، اگر چه ممکن است بعضی از آنها به‌ازای مقادیر خاصی از x ناپیوستگیهایی داشته باشند. برای نمونه، خواننده تابعی راکه نمودار آن

درمثال ۱ از بخش ۳.۳ رسم گردیده است بجز در $x=۲$ و $x=۴$ پیوسته تلقی خواهد نمود. اوتابعی را پیوسته خواهد پنداشت که نمودارآن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ بتوان رسم کرد.

اینك، باید این تصورات غیر دقیق را با مفاهیم تحلیلی تهذیب کنیم. (امیدواریم) خواننده، ضمن تأمل، بپذیرد که برای اینکه تابعی مانند f در نقطهٔ $x=c$ پیوسته باشد لازم است که، (۱) $f(c)$ تعریف شود، (۲) وقتی که x به c میل می‌کند، مقدار $f(x)$ به $f(c)$ میل می‌کند. بنابراین، حکم پیوستگی چیزی بیشتر یا کمتر از بیانی در باب حدود نیست، بدین‌معنی که

$$\lim_{x \to c+} f(x)= \lim_{x \to c-} f(x)=f(c)$$

لزومی ندارد که $c+$ و $c-$ را مجزا نگهداریم وحالا می‌توانیم دو تعریف اساسی اقامه نماییم. اولی، حد یك تابع را بررسی می‌کند و دومی، پیوستگی آن را.

تعریف. وقتی $x \to c$، $f(x) \to l$ اگر، با ε مفروضی، δ یی‌موجود باشد به‌طوری که به ازای هر x که $0<|x-c|<\delta$،

$$|f(x)-l|<\varepsilon$$

δ به ε بستگی دارد و در حالت کلی هر چه ε کوچکتر باشد، مقدار δ باید کوچکتر گردد. در صورت تمایل می‌توانیم با نوشتن $\delta(\varepsilon)$ براین‌وابستگی تأکید نماییم.

توجه کنید که مقدار $x=c$ از مجموعه x هایی که به ازای آنها، برقرار بودن نامساوی‌تعریف فوق لازم است، مستثنی شده است. این‌عبارت به رفتار تابع، وقتی که x نزدیك به c می‌شود توجه دارد، نه به رفتارآن در c.

تعریف. تابع f در c پیوسته است درصورتی که اگر $x \to c$ آنگاه $f(x) \to f(c)$.

با ترکیب دو تعریف اخیر مشاهده می‌کنیم که تعریف ذیل تعریف معادلی از پیوستگی است.

f در c پیوسته است در صورتی که به ازای هر ε مفروضی، δ یی موجود باشد به طوری که به ازای هر x

اگر $|x-c|<\delta$، آنگاه $|f(x)-f(c)|<\varepsilon$.

مقادیری از x را که درآن $|x-c|<\delta$، یا به عبارت دیگر، بازهٔ باز $(c-\delta\,,\ c+\delta)$ را می‌توان یك همسایگی c نامید. در حالت عمومیتر، می‌توانیم این عبارت را برای بازهٔ بازی مانند $c-\delta_1<x<c+\delta_2$ به‌کار ببریم، که درآن ممکن است δ_1 و

δ_2 متفاوت باشند. این مطلب، ارزش آن را دارد که به عنوان یك تعریف بیان شود.

تعریف. یك بازهٔ باز را یك همسایگی هر یك از نقاط آن می نامند.

بنابراین، تعریف پیوستگی f در c بیان می‌کند که به‌ازای هر همسایگی مفروض از $f(c)$ مانند N_1، یك همسایگی از c مانند N_2 وجود دارد، به طوری که اگر x در N_2 باشد آنگاه $f(x)$ در N_1 است.

ما پیوستگی تـابع f در نقطهٔ c، یعنی پیوستگی در یك نقطه را تعریف کرده‌ایم. اینك، به تعریف پیوستگی در یك بازه می‌پردازیم. ابتدا، فرض کنید که بازه بسته باشد.

تعریف. f را در بازهٔ بسته (a, b) پیوسته گویند، در صورتی که،

(۱) به ازای هر c در $a<c<b$، f در c پیوسته باشد.

(۲) $\lim\limits_{x \to a+} f(x)=f(a)$، $\lim\limits_{x \to b-} f(x)=f(b)$.

هدف از بررسی نقاط انتهایی a و b به‌طور مجزا روشن است، می‌خواهیم ازهر اشاره‌ای دربارهٔ مقادیر x که خارج از (a, b) است اجتناب کنیم. اگر تعریف پیوستگی را در یك بازهٔ باز، مثلا، $a<x<b$، یا دربارهٔ نامتناهی $x>a$ بخواهیم، نقاط انتهایی وجود ندارند و شرط (۲) نیز حذف می‌شود.

تعریف. f را در یك بازهٔ باز پیوسته خوانیم، در صورتی که در هـر نقطهٔ این بـازه پیوسته باشد.

۵.۳. مثالهایی از توابع پیوسته و نا پیوسته

اینك، تبصره‌ای را که درآغاز بخش ۴.۳ داده شد، مبنی بر اینکه توابع معمولی بر-حسب x معمولا پیوسته هستند، دقیقتر ساخته و به تفصیل آن را شرح خواهیم داد.

کرانهای f. فرض کنیم که x بتواند هـر مقداری را در مجموعهٔ X اختیار کند. معمولا در عمل X یك بازه است که ممکن است بسته یا باز باشد. مقادیر $f(x)$ به ازای x در X تشکیل مجموعه‌ای از اعداد مانند Y را می‌دهند (بعضی مواقع با $f(X)$ نشان داده می‌شود). اگر مجموعهٔ Y کراندار باشد (بخش ۷.۱) گوییم که تابع f در X کراندار است. همچنین، $\sup Y$ و $\inf Y$ سوپرموم و اینفیموم تابع f، بـه ازای xهای در X، نامیده می‌شوند.

تابعهای پیوسته. درقضایای زیر، ممکن است شرط پیوستگی به یك نقطه یا به یك

مجموعه (بسته یا باز) نسبت داده شود مـادامی‌که در فرض و حکم به‌طور یکسان تغییر داده شود.

حاصلجمع دو تابع پیوسته، پیوسته است.

حاصلضرب دو تابع پیوسته، پیوسته است.

خارج قسمت دو تابع پیوسته، به ازای هر مقدار x که مخرج را صفر نکند، پیوسته است.

خواننده باید خود را متقاعد کند که این واقعیتها که دائماً مورد استفاده قرار می‌گیرند، به تأسی از استدلالهایی که برای قضایای بنیادی بر دنباله‌ها وضع گردیده و در بخش ۵.۲ ارائه شدند، قابل اثبات است.

بعلاوه داریم،

اگر n یك عدد صحیح مثبت باشد، تابع x^n به ازای جمیع مقادیر x پیوسته است، x^{-n}، بجز در $x=0$ پیوسته است.

می‌توان این‌را مستقیماً (با اثبات اینکه اگر $x-c$ کوچك باشد x^n-c^n کوچك است) یا به‌روش دیگر به‌وسیلهٔ استقراء یا به‌کار بردن قضیه‌ای در باب حـاصلضرب دو تابع پیوسته برای x^{n-1} و x، ثابت کرد.

اینك، می‌توانیم مجموع مضاربی از توانهای x را بسازیم تا نتایج ذیل‌را به‌دست آوریم:

به ازای جمیع مقادیر x، هر چند جمله‌ای پیوسته است.

خارج قسمت دو چند جمله‌ای، برای جمیع مقادیر xی که به ازای آن مخرج صفر نباشد، پیوسته است.

یك نتیجهٔ عمومیتر که زیاد مورد استعمال قرار می‌گیرد در زیر آمده‌است و پیوستگی تابعی را که از ترکیب دو تابع پیوسته حاصل می‌شود بیان می‌کند.

قضیه ۵.۳. فرض کنیم که

(۱) به ازای $x=\xi$ تابع $g(x)$ پیوسته است و $g(\xi)=\eta$؛

(۲) به ازای $y=\eta$ تابع $f(y)$ پیوسته است.

در این صورت، به ازای $x=\xi$ تابع $f\{g(x)\}$ پیوسته است.

برهان. می‌نویسیم،

$$g(\xi+h)=\eta+k$$

به ازای ζ داده شده δ را می‌توانیم طوری پیدا کنیم که اگر $|h|<\delta$،

$$|k|=|g(\xi+h)-g(\xi)|<\zeta$$

به ازای ε داده شده، ζ را می‌توانیم طوری پیدا کنیم که اگر $|k|<\zeta$،

$$|f(\eta+k)-f(\eta)|<\varepsilon$$

ترکیب این عبارتها نتیجه می‌دهد که اگر $|h|<\delta$،

$$|f\{g(\xi+h)\}-f\{g(\xi)\}|<\varepsilon \quad \blacksquare$$

چندتابع‌ناپیوسته. برای پیوستگی در c شرط لازم و کافی آن است که

$$f(c+)=f(c)=f(c-)$$

که در آن، $f(c+)$ به نشانهٔ حد $f(x)$ وقتی که $x \to c+$، نوشته می‌شود. ممکن است، برای ارائه یك ناپیوستگی در c، مثالهایی ساخته شود که یکی یا بیشتر از شرایط لازم را نداشته باشد. دو مثال می‌آوریم.

(۱) فرض کنیم که

$$f(x)=[x]=(\text{بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا مساوی } x)$$

اگر x یك عدد صحیح نباشد، این تابع پیوسته است. اگر x عدد صحیح مثبتی مانند n باشد، $f(n+)=f(n)=n$ و $f(n-)=n-۱$.

(۲) $f(x)=\sin(۱/x)$. به ازای $x=۰$، این تابع تعریف نشده است. اگر با تخصیص مقداری برای $f(۰)$ تعریف تابع کامل شود، مقدار $f(۰)$ هر چه باشد، این تابع به ازای $x=۰$ ناپیوسته خواهد بود. زیرا، وقتی که $x \to ۰$، تابع $f(x)$ به یك حد میل نمی‌کند، چون این تابع تمام مقادیر بین ۱− و ۱ (به‌انضمام این دو نقطه) را به ازای مقادیری از x، تا هر اندازه که مایلیم به صفر نزدیك باشد، اختیار می‌کند. مثلاً، اگر $(۱/x)=\left(۲n+\frac{۱}{۲}\right)\pi$، $\sin(۱/x)=۱$، و با انتخاب کردن n به اندازهٔ کافی بزرگ، این مقدار x به طور دلخواه نزدیك به ۰ می‌شود.

تمرین ۳ (ب)

۱ ــ مقادیر x را که به ازای آنها تابعهای زیر ناپیوسته‌اند تعیین کنید.

$$\sqrt{(x-a)/(b-x)}\ ,\quad ۱/\sqrt{x^{۳}+۱}\ ,$$

$$\tan x,\ \sec x,\ ۱/(۱+\tan x)$$

۲ ــ نمودار «تابع دندانه‌ای» زیر را رسم کنید.

$$x-[x]-\frac{۱}{۲}$$

۳ ــ نمودار این تابعها را رسم کنید.

$$[x^{2}],\ [\sqrt{x}],\ \sqrt{[x]}$$

مقادیری از x را، که درآن، تابع ناپیوسته است نشان دهید.

۴ ــ ثابت کنید تابعی که با

$$f(x)=x\sin(1/x)\quad (x\neq 0)$$
$$f(0)=0$$

تعریف می‌شود، به‌ازای جمیع مقادیر x پیوسته است. نمودار آن را رسم کنید.

۵ ــ ثابت کنید که اگر

$$f(x)=\frac{x^{2}-6x+5}{x^{2}-9x+18}$$

و $k\neq 1$، دومقداربرای x وجود دارد که به‌ازای آنها $f(x)=k$. به وسیلهٔ یك نمودار،آن را شرح دهید.

۶ ــ ثابت کنید که

$$\frac{x^{2}-2x+1}{x^{2}+2x+2}$$

به‌ازای جمیع مقادیرx کراندار است، وسوپرموم و اینفیموم آن را به‌دست آورید.

۷ ــ همین سؤال را برای

$$\frac{4x^{2}+3}{x^{4}+1}$$

پاسخ دهید.

۸ ــ حد عبارت زیر را وقتی که $x\to 1$، بررسی کنید.

$$\frac{x^{2}-3x+2}{x^{3}-3x^{2}+2}$$

۹ ــ حدود عبارات زیر را وقتی که $x\to 0$ بررسی کنید.

$$\text{(i)}\quad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}\quad ،\quad \text{(ii)}\quad \frac{a_{0}+a_{1}x+\cdots+a_{m}x^{m}}{b_{0}+b_{1}x+\cdots+b_{n}x^{n}}$$

$$\text{(iii)}\quad (a_{0}\neq 0,\ b_{0}\neq 0)\quad \frac{a_{0}x^{p}+a_{1}x^{p+1}+\cdots+a_{m}x^{p+m}}{b_{0}x^{q}+b_{1}x^{q+1}+\cdots+b_{n}x^{q+n}}$$

۱۰ــ اعداد p، q، و r را چنان پیدا کنید که

$$p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^{2}}$$

برای مقادیر بزرگ x نزدیکترین تقریب ممکن را، نسبت به توابع داده‌شده، معین کند.

$$\text{(i)}\quad \frac{x}{x^{۲}+x+۱}\text{،}\qquad \text{(ii)}\quad \frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۴}}$$

۶.۳. خاصیت مقدار میانی

قضیهٔ ۶.۳. فرض کنیم که f بر بازهٔ بستهٔ (a و b) پیوسته باشد و $f(a)\neq f(b)$ در این صورت، f هرمقدار واقع بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.

تبصره‌ها. فرض کنیم که $f(a)<f(b)$ و η عددی باشد که $f(a)<\eta<f(b)$. قضیه بیان می‌کندکه منحنی $y=f(x)$ خط $y=\eta$ را قطع می‌کند، یعنی اینکه عددی مانند ξ بین a و b وجود دارد به‌طوری‌که به‌ازای آن $f(\xi)=\eta$. (ممکن است بیش از یك چنین ξیی موجود باشد). با این نقطه نظر شهودی که هرتابع پیوسته تابعی است که نمودار آن‌را می‌توان بدون برداشتن قلم ازروی کاغذ ترسیم نمود، می‌توانیم یقین داشته باشیم که این قضیه درست است.

باوجود این، باید یك برهان تحلیلی ارائه‌دهیم وکمی تأمل‌راه رسیدن به‌چنین برهان مناسبی‌را نشان می‌دهد. فرض کنید x مقادیرصعودی از a تا b را اختیارکند. وقتی‌که x به‌اندازهٔکافی نزدیك به a باشد، $f(x)$ هنوزکوچکتراز η است. وقتی که x به‌اندازهٔکافی به b نزدیك باشد $f(x)$ بزرگتراز η است. اگرما ξ راسوپرموم اعدادی مانند x، که به‌ازای‌آنها، $f(x)<\eta$ اختیارکنیم، می‌توانیم به‌اثبات $f(\xi)=\eta$ امیدوار باشیم.

به‌طریق دیگری می‌توانستیم این جستجورا برای یافتن برهانی، به‌زبان یك‌برش ددکیند، بیان کنیم. باوجوداین، قضیهٔ ۸.۱ را دراختیار داریم، که درآن، وجود سوپرموم (که به‌وسیلهٔ یك برش ددکیند ثابت شده‌بود) بیان‌می‌شود واستعمال‌آن باصرفه‌تر است. شرح صوری این برهان درزیر می‌آید.

برهان قضیهٔ ۶.۳. فرض‌کنید S مجموعهٔ‌اعداد x در $a\leqslant x\leqslant b$ باشد‌که به‌ازای آن $f(x)<\eta$. مجموعه S ناتهی‌است، زیرا a در S است. باتوجه‌به‌قضیهٔ ۸.۱مجموعهٔ S دارای سوپرمومی مانند ξ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم که $a<\xi<b$. باتوجه به‌پیوستگی f در a، بازه‌ای مانند $a\leqslant x\leqslant c$ هست که در سرتاسرآن $f(x)<\eta$. بنابراین، $\xi\geqslant c>a$. به‌طریق مشابه، بازه‌ای مانند $d\leqslant x\leqslant b$ هست که در سرتاسرآن $f(x)>\eta$؛ این نقاط در S نیستند ودر نتیجه

$$\xi \leqslant d < b$$

حال ثابت می‌کنیم که (i) $f(\xi) \leqslant \eta$ و (ii) $f(\xi) \geqslant \eta$.

با توجه به‌تعریف سوپرموم ، به ازای هر ε مثبت، عددی از S مانند x' هست به‌طوری که $\xi-\varepsilon \leqslant x' \leqslant \xi$. به ازای این x'، $f(x')<\eta$. چون f در ξ پیوسته است، $f(\xi) \leqslant \eta$ که همان (i) است.

حال (ii) را ثابت می‌کنیم. هر x بزرگتر از ξ در S نیست، ودر نتیجه $f(x) \geqslant \eta$. با استفاده ازپیوستگی،حد $f(x)$ موقعی‌که x ازطریق مقادیر بزرگتر از ξ به ξ میل‌می‌کند، $f(\xi)$ است وبنابراین $f(\xi) \geqslant \eta$، و این همان (ii) است.

۷.۳. کرانهای یك تابع پیوسته

بحث را برای پی‌ریزی خاصیتهای عمومی دیگر تابعهای پیوسته ادامه می‌دهیم.

قضیهٔ ۷.۳.۱. اگر f بر بازهٔ بستهٔ (a, b) پیوسته باشد، بر (a, b)کراندار است.

تبصره‌ها. برای صحت این قضیه ضروری است که بازه بسته باشد. تابع $1/x$ دربازهٔ $0 < x \leqslant 1$، که ازسمت چپ بازاست، پیوسته است. باانتخاب x به‌اندازهٔ کافی نزدیك به ۰، می‌توانیم $1/x$ را به‌طوردلخواه بزرگ سازیم، لهذا، این تابع‌در $0<x \leqslant 1$ ازبالا کراندار نیست.

وجود کران بالایی برای f را ثابت خواهیم کرد، یعنی، عددی مانند K وجود داردکه به‌ازای $a \leqslant x \leqslant b$، $f(x) \leqslant K$. بحث متناظری وجود یك کران پایین را ثابت می‌کند.

برهان این قضیه شباهتی به‌برهان قضیهٔ مقدار میانی دارد، ازآن نظر که این قضیه سوپرموم مجموعهٔ مقادیر x در (a, b) راکه به‌طورشایسته‌ای تعریف شود، مورد استفاده قرار می‌دهد.

برهان. فرض‌کنیم S مجموعهٔ اعدادی مانند x_1 در $a \leqslant x_1 \leqslant b$ باشد به‌طوری که‌به‌ازای $a \leqslant x \leqslant x_1$ مقادیرتابع $f(x)$ ازبالا کرانداراست. دراین‌صورت S ناتهی است ، زیرا a به S تعلق دارد، واعضای S کوچکتراز b یامساوی آن‌هستند. بنابراین اعضای S سوپرمومی مانند ξ دارند. دراینجا، سه امکان وجود دارد

$$\text{(i)}\ a<\xi<b،\quad \text{(ii)}\ \xi=a،\quad \text{(iii)}\ \xi=b$$

ثابت خواهیم کرد که (i) و (ii) منجر به‌تناقضهایی می‌شوند. تناقض در (i) را با ارائهٔ عضوی از S که بزرگتر از ξ است، به دست خواهیم آورد. چون f در ξ پیوسته است،

بازه‌ای مانند $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ درداخل (a, b) هست، که درآن

$$f(x)<f(\xi)+1$$

(هرعدد مثبت دیگری‌را می‌توان به‌جای ۱، عیناً به‌همان صورت، به‌خدمت گرفت درصورتی که δی‌مناسبی‌اختیارشود.) چون ξ سوپرموم اعداد در S است، می‌توانیم K و x_1ی از S را پیداکنیم که برای‌آن، به‌ازای $a\leqslant x\leqslant x_1$، K، $f(x)<K$، و

$$x_1>\xi-\delta$$

بنابراین، به‌ازای xهایی که

$$a\leqslant x\leqslant \xi+\frac{1}{2}\delta ،$$

$$f(x)<\max\{K, f(\xi)+1\}$$

در نتیجه، عدد $\xi+\frac{1}{2}\delta$ در S است وباتعریف ξ به‌عنوان سوپرموم اعداد در S، متناقض است.

اینك، ثابت می‌کنیم که فرض (ii) $\xi=a$ به‌تناقضی منتهی می‌شود.

چون f در a (از راست) پیوسته است ، می‌توان δ یی پیدا کرد کـه بـه ازای $a\leqslant x<a+\delta$،

$$f(x)<f(a)+1$$

درنتیجه، $a+\frac{1}{2}\delta$ در S است که بافرض $\xi=a$ متناقض است.

بنابراین (iii) $\xi=b$ باقی می‌ماند و می‌بـاید از آن نتیجه بگیریـم که بـه‌ازای $a\leqslant x\leqslant b$ تابع f ازبالاکراندار است.

چـون f در b از چـپ پیوسته است ، δ یـی موجـود است کـه بـه ازای $b-\delta<x\leqslant b$،

$$f(x)<f(b)+1$$

چون b سوپرموم اعداد موجود در S است، K و x_1ی از S هست که به‌ازای xهایی کـه $a\leqslant x\leqslant x_1$،

$$f(x)<K$$

که در آن، $\delta - b > x_1$. بنابراین، به‌ازای هر x که $a \leqslant x \leqslant b$،

$$f(x) < \max\{K,\ f(b)+1\} \quad \blacksquare$$

قضیهٔ ۲.۷.۳. یك تابع پیوسته دربازه‌ای بسته مقادیرکرانی خودرا اختیارمی‌کند. به‌صورت نمادی، اگر به‌ازای $a \leqslant x \leqslant b$ تابع f پیوسته باشد و$M = \sup f(x)$ آنگاه مقداری مانند x_1 در $a \leqslant x_1 \leqslant b$ هست که، به‌ازای‌آن، $f(x_1) = M$ (با عبارت مشابهی برای $m = \inf f(x)$).

تبصره‌ها. مانند قضیهٔ قبل، ضروری است که بازه بسته باشد. مثلا تابع $x+۲$ پیوسته است و کرانهای آن دربازهٔ باز $۰ < x < ۱$ عبارت از $M = ۳$ و $m = ۲$ هستند. دراینجا، هیچ مقدار xی در $۰ < x < ۱$ وجود ندارد که به‌ازای آن تابع $x + ۲$ این مقادیررا اختیارکند.

دو برهان ارائه می‌دهیم. اولی کوتاه اما نسبتاً ابتکاری است. دومی، مثالی از یك تکنیك عمومی بسیارقوی است ــ روش دونیم سازی ــ که اکنون احتمالا دانشجو بر آن تسلط دارد.

برهان‌اول. فرض کنید که xی نباشد که به‌ازای آن

$$a \leqslant x \leqslant b \text{ و } f(x) = M$$

دراین‌صورت، به‌ازای هر x در $a \leqslant x \leqslant b$، $M - f(x) > ۰$.
بنابربخش ۵.۳، تابع

$$\frac{۱}{M - f(x)}$$

به‌ازای $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته است. زیرا مخرج آن صفر نمی‌شود.
درنتیجه، باتوجه به‌قضیهٔ اخیراین تابع کرانداراست و kی هست که به‌ازای هر x که $a \leqslant x \leqslant b$، $\frac{۱}{M - f(x)} < k$.

بنابراین، به‌ازای هر x که $a \leqslant x \leqslant b$، خواهیم داشت $f(x) < M - \frac{۱}{k}$ که با $\sup f(x) = M$ متناقض است. $\blacksquare$

برهان دوم (باروش دونیم سازی). بازهٔ (a, b) را دو نیم کنید. کلید این برهان آن است که حداقل برای یکی ازدونیمه $\sup f(x) = M$. این نیمه را انتخاب کنید (یا، اگر درهردونیمه $\sup f(x) = M$، (مثلا) نیمه سمت‌چپ‌را انتخاب کنید).

بنابراین، بازه‌ای داریم که آن‌را باحروف (a_1, b_1) نامگذاری می‌کنیم و در آن یا $a_1=a$ یا $b_1=b$ به‌طوری‌که

$$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)$$

اینك بازهٔ (a_1, b_1) را نصف کرده و استدلال را تکرار می‌کنیم. بازه‌ای مانند (a_2, b_2) را به دست می‌آوریم که در آن $\sup f(x)=M$ ، به طوری که

$$b_2-a_2=\frac{1}{4}(b-a)$$

به‌طور نامحدود این مراحل‌را ادامه می‌دهیم. دنباله‌ای نامتناهی از بازه‌ها مانند (a_n, b_n) حاصل می‌گردد که درهریك ازآنها $\sup f(x)=M$، به‌طوری‌که

$$a\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots,$$

$$b\geqslant b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots,$$

$$b_n-a_n=(b-a)/2^n$$

سه سطر اخیر ثابت می‌کندکه دنبالهٔ صعودی a_n ودنبالهٔ نزولی b_n به‌یك حد، مانند ξ، میل می‌کنند. (توجه‌کنیدکه ξ ممکن است a یا b باشد.)

به‌سادگی دیده می‌شودکه $f(\xi)=M$. یك برهان صوری این است‌که:

فرض می‌کنیم‌که، درصورت امکان $f(\xi)=k<M$. k_1 را چنان انتخاب‌کنیدکه $k<k_1<M$. باتوجه‌به‌پیوستگی $f(x)$ در ξ، می‌توان‌بازه‌ای مانند $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ پیدا نمودکه درآن $f(x)<k_1$. اما، اگر n به‌اندازهٔ‌کافی بزرگ باشد، بازهٔ (a_n, b_n) در داخل بازهٔ $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ قرارمی‌گیرد. درنتیجه، نـامساوی $f(x)<k_1$ بااین امرکه در (a_n, b_n)، $\sup f(x)=M$ متناقض است. ▌

۸.۳. پیوستگی یکنواخت

فرض‌کنیم‌که دربازه‌ای مانند (a_1, b)

$$\sup f(x)=M \quad و \quad \inf f(x)=m$$

عدد $M-m$ استحقاق یك‌عنوان توصیفی را دارد وما آن را پرش تابع دربازهٔ (a, b) می‌نامیم. (بعضی مواقع، اصطلاح «نوسان» به‌کاربرده می‌شود، ولی این اصطلاح دارای این اشکال است‌که مفهوم تابع موجی‌را به‌ذهن القاء می‌کند).

دراین کتاب، قضایای این بخش تنها درفصل۷ موردنیاز خواهند بود. درآن فصل، درخواهیم یافت که قضیهٔ ۲.۸.۳، دراقامهٔ انتگرال یك تابع پیوسته جنبهٔ اساسی دارد.

قضیهٔ ۱.۸.۳. فرض‌کنیم که f دربازهٔ بستهٔ (a, b) پیوسته باشد. دراین‌صورت، با ε مفروض، این بازه‌را می‌توان به‌تعدادی متناهی از اجزاء تقسیم نمودکه درهریك از آنها پرش f از ε کوچکتر باشد.

تبصره. فرض‌کنیم که c نقطهٔ میانی (a, b) باشد. اگر هر دوی بازه‌های (a, c)، (c, b) را بتوان به‌تعدادی متناهی از اجزاء تقسیم نمودکه درآن پرش f از ε کوچکتر باشد، این اجزاء تشکیل زیرتقسیمی از (a, b) را باهمان خاصیت می‌دهند. درنتیجه، این قضیه ازبرهان به‌طریق دونیم سازی متابعت می‌کند.

برهان. فرض‌کنید که قضیه‌نادرست باشد. بازهٔ (a, b) را دونیمه‌کنید. حداقل برای یکی‌ازاین‌نیمه‌ها قضیه نادرست‌است. این‌نیمه‌را انتخاب کنید (یااگردرهردونیمه نادرست باشد، نیمهٔ سمت چپ‌را انتخاب کنید) وآن را به‌صورت (a_1, b_1) مشخص‌کنید. عمل‌دو-نیم‌سازی‌را تکرارکنید. دنباله‌ای‌صعودی مانند a_n ودنباله‌ای‌نزولی‌مانند b_n باحدمشترکی مانند ξ به‌دست می‌آید.

چون f در ξ پیوسته است، بازه‌ای مانند $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ هست‌که درآن پرش f کوچکترازε است. (اگر ξ عدد a یا b باشد، این‌بازه $(a, a+\delta)$ یا $(b-\delta, b)$ است).

ولی اگر n به‌اندازهٔ‌کافی‌بزرگ باشد، بازهٔ $(\xi-\delta, \xi+\delta)$ شامل (a_n, b_n) است. بنابرتعریف (a_n, b_n)، این بازه‌رانمی‌توان به‌تعدادمتناهی جزء تقسیم‌کردکه درآن‌پرش f کوچکتر از ε باشد، واین یك تناقض است. ▎

قضیهٔ ۲.۸.۳. فرض‌کنید f دربازهٔ بستهٔ (a, b) پیوسته باشد. با ε مفروض، δ یی وجود دارد به‌طوری‌که اگر x_1 و x_2 نقاط دلخواهی از (a, b) با $|x_1 - x_2| < \delta$ باشند، آنگاه

$$|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$$

برهان. بنابرقضیهٔ قبلی، (a, b) را می‌توانیم به‌تعدادی متناهی زیربازه تقسیم‌کنیم‌که درهریك ازآنها پرش $f(x)$ کوچکتر از $\frac{1}{2}\varepsilon$ باشد. δرا طول کوچکترین این زیربازه‌ها انتخاب می‌کنیم. اگر $|x_2 - x_1| < \delta$ آنگاه x_1 و x_2 متعلق به‌یك زیربازه یا زیربازه‌های‌مجاور هستند. درحالت اول،

$$|f(x_1)-f(x_2)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

دردومی، اگر c نقطهٔ انتهایی مشترك دوزیربازه باشد،

$$
\begin{aligned}
&|f(x_1)-f(x_2)| \\
&\quad \leqslant |f(x_1)-f(c)|+|f(c)-f(x_2)| \\
&\quad < \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon=\varepsilon. \blacksquare
\end{aligned}
$$

این قضیه، قضیهٔ پیوستگی یکنواخت نامیده می‌شود. خواننده ممکن‌است این‌عبارت را صرفاً به‌عنوان یك نامگذاری تلقی کند، تااینکه بامفهوم یکنواختی (که خارج از قلمرو این کتاب است) درقالبهای دیگری درآنالیز رو به‌رو شود.

مقصود این قضیه را می‌توان به‌کمك تذکرات زیر بیان‌کرد. پیوستگی برای یك مقدار x تضمین می‌کندکه، با ε مفروض، δ یی هست که، اگر x_1 و x_2 نقاط دلخواهی دربازهٔ $(x-\delta, x+\delta)$ باشند آنگاه $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. این δ به ε وهمچنین به‌مقدار خاص x بستگی دارد. قضیهٔ ۲.۸.۳ بیان می‌کندکه ممکن است δ یی انتخاب‌شود که برای هر x در (a, b) به‌کاررود.

۹.۳. توابع معکوس

شما به‌مواردی برخوردکرده‌ایدکه درآن، بدون مواجهه با اشکال عمده‌ای، تابعی به‌عنوان معکوس یك تابع معلوم ساخته شده است. برای مثال، معادلهٔ $x=\sin y$ برای تعریف y به‌صورت‌تابعی مانند $\arcsin x$ از x به‌کار می‌رود. این مثال ثابت می‌کندکه روش‌کارنیاز به‌دقت دارد، زیرا، به‌ازای x مفروض، تعدادی نامتناهی ازمقادیر y وجود دارند و اگربخواهیم درمحدودهٔ توابع یك‌مقداری باقی بمانیم می‌باید محدودیتهایی برای مقادیرمجاز y قایل شویم.

اینك، یك قضیهٔ وجودی ارائه خواهیم دادکه مارا مطمئن می‌سازدکه اگر شرایط سادهٔ معینی مهیا گردد، می‌توان تابع معکوس جدیدی برای تابع معلومی به‌دست‌آورد.

تعریف. تابع f به ازای x هایی که $a \leqslant x \leqslant b$ صعودی است درصورتی که به ازای هر x_1 و x_2 که $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ آنگاه $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. اگر $f(x_1) < f(x_2)$، گوییم که f اکیداً صعودی است.

قضیهٔ ۹.۳. فرض‌کنیدکه f به‌ازای xهایی‌که $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد و $f(a)=c$، $f(b)=d$. در این صورت، تابعی مانند g هست‌که به ازای $c \leqslant y \leqslant d$

پیوسته و اکیداً صعودی است ، و $y=\{g(y)\}f$ (بنابراین ، $g(y)$ معکوس تابع $f(x)$ است).

تبصره‌ها. این وضعیت با استفاده از نمودار به‌سادگی قابل درک است. بعلاوه، می‌توانیم مشاهده کنیم که مفروضات آن طبیعی هستند. اگر f اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) نباشد، ممکن بود مقادیری از y که متناظر با بیش از یك مقدار x است وجود داشته باشد. دراین صورت، (تابع) «معکوس یك مقداری» نمی‌تواند وجود داشته باشد. اگر f ناپیوسته باشد، ممکن است به‌ازای بعضی مقادیر ξ داشته باشیم، $f(\xi+)=\mu>\lambda=f(\xi-)$ و در بازهٔ (λ,μ) تابع معکوس موجود نیست.

برهان. فرض کنید k عدد دلخواهی باشد به‌طوری که $c<k<d$.
بنابر قضیهٔ ۶.۳ مقداری مانند h وجود دارد به‌طوری که

$$f(h)=k$$

وچون f اکیداً صعودی است، تنها یك چنین hی متناظر با یك k مفروض موجود است.
دراین‌صورت، تابع معکوس g با $h=g(k)$ تعریف می‌شود.
به‌سادگی می‌توان مشاهده نمود که g اکیداً صعودی‌است. برای یك برهان‌صوری، فرض کنید $y_1<y_2$ و $y_1=f(x_1)$، $y_2=f(x_2)$ با توجه به پاراگراف اخیر، x_1 و x_2 به‌طور منحصر به‌فردی تعریف می‌شوند. اگر $x_1\leqslant x_2$ آنگاه ، چون f صعودی‌است، $f(x_2)\leqslant f(x_1)$، یعنی، $y_2\leqslant y_1$ واین با فرض $y_1<y_2$، متناقض است. در نتیجه، $x_1<x_2$ و g اکیداً صعودی است.
آنچه از اثبات باقی می‌ماند آن است که g پیوسته است.
با $\varepsilon>0$، فرض کنید

$$f(h-\varepsilon)=k_1 \quad \text{و} \quad f(h+\varepsilon)=k_2$$

دراین صورت، چون f اکیداً صعودی است،

$$k_1<k<k_2$$

واگر $k_1<y<k_2$ آنگاه

$$h-\varepsilon<g(y)<h+\varepsilon$$

چون ε دلخواه است، g در $y=k$ پیوسته است.
دراینجا k عدد دلخواهی در بازهٔ باز (c,d) است. استدلال مشابهی را برای پیوستگی یك طرفه در نقاط انتهایی c و d می‌توان بنا نهاد.

تمرین ۳ (ج)

۱ ــ در پیوستگی توابع زیر بحث کنید:

(i) هنگامی که x عدد منطقی مانند p/q به صورت تحویل ناپذیر باشد، $f(x)=1/q$ و هنگامی که x اصم باشد، $f(x)=0$

(ii) $f(x)=x\log \sin^2 x\ (x\neq 0)$، $f(0)=0$

(iii) $f(x)=\dfrac{1}{x-a}\operatorname{cosec}\dfrac{1}{x-a}$

۲ ــ تابعی بسازید که هرمقدار y در $0 \leqslant y \leqslant 1$ را یك وتنها یك بار به‌ازای مقادیر x در $0 \leqslant x \leqslant 1$ اختیار کندو به‌طوری که به‌ازای بعضی ازمقادیر x در $0 \leqslant x \leqslant 1$ ناپیوسته باشد.

۳ ــ تابع f بر $a \leqslant x \leqslant b$ کراندار است و $M(x)$ سوپرموم مقادیر f در بازهٔ بستهٔ (a, x) است. ثابت کنید که اگر f به‌ازای یك‌مقدار x_0 در $a < x_0 < b$ پیوسته باشد،و اگر $f(x_0) < M(x_0)$، آنگاه بازه‌ای شامل x_0 هست که در آن $M(x)$ ثابت است.

۴ ــ آیا امکان دارد که تابعی به‌ازای یك مقدار x پیوسته و به ازای جمیع مقادیر دیگر ناپیوسته باشد؟

۵ ــ درقضیهٔ ۲.۸.۳ با انتخاب $f(x)=x^{1/3}$، $a=-1$، $b=1$، $\varepsilon=\dfrac{1}{10}$ مقداری برای δ ارائه دهید.

۶ ــ کدام یك ازمجموعهٔ اطلاعات زیر، (i)—(iii)، برای تعیین مقدار $f(0)$ کفایت می کند؟

(i) f در $x=0$ پیوسته است ودرهر همسایگی $x=0$ هردو مقدار مثبت ومنفی را اختیار می کند،

(ii) با ε مفروض، δیی موجود است که به‌ازای $0<|x|<\delta$، $|f(x)|<\varepsilon$،

(iii) وقتی که $h \to 0$، $f(h)\to a$ و

$$\frac{f(h)+f(-h)-2f(0)}{h}\to l$$

۷ ــ تابع f بر $a \leqslant x \leqslant b$ کراندار است و به‌ازای هر زوج مقادیر x_1, x_2 که $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant b$،

$$f\left\{\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\right\} \leqslant \tfrac{1}{2}\left\{f(x_1)+f(x_2)\right\}$$

ثابت کنید که f به‌ازای xهایی که $a < x < b$، پیوسته است.

۸ ـ به‌ازای هر x تابع f تعریف می‌شود و به‌ازای هر x و x'،

$$|f(x)-f(x')| \leqslant \alpha |x-x'|$$

که در آن، عدد ثابت α کوچکتر از ۱ است. دنبالهٔ $x_۱, x_۲, \ldots$ با $x_۰$ مفروضی و

$$x_n = f(x_{n-۱}) \quad (n = ۱, ۲, \cdots)$$

تعریف شده است. ثابت کنید که وقتی $n \to \infty$، $x_n \to \xi$ که در آن،

$$\xi = f(\xi)$$

همچنین، ثابت کنید که اگر $f(۰) \geqslant ۰$ آنگاه

$$\frac{f(۰)}{۱+\alpha} \leqslant \xi \leqslant \frac{f(۰)}{۱-\alpha}$$

۴

حساب دیفرانسیل

۱.۴ . مشتق

اگر، برای مقدار مفروضی از x،

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

وقتی h به ۰ میل می‌کند، به حدی متناهی میل کند، این حد را، که به $f'(x)$ نشان داده می‌شود، مشتق یا ضریب دیفرانسیل f در مقدار x می‌خوانند. تابع f را درآن مقدار x دیفرانسیلپذیر می‌نامند.

برای تشریح همتای هندسی این تعریف، فرض‌کنیم P نقطهٔ مفروضی روی منحنی $y=f(x)$ و Q نقطه‌ای متغیر در روی آن منحنی باشد. اگر، وقتی که Q در روی منحنی به P میل می‌کند، مقدار گرادیـان خط PQ به یك حد میل کند، منحنی دارای خط مماس در P بوده و گرادیان‌آن برابر $f'(x)$ است.

این تعریف ایراد چند تبصره را ضروری می‌کند.

(۱) یك علامت رساتر نوشتن h، مقدار تغییر x، به‌صورت δx است (δx علامت واحدی‌است وحاصلضرب δ در x نیست). تغییرمتناظر در y، یعنی $f(x+\delta x)-f(x)$، δy نامیده می‌شود. در این‌صورت، مشتق عبارت است از حد نسبت

$$\frac{\delta y}{\delta x}$$

وقتی‌که δx به صفر میل می‌کند، مشتق را می‌توان چنین نوشت

$$\frac{dy}{dx}$$

که در آن، فعلا از d/dx به عنوان نمادی استفاده می‌شود که بیانگر عملی است که روی هرآنچه بعد از d در سطر بالا می‌آید انجام می‌شود. (dy و dx صورت و مخرج یك کسر نیستند.)

(۲) یك تابع، که برای مجموعه‌ای از مقادیر x تعریف می‌شود، ممکن است برای تمام آن مقادیر دیفرانسیلپذیر باشد یا برای هیچیك نباشد یا برای بعضی باشد و برای بقیه نباشد.

مثالها. (i) $f(x)=x^{۲}$

برای تمام مقادیر x ، $f'(x)=۲x$

(ii) $f(x)=x$ (x منطق)

$=۰$ (x اصم)

برای هیچ مقداری از x دیفرانسیلپذیر نیست.

(iii) $f(x)=|x|$

وقتی $x>۰$ ، $f'(x)=۱$ و وقتی $x<۰$ ، $f'(x)=-۱$. f در $x=۰$ دیفرانسیلپذیر نیست.

(۳) یك شرط لازم (ولی نه‌کافی) برای دیفرانسیلپذیری f در یك مقدار مفروضی از x پیوستگی آن در همان نقطه است.

زیرا، $\delta y/\delta x$ وقتی‌که $\delta x \to ۰$ تنها وقتی می‌تواند به یك حد میل کند که $\delta y \to ۰$، یعنی اینکه f پیوسته باشد.

تابع $|x|$ در $x=۰$ پیوسته است ولی دیفرانسیلپذیر نیست.

(۴) تذکرات ذیل تا حدودی از مثالهای (۲) ناشی شده‌اند.

درتعریف مشتق اگربخواهیم، می‌توانیم $h \to ۰+$ و $h \to ۰-$ را به طور مجزا در نظر بگیریم که به این ترتیب آنچه‌که ممکن است مشتقات راست و چپ، نامیده شوند، تعریف می‌شوند. اگر مشتقات راست و چپ مساوی باشند مشتق $f'(x)$ به معنی معمولی موجود است. تابع $|x|$ در مثال (iii)، در $x=۰$ دارای مشتق راست ۱ و مشتق چپ ۱ — است.

مثال دیگری از یك قوهٔ x در نظر می‌گیریم. اگر $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ در ایــن صورت در $x=0$،

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=h^{-\frac{2}{3}}$$

و این هم وقتی $h\to 0$، بــه $+\infty$ میل می‌کند. به بیــان هندسی، منحنی $x=y^{3}$ دارای مماس قائم در $(0,0)$ است. در تعریف مشتق تصریح کردیم که حد بــاید مقداری متناهی باشد و بنابراین تعریف گوییم $x^{\frac{1}{3}}$ در $x=0$ دیفرانسیلپذیر نیست.

تصمیم در رد یا قبول مشتقات نامتناهی برمبنای سهولت است. حالات استثنایی، که در صورت قبول مشتقات نامتناهی باید در قضایا بیان شوند، تعادل را به نفع حذف آنها بههم‌می‌زنند. مثلا، اگر برای مقداری از x، $f'(x)$ برابر $+\infty$ و $g'(x)$ برابر $-\infty$ باشد، می‌توان بــا مثالی ساده نشان داد که $f+g$ می‌تواند دارای مشتقی بــا هر مقدار باشد یا مشتقپذیر نباشد، بنابراین، قانونی که در (۱) بخش ۲.۴ برای مشتق مجموع دو تابع ارائه شده است، سادگی خود راکه در مورد مشتقات متناهی دارد، از دست می‌دهد.

تمرین ۴ (الف)

۱ ــ معادلهٔ مماس بر منحنی $y=x^{2}-4$ را در هریك ازنقاط تلاقی با (i) محور xها، (ii) محور yها، پیدا کنید.

۲ ــ معادلهٔ قائم بر منحنی $2y=(x+2)^{2}$ را در هر یك از نقاطی که درآن، $y=2$، پیدا کنید.

۳ ــ معادلهٔ مماس بر منحنی ذیل را در مبدأ مختصات پیدا کنید.

$$y=x^{2}(x-1)^{2}+3x$$

ثابت کنید که خط مماس بر منحنی در نقطهٔ دیگری نیز بر آن مماس است.

۴ ــ ثــابت کنید که معادلهٔ مماس بر سهمی $y^{2}=4ax$ در نقطهٔ $(at^{2}, 2at)$ عبارت است از

$$ty=x+at^{2}$$

۵ ــ تابعی‌از x مثال بزنید که در تمام نقاط x پیوسته بوده ودرتمام مقادیر x به‌استثنای ۱ و ۱ــ دیفرانسیلپذیر باشد.

۶ ــ معین کنید هر یك از توابع ذیل در چه مقادیری از x، (الف) پیوسته نیست، (ب) دیفرانسیلپذیر نیست.

(i) $[x]$، (در صفحه ۶۹ تعریف شده است)

(ii)
$$f(x)=\begin{cases} x-1 & (x\leqslant 1)\\ x^2-1 & (x>1)\end{cases}$$

۷ ــ زاویهٔ تقاطع هر زوج از منحنیهای ذیل را پیدا کنید

(i) $2y=x^2$، $y=x^2(2-x)$

(ii) $2y=x^2$، $2x=y^2$

۲.۴. دیفرانسیلگیری مجموع، حاصلضرب، و غیره

فرض می‌کنیم توابع f و g برای مقادیر مفروض x دارای مشتق هستند.

(۱) اگر $s(x)=f(x)+g(x)$ ، آنگاه $s'(x)=f'(x)+g'(x)$

اگر $t(x)=kf(x)$، آنگاه $t'(x)=kf'(x)$

(۲) اگر $\phi(x)=f(x)g(x)$ ، آنگاه $\phi'(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

برهان. اثبات (۱) به خواننده واگذار می‌شود. داریم

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

جملهٔ اول در مجموع آخر را در نظر بگیرید. چون f در x دیفرانسیلپذیر است در x پیوسته است و در نتیجه $f(x+h)\to f(x)$، وقتی $h\to 0$. عامل دیگر $\{g(x+h)-g(x)\}/h$ نیز دارای حد $g'(x)$ است. چون حد حاصلضرب برابر حاصلضرب حدود است، وقتی $h\to 0$ ،

$$f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\to f(x)g'(x)$$

به طریق مشابه، وقتی $h\to 0$

$$g(x)\frac{f(x+h)-g(x)}{h}\to g(x)f'(x)$$

بالاخره، به‌این قضیه متوسل می‌شویم که حد مجموع دوتابع از h برابر مجموع حدود

آنها است. ∎

این فرمولها برای دیفرانسیلگیری یك‌حاصلضرب، نمونه‌ای از فرمولهایی هستند که بارها وبارها درحساب دیفرانسیل به‌کارمی‌آیند. اثبات به‌طورکامل داده شده تا بستگی آن به‌کاربرد مکررقضایای راجع به‌حدود تأکید شود.

(۳) اگر $\phi(x)=1/g(x)$ و $g(x)\neq 0$، آنگاه

$$\phi'(x)=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

این، ازرابطهٔ ذیل نتیجه می‌شود

$$\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}=\frac{g(x)-g(x+h)}{hg(x)g(x+h)}$$

(۴) اگر $\phi(x)=f(x)/g(x)$، آنگاه

$$\phi'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

(۲) و (۳) را باهم ترکیب کنید.

(۵) تابعی ازیك تابع

فرض کنیم $u=g(x)$ و $y=f(u)$، به‌طوری که مثلا

$$y=f\{g(x)\}=\phi(x)$$

در این صورت

$$\phi'(x)=f'\{g(x)\}g'(x)$$

یا، به‌علامتی دیگر،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

برهان. فرض‌کنیم δx تغییری در x باشد، و δu تغییرمتناظر در u به‌وسیلهٔ رابطه تابعی $u=g(x)$ باشد. فرض کنیم δy تغییر y از $y=f(u)$ باشد. دراین‌صورت

$$\delta u=\{g'(x)+\varepsilon\}\delta x$$

که در آن ε (که وابسته به x و δx است) وقتی‌که $\delta x\to 0$، به‌صفر میل می‌کند. به‌طریق مشابه

$$\delta y=\{f'(u)+\varepsilon_1\}\delta u$$

که در آن، وقتی $\delta u \to 0$، $\varepsilon_1 \to 0$. اینجا باید توجه کنیم که اگر $g'(x)\neq 0$، δu برای مقادیر به‌حدکافی کوچک δx مخالف صفر است، ولی اگر $g'(x)=0$، δu برای مقادیر کوچک دلخواه δx، می‌تواند مقادیر صفر را اختیار کند. اگر $\delta u=0$، ε_1 به‌وسیلهٔ رابطه‌ای که δy و δu را به‌هم مربوط می‌کند معین نمی‌شود و در این حالت، $\varepsilon_1=0$ می‌گیریم.

نمایشهای δu و δy نتیجه می‌دهند که

$$\delta y=\{f'(u)+\varepsilon_1\}\{g'(x)+\varepsilon\}\delta x$$

این را به δx تقسیم نموده و δx را به‌صفر میل دهید.

(۶) تابع معکوس

فرض کنیم $y=f(x)$ در $a\leqslant x\leqslant b$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد. اگر برای مقدار مفروضی از x در $a<x<b$، $f'(x)\neq 0$، آنگاه تابع معکوس $x=g(y)$ در مقدار متناظر y دیفرانسیلپذیر است و

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

برهان. بنابر قضیهٔ ۹.۳، تابع معکوس موجود است.

اگر h (ناصفر) مفروض باشد، k را چنین تعریف می‌کنیم

$$y+k=f(x+h)$$

در این صورت $k\neq 0$ و، اگر k مفروض باشد، h به‌طور منحصر به‌فرد از رابطهٔ

$$g(y+k)=x+h$$

معین می‌شود، بنابراین

$$\frac{g(y+k)-g(y)}{k}=\frac{h}{k}=\frac{h}{f(x+h)-f(x)}$$

فرض کنیم $k\to 0$. در این صورت، چون g پیوسته است، $h\to 0$. ▮

۳.۴. دیفرانسیلگیری توابع مقدماتی

اگر m منطق باشد، x^m دارای مشتق mx^{m-1} است، بجز برای حالتهای (i) $x=0$ وقتی، $m<1$ و (ii) $x\leqslant 0$ وقتی، $m=p/q$ (در صورت تحویل ناپذیری p/q) و

q عدد صحیح زوجی است.

برهان. ابتدا فرض کنیم که قوه، عدد صحیح مثبتی مانند n باشد. دراین‌صورت،اگر $h\neq 0$،

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=nx^{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}h+\dots+h^{n-1}$$

وقتی $h\to 0$، حد هریك از $n-1$ جملهٔ بعد از اولین جمله درطرف راست، صفر است.

حال اگرقوه، عدد صحیح مثبتی نباشد، چنین استدلالی چندان آسان نیست. بسط‌دو جمله‌ای، یك سری نامتناهی خواهد بود وتاکنون دربارهٔ حد مجموع بی‌نهایت جمله، که هریك وقتی $h\to 0$، به‌صفرمیل می‌کنند، قضایایی نداریم. ماروش دیگری را اتخاذ می‌کنیم.

فرض کنیم قوه، عدد منفی صحیحی مانند $-n$ باشد. دراین صورت،

$$\frac{(x+h)^{-n}-x^{-n}}{h}=\frac{x^n-(x+h)^n}{h(x+h)^n x^n}$$

اگر $x\neq 0$، حد سمت راست وقتی $h\to 0$، عبارت است از $-nx^{n-1}/x^{2n}$ یا $(-n)x^{-n-1}$)، این همان چیزی است که می‌خواستیم.

بالاخره،فرض‌کنیم‌که m عدد منطق p/q است که در آن، p و q اعداد صحیح‌اند، $q>0$، وحالات (i) و (ii) مستثنی شده‌اند. ساده‌ترین برهان، بااستعمال (۶) بخش ۲.۴، به‌شرح ذیل است.

می‌نویسیم $y=u^p$ و $x=u^q$. بنابراین، $y=x^{p/q}$. دراین صورت،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\Big/\frac{dx}{du}$$

$$=\frac{pu^{p-1}}{qu^{q-1}}=\frac{p}{q}u^{p-q}=mx^{m-1} \quad |$$

اینك به‌واسطهٔ روابط از (۱) تا (۴) بخش ۲.۴ می‌توانیم ازهرکثیرالجملهٔ

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$$

وهرتابع‌گویایی‌از x، یعنی، خارج قسمتی مانند $p(x)/q(x)$ ازدوکثیرالجمله‌که به‌ازای هیچ مقدار x، $q(x)$ صفرنیست، مشتق بگیریم.

برای ارائهٔ تمرینهایی باتنوع زیاد، بهتراست که مشتقات ذیل‌را دانسته فرض‌کنیم.

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x,\ \frac{d}{dx}\log x=\frac{1}{x}\ (x>0)$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x,\ \frac{d}{dx}\cos x=-\sin x$$

بررسی اصولی بیشتری ازخواص توابع نمایی، لگاریتمی، و مثلثاتی (و مشتقات آنها) بهتراست تا فصل ۶، که بعد از بحث کافی درسریهای نامتناهی می‌آید، به‌تعویق افتد.

تمرین ۴ (ب)

۱ ــ مشتق بگیرید:

$$\frac{x}{(x^2+a^2)^{1/2}},\quad \frac{x^2}{x^2+a^2},\quad \frac{x^3}{(x^2+a^2)^{3/2}}$$

۲ ــ حدود ذیل را محاسبه کنید:

(i) $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}$، (وقتی $x\to 1$)

(ii) $\dfrac{x^4-a^4}{x^3-a^3}$، (وقتی $x\to a$)

(iii) $\dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+1}-2}$، (وقتی $x\to 3$)

۳ ــ به‌استقراء ثابت کنید که مشتق x^n برابر nx^{n-1} است، n یك عدد صحیح مثبت است.

۴ ــ اگر y_1، y_2، ...، و y_n توابعی از x باشند، ثابت کنید که اگر $y=y_1y_2\dots y_n$ آنگاه

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y_1}\cdot\frac{dy_1}{dx}+\dots+\frac{1}{y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

که درآن، x مقداری است که y نظیر آن صفر نیست.

۵ ــ ثابت کنید که اگر کثیر الجملهٔ $p(x)$ بر $(x-a)^2$ قابل قسمت باشد آنگاه $p'(x)$ بر $(x-a)$ قابل قسمت است.

۶ ــ ثابت کنید که اگر $p'(x)$ بر $(x-a)^{n-1}$ و $p(x)$ بر $(x-a)$ قابل قسمت باشند آنگاه $p(x)$ بر $(x-a)^n$ قابل قسمت است.

۷ ــ نشان دهید که چگونه مسئلهٔ ۶ برای یافتن ریشه‌های مکرر معادلات به‌کار می‌رود. به‌وسیله حل معادلهٔ

$$x^۶-۳x^۲+۲=۰$$

آن را تشریح کنید.

۸ ــ ثابت کنید که معادلهٔ

$$\frac{۱}{x-a}+\frac{۱}{x-b}+\frac{۱}{x-c}=۰$$

فقط وقتی می‌تواند دارای یك زوج ریشهٔ مساوی باشد که $a=b=c$.

۹ ــ فرض کنیم $p(x)$ یك کثیرالجمله باشد، ثابت کنید که بین هردو ریشهٔ $p(x)=۰$ یك ریشه از $p'(x)=۰$ واقع است.
(این قضیهٔ رول برای کثیرالجمله‌هاست، که برای توابع کلیتر در بخش ۵.۴ ثابت خواهد شد.)

۱۰ــ اگر

$$f(x)=\begin{cases} x^۲\sin(۱/x) & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

ثابت کنید که $f'(x)$ برای تمام مقادیر x موجود است و مقــدار $f'(x)$ را برای $x\neq۰$ و $f'(۰)$ را مشخص کنید. ثابت کنید که $f'(x)$ در $x=۰$ پیوسته *نیست*.

۱۱ــ عناصر یك دترمینان از مرتبهٔ n، توابعی از x هستند. ثابت کنید مشتق آن عبارت است از مجموع n دترمینان که هر یك به‌وسیلهٔ دیفرانسیلگیری ازعناصر یك سطر، با ثابت نگهداشتن بقیهٔ سطرهای دیگر، حاصل می‌شوند.

۱۲ــ ثابت کنید که اگر p، q، و r کثیرالجمله‌هایی از x با درجهٔ نابیشتر از ۳ بــاشند، دراین صورت،

$$\begin{vmatrix} p & q & r\\ p' & q' & r'\\ p'' & q'' & r''\end{vmatrix}$$

کثیرالجمله‌ای بادرجهٔ نابیشتر از ۳ است.

۴.۴. دیفرانسیلگیری مکرر

فــرض کنیم $y=f(x)$ دیفرانسیلپذیر بــاشد. $f'(x)$ ممکن است به نوبهٔ خــود

دیفرانسیلپذیر باشد. علامات این مشتق دوم عبارت اند از d^2y/dx^2 یا $f''(x)$. توجه کنیدکه دیفرانسیلپذیری مشتق دوم پیوستگی مشتق اول را ایجاب می کند. n مین مشتق ممکن است به‌صورت $f^{(n)}(x)$ نوشته شود که مستلزم هیچگونه اصول جدیدی نیست.

قضیهٔ جالبی در مورد مشتق n م یك حاصلضرب موجود است.

قضیهٔ لایبنیتز. اگر f و g توابعی از x، دارای مشتقات n م باشند، در این صورت،

$$(fg)^{(n)}=f^{(n)}g+{}_nC_1f^{(n-1)}g'+\dots+{}_nC_rf^{(n-r)}g^{(r)}+\dots+fg^{(n)}$$

برهان به استقراء است و به خواننده واگذار می‌شود. لم جبری

$$_{n+1}C_r={}_nC_r+{}_nC_{r-1}$$

لازم است.

تمرین ۴ (ج)

درمحاسبهٔ مشتق n م لازم‌است روشی اتخاذکنید تا نتیجه را درخلاصه‌ترین‌صورت آن ارائه دهد.

۱ ــ مشتقات nم توابع زیررا پیداکنید

$$\frac{x-1}{x^2-4},\ \frac{x+1}{(x-2)^2}$$

۲ ــ ثابت کنیدکه مقدار

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n\frac{x^3}{x^2-1}$$

به ازای $x=0$، برابر ۰ است در صورتی‌که n زوج باشد، و برابر$-n!$ است درصورتی‌که n فرد و بزرگتر از ۱ باشد.

۳ ــ ثابت کنیدکه مشتق nم $\sin x$ برابر $\sin\left(x+\frac{1}{2}n\pi\right)$ است ونتایج مشابهی را در مورد $\cos x$، $\sin kx$، $e^{ax}\sin bx$ بررسی کنید.

۴ ــ مشتق nم $\sin 3x\sin 5x$ را پیداکنید. (بدون استفاده از قضیهٔ لایبنیتز!)

۵ ــ مشتق nم $a/(a^2-x^2)$ را پیدا کنید.

۶ ــ مشتق nم $a/(a^2+x^2)$ را پیدا کنید.

۵.۴. علامت $f'(x)$

تعریف. تابع f را در نقطهٔ c اکیداً صعودی نامند اگر یك همسایگی از c باشد به‌طوری، که در آن

$$\text{به ازای } x < c\text{،}\quad f(x) < f(c)$$

$$\text{به ازای } x > c\text{،}\quad f(x) > f(c)$$

تعریف مشابهی برای «اکیداً نزولی در c» موجود است.

قضیهٔ ۱.۵.۴. اگر $f'(c) > 0$، آنگاه f در c اکیداً صعودی است.

برهان. چون

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

به حدی بزرگتر از صفر میل می‌کند، پس مقدار آن برای مقادیر به قدر کافی کوچك h بزرگتر از صفر است، یعنی، صورت و مخرج هم علامت هستند. ∎

تمرینها. (۱) ثابت کنید که، اگر f در c اکیداً صعودی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) \geqslant 0$.

(۲) توابعی مثال بیاورید که در شرایط ذیل صدق کنند:

(i) f در هیچ نقطه‌ای از (a, b) اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی نباشد.

(ii) در c اکیداً صعودی باشد، ولی $f'(c) > 0$ برقرار نباشد.

قضیهٔ مهم زیر به قضیهٔ رول معروف است. خود رول آن را برای حالت خاص یك چند جمله‌ای ارائه داده است (به تمرین ۷ (ب)، ۱۱ نگاه کنید).

قضیهٔ ۲.۵.۴. (رول). فرض کنیم

(۱) f در بازهٔ بستهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ پیوسته است،

(۲) f' در بازهٔ باز $a < x < b$ موجود است،

(۳) $f(a) = f(b)$،

در این صورت مقداری مانند c هست، به طوری که $a < c < b$ و برای آن

$$f'(c) = 0$$

برهان. فرض کنیم $M = \sup f(x)$ و $m = \inf f(x)$ که در آن $a \leqslant x \leqslant b$.

فرض کنیم $f(a) = k$.

اگر $M=m=k$، در این صورت به‌ازای هر c بین a و b، $f'(c)=0$.

فرض‌کنیم یا $M>k$ یا $m<k$، اولی را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۶.۳، مقداری مانند c هست‌که $a<c<b$، و برای‌آن $f(c)=M$.

بنابر (۲)، $f'(c)$ موجود است. ثابت می‌کنیم که $f'(c)=0$.

اگر $f'(c)>0$ ، بنا بر قضیهٔ ۱.۵.۴، f در c اکیداً صعودی است و مقادیری از x درسمت راست c هست که در آن، $f(x)>f(c)$. این‌هم‌با این‌حقیقت‌که $M=f(c)$ سوپرموم f است، متناقض است.

به‌طریق مشابه، اگر $f'(c)<0$، باید مقداری از x درسمت چپ c باشد به‌طوری که $f(x)>M$.

بنابراین $f'(c)$ باید مساوی ۰ باشد. ▌

به طور هندسی قضیهٔ رول بیان می‌کند که نقطه‌ای بین a و b هست که درآن نقطه، مماس بر منحنی $y=f(x)$ موازی وتری است‌که نقاط متناظر $x=a$ و $x=b$ را به هم وصل می‌کند. این وتر در قضیهٔ رول، افقی است. در قضیهٔ بعدی این وتر می‌تواند هــر گرادیانی داشته باشد.

تمرین ۴ (د)

۱ ــ در قضیهٔ رول مقداری برای c پیدا کنید در صورتی‌که $f(x)$ مساوی باشد با

(i) (m و n اعداد صحیح مثبت اند) $(x-a)^m (x-b)^n$

(ii) $\sin(1/x)$ در بازهٔ $(1/n\pi,\ 1/m\pi)$

۲ ــ اگر $p(x)$ یك کثیرالجمله باشد، ثابت‌کنید ریشه‌ای از

$$p'(x)+kp(x)=0$$

بین هر دو ریشهٔ حقیقی $p(x)=0$ وجود دارد.

۳ ــ اگر a و b دو ریشهٔ متوالی $p(x)=0$ باشند، در این صورت تعداد ریشه‌های

$$p'(x)+kp(x)=0$$

بین a و b (هر یك به‌اندازهٔ تکرارشان شمرده می‌شوند) فرد است .

۴ ــ ثابت کنید‌که معادلهٔ

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n=0$$

دارای n ریشهٔ متمایز است‌که همه بین ۱ــ و ۱ واقع‌اند.

۵ ــ دانستن ریشه های $p'(x)=0$ چه اطلاعــاتی در مورد ریشه‌های $p(x)=0$ به مــا

می‌دهد. ثابت کنید که معادلهٔ

$$۱-x+\frac{x^۲}{۲}-\frac{x^۳}{۳}+\dots+(-۱)^n\frac{x^n}{n}=۰$$

وقتی n فرد است دارای یك ریشهٔ حقیقی است، و وقتی n زوج باشد هیچ ریشهٔ حقیقی ندارد.

۶ ــ ثابت کنید که معادلهٔ

$$x^n+kx+l=۰$$

وقتی n زوج است حداکثر دارای دو ریشهٔ حقیقی و وقتی n فرد است حداکثر دارای سه ریشهٔ حقیقی است.

۶.۴. قضیهٔ مقدار میانگین

قضیهٔ ۱.۶.۴. (قضیهٔ مقدار میانگین). فرض‌کنیم f در شرایط (۱) و (۲) قضیهٔ رول صدق کند. در این صورت cیی هست که $a<c<b$، و برای آن

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

برهان. می‌نویسیم

$$\phi(x)=f(x)-kx$$

و مقدار ثابت k را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\phi(b)=\phi(a)$$

از اینجا نتیجه می‌شود که

$$f(b)-f(a)=k(b-a)$$

قضیهٔ رول مقدار c را طوری می‌دهد که $\phi'(c)=۰$، یعنی، $f'(c)=k$. ▌

اغلب سودمند است که نتیجه را، با فرض $b=a+h$، چنین بنویسیم

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$$

که در آن، θ عددی است که $۰<\theta<۱$.

قضیهٔ مقدارمیانگین، با مفروضات بیشتری برای $f'(x)$، دارای نتایج مهمتری است.

نتیجهٔ ۱. اگر برای هر x در $a<x<b$، $f'(x)=۰$، در این صورت، $f(x)$ در $a\leqslant x\leqslant b$ تابعی ثابت است.

برهان. اگر x_1 و x_2 دونقطه باشرط

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$$

باشند آنگاه

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_3)$$

که درآن،

$$x_1 < x_3 < x_2$$

واین برابر صفراست. ▎

نتیجهٔ ۲. اگر برای $a < x < b$، $f'(x) > 0$، آنگاه $f(x)$ یك تابع اکیداً صعودی دربازهٔ $a \leqslant x \leqslant b$ است.

برهان. باید ثابت کنیم که اگر x_1 و x_2 دونقطه باشرایط $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ باشند آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(x_3) \qquad (x_1 < x_3 < x_2)$$
$$> 0 \;▎$$

اغلب سودمند است که بتوانیم نتیجهٔ ۲ را بامفروضات کمی کلیتر به کار بریم. مامی توانیم مقدار cیی را بپذیریم که تنها شرط آن پیوسته بودن f است، حتی اگر وجود $f'(c)$ را فرض نکرده باشیم.

برای اثبات اینکه $f(x)$ هنوز در (a, b) اکیداً صعودی است، نتیجهٔ ۲ را درهریك از بازه‌های (a, c) و (c, b) به‌کارمی‌بندیم. اگر x_1 در (a, c) و x_2 در (c, b) باشد آنگاه $f(x_1) < f(c) < f(x_2)$. ▎

بیان کلیتری برای هر تعداد متناهی ازنقاط استثنایی c برقرار است.

نتیجهٔ ۲ را باید به‌دقت باقضیهٔ ۱.۵.۴ مقایسه کرد. قضیهٔ اخیر بامفروضات بیشتر حکم بیشتری را اثبات می کند. اگر، مانند قضیهٔ ۱.۵.۴ فقط بدانیم که f درنقطه‌ای صعودی است، لازم نیست که بازه‌ای موجود باشد که f درآن صعودی است (تمرین ۱۳ در ۴ (و) ملاحظه شود).

قضیهٔ زیر که تعمیم قضیهٔ مقدارمیانگین برای دوتابع است، درآتیه مفید خواهدبود.

قضیهٔ ۲.۶.۴. (قضیهٔ مقدارمیانگین کوشی). فرض‌کنیم دوتابع f و g دربازهٔ بسته پیوسته و

دربازهٔ باز (a, b) دیفرانسیلپذیرباشد. فرض‌کنیم که $g'(x)$ به‌ازای هر x در $a<x<b$، مخالف ۰ باشد. دراین‌صورت، برای cیی به‌طوری‌که $a<c<b$،

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

برهان. (ابتدا ملاحظه شودکه به‌کاربردن قضیهٔ مقدار میانگین برای هریك ازتوابع f و g کافی نیست، زیرا به‌این ترتیب دوتا cی مختلف حاصل می‌شود.)

تعریف می‌کنیم

$$\phi(x)=f(x)-kg(x)$$

ومقدار ثابت k را چنان اختیار می‌کنیم که $\phi(b)=\phi(a)$، یعنی،

$$f(b)-f(a)=k\{g(b)-g(a)\}$$

بنابرقضیهٔ رول، cیی هست که

$$\phi'(c)=f'(c)-kg'(c)=0$$

حال $g(b)-g(a)\neq 0$، زیرا اگرمساوی صفرباشد، بنابر قضیهٔ رول، c_1ی هست که درآن $g'(c_1)=0$، که بافرض متناقض است.

دومقدار k را مساوی قرارمی‌دهیم. ▎

تمرین ۴ (ه)

۱ ــ در هریك از (i)—(iii)، در صورت امکان، عددی مانند c پیداکنیدکه در قضیهٔ مقدار میانگین صدق کند. درهرمثالی که نتوان عدد c را یافت، کدامیك ازمفروضات قضیه برقرار نیست؟

$$(a=1,\ b=3)\ \text{،}f(x)=x(x-2)(x-4) \quad \text{(i)}$$

$$(a=-1,\ b=3)\qquad \text{،}f(x)=1/x^2 \quad \text{(ii)}$$

$$(a=-1,\ b=1)\qquad \text{،}f(x)=x^{\frac{1}{3}} \quad \text{(iii)}$$

۲ ــ بافرض‌اینکه $f(x)$مساوی (i)x^2، (ii) x^n باشد، ثابت کنیدکه، وقتی $h\to 0$، عدد θ درقضیهٔ مقدار میانگین به‌حد ثابتی میل می‌کند.

۳ ــ اگر، وقتی $x\to\infty$، $f'(x)\to l$، آنگاه ثابت کنید $f(x)/x\to l$ (وقتی که $x\to\infty$).

۴ ـ استدلال زیر را مورد بحث قرار دهید.
فرض کنیم $f'(x)$ در $a<x<b$ موجود باشد و $a<c<b$. در این صورت اگر $a<c+h<b$ از قضیهٔ مقدار میانگین نتیجه می‌شود

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=f'(c+\theta h)$$

فرض کنیم $h\to 0$. سمت چپ به $f'(c)$ میل می‌کند. بنابراین حد $f'(c+\theta t)$ وقتی $h\to 0$، موجود و برابر $f'(c)$ است. یعنی، $f'(x)$ در $x=c$ پیوسته است.

۵ ـ در قضیهٔ ۲.۶.۴، با قرار دادن

$$f(t)=t^{2},\quad g(t)=4t^{3}-3t^{4}\quad (a\leqslant t\leqslant b)$$

بگویید که آیا برای موارد زیر cیی وجود دارد (i) $a=0$، $b=1$؛ (ii) $a=-1$، $b=2$؛ (iii) $a=-1$، $b=\frac{2}{3}$. به‌طور هندسی آن را در روی منحنی $x=t^{2}$ و $y=4t^{3}-3t^{4}$ نشان دهید.

۷.۴. ماکزیموم و مینیموم

تعریف. گوییم f دارای ماکزیمومی در c هست اگر یک همسایگی از c موجود باشد که در آن $f(x)<f(c)$ مگر وقتی که $x=c$.

مینیموم را به‌وسیلهٔ تعویض نامساوی «$<$» با نامساوی «$>$» تعریف می‌کنیم.

عبارتی که دلالت بر هر یک از کلمات ماکزیموم و مینیموم می‌کند، مقدار برگشتی است.

(استعمال کلمات ماکزیموم و مینیموم، که در مورد توابع پیوسته به‌کار رفت، نباید با موارد استعمال آنها در بخش ۷.۱، برای تعداد متناهی عدد، اشتباه شود.)

قضیهٔ ۱.۷.۴. اگر $f'(c)$ موجود باشد آنگاه یک شرط لازم برای اینکه f دارای نقطهٔ برگشتی در c باشد آن است که $f'(c)=0$.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۱.۵.۴، اگر $f'(c)>0$، آنگاه f در c اکیداً صعودی است. اگر $f'(c)<0$ آنگاه f در c اکیداً نزولی است. هر یک از اینها متناقض با فرض نقطهٔ برگشتی بودن c است. ▎

تذکرات. (۱) ممکن است تابعی به‌ازای مقداری از x دارای نقطهٔ برگشتی باشد در صورتی که در آن نقطه مشتق نداشته باشد، مثلاً $|x|$ دارای مینیمومی در $x=0$ است.

(۲) شرط قضیه کافی نیست، مثلاً اگر $f(x)=x^3$، $f'(0)=0$ و f در $x=0$ اکیداً صعودی است.

معیار ذیل در تشخیص بین ماکزیموم و مینیموم به‌کار می‌رود.

قضیهٔ ۲.۷.۴. اگر یك همسایگی c موجود باشد که درآن، برای هر $x<c$، $f'(x)>0$ و برای هر $x>c$، $f'(x)<0$، دراین صورت، f در $x=c$ دارای ماکزیموم است.

برهان. نتیجهٔ ۲ از قضیهٔ ۱.۶.۴ نشان می‌دهد که وقتی x از c نزول می‌کند f صعودی است و همچنین وقتی که x از c صعود می‌کند. ▌

به صورت دیگر می‌توان از مشتق دوم استفاده کرد و تحقیق نمود که مقداری از c که به ازای آن $f'(c)=0$، ماکزیموم یا مینیموم f است یا هیچکدام ازاینها نیست.

قضیهٔ ۳.۷.۴. فرض کنیم $f'(c)=0$. اگر $f''(c)<0$، آنگاه $f(x)$ در $x=c$ دارای ماکزیموم است. اگر $f''(c)>0$، آنگاه f در $x=c$ دارای مینیموم است.

برهان. بنا بر قضیهٔ ۱.۵.۴، f' در c اکیداً نزولی است. بنابراین یك همسایگی از c هست که درآن برای $x<c$، $f'(x)>0$ و برای $x>c$، $f'(x)<0$. حال قضیه ۲.۷.۴ را به‌کار برید. ▌

تمرینها. در ماکزیموم و مینیموم توابع ذیل تحقیق کنید.

(i) $|x|$ (ii) $x/(1+x^2)$

(iii) $(ax+b)/(cx+d)$ (iv) $(x+a)(x+b)/(x-a)(x-b)$

(v) $a\cos x+b\sin x$ (vi) $a\sec x+b\operatorname{cosec} x$

۸.۴. تقریب با کثیرالجمله‌ها. قضیهٔ تیلر

ساده‌ترین دستهٔ توابعی که یك ریاضیدان با آنها اعمالی انجام می‌دهد کثیرالجمله‌ها هستند، یعنی توابع

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

که درآن، $a_0, \ldots, a_n$ اعداد مفروضی هستند. مقدار یك کثیرالجمله، به ازای مقدار مفروضی از متغیر x، دقیقاً به وسیلهٔ جمع و ضرب کردن قابل محاسبه است.

توابع کلیتر اغلب به وسیلهٔ حد کثیرالجمله‌ها قابل بیان هستند؛ به عبارت دیگر، این

توابع را می‌توان به‌کمك یك‌کثیرالجمله به طور تقریبی بیان‌کرد. این بخش به اشکالی می‌پردازدکه معمولا چنان تقریبی به خود می گیرد.

لم. اگر $f(x)$ کثیرالجملهٔ

$$a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

باشد آنگاه

$$a_r=\frac{1}{r!}f^{(r)}(0) \quad (0\leqslant r\leqslant n)$$

برهان. مقدار a_r به وسیلهٔ r بار مشتقگیری از نمایش‌کثیرالجمله‌ای $f(x)$ وقرار دادن $x=0$ به دست می‌آید.

بنابراین، اگر f کثیرالجمله‌ای از درجهٔ n باشد، داریم

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$

به عبارت‌کلیتر، اگربنویسیم $x=a+h$، که a مقداری است ثابت، برای‌کثیرالجملهٔ f داریم

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

ممکن است از لحاظ منطقی انتظار داشته باشیم‌که اگرفرض‌کثیرالجمله بودن f را کنار گذاشته وآن را تابعی با مشتقات تا مرتبهٔ مقتضی بدانیم، در این صورت سمت راست معادلهٔ اخیر تقریب خوبی برای مقدار $f(a+h)$ خواهد بود. قضایای ۱.۸.۴ و ۲.۸.۴ حاوی این نتیجه هستند. آنها اشکالی از یك قضیهٔ مقدار میانگین از مرتبهٔ n هستند. قضیهٔ مقدار میانگین‌کلی به یاد بروك تیلر[1] (۱۶۸۵–۱۷۳۱) قضیهٔ تیلر نامیده می‌شودکه بسط یك تابع عمومی $f(a+h)$ را برحسب قوای h مورد بررسی قرار داده است. حالت $a=0$ اغلب قضیهٔ ماکلورن خوانده می‌شود.

در قضیهٔ ۱.۸.۴ وجود مشتق nم، تنها برای مقدار a لازم بود. از وجود $f^{(n)}(a)$ موجود بودن $f^{(n-1)}(x)$ در یك‌همسایگی a نتیجه می‌شود، و این‌امر پیوستگی $f^{(r)}(x)$ برای $r\leqslant n-2$ را در یك همسایگی a نتیجه می‌دهد.

قضیهٔ ۱.۸.۴. (صورت قضیهٔ مقدارمیانگین عمومی منسوب به یانگ[2]) فرض کنیم $f^{(n)}(a)$ موجود باشد. در این صورت،

1) Brook Taylor　　2) Young

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a)+\varepsilon\}$$

که در آن، اگر $h\to 0$ آنگاه $\varepsilon\to 0$.

برهان. ابتدا فرض کنیم $h\geqslant 0$. تعریف می‌کنیم

$$\phi(h)=f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\cdots$$
$$-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)-\frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a)-\eta\}$$

که در آن، η یك مقدار مثبت ثابت است.

در این صورت، $\phi(0), \phi'(0), \ldots, \phi^{(n-1)}(0)$ همه صفر هستند و

$$\phi^{(n)}(0)=\eta$$

بنا بر قضیهٔ ۱.۵.۴، $\phi^{(n-1)}(h)$ در $h=0$ صعودی است و درنتیجه در بازه‌ای در سمت راست ۰ مثبت است.

بنا بر نتیجهٔ ۲ ازقضیه ۱.۶.۴ که در مورد تابع $\phi^{(n-2)}(h)$ به کار رود، این تابع در بازه‌ای در سمت راست ۰ مثبت است.

این‌استدلال را تکرار کنید. سرانجام به‌این‌نتیجه می‌رسیم که، برای h مثبت به حد کافی کوچك، $\phi(h)>0$، یعنی

$$f(a+h)>f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a)-\eta\}$$

به طریق مشابه

$$f(a+h)<f(a)+hf'(a)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a)+\frac{h^n}{n!}\{f^{(n)}(a)+\eta\}$$

برهان مشابهی برای مقادیر منفی h به‌کار می‌رود. با جمعبندی نتایج بالا قضیه ثابت می‌شود. ▌

کاربرد درماکزیموم و مینیموم. برای تشریح‌کاربرد قضیهٔ ۱.۸.۴، خواننده باید تعمیم ذیل را، از شرایط مفروض در قضیهٔ ۳.۷.۴، ثابت کند.

فرض کنیم که

$$f'(c)=f''(c)=\cdots=f^{(n-1)}(c)=0,$$
$$f^{(n)}(c)\neq 0$$

در این صورت، (۱) یك شرط لازم برای اینکه c یك ماکزیمم یا مینیمم $f(x)$ باشد آن است که n زوج باشد، (۲) با فرض زوج بودن n، اگر $f^{(n)}(c) < 0$، آنگاه c ماکزیمم $f(x)$ را می‌دهد و اگر $f^{(n)}(c) > 0$، آنگاه c مینیمم را می‌دهد.

قضیهٔ بعد تعمیم مستقیم قضیهٔ ۱.۶.۴، برای یك n دلخواه است.

قضیهٔ ۲.۸.۴. (قضیهٔ تیلر.) فرض کنیم f و مشتقات آن تا مرتبهٔ $n-1$ در $a \leqslant x \leqslant a+h$ پیوسته باشند، و $f^{(n)}$ برای $a < x < a+h$ موجود باشد. در این صورت،

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h) \quad \text{و}$$

که در آن، $0 < \theta < 1$.

برهان. برای $0 \leqslant t \leqslant h$، تعریف می‌کنیم،

$$\phi(t) = f(a+t) - f(a) - tf'(a) - \dots - \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) - \frac{t^n}{n!} B$$

که در آن، B را چنان اختیار می‌کنیم که $\phi(h) = 0$.

از تعریف $\phi(t)$ ملاحظه می‌شود که

$$\phi(0),\ \phi'(0),\ \phi''(0),\ \dots,\ \phi^{(n-1)}(0)$$

همه صفر هستند. حال قضیهٔ رول (۲.۵.۴) را n دفعه به‌کار می‌بندیم.

چون $\phi(0) = \phi(h) = 0$، داریم $\phi'(h_1) = 0$ $(0 < h_1 < h)$.

چون $\phi'(0) = \phi'(h_1) = 0$، داریم $\phi''(h_2) = 0$ $(0 < h_2 < h_1)$.

بالاخره، چون $\phi^{(n-1)}(0) = \phi^{(n-1)}(h_{n-1}) = 0$، داریم $\phi^{(n)}(h_n)$ که در آن $0 < h_n < h_{n-1} < \dots < h$، و لذا $h_n = \theta h$ $(0 < \theta < 1)$.

حال، $\phi^{(n)}(t) = f^{(n)}(a+t) - B$، و لذا $B = f^{(n)}(a+\theta h)$.

دراولین رابطهٔ برهان، t را برابر h و $\phi(h)$ را برابر صفر بگیرید و مقدار B را هم در این رابطه قراردهید. ❙

می‌توان برای قضیهٔ ۲.۸.۴ برهان متفاوتی ارائه داد. این برهان دارای این مزیت است که عبارت متفاوتی برای R_n برحسب h^n می‌دهد. شکل

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\theta h)$$

را صورت ماندهٔ لاگرانژ می‌نامند.

برای اختصار، این برهان‌دوم را درصورت ماکلورن آن با $a=\circ$ ارائه خواهیم‌داد.

قضیهٔ ۳.۸.۴. (قضیهٔ تیلر با صورت ماندهٔ کوشی). با مفروضات قضیهٔ ۲.۸.۴ (و $a=\circ$)،

$$f(h)=f(\circ)+hf'(\circ)+\cdots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(\circ)+R_n$$

که درآن،

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}f^{(n)}(\theta h)h^n}{(n-1)!}\quad (\circ<\theta<1)$$

برهان. تعریف می‌کنیم

$$F(t)=f(h)-f(t)-(h-t)f'(t)-\cdots-\frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)$$

در این صورت به‌آسانی ثابت می‌شود که

$$F'(t)=-\frac{(h-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)$$

در دیفرانسیلگیری، تمام جمله های دیگر دو به دو، حذف می‌شوند.

می نویسیم

$$\Phi(t)=F(t)-\left(\frac{h-t}{h}\right)^p F(\circ)$$

که p می‌تواند هر عدد صحیح مثبتی باشدکه $1\leqslant p\leqslant n$. در این صورت،

$$\Phi(\circ)=\Phi(h)=\circ$$

بنا بر قضیهٔ رول (۲.۵.۴)، یک مقدار θh، $\circ<\theta<1$ هست که در آن $\Phi'(\theta h)=\circ$. ولی

$$\Phi'(\theta h)=F'(\theta h)+\frac{p(1-\theta)^{p-1}}{h}F(\circ)$$

این مقداری برای R_n به‌دست می‌دهدکه به ازای $p=n$ به ماندهٔ لاگرانژ، و به ازای $p=1$، به ماندهٔ کوشی تبدیل می‌شود. ∎

۹.۴. صور مبهم

قضایای ۱.۸.۴ و ۲.۸.۴ را به مورد دو تابع تعمیم می‌دهیم. (با قضیهٔ ۲.۶.۴، وقتی $n=1$، مقایسه شود.)

قضیهٔ ۱.۹.۴. فرض کنیم $f^{(n)}(a)$ و $g^{(n)}(a)$ موجود باشند و $g^{(n)}(a)\neq 0$ در این صورت، وقتی $h\to 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\dots-\{h^{n-1}/(n-1)!\}f^{(n-1)}(a)}{g(a+h)-g(a)-hg'(a)-\dots-\{h^{n-1}/(n-1)!\}g^{(n-1)}(a)}\to\frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$$

برهان. قضیهٔ ۱.۸.۴ را در مورد هر یك از توابع f و g اعمال کنید. ❙

قضیهٔ ۲.۹.۴. فرض کنیم f و g و مشتقات آنها تا مرتبهٔ $n-1$ به‌ازای $a\leqslant x\leqslant a+h$ پیوسته باشند و برای x در $a<x<a+h$، $f^{(n)}(x)$ موجود بوده و $g^{(n)}(x)$ موجود و مخالف صفر باشد. در این صورت،

$$\frac{f(a+h)-f(a)-hf'(a)-\dots-\{h^{n-1}/(n-1)!\}f^{(n-1)}(a)}{g(a+h)-g(a)-hg'(a)-\dots-\{h^{n-1}/(n-1)!\}g^{(n-1)}(a)}$$
$$=\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{g^{(n)}(a+\theta h)}$$

که در آن، $0<\theta<1$.

برهان. روش قضیهٔ ۲.۶.۴ را به‌کار می‌بریم. تعریف می‌کنیم

$$\phi(x)=f(x)-kg(x)$$

k را چنان انتخاب می‌کنیم که

$$\phi(a+h)-\phi(a)-h\phi'(a)-\dots-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\phi^{(n-1)}(a)$$

برابر صفر شود.

بنا بر قضیهٔ ۲.۸.۴، رابطهٔ اخیر برابر است با

$$\frac{h^n}{n!}\phi^{(n)}(a+\theta h)$$

و در نتیجه،

$$f^{(n)}(a+\theta h)-kg^{(n)}(a+\theta h)=0$$

دو مقدار حاصل برای k را مساوی قرار دهید. ▮

نتیجه. با مفروضات قضیهٔ ۲.۹.۴، اگر

$$f(a)=f'(a)=\dots=f^{(n-1)}(a)=0$$

و

$$g(a)=g'(a)=\dots=g^{(n-1)}(a)=0$$

و وقتی $x \to a$ (یا $x \to a+$ یا $x \to a-$)

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \to l$$

آنگاه، وقتی $x \to a$ (یا $x \to a+$ یا $x \to a-$)،

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to l$$

اکنون، حوزه‌ای ازکاربردهای این قضایا را ذکر می‌کنیم.

فرض‌کنیم f و g در بازهٔ بستهٔ (a و b) پیوسته باشند و $f(a)=g(a)=0$. حد خارج قسمت $f(x)/g(x)$ را، وقتی $x \to a+$، نمی‌توان مستقیماً به وسیلهٔ قرار دادن $x=a$ معین‌کرد. یك چنین عبارتی معمولا صورت مبهم $(0/0)$ نامیده می‌شود. اغلب با مفروضات مناسبی دربارهٔ مشتقات f و g، حد $f(x)/g(x)$ را می‌توان به وسیلهٔ قضایای ۱.۹.۴ و ۲.۹.۴، پیدا کرد.

لازم به تذکر است‌که مفروضات قضایای ۱.۹.۴ و ۲.۹.۴، متفاوت‌اند و هیچیك از دو قضیه شامل دیگری نیست.

مثال. در حد عبارت ذیل، وقتی $x \to 0$ تحقیق کنید.

$$\frac{\tan kx - k\tan x}{k\sin x - \sin kx}$$

حل. با نوشتن خارج قسمت به‌صورت $f(x)/g(x)$، خواهیم داشت

$$f'(x)=k\sec^2 kx - k\sec^2 x,$$

$$g'(x)=k\cos x - k\cos kx.$$

اگر قضیهٔ ۱.۹.۴، را به‌کار بریم، لازم است‌که بیش از دو بار مشتق بگیریم، زیرا، g''' کوچکترین مرتبهٔ مشتقی است‌که در $x=0$ صفر نمی‌شود.

ولی، نتیجهٔ قضیهٔ ۲.۹.۴ را می‌توان به‌کار بست، تا نتیجه شود که

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\cos x+\cos kx}{\cos^{۲}kx\cos^{۲}x}\qquad (x\neq ۰)$$

و این، وقتی $x \to ۰$، به ۲ میل می‌کند.

تمرین ۴ (۹)

۱ ــ حدود عبارت ذیل را، وقتی x به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند، پیدا کنید.

$$\frac{(۱-x)^{m}-x^{m}}{(۱-x)^{n}-x^{n}}\qquad \text{(i)}$$

که در آن، m و n اعداد صحیح مثبت‌اند؛

$$\frac{۱+\cos ۲\pi x}{(۲x-۱)^{۲}}\qquad \text{(ii)}$$

۲ ــ معادلات مماس و قائم بر بیضی $x=a\cos\theta$، $y=b\sin\theta$ را در نقطه‌ای مانند θ پیدا کنید.

یك مماس بر بیضی محورهای مختصات را در P و Q قطع می‌کند. کمترین مقدار PQ را پیدا کنید.

۳ ــ با نوشتن $y=tx$، معادلات پارامتری منحنی ذیل را پیدا کنید.

$$x^{۳}+y^{۳}=۳axy$$

معادلهٔ مماس را در نقطه‌ای با پارامتر t پیدا کنید ومقدار پـارامتر نقطه‌ای را پیدا کنید که این مماس در آن نقطه، منحنی را دوباره قطع کند. وقتی $t\to -۱$، چه اتفاقی می‌افتد؟

۴ ــ مکان هندسی (سیکلوئید) حاصل از

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(۱-\cos t)$$

را برای مقادیر t بین ۰ و ۲π رسم کنید.

ثابت کنید قائمهای این منحنی مماس بر منحنی

$$x=a(t+\sin t),\ y=-a(۱-\cos t)$$

هستند و این منحنی دوم را در نمودار خود رسم کنید.

۵ ــ ماکزیموم و مینیموم

$$\text{(i)}\quad \frac{|x-1|}{x^2+1}\text{،}\qquad \text{(ii)}\quad \frac{\sin x}{\sin(x-a)}$$

را پیداکنید و نمودارهای متناظر را رسم کنید.

۶ ــ ثابت کنید که اگر $0<a<9b$، تابع

$$a\sin x+b\sin 3x$$

دارای ماکزیمومی در مقداری از x، بین ۰ و $\frac{1}{2}\pi$ است. با فرض $a=6$ و $b=1$، بزرگترین و کوچکترین مقادیر تابع را در $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\pi$، پیداکنید.

۷ ــ P نقطه‌ای روی یك دایره به معادلهٔ

$$(x-h)^2+(y-h)^2=a^2$$

است که در آن $h>a$، و PM و PN عمود بر محورهای مختصات هستند. موضع نقطهٔ P را چنان پیداکنید که مساحت مثلث PMN ماکزیموم شود. نشان دهید دو یا یك موضع ماکزیموم برای P هست بسته به اینکه h کوچکتر یا بزرگتر از $a\sqrt{2}$ باشد.

۸ ــ اگر

$$y=ax^3+bx^2+cx+d$$

ضرایب a، b، c، و d چه شرایطی باید داشته باشند تا متناظر با هر مقدار y، فقط یك مقدار برای x موجود باشد.

۹ ــ اگر $p(x)$ و $q(x)$ معادله‌های درجهٔ دوم و ریشه‌های $q(x)=0$ مختلط باشند، ثابت کنید که مقادیر ماکزیموم و مینیموم $p(x)/q(x)$ مقادیری از k هستند که به ازای آنها $p(x)-kq(x)$ مربع کامل‌اند.

۱۰ ــ کاسه‌ای فلزی به شکل یك قطعهٔ کروی ازفلزی ساخته شده که ضخامت آن قابل اغماض است. شکل کاسه را چنان پیداکنید که با ثابت بودن سطح، حجم آن ماکزیموم شود.

۱۱ ــ مراکز دو کره به شعاعهای a و b به فاصلهٔ c از هم قرار دارند به طوری که $c>a+b$. یك نقطهٔ نورانی درکجای خط‌المرکزین، در بین دو کره، قرار گیرد تا مجموع سطوح روشن از دو کره ماکزیموم شود.

۱۲ ــ قطعه‌ای از مقوای مسطح به شکل مثلث متساوی‌الاضلاعی مانند ABC، به ارتفاع $3h$ است. نقاط P، Q، و R را، به ترتیب، در امتداد میانه‌های AG، BG، و CG از طرف مقابل G، چنان انتخاب می‌کنیم که $GP=GQ=GR$. سپس، مثلثهای BCP، CAQ و ABR را بریده کنار می‌گذاریم. قطعه مقوای باقیمانده را درحول

اضلاع مثلث PQR تا می‌کنیم تا یك هرم حاصل شود. ثابت‌کنید حجم این هرم از $(\frac{۳}{۸})^{\frac{۱}{۲}} h^{۳}$ نابیشتر است.

۱۳ـ تابعی مـانند f چنان بسازیدکه $f'(۰)>۰$، ولی هیچ بازهٔ $(-h, h)$ موجود نباشد کـه در آن f صعودی است. (بـا یك مقدار ثـابت مناسب k، تـابـع $x^{۲}\sin(۱/x)+kx$ را امتحان‌کنید.)

۱۴ـ روش تقریب نیوتن را مورد بحث قرار دهید. بنابراین روش، اگر $x_{۱}$ به یك ریشهٔ معادلهٔ $f(x)=۰$، مثلا a، نزدیك باشدآنگاه

$$x_{۲}=x_{۱}-\frac{f(x_{۱})}{f'(x_{۱})}$$

محتملا تقریب بهتری برای a است.

به ویژه، نشان دهیدکه اگر در بازهٔ $(a-h, a+h)$، $|f'(x)|>k>۰$ و $f''(x)$ دارای علامت ثابتی‌باشد، دراین‌صورت، $x_{۲}$ بین $x_{۱}$ و a قراردارد‌به‌شرطی که $f(x_{۱})$ و $f''(a)$ هم علامت باشند.

وقتی کـه η مقدار کوچکی است، ریشهٔ نزدیك به π در معـادلهٔ $\sin x=\eta x$ را به تقریب به دست آورید.

۱۵ـ قانون قطعات متناسب. اگرمقادیرتابع $f(x)$ درفاصله‌هایی به طول h در جدولی داده شده باشند و $a+k$ بین دو درایهٔ متوالی، مثل a و $a+h$، قرارگیرد، قانون چنین‌است که، به تقریب

$$f(a+k)-f(a)=\frac{k}{h}\{f(a+h)-f(a)\}$$

برای محـاسبهٔ کران بالایی برای خطـا، فرض‌کنیم $f''(x)$ در $a\leqslant x\leqslant a+h$ موجود باشد. می‌نویسیم

$$\phi(t)=\frac{f(a+t)-f(a)}{t} \qquad (۰<t<h,\ \text{ثابت } a)$$

ثابت کنیدکه

$$\phi'(t)=\frac{۱}{۲}f''(\tau) \qquad (۰<\tau<t)$$

نتیجه بگیریدکه

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\frac{f(a+k)-f(a)}{k}=\frac{۱}{۲}(h-k)f''(\kappa)$$

که در آن، $a<\kappa<a+h$.

در نتیجه، ثابت کنید که مقدار خطا در قانون قطعات متناسب حداکثر $\frac{۱}{۸}Mh^{۲}$ است

که در آن $M=\sup|f''(x)|$.

۱۶ــ ثابت کنید مشتق nام $\tan x$ یك کثیرالجملهٔ درجهٔ $(n+۱)$ برحسب $\tan x$ است.

۱۷ــ ثابت کنید

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{e^x}{x}\right)=(-۱)^n n!\frac{e^x}{x^{n+۱}}\,p_n(-x)$$

که در آن $p_n(x)$ کثیرالجملهٔ حاصل از $(n+۱)$ جملهٔ اول بسط e^x برحسب قوای x است.

۱۸ــ به استقراء یا روش دیگری ثابت کنید که اگر m یك عدد صحیح مثبت باشد، $\sin(۲m+۱)\theta$ و $\cos(۲m+۱)\theta/\cos\theta$ را می‌توان به وسیلهٔ کثیرالجمله‌ای برحسب $\sin\theta$ نوشت.

اگر $y=\sin(۲m+۱)\theta$ و $x=\sin\theta$، نشان دهید که

$$(۱-x^{۲})(y')^{۲}=(۲m+۱)^{۲}(۱-y^{۲})$$

و

$$(۱-x^{۲})y^{(n+۲)}-(۲n+۱)xy^{(n+۱)}+\{(۲m+۱)^{۲}-n^{۲}\}y^{(n)}=۰$$

ثابت کنید که

$$y=(۲m+۱)\left\{x-\frac{(۲m+۲)۲m}{۳!}x^{۳}+\frac{(۲m+۴)(۲m+۲)۲m(۲m-۲)}{۵!}x^{۵}-\dots\right\}$$

۱۹ــ یك تابع دوبار مشتقپذیر بوده و دارای این خاصیت است که $f(a)=f(b)=۰$ و برای c یی بین a و b، $f(c)>۰$. ثابت کنید حداقل یك مقدار ξ بین a و b هست که $f''(\xi)<۰$.

۲۰ــ ثابت کنید وقتی $h\to ۰$،

$$\frac{f(a+h)-۲f(a)+f(a-h)}{h^{۲}}\to f''(a)$$

به شرط اینکه سمت راست موجود باشد.

۲۱ــ حدود عبارات ذیل را، وقتی $x\to ۰$، بررسی کنید

$$\frac{\arcsin x - \sin x}{\tan x - \arctan x} \text{ (ii)} \quad ، \quad \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \text{ (i)}$$

۲۲- حد عبارت ذیل را، وقتی $x \to 1$، بررسی کنید

$$\frac{x-(n+1)x^{n+1}+nx^{n+2}}{(1-x)^2}$$

۲۳- یك زوج تابع $f(x)$ ، $g(x)$ را چنان بیابید که $f(0)=g(0)=0$ و وقتی $x \to 0$، $f(x)/g(x)$ به یك حد میل کند، ولی $f'(x)/g'(x)$ به هیچ حدی میل نکند، یعنی، ثابت کنید که، عکس نتیجه قضیهٔ ۲.۹.۴ ، ممکن است (برای $n=1$) برقرار نباشد.

راهنمایی. یك $f'(x)$ ناپیوسته در تمرین ۴(ب)، ۱۰ داده شده است.

۲۴- (قضیهٔ داربو) اگر $f(x)$ برای $a \leqslant x \leqslant b$ دیفرانسیلپذیر باشد، آنگاه $f'(x)$ هر مقداری بین $f'(a)$ و $f'(b)$ را می‌گیرد. (یك مشتق لزوماً، پیوسته نیست، ولی دارای خاصیت مذکور در قضیهٔ ۶.۳ است.)

۵

سریهای نامتناهی

۱.۵ . سریهای با جملات مثبت

در فصل ۲ همگرایی سریهای نامتناهی را تعریف کردیم و بعضی از خاصیتهایی را که بلا فاصله از تعریف نتیجه می‌شوند ارائه دادیم. دوسری خاص $\sum r^n$ و $\sum n^{-k}$ مورد مطالعه قرار گرفتند. اینک، به اطلاعات وسیعتری از سریهای نامتناهی نیازمندیم.

یادآوری می‌کنیم که یك سری با جملات مثبت مانند $\sum u_n$ یا همگرا ویا به $+\infty$ واگراست. در سرتاسر بخش ۱.۵ فرض خواهیم کرد که $u_n \geqslant 0$.

از خواننده خواسته می‌شود به نتیجهٔ نهایی (۶) از بخش ۲.۱.۲ مراجعه نماید. درآنجا یك اصل مقایسه بیان گردیده که به وسیلهٔ آن امکان استنباط همگرایی یك سری مورد نظر $\sum u_n$ از همگرایی سری $\sum v_n$، که همگرایی آن معلوم است، مقدور است. می‌خواهیم این اصل مقایسه را به صورتهایی برگردانیم که به سهولت قابل کارگیری باشند.

قضیهٔ ۱.۱.۵. (آزمون کوشی برای همگرایی) فرض کنیم که $u_n^{1/n}$، وقتی که $n \to \infty$، به یك حد مانند l میل کند. در این صورت اگر $l < 1$، $\sum u_n$ همگراست ؛ و اگر $l > 1$، $\sum u_n$ واگراست.

برهان. فرض کنید که $l < 1$. عدد r را طوری انتخاب کنید که $l < r < 1$.

بنا بر تعریف حد، N ی موجود است که به ازای جمیع n هایی که $n > N$،

$$u_n^{1/n} < r \text{ ، یعنی } u_n < r^n$$

ولی، چون $r < 1$، سری هندسی $\sum r^n$ همگراست. بنابراین، $\sum u_n$ نیزهمگرا خواهد بود.

اگر $l>1$، در این صورت، به ازای جمیع n های بزرگتر از N ی،

$$u_n^{1/n}>1\text{، یعنی }u_n>1\text{،}$$

و درنتیجه، $\sum u_n$ واگراست.

اینك دقت کنید که اگر $l=1$، هیچگونه حکمی نمی‌توان کرد.

معیاری که استفاده از آن اغلب ساده‌تر از قضیهٔ ۱.۱.۵ است، چنین است،

قضیهٔ ۲.۱.۵. (آزمون دالامبر[1]) فرض کنیم که $u_n>0$ و $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ به l میل می‌کند. دراین صورت اگر $l<1$، $\sum u_n$ همگراست؛ و اگر $l>1$، $\sum u_n$ واگراست.

برهان. فرض کنیم که $l<1$. عدد r را طوری انتخاب کنید که $l<r<1$. N ی هست که به ازای جمیع n هایی که $n\geqslant N$،

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<r$$

بنابراین،

$$u_n=\frac{u_n}{u_{n-1}}\,\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}\cdots\frac{u_{N+1}}{u_N}u_N<u_Nr^{n-N},$$

یعنی، $u_n<Kr^n$، که در آن، K مستقل از n است.

چون $\sum r^n$ همگراست، در نتیجه، $\sum u_n$ نیز همگراست.

اگر $l>1$، جملات آن بعد ازمقدارمعین N صعود می‌کنند، و واگرایی آن واضح است.

مانند قضیهٔ ۱.۱.۵ اگر $l=1$، هیچ حکمی نمی‌توان کرد.

تمرین ۵ (الف)

۱ ــ درهمگرایی یا واگرایی سریهایی که n مین جملهٔ آنها در ذیل آمده‌است تحقیق کنید.

$$\frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}},\ \frac{n^4}{2^n},\ 2^{-\sqrt{n}}x^n,$$

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n,\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}x^n$$

در اینجا، $x>0$.

1) d'Alembert

۲ ـ ثابت کنید که سریی که n مین جملهٔ آن

$$\frac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$$

است، اگر $0 < a < b$، همگرا؛ و اگر $a \geqslant b > 0$ واگراست.

۳ ـ ثابت کنید که اگر به‌ازای جمیع n هایی که $n > N$، $u_n^{1/n} \leqslant r < 1$، آنگاه $\sum u_n$ همگراست.

نشان دهید که این بیان، آزمونی راکه کلیتر از قضیهٔ ۱.۱.۵ است، به دست می‌دهد.
در باب سری ذیل، که در آن $0 < a < b < 1$، بحث کنید

$$a+b+a^2+b^2+a^3+b^3+\cdots$$

۴ ـ به همان طریقی که در تمرین ۳ آزمونی عمومیتر ازآزمون کوشی به دست آوردیم، آزمونی برای همگرایی یك سری، که کلیتر ازآزمون دالامبر باشد، بیان کنید.

۵ ـ ثابت کنید که آزمون دالامبر همگرایی سری تمرین ۳ را مشخص نمی‌کند.

۶ ـ در باب حکم ذیل بحث کنید.

آزمونهای کوشی و دالامبر، که از مقایسه با یك تصاعد هندسی به دست می‌آیند، همگرایی سری $\sum n^{-2}$ راکه همگرایی آن کندتر ازهر تصاعد هندسی است، نمی‌توانند مشخص کنند (بخش ۱۱.۲ ، تمرین).

۷ ـ ثابت کنید که اگر به‌ازای هر n، عبارت $\frac{u_{n+3}}{u_n}$ کوچکتر از k باشد، که در آن $k < 1$، آنگاه $\sum u_n$ همگراست. حکم فوق را تعمیم دهید.

۸ ـ در درستی و نادرستی گزاره‌های زیر تحقیق کنید:

(i) اگر $\frac{u_n}{v_n} \to 1$ (وقتی که $n \to \infty$) آنگاه $\sum u_n$ و $\sum v_n$ هر دو همگرا یا هردو واگرا هستند.

(ii) اگر $u_n - v_n \to 0$ آنگاه $\sum u_n$ و $\sum v_n$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

(iii) اگر، به ازای تعداد نامتناهی n، $\frac{u_{n+1}}{u_n} > k > 1$ آنگاه $\sum u_n$ واگراست.

۲.۵. سریهای با جملات مثبت و منفی

اینك به مسئلهٔ سر و صورت دادن به همگرایی یا واگرایی یك سری، که تعدادی

نامتناهی جملهٔ مثبت و تعدادی نامتناهی جملهٔ منفی دارد، (مثلا، سری $\dots+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-۱$) می‌پردازیم. محکهای قضایای ۱.۱.۵ و ۲.۱.۵ راکه می‌توان درمورد سریهایی با جملات مثبت به‌کار برد، به نامساویهایی بین جملات سری مورد بررسی، و جملات سریی که رفتار آن معلوم است، بستگی‌دارند. با اندك تأملی ثابت می‌شود که چنین «اصل مقایسه‌ای» برای سریی که جملات آن علامت دلخواهی دارد، صادق نیست.

پس، سؤال می‌کنیم که آیا معلومات ما در باب سریهای با جملات مثبت می‌تواند در این مورد قابل استفاده باشد؟

اگر هر سری مانند $\sum u_n$ مفروض باشد، یك سری با جملات مثبت هست که کاملا به‌آن مربوط است. یعنی، سری $\sum|u_n|$، که از قدر مطلق جملات آن حاصل می‌شود. این نکته منجر به قضیهٔ مفیدی می‌شود.

قضیهٔ ۱.۲.۵. اگر $\sum|u_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum u_n$ همگراست.

برهان. چنین تعریف کنید

$$v_n=\begin{cases} u_n & \text{،}u_n\geqslant ۰ \text{ اگر} \\ ۰ & \text{،}u_n<۰ \text{ اگر}\end{cases}$$

$$w_n=\begin{cases} ۰ & \text{،}u_n\geqslant ۰ \text{ اگر} \\ -u_n & \text{،}u_n<۰ \text{ اگر}\end{cases}$$

دراین‌صورت، $v_n\geqslant ۰$ و $w_n\geqslant ۰$، و سری $\sum v_n$ شامل آن جملاتی از سری $\sum u_n$ است که مثبت (یا صفر) اند.

همچنین،

$$u_n=v_n-w_n$$

$$|u_n|=v_n+w_n$$

حال اگر $\sum|u_n|$ همگرا باشد آنگاه $\sum v_n$ و $\sum w_n$ هردو همگرا هستند. بنابراین، $\sum(v_n-w_n)$، یعنی، $\sum u_n$ نیز همگراست. ∎

تعریف. اگر $\sum|u_n|$ همگرا باشد، سری $\sum u_n$ را همگرای مطلق خوانند.

تمرین. سه مثال از سریهایی که همگرا هستند، ولی همگرای مطلق نیستند ارائه دهید. (یك مثال، $\dots+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}+۱-۱$ است، و قضیهٔ ۲.۲.۵ تعداد دیگری را پیشنهاد می‌کند).

اگر بخواهیم معین کنیم که سری $\sum u_n$ همگراست، اولین قدم آن است که به $\sum |u_n|$ نظری بیفکنیم. اگر $\sum |u_n|$ همگرا باشد، حکم فوق برقرار است. اگر $\sum |u_n|$ واگرا باشد، باید روش دیگری را بررسی کرد.

رایجترین نحوهٔ توزیع علائم درسریها آن است که متناوباً $+$ و $-$ باشند. ذیلا قضیهٔ بسیار مفیدی در بارهٔ چنین «سریهای متناوب» می آید.

قضیهٔ ۲.۲.۵. اگر a_n نزولی باشد، و وقتی که $n \to \infty$، به‌صفر میل کند آنگاه سری

$$a_{0}-a_{1}+a_{2}-a_{3}+\cdots$$

همگراست. همچنین، مجموع آن بین a_0 و a_0-a_1 قرار دارد.

برهان. اگر

$$S_n=a_0-a_1+\cdots+(-1)^n a_n$$

آنگاه

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n+1}\geqslant 0\ ,$$

$$s_{2n}-s_{2n-2}=-a_{2n-1}+a_{2n}\leqslant 0$$

مجموعهای دارای اندیس زوج

$$s_0,\ s_2,\ s_4,\ \cdots$$

تشکیل یك دنبالهٔ نزولی می‌دهند. بنـابر قضیهٔ ۶.۲ این سری به‌یك حد یا به $-\infty$ میل می کند.

به‌طریق مشابه، دنبالهٔ مجموعهای دارای اندیس فرد،

$$s_1,\ s_3,\ s_5,\ \cdots,$$

صعودی است، و به‌یك حد یا $+\infty$ میل می کند. ولی،

$$s_{2n+1}-s_{2n}=-a_{2n+1}\to 0$$

بنابراین، دنباله‌های زوج وفرد می‌بایستی دارای حد یکسان متناهی باشند، ودر نتیجه، s_n به‌این حد میل می کند. بالاخره $s_0=a_0$ و $s_1=a_0-a_1$. درنتیجه، مجمـوع این سری بین این دوعدد قرار دارد.

مثال. به‌ازای چه مقادیری از k سری

$$\frac{1}{1^k}-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{4^k}+\cdots$$

همگراست؟

اگر $k > ۱$، این سری همگرای مطلق است (قضیهٔ ۱.۱.۰۲).

اگر $۰ < k \leqslant ۱$، این‌سری همگراست (قضیهٔ ۲.۲.۰۵). توجه کنید که‌در این‌حالت سری همگرای مطلق نیست.

اگر $k \leqslant ۰$، جملهٔ nم آن به‌صفر میل نمی‌کند، و سری واگراست.

تمرین ۵ (ب)

۱ـ $\sum a_n$ یك سری همگرا با جملات مثبت است. ثابت کنید که

(i) اگر $|b_n| \leqslant a_n$ آنگاه $\sum b_n$ همگرای مطلق است،

(ii) به‌ازای $-۱ \leqslant x \leqslant ۱$، سری $\sum a_n x^n$ همگرای مطلق است،

(iii) $\sum a_n \cos n\theta$ و $\sum a_n \sin n\theta$ همگرای مطلق‌اند.

۲ـ به‌ازای چه‌مقادیری از k، سری $\sum (-۱)^n/(۲n+۱)^k$ همگرای‌مطلق‌است؟به‌ازای چه مقادیری از k این سری همگراست؟

۳ـ به‌ازای چه مقادیری از x (درصورت وجود) سریهای ذیل همگرا هستند، ولی، همگرای مطلق نیستند.

$$\text{(i)} \quad \sum x^n \text{،} \qquad \text{(ii)} \quad \sum \frac{x^n}{n}$$

۴ـ درهمگرایی سریهای زیر بحث کنید:

$$\text{(i)} \quad ۱ - \frac{۳}{۸} + \frac{۵}{۱۶} - \frac{۷}{۲۴} + \frac{۹}{۳۲} - \cdots$$

$$\text{(ii)} \quad ۱ - \frac{۳}{۲} + \frac{۵}{۴} - \frac{۷}{۸} + \frac{۹}{۱۶} - \cdots$$

$$\text{(iii)} \quad ۱ - \frac{۳}{۱} + \frac{۵}{۴} - \frac{۷}{۹} + \frac{۹}{۱۶} - \cdots$$

مخرجهای آنها، به‌ترتیب به‌صورت، $۸n$، ۲^n و $n^۲$ هستند.

۵ـ درهمگرایی سری زیر بحث کنید

$$\frac{a}{۱} - \frac{b}{۲} + \frac{a}{۳} - \frac{b}{۴} + \cdots + \frac{a}{۲m-۱} - \frac{b}{۲m} + \cdots$$

که درآن، a و b اعداد ثابت مثبت هستند.

۶ـ دوعدد با تفاضل نابیشتر از $\frac{۱}{۶}$ بیابید که مجموع سری

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+\cdots$$

می باید بین آنها قرار گیرد.

۷ـ دردرستی ونادرستی گزاره‌های ذیل تحقیق کنید:

(i) اگر $a_n > ۰$، و وقتی که $n \to \infty$، دنبالهٔ a_n به‌صفر میل کند آنگاه سری

$$a_۰-a_۱+a_۲-a_۳+\cdots$$

همگرا است.

(ii) اگر $\sum v_n$ همگرای مطلق باشد، و A ی ثابتی باشد که به‌ازای جمیع n ها،

$$-A\,|\,v_n\,| \leqslant u_n \leqslant A\,|v_n\,|$$

آنگاه $\sum u_n$ همگرای مطلق است.

۳.۵. همگرایی شرطی

تعریف. اگر $\sum u_n$ همگرا و $\sum |\,u_n\,|$ واگرا باشدآنگاه $\sum u_n$ را همگرای‌مشروط می نامند.

مثال. سری

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\cdots$$

همگرای مشروط است.

معنی کلمهٔمشروط دراینجا آن است که مجموعی که این‌سری به‌آن می گراید، مشروط به‌طرزقرارگرفتن جملات است. اگردرجملات‌آن تغییر آرایشی ایجاد شود عموماًمجموع آن تغییرمی کند. به‌عنوان مثال، تغییرآرایشی درسری اخیرمی‌دهیم به‌طوری که همیشه دو جملهٔ منفی به‌دنبال یك‌جملهٔ مثبت بیاید،

$$۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+\cdots$$

فرض کنیم که‌مجموع سری اصلی s باشد (درحقیقت، $s=\log_e ۲$، ولی، دانستن این‌مقدار لازم‌نیست). ثابت می کنیم که تغییر آرایش این سری به‌مجموع $\frac{۱}{۲}s$ همگراست. فرض

کنید s_n و t_n مجموعهای n جملهٔ اول این دوسری باشند. دراین صورت،

$$t_{3n}=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$

درهر بلوك سه جمله‌ای (دومنفی ویك مثبت)، اولین جملهٔ منفی این‌سری‌را ازجملهٔ مثبت‌قبلی آن تفریق می‌کنیم، خواهیم داشت

$$t_{3n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}$$
$$=\frac{1}{2}s_{2n}$$

بنابراین، وقتی‌که $n\to\infty$، $t_{3n}\to\frac{1}{2}s$؛ t_{3n+1} و t_{3n+2} به‌همین حد میل می‌کنند. در نتیجه، سری تغییرآرایش یافته به‌مجموع $\frac{1}{2}s$ همگراست.

این تغییر مجموع، به‌وسیلهٔ تغییرآرایش، جنبهٔ پارادوکس ندارد، زیرا، s_n و t_n توابع مختلفی از n هستند. نتیجهٔ برجسته‌ترآن است‌که ، به‌هرترتیب‌که جملات یك سری همگرای مطلق‌را عوض‌کنیم، در مجموع آن تغییری حاصل نمی‌شود.

قضیهٔ ۳.۵. اگر $\sum u_n$ همگرای مطلق باشد، هرسری که ازهمین جملات باهرترتیبی تشکیل شود همان مجموع را دارد.

برهان. ابتدا این قضیه را درحالت خاصی‌که همهٔ جملات‌آن مثبت است $(u_n\geqslant 0)$ ثابت می‌کنیم.

فرض‌کنیم جملات $\sum u'_n$ همان جملات $\sum u_n$ باشندکه، ترتیب آن به‌طریق دلخواهی تغییر کرده باشد.

فرض‌کنیم

$$s_m=\sum_1^m u_n,\quad s=\sum_1^\infty u_n,\quad t_m=\sum_1^m u'_n$$

هرجملهٔ $\sum u'_n$ درجایی در $\sum u_n$ ظاهرمی‌شود. بنابراین، با m مفروضی، می‌توانیم qئی پیدا کنیم که s_q شامل هر جملهٔ t_m است. چون جملات سری مثبت است، $t_m\leqslant s_q\leqslant s$. حال اگر $m\to\infty$، سری t_m به‌حدی مانند t میل می‌کند، که در اینجا $t\leqslant s$. اینك، می‌توان استدلال را درجهت عکس انجام داد و ثابت‌کرد که $s\leqslant t$. این حکم نتیجه‌را برای سری باجملات مثبت برقرار می‌کند. ▎

حال، این قضیه را می‌باید برای زمانی‌که $\sum u_n$ یك سری همگرای مطلق دلخواه،

و $\sum u'_n$ تغییرآرایشی ازآن باشد، ثابت نمود.

مانند قضیهٔ ۱.۲.۵، v_n، w_n — را به‌عنوان جملات مثبت ومنفی $\sum u_n$ تعریف کنید و v'_n، w'_n دارای همان مفاد برای سری $\sum u'_n$ باشند.

چون $\sum |u_n|$ همگراست، $\sum v_n$ و $\sum w_n$ هردو همگرا هستند.

دراین‌صورت، $\sum v'_n$ و $\sum w'_n$، به‌ترتیب، تغییرآرایش‌یافته‌های سریهای همگرای باجملات مثبت $\sum v_n$ و $\sum w_n$ هستند.

نتیجهٔ این حکم ازحالت خاص قضیه به‌دست می‌آید. ▎

تمرین. اگر s_n مجموع n جملهٔ اول سری زیر باشد

$$۱-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\cdots,$$

و t_n مجموع n جملهٔ اول سری بااین تغییرآرایش باشد که یك جملهٔ منفی بعد از دو جملهٔ مثبت می‌آید؛

$$۱+\frac{۱}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۵}}+\frac{۱}{\sqrt{۷}}-\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\cdots,$$

ثابت کنید که

$$t_{۳n}>s_{۲n}+\frac{n}{\sqrt{۴n-۱}}$$

ونتیجه بگیرید که سری دومی به $+\infty$ واگراست.

۴.۵. سریهای باجملات مختلط

مفهوم حد یك دنباله وهمگرایی یك سری‌را می‌توان ازاعداد حقیقی به‌اعدادمختلط تعمیم داد.

فرض کنید

$$s_n+it_n=\sum_{r=۱}^{n}(u_r+iv_r)$$

تعریف. گوییم که $s_n+it_n\to s+it$ و $\sum(u_n+iv_n)$ به‌مجموع $s+it$ همگراست، درصورتی که اگر $n\to\infty$ آنگاه

$$|(s+it)-(s_n+it_n)|\to ۰$$

این معادل آن است که بگوییم

$$t_n \to t \,,\; s_n \to s$$

زیرا،

$$|s-s_n| \leqslant |(s-s_n)+i(t-t_n)| \leqslant |s-s_n| + |t-t_n|$$

تعریف. سری $\sum(u_n+iv_n)$ را همگرای مطلق خوانیم در صورتی که $\sum|u_n+iv_n|$ همگرا باشد.

این معادل آن است که بگوییم $\sum u_n$ و $\sum v_n$ هر دو همگرای مطلق‌اند، زیرا (مانند قبل)

$$|u_n| \leqslant |u_n+iv_n| \leqslant |u_n| + |v_n|$$

بسیاری از نتایجی را که برای دنباله‌ها و سریهای حقیقی به‌دست آوردیم، می‌توانیم به‌دنباله‌ها و سریهای مختلط تعمیم دهیم و براهین مربوطه مشکل نیستند. برای نمونه به‌حکم ذیل که مشابه حکم بخش ۷.۲ است، نیازمندیم.

دنبالهٔ z^n (به‌ازای z ثابت)، وقتی که $n \to \infty$، به‌یك حد میل می‌کند فقط وفقط وقتی‌که $z=1$ یا $|z|<1$.

برهان. فرض کنیم که $z^n \to l$. دراین صورت، $z^{n+1} \to l$. ولی حد z^{n+1} یعنی، $(z^n)(z)$، حاصلضرب z وحد z^n، یعنی، zl است. بنابراین،

$$l = zl$$

واین فقط وفقط وقتی برقرار است که $z=1$ یا $l=0$.

اما، $z^n \to 0$ فقط وفقط وقتی‌که $|z|^n \to 0$؛ یعنی، (بنابر، بخش ۶.۲) فقط و فقط وقتی‌که $|z|<1$. ▌

معلوماتی که دربارهٔ رفتار z^n حاصل می‌شود ما را قادر می‌سازد که درهمگرایی سری تصاعد هندسی بحث کنیم؛

$$1+z+\dots+z^n+\dots$$

اگر $z=1$، سری واگراست.

اگر $z\neq 1$، $s_n=(1-z^n)/(1-z)$ ومشاهده کرده‌ایم که این به‌یك حدمیل می‌کند فقط وفقط وقتی که $|z|<1$.

بنابراین، مقادیر z، که به‌ازای آن سری همگراست، نقاط داخل دایره‌ای درصفحهٔ

مختلط است. در بخش آینده، مشاهده خـواهیم کرد که این «دایرهٔ همگرایی» بـرای دستهٔ وسیعی از سریها موجود است.

تمرین ۵ (ج)

۱ ــ مجموع n جملهٔ سری

$$1+2z+3z^2+\dots+(n+1)z^n+\dots$$

را پیدا کنید. ثابت کنید که اگر $|z|<1$ ، سری همگراست ومجموع آن را بهدست آورید.

۲ ــ ثابت کنید که سری

$$1-\frac{z}{1-z}+\left(\frac{z}{1-z}\right)^2-\left(\frac{z}{1-z}\right)^3+\dots$$

فقط وفقط وقتی همگراست کـه $\operatorname{re} z<\frac{1}{2}$، مجموع آن چیست؟

۳ ــ همگرایی و واگرایی سریهای ذیل را مشخص کنید، درصورتی که n مین جملهٔ آنها چنین باشد

$$\text{(i)}\ \frac{i^n}{n}\text{،}\quad \text{(ii)}\ \frac{(1+i)^n}{n^2}\text{،}\quad \text{(iii)}\ \frac{i^{n^2}}{n}$$

۵.۵. سریهای توانی

سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ از مضارب توانهای z را یك سری توانی می‌نامند. درعمـل متغیر z ضرایب a_n اغلب حقیقی‌اند، ولی اگر اینها مقادیرمختلط هم داشته باشند، بحث سری را می‌توان به‌همان سادگی انجام داد.

قضیه ۱.۵.۵. یك سری توانی ممکن است (۱) بهازای همهٔ مقادیر z، یـا (۲) بـهازای zهای ناحیه‌ای درصفحهٔ مختلط، یا (۳) فقط بهازای $z=0$، همگرا باشد.

برهان. تنها کاری که باید بکنیم این است که برای هرحالت ممکن مثالی بیاوریم.

(۱) اگر $u_n=z^n/n!$، $\sum u_n$، بهازای همه مقادیر z، همگرای مطلق است. زیرا ، بهازای هرمقدار z،

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{|z|}{n+1}\to 0$$

و ازآزمون دالامبر (قضیهٔ ۲.۱.۵) نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) ثابت شدکه سری هندسی $\sum z^n$، در بخش ۴.۵، فقط وفقط وقتی همگراست که $|z|<1$.

(۳) اگر $u_n = n!z^n$ و $z \neq 0$ آنگاه، وقتی که $n \to \infty$، $|u_n| \to \infty$ و $\sum u_n$ نمی‌تواند همگرا باشد.

قضیه ۲.۵.۵. اگر یك سری توانی به‌ازای مقادیرخاص z؛ مثلاً، $z = z_1$، همگرا باشد، آنگاه به‌ازای همهٔ مقادیر z در دایره $|z| < |z_1|$ همگرای مطلق است.

برهان. چون $\sum a_n z_1^n$ همگراست، بنابراین، n مین جملهٔ آن، $a_n z_1^n$ به صفر میل می‌کند (بخش ۲.۱.۲ (۳)). درنتیجه، Kیی می‌توان پیدا کرد به‌طوری‌که، به‌ازای همهٔ nها، $|a_n z_1^n| < K$. دراین‌صورت،

$$|a_n z^n| < K\left|\frac{z}{z_1}\right|^n$$

و همگرایی $\sum |a_n z^n|$ ازسری هندسی $\sum |z/z_1|^n$ نتیجه می‌شود.

تمرین. ثابت کنیدکه حکم قضیهٔ ۲.۵.۵ تحت این فرض وسیعتر که $\sum a_n z^n$، به‌ازای $z = z_1$ نوسانی کراندار است، درست است.

۶.۵. دایرهٔ همگرایی یك سری توانی

قضیهٔ ۱.۶.۵. یك سری توانی یا

(۱) به ازای همه zها، همگرای مطلق است، یا

(۲) به‌ازای همهٔ z های داخل دایره‌ای، مانند $|z| = R$، همگرای مطلق است وبه‌ازای zهای خارج آن واگراست، یا

(۳) فقط به‌ازای $z = 0$ همگراست.

برهان. فرض کنید x عدد حقیقی مثبتی باشد $(x \geqslant 0)$.

فرض کنید S مجموعهٔ xهایی‌باشدکه به‌ازای‌آن سری توانی $\sum a_n x^n$ همگراست. مسلماً $x = 0$ در S است، ازقضیهٔ ۱.۵.۵، مجموعهٔ S ممکن است شامل اعضایی به‌غیراز صفر باشد یا نباشد. بنابرقضیهٔ ۲.۵.۵، اگر x_1ی در S باشد، دراین صورت، همهٔ xهایی که $0 \leqslant x \leqslant x_1$ نیزدر S اند.

اگر همهٔ اعداد حقیقی مثبت در S باشند، دراین حالت حکم (۱) را خواهیم‌داشت. اگر S شامل همهٔ اعداد مثبت نباشد، دارای سوپرموم متناهی مانند R است (که در اینجا $R \geqslant ۰$).

اگر $R > ۰$، ودرصورتی که $|z_۱| < R$، ثابت‌خواهیم‌کرد که $\sum a_n z_۱^n$ همگرای مطلق‌است. زیرا، اگر $R_۰$ را طوری انتخاب‌کنید که $|z_۱| < R_۰ < R$، دراین‌صورت، $R_۰$ در S است و در نتیجه این سری به‌ازای $z = R_۰$ همگـراست. بنـابرقضیـه ۲.۵.۵، $\sum |a_n z_۱^n|$ همگراست.

سپس، ثـابت مـی‌کنیم‌کـه اگر $۰ \leqslant R < |z_۲|$. این سری به‌ازای $z = z_۲$ نمی‌تواند همگرا باشد. زیرا اکنون بااختیار $R_۰$ به‌طوری‌که $R < R_۰ < |z_۲|$، اگر $\sum a_n z_۲^n$ همگرا باشد آنگاه بنـابر قضیهٔ ۲.۵.۵ ، $\sum a_n R_۰^n$ باید همگـرا باشد، که بـا $R = \sup S$ متناقض است. ▌

تعریف. دایرهٔ $|z| = R$ را دایرهٔ همگرایی‌سری توانی وشعاع‌آن‌را شعاع همگرایی می‌نامند.

موضوعی‌که باید تذکر دادآن است‌که هیچ مطلبی درمورد همگرایی یـا واگرایی سری، به‌ازای مقـادیری از z که برروی دایره همگـرایی است، ثابت نکـرده‌ایم. این موضوع بسیارظریف است وبرای هرسری خاصی مستلزم بررسی ویژه‌ای است.

فرمول سادهٔ ذیل‌را برای تعیین R، در بسیاری ازسریهای معمولی به‌کارمی‌بریم.

قضیهٔ ۲.۶.۵. اگر $|a_{n+۱}/a_n|$ وقتی که $n \to \infty$، به‌حدی مانند l میل‌کند، آنگاه‌شعاع همگرایی $\sum a_n z^n$ مساوی $۱/l$ است.

برهان. باتوجه به‌آزمون دالامبر، درصورتی همگرایی مطلق را خواهیم داشت‌کـه

$$\lim \left| \frac{a_{n+۱} z^{n+۱}}{a_n z^n} \right| < ۱,$$

یعنی، در صورتی‌کـه،

$$|z| < \frac{۱}{l}$$

و اگر $|z| > ۱/l$،

$$\lim \left| \frac{a_{n+۱} z^{n+۱}}{a_n z^n} \right| > ۱$$

بنابراین، n مین جملهٔ آن، $a_n z^n$، به‌صفر میل نمی‌کند وهمگرایی غیر ممکن است. ▌

تذکو. l را متناهی غیرصفرفرض کردیم. خــوانندە باید حالتهــای مستثنی شده را بررسی کند.

مثالها. هریك از سریهای

$$\sum z^n,\ \sum \frac{z^n}{n}\ ,\ \sum \frac{z^n}{n^۲}$$

دارای شعاع همگرایی ۱ است. اولین سری در هیــچ نقطه‌ای برروی دایــرهٔ $|z| = ۱$ همگرا نیست؛ سومی برهمهٔ نقاط این دایره همگرای مطلق است. دومی، به‌ازای $z = ۱$ واگراست، وباتدبیرپیشنهادی تمرین ۵ (د)، ۸، می‌توان ثابت کردکه برهمهٔ نقاط دیگــر دایرهٔ $|z| = ۱$ همگراست.

روش اصولی برای پــاسخ به‌همگرایی $\sum a_n z^n$ بردایرهٔ همگرایی آن خــارج از قلمرو این کتاب است.

تمرین ۵ (د)

۱ ــ شعاع همگرایی سریهای توانی راکه جملهٔ عمومی‌آنها درذیل‌آمده است پیداکنید.

(i) nz^n (ii) $n^۳ z^n / n!$ (iii) $\left(\dfrac{nz}{n+۱}\right)^n$

(iv) $n! z^n$ (v) $\dfrac{(n!)^۲ z^{۲n}}{(۲n)!}$ (vi) $\dfrac{z^{۲n+۱}}{۲n+۱}$

(vii) $n! z^{n^۲}$ (viii) $\{۳+(-۱)^n\}^n z^n$

۲ ــ ثابت‌کنیدکه، اگر $|a_n|^{۱/n} \to ۱/r$، وقتی‌که $n \to \infty$، آنگـاه سری $\sum a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی r است.

درهمگرایی سری $\sum a^{n^۲} z^n$، که درآن a یك عدد ثابت است، بحث کنید.

۳ ــ اگرسری $\sum a_n z^n$ دارای شعاع همگرایی R بــاشد، درچــه نـاحیهٔ صفحهٔ z سری $\sum a_n (z-z_۰)^n$ همگراست؟ به‌همین سؤال درمورد سری $\sum a_n z^{-n}$ جواب دهید.

۴ ــ ثابت‌کنیدکه سری

$$۱+z+z^۲+\dots+z^n+\dots$$

به‌ازای همهٔ مقادیر z، که درآن سری

$$۲+۲(۲z-۱)+۲(۲z-۱)^۲+\dots+۲(۲z-۱)^n+\dots$$

همگراست، همگرا می‌باشد، ومجموع آنها یکسان است.

۵ ــ اگر به‌ازای همهٔ nها، $|a_n|<k$، آنگاه در مورد شعاع همگرایی $\sum a_n z^n$ چـه می‌توان گفت؟ بعلاوه، اگر $|a_n|>l>۰$ آنگاه چه نتیجه‌ای حاصل می‌شود؟

۶ ــ اگر به‌ازای همهٔ nها، $|a_n|\leqslant ۱$، آنگاه معادلهٔ

$$۱=a_۱z+a_۲z^۲+\dots$$

نمی‌تواند ریشه‌ای باهنگ کوچکتر از $\frac{۱}{۲}$ داشته باشد. اگـر $z=\frac{۱}{۲}(\cos\theta+i\sin\theta)$ در آن صدق کند، دراین‌صورت،

$$a_n=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

۷ ــ اگرشعاع‌همگرایی $\sum a_n z^n$ عدد r و $\sum b_n z^n$ عدد s باشد،درمورد شعاع همگرایی سری $\sum(a_n+b_n)z^n$ چه می‌توان گفت؟

۸ ــ بادرنظر گرفتن $(z-۱)\sum_{۱}^{m}(z^n/n)$، هنگامی‌که $|z|=۱$، یا طریقه دیگر، ثابت کنید که $\sum_{۱}^{\infty}(z^n/n)$ درهمهٔ نقاط دایرهٔ $|z|=۱$، بجز $z=۱$، همگراست.

۹ ــ درهمگرایی سری توانی که n مین جملهٔ آن درزیرآمده است بحث کنید،

$$\frac{۱.۳.۵\ \dots\ (۲n-۱)}{۱.۴.۷\ \dots\ (۳n-۲)}z^n$$

۷.۵. ضرب سریها

ممکن است بخواهیم دوسری نامتناهی را دریکدیگر ضرب کنیم وببینیم آیا نوشتن، مثلا، حاصلضرب دوسری توانی

$$(a_۰+a_۱z+a_۲z^۲+\dots)(b_۰+b_۱z+b_۲z^۲+\dots)$$

به‌صورت سری توانی ذیل درست است،

$$a_۰b_۰+(a_۱b_۰+a_۰b_۱)z+(a_۲b_۰+a_۱b_۱+a_۰b_۲)z^۲+\dots$$

این توسیع حاصلضرب دوچند جمله‌ای به‌سری نامتناهی است.

چون عمل ضرب متضمن آزادی درآرایش جملات حاصلضرب درترتیب موردنظر می‌باشد، ممکن است حدس بزنیم که یك شرط کافی برای درستی آن همگـرایی مطلق دو

سری خواهد بود. درستی این حدس را ثابت خواهیم کرد. قضیه برای سریهایی بیان خواهد شد که لزومی ندارد سری توانی باشند.

قضیهٔ ۷.۵. اگر $\sum u_n$ و $\sum v_n$ به مجموعهای s و t همگرای مطلق باشند، آنگاه سری $\sum u_p v_q$ ، که مرکب از حاصلضرب هر جملهٔ اولین سری در هر جملهٔ دومین سری (در ترتیب دلخواهی) می‌باشد، به مجموع st همگرای مطلق است.

برهان. حاصلضرب زوجهای این جملات تشکیل یك آرایهٔ نامتناهی مضاعف ذیل را می‌دهد

$$\begin{vmatrix} u_0v_0 & u_0v_1 & u_0v_2 & \cdots \\ u_1v_0 & u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots \\ u_2v_0 & u_2v_1 & u_2v_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

مجموع همهٔ این جملات را می‌توان (به بی‌نهایت طریق) به صورت یك سری واحد آرایش داد. برای مثال، ممکن است جملات $u_p v_q$، که در آن، $p+q=n$، با ترتیب صعودی n، اختیار کنیم؛ یعنی ،

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_0v_1)+(u_2v_0+u_1v_1+u_0v_2)+\cdots$$

این را ممکن است جمع قطری بنامیم. یا ممکن است عمل جمع را «مربع‌وار» نظیر

$$u_0v_0+(u_1v_0+u_1v_1+u_0v_1)+(u_2v_0+u_2v_1+u_2v_2+u_1v_2+u_0v_2)+\cdots ,$$

انجام داده، ابتدا u_0v_0، سپس جملاتی با اندیس ۱ و نه بزرگتر، و بعد جملاتی با اندیس ۲ و نه بزرگتر، وغیره را انتخاب کنیم.

آرایش هرچه که باشد، مجموع هنگ هر تعداد جملات حاصلضرب از

$$\left(\sum_0^\infty |u_n|\right)\left(\sum_0^\infty |v_n|\right)$$

تجاوز نمی کند، ودرنتیجه، سری $\sum u_p v_q$ همگرای مطلق است.

بنا برقضیهٔ ۳.۵ (که برای جملات مختلط هم برقرار می‌ماند)، ترتیب جملات هر چه باشد، حاصل جمع آن یکسان است. ولی تنها در ترتیب خاصی، یعنی، جمع مربع‌وار است که در آن حاصل جمع معلوم است. زیرا، مجموع همهٔ جملات با اندیس نابیشتر از

n عبارت است از

$$(u_0+u_1+\cdots+u_n)(v_0+v_1+\cdots+v_n)$$

وحدآن st است. ∎

نتیجه. اگر $\sum a_n z^n$ و $\sum b_n z^n$ دارای شعاعهـای همگرایی R و S باشند آنگـاه بهازای $|z|<\min(R,S)$، حاصلضرب آنها عبارت است از

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_nb_0+a_{n-1}b_1+\cdots+a_0b_n)z^n$$

۸.۵. سری تیلر

قضیهٔ اساسی ومهمی بیان می‌کندکه اگر $f(x)$ در شرایط معینی صدق‌کند آنگـاه می‌توان‌آن‌را به‌صورت سری توانی ذیل بسط داد

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots$$

این قضیه‌را ثابت می کنیم.

چنانکه علامت نشان می‌دهد، متغیرحقیقی است. در واقع، بسط مشابهی برای $f(z)$ هست‌که از بسط $f(x)$ دامنهٔ وسیعتری دارد، ولی، این بسط متعلق به‌مراحل بعدی‌آموزش ریاضیات است.

درکجای این‌کتاب‌کاری شبیه این بسط برای $f(x)$، پیش‌آمده است؟ قضیه۲.۸.۴، که قضیهٔ مقدار میانگین مرتبه nم می‌باشد، $f(x)$ را به‌عنـوان یك چند جمله‌ای برحسب x بیان می‌کندکه درآن، ضرایب تا ضریب x^{n-1} همان ضرایب سری توانی هستند. گذر ازاین چند جمله‌ای به‌سری نامتناهی تحت مفروضات قضیهٔ زیرمعتبراست.

فرض‌کنیم‌که $f(x)$ به‌ازای

$$a-k<x<a+k$$

ازهرمرتبه‌ای مشتق داشته باشد. در این صورت، باتوجه به‌قضیهٔ ۲.۸.۴، می‌دانیم‌که اگر $|h|<k$،

$$f(a+h)=S_n+R_n$$

که درآن،

$$R_n=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h) \quad \text{و} \quad S_n=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{h^r}{r!}f^{(r)}(a)$$

در آخرین سطر، θ عددی بین ۰ و ۱ است که به a، h، و n بستگی دارد.

اگر، وقتی که $n \to \infty$، $R_n \to 0$، آنگاه $S_n \to f(a+h)$. لذا، نتیجه ذیل را داریم.

قضیهٔ ۸.۵. (سری تیلر). اگر درقضیهٔ ۸.۴.۲، R_n (جمله‌ای که برحسب h^n است)، وقتی که n به ∞ میل می‌کند، به‌صفر میل کند آنگاه

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\dots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)+\dots$$

برطبق تبصرهٔ صفحهٔ ۹۸ ، بسط آن را، به‌ازای $a=0$، می‌توان سری ماکلورن نامید.

سری دوجمله‌ای. به عنوان مثالی در کاربرد قضیهٔ ۸.۵ قضیهٔ دو جمله‌ای $f(x)=(1+x)^m$ را ثابت می‌کنیم که درآن، m یک‌عدد منطق مثبت یامنفی است.

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}$$

و ثابت می‌کنیم که اگر $-1<x<1$،

$$(1+x)^m=1+\binom{m}{1}x+\dots+\binom{m}{n}x^n+\dots$$

اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد، $f^{(m+1)}(x)\equiv 0$ و چند جمله‌ای از درجه m خواهد بود. درحالت کلی،

$$R_n=\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x)=\binom{m}{n}\frac{x^n}{(1+\theta x)^{n-m}},$$

که درآن، θ به n بستگی دارد.

حال، اگر $0\leqslant x<1$، و به‌ازای $n>m$، $(1+\theta x)^{n-m}>1$، و چنانچه در تمرین ۲(د)، ۱۱، بیان شد،

$$\binom{m}{n}x^n\to 0,\quad n\to\infty$$

درنتیجه، $R_n \to \circ$.

اگر x منفی باشد، این استدلال معتبر نیست، زیرا، $1+\theta x$ بزرگتر از ۱ نیست. دراین حالت، متوسل به‌باقیماندهٔ کوشی می‌شویم (قضیهٔ ۳.۸.۴) که می‌توان از آن برای همهٔ مقادیر $-1 < x < 1$ استفاده کرد. ازاینجا نتیجه می‌شود که

$$R_n = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1.2.\dots.(n-1)}\ \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{(1+\theta x)^{n-m}}$$

اینك، $(1-\theta)/(1+\theta x)$ از ۱ کوچکتر است، بنابراین،

$$|R_n| < K_m \left|\binom{m-1}{n-1}\right| |x|^n,$$

که در آن، K_m به m و x بستگی دارد ولی به n بستگی ندارد. مجدداً بنابرتمرین ۲(د)، ۱۱، وقتی که $n \to \infty$، $R_n \to \circ$. صورتهای معروف دیگر سری تیلر درفصل بعد خواهد آمد. ∎

تمرین ۵ (ه)

۱ ــ درهمگرایی سریهایی که‌جملهٔ nام آن در زیرداده شده، بحث کنید (که درآنها a، b، c مثبت‌اند).

(i) $1-\cos(\pi/n)$ (ii) $a^n/(b^n+c^n)$

(iii) $\dfrac{1}{(an^2+bn+c)^k}$ (iv) $\dfrac{(-1)^n}{(an^2+bn+c)^k}$

(v) $(-1)^n a^{1/n}$، $(a>\circ)$ (vi) $(-1)^n\{\sqrt{n^2+1}-n\}$

۲ ــ ثابت کنید که، اگر $a>1$، سری

$$\frac{1}{a+1}+\frac{2}{a^2+1}+\frac{4}{a^4+1}+\frac{8}{a^8+1}+\dots$$

به‌مجموع $1/(a-1)$ همگراست.

۳ ــ اگر $u_{n+1} \geqslant u_n$ و $\sum u_n$ همگرا باشد، ثابت کنید که $\lim nu_n = \circ$.

۴ ــ ازسری $\sum(1/n)$، هرجمله‌ای که‌شامل رقم خاصی (مثلاً، ۷) است، برداشته می‌شود. ثابت کنید که سری تشکیل شده ازجملات باقیمانده، همگراست.

۵ ـ سری $\sum a_n z^n$ همگرا به مجموعی مانند $f(z)$ است در صورتی که $|z| < 1$. ثابت کنید که اگر $s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$ و $|z| < 1$، سری $\sum s_n z^n$ به مجموع $f(z)/(1-z)$ همگرا است.

از اینجا برهان دیگری برای قضیهٔ دو جمله‌ای، هنگامی که نما یك عدد صحیح منفی باشد، ارائه دهید.

٦

توابع مخصوص درآنالیز

۱.۶. توابع مخصوص درآنالیز

یکی ازکاربردهای اصلی آنالیزریاضی عبارت از حل مسائلی است که به‌صورت محاسبات عددی درمی‌آیند و درعلوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد وسایرشاخه‌های علوم ظاهر می‌شوند. معمولاً، گامی که بین داده‌های تجربی یامفروضات ونتایجی که می‌توان ازآنها به‌دست آورد، برداشته می‌شود، مبتنی برحل معادلات دیفرانسیل می‌باشد. روابطی که یك تابع‌مجهول را بااولین یادومین مشتق آن (یاسایرمشتقات بامرتبه‌های بالاتر) پیوندمی‌دهد، داده می‌شوند وخود تابع‌را باید ازاین معادله پیدا کرد. برای یك آنالیزدان لازم است که انبوهی ازتوابعی راکه مکرراً ظاهرمی‌شوند دراختیارداشته باشد. اوخواص آنهارامورد تحقیق‌قرارداده ومقادیرعددی آنهارادرجدولی گرد می‌آورد وآنهاراآمادهٔ استفاده‌می‌کند. چنان توابعی را می‌توان توابع مخصوص آنالیز نامید. فهرست توابع مخصوص برای همیشه ثابت نیست. یك ریاضیدان ممکن است تصورکندکه تابع خاصی از چنان اهمیت کمی برخورداراست‌که جایی برای‌آن درلیست قائل نشود یا فکرکندکه در جدول گرد آوردن مقادیرآن به‌زحمتش نیارزد. ریاضیدان دیگری ممکن است بامسائلی مواجه شود که درآن، همان تابع، دارای نقش عمده‌ای است. توابع معینی دارای اهمیت اساسی برای همه هستند. توابع لگاریتمی، نمایی، مثلثاتی ازاین دسته هستند؛ ماخواص مهم‌آنها را بررسی خواهیم کرد.

اولین توابعی‌که ازاصول آنالیزظاهرمی‌شوند، آنهایی هستندکه ازیك تعداد متناهی عمل برروی متغیر x به‌وجود می‌آیند. حاصل این اعمال، تابع x^n، کثیرالجمله‌های برحسب

x، وتوابع منطق برحسب x هستند. برای پیدا کردن توابعی غیرازتوابع منطق بـاید قید «محدود به‌یك تعداد متناهی‌عمل» را کناربگذاریم، یا، به‌عبارت دیگر باید فرایندهای‌حدی را بپذیریم. دراین‌صورت می‌توانیم انتظارداشته باشیم که توابع‌جالب توجهی‌رابه‌صورت حد سریهای نامتناهی، تعریف کنیم.

۲.۶. تابع نمایی

تعریف می‌کنیم:

$$\exp x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

بنابرقضیهٔ ۱.۵.۵، به‌ازای هرمقدارحقیقی یا مختلط x، سری همگراست. درصورتی کـه تذکر بیشتری داده نشود، x را حقیقی فرض می‌کنیم. ثابت خواهد شدکه تـابع $\exp x$ دارای خواصی است که به‌طورقابل ملاحظه‌ای ساده‌اند.

قضیهٔ ۲.۶. $\exp x \times \exp y = \exp (x+y)$.

برهان. اگرقضیهٔ (نتیجه) ۷.۵ را درضرب دوسری $\exp x$ و $\exp y$ به‌کار بریم، جملات بادرجهٔ n برحسب x و y عبارت‌اند از:

$$\frac{x^n}{n!} + \cdots + \frac{x^r y^{n-r}}{r!(n-r)!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} = \frac{(x+y)^n}{n!} \quad |$$

حقایق ذیل فوراً نتیجه می‌شوند.

$$\exp ۰ = ۱$$

(درقضیهٔ ۲.۶، قراردهید $y = -x$) $\exp (-x) = ۱/\exp x$.

$\exp x$ هیچگاه صفرنمی‌شود. (زیرادراین‌صورت،$\exp(-x)$ تعریف‌نخواهدشد). بعداً ثابت خواهیم کرد که

$$\frac{d}{dx}(\exp x) = \exp x$$

ملاحظه می‌کنیم که‌اگرمشتقات جملات متوالی سری $\exp x$ را بنویسیم،آنها بازهم جملات $\exp x$ خواهند بود. پس، نتیجه ظـاهراً درست است ، ولی مهم این است‌کـه خواننده دراینجا، دلیل لزوم احتیاط در ایجاد یك برهان را بفهمد. قسمت بعدی در مورد

حدود مکرر به‌خاطر تشریح این امر درج شده است.

۳.۶. حدود مکرر

بنا بر بخش ۲.۴ می‌دانیم که مشتق مجموع یك تعداد متناهی از توابـع برابر است با مجموع مشتقات یك به یك آنهـا. ولی ما هیچ قضیه‌ای در مورد مشتق مجمـوع یك سری نامتناهی ثابت نکرده‌ایم، و این حکمی است که در اینجـا، در اثبات اینکه مشتق $\exp x$ برابر $\exp x$ است، لازم داریم.

برای درك اینکـه این کار متضمن چه چیزی است، مجمـوع n جملهٔ اول یك سری نامتناهی همگـرا را، که جمـلات آن توابعی از x هستند، به $s_n(x)$ نشان می‌دهیـم، و مجموع آن‌را $s(x)$ می‌نامیم. دراین صورت، $s(x)=\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)$. می‌خواهیم حکم کنیم که

$$s'(x)=\lim_{n\to\infty} s'_n(x)$$

یعنی،

$$\lim_{h\to 0}\frac{s(x+h)-s(x)}{h}=\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h}\right\}$$

یا

$$\lim_{h\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{s_n(x+h)-s_n(x)}{h}\right\}$$

بنا براین، به‌اصل مطلب رسیده‌ایم. درستی قضیه درگرو تعویض ترتیب اعمال

$$\lim_{h\to 0} \text{ و } \lim_{n\to\infty}$$

است که در تابع خاصی از n و h اعمال می‌شود (که همچنین تابعی از x است کـه وقتی n و h تغییر می‌کنند، x ثابت می‌ماند).

کلا می‌توان گفت که تعویض ترتیب حدگیری درحالت کلی نتـایج مختلفی به‌دست می‌دهد. این تعویض فقط وقتی جایز است که تابعی که حدود بر آن عمل می‌کنند، درشرایط محدودکننده‌ای صدق کند. یك مثال ساده، که تعویض حدود در نتیجه اثر می‌گذارد، عبارت است از

$$\lim_{h\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1-nh}{1+nh}\right\}=\lim_{h\to 0}(-1)=-1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{h\to 0}\frac{1-nh}{1+nh}\right\}=\lim_{n\to\infty}(1)=1$$

قضایای کلی دربارهٔ تعویض حدود ، خارج ازموضوع این کتاب است. گاهگاهی ما باتکرار حدود درتوابع ساده سروکارداریم، ودر هرحالت خاص سرراستترین استدلال را ارائه خواهیم نمود.

۴.۶. درجهٔ صعود $\exp x$

قضیه‌ای را که مارا به‌بحث درحدود مکررهدایت کرد ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۴.۶. $d(\exp x)/dx=\exp x$.

برهان. بااستفاده ازقضیهٔ ۲.۶، داریم

$$\frac{\exp(x+h)-\exp x}{h}=\exp x\,\frac{\exp h-1}{h}$$

اینك

$$\frac{\exp h-1}{h}=1+\frac{h}{2!}+\frac{h^2}{3!}+\cdots$$

$$=1+\phi(h)\quad(\text{مثلا})$$

می‌خواهیم ثابت‌کنیم که، وقتی $h\to 0$، $\phi(h)\to 0$. داریم

$$|\phi(h)|\leqslant\frac{|h|}{2}+\frac{|h|^2}{4}+\cdots+\frac{|h|^n}{2^n}+\cdots$$

$$=\frac{\left|\frac{1}{2}h\right|}{1-\left|\frac{1}{2}h\right|}\quad(|h|<2\ \text{به‌شرطی که})$$

$$\to 0\quad(h\to 0\ \text{وقتی که})\ \blacksquare$$

نتیجه. $\exp x$ تابعی پیوسته است.

این مطلب ازبخش ۱.۴ (۳) نتیجه می‌شود. به‌روش دیگر، بااستدلالی مشابه آنچه که دربرهان قضیه ارائه شد، می‌توان آن‌را ثابت کرد.

قضیهٔ ۲.۴.۶. $\exp x$ تابعی اکیداً صعودی است واگر $y=\exp x$، y هرمقدار بزرگتر از

۰ را بهازای یك مقدار x می‌گیرد.

برهان. اگر $x \geqslant ۰$ آنگاه فوراً از بسط تابع به‌صورت سری نتیجه می‌شود که $\exp x \geqslant ۱$. اگر $x < ۰$ آنگاه

$$\exp x = \frac{۱}{\exp(-x)} > ۰$$

چون $\exp x$ برای همهٔ مقادیر x، دارای مشتق مثبتی‌است، این‌تابع اکیداً صعودی‌است.

وقتی $x \to \infty$، بدیهی است‌که $\exp x \to \infty$

وقتی $x \to -\infty$، $\exp x = ۱/\exp(-x) \to ۰+$. ▎

قضیهٔ ۶.۴.۳. (مرتبهٔ بزرگی $\exp x$)

به‌ازای هر kی ثابتی (هراندازه بزرگ)، وقتی $x \to \infty$،

$$\frac{\exp x}{x^k} \to \infty$$

برهان. فرض‌کنیم n عدد صحیح بلافاصله بزرگتر از k باشد.

اگر $x > ۰$، $\exp x > x^n/n!$. زیرا، این تنها یکی از جملات سریی است که $\exp x$ را تعریف می‌کند. ▎

باید به‌این حقیقت مهم وقوف حاصل‌شود. برای مقادیر بزرگ x، تابع $\exp x$ از هر قوهٔ x بزرگتر است (شکل ۳ الف، درصفحهٔ ۱۳۶ ملاحظه شود).

۶.۵. $\exp x$ به‌عنوان یك توان

ازبررسی سری معلوم نمی‌شود که $\exp x$ توان xم مقدارثابتی است. نشان داده خواهد شدکه این حقیقت نتیجهٔ قضیهٔ ۶.۲ است.

تعریف. $e = \exp ۱$

عدد e، یعنی

$$۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \cdots$$

یکی از ثابتهای اساسی ریاضی است. مقدار آن تا ده رقم اعشاری چنین است ۲/۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵. به‌آسانی ثابت می‌شودکه e اصم است ـ برهان درتمرین ۶ (الف)، ۱، به‌اختصارداده شده است. استدلال مشکلتری (که خارج از حدود این کتاب است)

مستلزم آن است که ثابت شود e یك عددجبری نیست، یعنی، ریشهٔ هیچ معادله‌ای باضرایب صحیح نیست.

قضیهٔ ۵.۶. اگر r یك عددمنطق باشد، دراین صورت، $\exp r = e^r$، که درآن، طرف راست برابرتوان rم مثبت عدد e است.

تذکر. برای دانستن اینکه چرا معنی e^r تصریح می‌شود، ملاحظه شود کــه، (مثلا) $e^{\frac{1}{2}}$ دارای دومقدار $(\pm 1/6487\ldots)$ است، درصورتی‌که $\exp \frac{1}{2}$ بــه طور منحصر به‌فرد (به‌وسیلهٔ سری) مشخص می‌شود.

برهان. اگر r یك عددصحیح مثبت، مثل n، باشد ازقضیهٔ ۲.۶، نتیجه می‌شود

$$\exp n = (\exp 1)^n = e^n$$

اگر r یك عددصحیح منفی، مانند $-n$، باشد، دراین‌صورت،

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp n} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}$$

اگر r برابرعدد منطقی، مانند p/q، باشد، که p و q اعداد صحیح هستند، داریم

$$\{\exp(p/q)\}^q = \exp p \quad (\text{بنا برقضیهٔ ۲.۶})$$

$$= e^p \quad (\text{هم‌اکنون ثابت شد})$$

بنا براین، $\exp(p/q) = e^{p/q}$. ▌

قوای اصم. از (مثلا) $3^{\sqrt{2}}$ چه می‌فهمیم؟ محتملا، اگر خواننده بـه‌عقب بر گشته و به‌آنچه‌که درمورد قوه‌ها گفته شده‌است نگاه کند، متوجه خواهد شد که تاکنون هیچ معنایی برای‌آن منظورنشده است. اعدادی، مثل $3^{7/5}$، به‌طریقی تعریف‌شده‌اند که درقوانین‌قوه‌ها، مثل $a^m a^n = a^{m+n}$، صدق می‌کنند. این قوانین تعریفی برای $3^{\sqrt{2}}$ بیان نمی‌کنند.

طبعاً می‌توان این نکته‌را مطرح کرد که چون $\sqrt{2}$ را می‌توان تاهر اندازه‌ای که‌مورد نظر باشد به‌وسیلهٔ اعداد منطق تقریب کرد (بخش ۵.۱ ملاحظه شود). $3^{\sqrt{2}}$ را مــی‌توان به‌وسیلهٔ حد 3^r تعریف کرد که در آن r روی دنباله‌ای‌ازاعداد منطق به‌حد $\sqrt{2}$ میل‌می‌کند. گرچه این روش، امکان‌پذیراست، ازحد مورد انتظارمشکلتراست. لازم است نشان دهیم‌که 3^r دارای حداست، وبعلاوه به‌ازای هردو دنباله‌ای‌که به $\sqrt{2}$ میل می‌کنند، حد یکتاست.

پس‌باید به‌فکربود که معنی توان a^x (حالت‌کلی) به‌چه‌صورت روشنتراست. مقدار خاصی از a، یعنی $a = e$، هست‌که در آن‌کارهای قبلی‌نشان می‌دهندکه چه باید کرد.

تعریف. اگر x اصم باشد، e^x برابر $\exp x$ تعریف می‌شود.

البته، قبلا ثابت کرده‌ایم که وقتی x منطق است $e^x = \exp x$. بنابراین، این تساوی برای تمام مقادیر x برقرار است.

ما بحث بیشتر درمورد a^x را، که a مقداری غیراز e است، تا بخش ۶.۶ به‌تعویق می‌اندازیم.

تمرین ۶ (الف)

۱ ـ ثابت کنید که

$$\sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \frac{1}{m(m!)}$$

نتیجه بگیرید که e اصم است.

۲ ـ ثابت کنید که، وقتی $n \to \infty$،

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$$

۳ ـ به‌ازای هرعدد حقیقی x، درحد ذیل، وقتی $n \to \infty$، تحقیق کنید

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

۴ ـ فرض کنیم k مقدارثابتی با $1 > k > 0$، باشد. نمودارتابع

$$e^{-x}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\right)-k$$

را رسم کنید.

ثابت کنید که معادلهٔ زیرتنها دارای یك ریشهٔ حقیقی ومثبت مانند x_n است.

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}=ke^x$$

همچنین نشان دهید که (با ثابت ماندن k) وقتی n بزرگ می‌شود، x_n صعودمی‌کند.

۵ ـ بزرگترین ریشهٔ معادلهٔ ذیل را به‌تقریب حساب کنید.

$$e^x = x^{1000}$$

۶ ـ توابع ذیل را برحسب بزرگی آنها، به‌ازای مقادیر بزرگ x، مرتب کنید.

$$x^{-1} \exp(\sqrt{x}),\ x \exp\{(\log x)^2\},\ x^2 \exp\{(\log x)^{\frac{1}{2}}\}$$

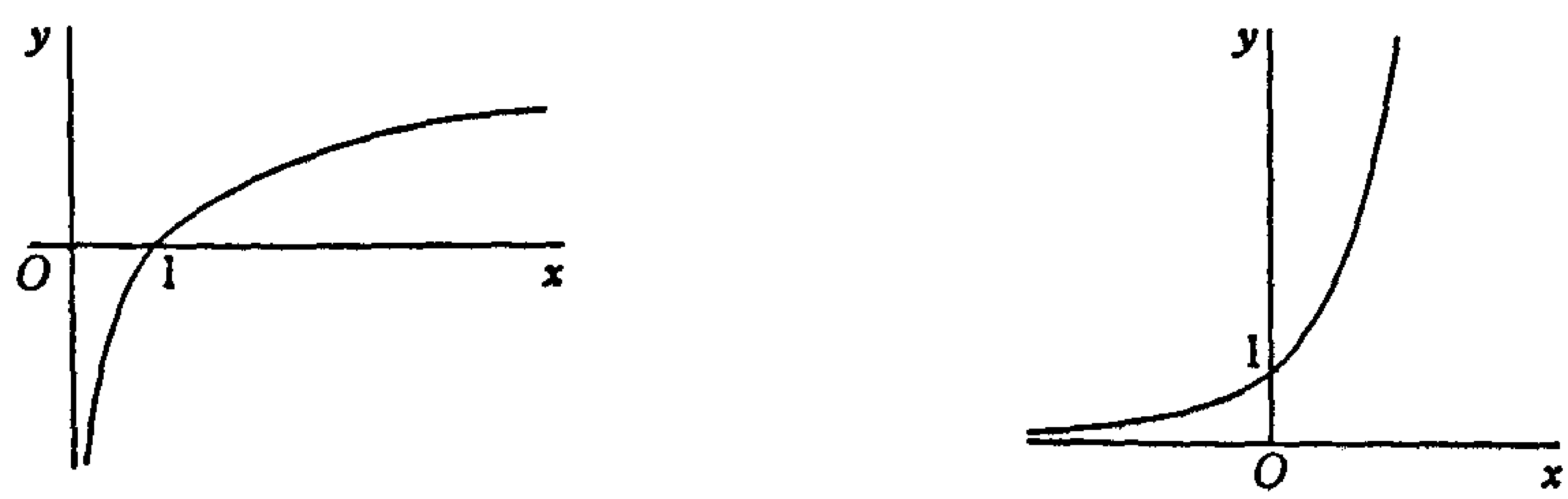
۷ ــ آیا می‌توان تابعی یافت که، وقتی $x \to \infty$، به‌ازای هر $\delta > 0$، از $e^{\delta x}$ آهسته‌تر و به‌ازای هر nی از x^n سریعتر به بی‌نهایت میل کند؟

۶.۶. تابع لگاریتمی

قضایای ۹.۳ و ۲.۴.۶، ما را قادر می‌سازند تا تابعی با متغیر حقیقی تعریف کنیم که عکس تابع نمایی باشد.

تعریف. اگر $x = e^y$، می‌نویسیم $y = \log x$، به‌شرطی که $x > 0$.

خواص زیر از خواص متناظر در توابع نمایی نتیجه می‌شوند و خواننده باید مراحل استنتاج را تحقیق کند. همیشه فرض بر این است که عدد بعد از علامت log مثبت است.



$y = \log x$ (ب)

$y = \exp x$ (الف)

شکل ۳

تابع لگاریتم پیوسته و دیفرانسیلپذیر است و

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

وقتی که $x \to \infty$، $\log x \to \infty$

وقتی که $x \to 0+$، $\log x \to -\infty$

اگر $k > 0$ آنگاه، وقتی $x \to \infty$، $\dfrac{\log x}{x^k} \to 0$.

خاصیت اخیر (که لازم وملزوم باخاصیت بیان‌شده درپایان بخش ۴.۶ می‌باشد) مهم است. درقالب کلمات، وقتی x به ∞ میل می‌کند، $\log x$ به ∞ میل می‌کند، ولی سرعت میل کردن آن به بی‌نهایت، خیلی آهسته‌تر ازهرتوان صحیح مثبت x (هرچند کوچك) است. نمودار کلی $y=\log x$ درشکل ۳ب، نشان داده شده است.

$\log(1+x)$ دارای نمایش ساده‌ای به‌صورت سری نمایی می‌باشد.

قضیهٔ ۶.۶. اگر $-1 < x < 1$ آنگاه

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\dots$$

برهان برعهدهٔ خواننده است. باشروع ازقضیهٔ ماکلورن، این برهان به‌برهان قضیهٔ دو جمله‌ای که درصفحهٔ ۱۲۶ ارائه شد، بسیارنزدیك است. صورت ماندهٔ لاگرانژ، برای مقادیرمثبت x به‌کار می‌رود، ولی صورت ماندهٔ کوشی برای مقادیر منفی x مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تذکر. نتایج قضیهٔ ۶.۶ برای $x=1$ نیز برقرار است. اثبات آن هم به‌کمك انتگرالگیری وروش قضیهٔ ۹.۷ (صفحهٔ ۱۶۹ ملاحظه شود) به‌آسانی صورت می‌گیرد.

قوهٔ کلی a^x. درآخربخش ۵.۶ مقدار a^x را برای وقتی که x منطق بود، ودرحالت خاص $a=e$ برای x اصم، تعریف کردیم. هنوزمعنایی برای a^x، وقتی که x اصم و$a\neq e$ ارائه نکرده‌ایم. تعریف ذیل را می‌پذیریم.

تعریف. اگر $a>0$ و x اصم باشد، a^x را چنین تعریف می‌کنیم

$$e^{x\log a}$$

این باتعریف e^x، که دربخش ۵.۶ بیان شد، سازگاراست ورابطهٔ $a^x=e^{x\log a}$، درحالتی که x منطق است، برقرار می‌باشد. خواننده می‌تواند قوانین قوه‌ها را ثابت کند

$$a^x\times a^y=a^{x+y},(a^x)^y=a^{xy}$$

که برای $a>0$ وهرمقدار x و y برقرارند.

تمرین ۶ (ب)

۱ ــ ثابت کنید که، وقتی $n\to\infty$،

$$n(x^{۱/n}-۱) \to \log x$$

۲ ـ ثابت کنید که اگر $x > ۰$،

$$x-\frac{۱}{۲}x^{۲} < \log(۱+x) < x-\frac{۱}{۲}x^{۲}+\frac{۱}{۳}x^{۳}$$

تعمیمی بر این نامساویها ارائه دهید.

۳ ـ تابع دیفرانسیلپذیر f (که متحد با ۰ نیست) در رابطهٔ تابعی

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

صدق می‌کند. ثابت کنید که

$$f'(x)=\frac{A}{x}$$

۴ ـ ثابت کنید که اگر $y > ۰$،

$$\log y = ۲\left\{\frac{y-۱}{y+۱}+\frac{۱}{۳}\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right)^{۳}+\frac{۱}{۵}\left(\frac{y-۱}{y+۱}\right)^{۵}+\cdots\right\}$$

این سری را به‌کار برده، $\log ۲$ را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید.

۵ ـ حدود عبارات ذیل را، وقتی $x \to ۰$ و همچنین، $x \to \infty$، پیدا کنید.

$$\text{(i)}\quad \frac{\log(۱+ax)}{x} \qquad \text{(ii)}\quad \frac{a^{x}-b^{x}}{c^{x}-d^{x}}$$

که در آن، a، b، c و d مقادیر مثبت اند و $c \neq d$

۷.۶. توابع مثلثاتی

همچنان که در بخش ۲.۱ متذکر شدیم، بحث خود را درمورد توابع مثلثاتی بر پایهٔ تعریفهای زیر قرار می‌دهیم

$$\cos x = ۱-\frac{x^{۲}}{۲!}+\frac{x^{۴}}{۴!}-\cdots,$$

$$\sin x = x-\frac{x^{۳}}{۳!}+\frac{x^{۵}}{۵!}-\cdots$$

این سریها برای تمام مقادیر x (حقیقی یا مختلط) همگرای مطلق هستند. خواصی که انتظار

می‌رود دراولین مرحله ثابت شوند عبارت‌اند از

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

اولی راکه متضمن ضرب سریهاست، می‌توان باهمان اصول قضیهٔ ۲.۶ ثابت کرد (اگرچه‌همراه باتفصیل که‌کمی پرزحمت‌تراست). اثبات‌اینکه مشتق $\sin x$ برابر $\cos x$ است خیلی شبیه به‌اثبات قضیهٔ ۱.۴.۶ انجام می‌شود.

به‌عوض نوشتن دوبارهٔ براهین فرمولهای مثلثاتی، بنابرالگوی فرمولهای نمایی، از مشاهدهٔ این امر که در قالب متغیرهای مختلط، توابع نمایی و توابع مثلثاتی ارتباط بسیار نزدیکی باهم دارند، رضایت بیشتری کسب می کنیم.

با نوشتن

$$\exp z=۱+z+\frac{z^{۲}}{۲!}+\cdots+\frac{z^{n}}{n!}+\cdots,$$

می بینیم که قضیهٔ ۲.۶، برای متغیرهای مختلط، برقراراست و اگرمشتق $f(z)$ را به‌صورت

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

تعریف کنیم، بـا تذکر اینکـه h اکنون می تواند عدد مختلطی باشد، در این صورت، قضیهٔ ۱.۴.۶ نیزدرست‌است. دربحث توابع نمایی، ازقضیهٔ ۲.۴.۶ به‌بعد، متغیررا حقیقی‌فرض کردیم.

۸.۶. توابع نمایی و مثلثاتی

ازسریهای مورد بحث ملاحظه می‌شود که

$$\exp(iz)=\cos z+i\sin z,$$

$$\exp(-iz)=\cos z-i\sin z,$$

یا بانمایش $\cos z$ و $\sin z$ برحسب توابع نمایی

$$\cos z=\frac{۱}{۲}\{\exp(iz)+\exp(-iz)\},$$

$$\sin z = \frac{1}{2i}\{\exp(iz) - \exp(-iz)\}$$

این فرمولها، به‌علاوهٔ خواص توابع نمایی، ما را قادر می‌سازند که نتایج مثلثات تحلیلی را، مادامی که متضمن تناوب یا عدد π نشوند، بسط دهیم. لیست کوتاهی ضمیمه می کنیم که روش عمل را نشان می‌دهد.

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \cos 0 = 1,$$
$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \sin 0 = 0$$

فرمول جمع (x و y ممکن است مختلط باشد)

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

مثلا، برای اثبات اولی، گوییم

$$2i \sin(x+y) = \exp\{i(x+y)\} - \exp\{-i(x+y)\}$$
$$= \exp(ix)\exp(iy) - \exp(-ix)\exp(-iy)$$

(از قضیهٔ ۲.۶)

$$= \frac{1}{2}\{\exp(ix) - \exp(-ix)\}\{\exp(iy) + \exp(-iy)\}$$

$$+ \frac{1}{2}\{\exp(ix) + \exp(-ix)\}\{\exp(iy) - \exp(-iy)\},$$

در نتیجه

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \;\blacksquare$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

از نتیجهٔ اخیر، اگر x حقیقی باشد،

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1, \quad -1 \leqslant \sin x \leqslant 1$$

تناوب توابع مثلثاتی. این خاصیت شگفت‌انگیزی است. هیچ‌کس، با بررسی سریهای $\sin x$ و $\cos x$ یا محاسبات ساده، نمی‌تواند پیشگویی کند که مقادیر این توابع در بازه‌های معین از x تکرار می‌شوند. قضیه‌ای ثابت می‌کنیم که تناوب به‌سهولت از آن نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۶.۸.۱. کوچکترین مقدار مثبتی، مانند $\frac{۱}{۲}\varpi$ (که $\sqrt{۲}<\frac{۱}{۲}\varpi<\sqrt{۳}$)هست که

$$\cos\frac{۱}{۲}\varpi=۰$$

برهان. اگر $۰<x<۲$،

$$\sin x=\left(x-\frac{x^۳}{۳!}\right)+\left(\frac{x^۵}{۵!}-\frac{x^۷}{۷!}\right)+\cdots$$
$$>۰,$$

زیرا، درهرپرانتز، جملهٔ مثبت ازجملهٔ منفی بزرگتراست.

بنابراین، $\cos x$، برای $۰<x<۲$،که دارای مشتق منفی $-\sin x$ است، تابعی نزولی است.

اگرنشان دهیم که $\cos\sqrt{۲}>۰$ و $\cos\sqrt{۳}<۰$، قضیه ثابت می‌شود. هرگاه جملات سری $\cos x$ را، همچنان که درمورد $\sin x$ انجام دادیم، دو به‌دو داخل پرانتز قراردهیم، به‌ازای $x=\sqrt{۲}$ پرانتزاول صفراست وتمام پرانتزهای دیگرمثبت هستند.

بعلاوه،

$$\cos x=۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}-\left(\frac{x^۶}{۶!}-\frac{x^۸}{۸!}\right)-\cdots,$$

جملات متوالی، دوبه‌دو، درپرانتزقرارگرفته‌اند.

وقتی $x=\sqrt{۳}$،

$$۱-\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۴}{۴!}=۱-\frac{۳}{۲}+\frac{۳}{۸}<۰$$

و، مثل قبل، جملهٔ اول هرپرانتز ازجملهٔ دوم بزرگتراست. ▮

نتیجه. $\sin\frac{۱}{۲}\varpi=۱$

زیرا، $\sin^۲\frac{۱}{۲}\varpi+\cos^۲\frac{۱}{۲}\varpi=۱$ و $\sin\frac{۱}{۲}\varpi$ مثبت است.

قضیهٔ ۶.۸.۲. اگر ϖ عددی باشد که در قضیهٔ قبل تعریف شد، در این صورت، به‌ازای هر مقدار x،

$$\sin\left(x+\tfrac{1}{2}\varpi\right)=\cos x \quad ، \quad \cos\left(x+\tfrac{1}{2}\varpi\right)=-\sin x \quad ؛ \qquad (۱)$$

$$\sin(x+\varpi)=-\sin x \quad ، \quad \cos(x+\varpi)=-\cos x \quad ؛ \qquad (۲)$$

$$\sin(x+2\varpi)=\sin x \quad ، \quad \cos(x+2\varpi)=\cos x \quad . \qquad (۳)$$

برهان، به‌سهولت ازقضایای جمع نتیجه می‌شود. بنابراین، نشان داده‌ایم که توابع $\sin x$ و $\cos x$ دارای دورهٔ تناوب 2ϖ هستند و به‌سهولت می‌توان نشان داد کـه هیچ عدد مثبت کوچکتری دورهٔ تناوب نیست.

ما در این دو قضیه علامت ϖ را اختیار کردیم (روش دیگر نوشتن حرف یونانی پی است). عدد ϖ (در بخش ۹.۷) به‌عنوان خارج‌قسمت محیط دایره بر قطر آن مشخص خواهد شد. بادرنظر گرفتن این تطابق، ازاین به‌بعد، π را به‌جای ϖ خواهیم نوشت.

بقیهٔ توابع مثلثاتی (یادایره‌ای)، به‌طریق معمول، برحسب سینوس و کسینوس تعریف می‌شوند

$$\tan z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \cot z=\frac{1}{\tan z},\quad \sec z=\frac{1}{\cos z},\quad \operatorname{cosec} z=\frac{1}{\sin z}.$$

ازمتناوب بودن سینوس و کسینوس، رابطهٔ

$$\exp(iz)=\cos z+i\sin z$$

به‌فوریت نشان می‌دهد که تابع $\exp z$ دارای دورهٔ تناوب $2\pi i$ (موهومی) است.

تمرین ۶ (ج)

۱ ــ باپیرایش برهان قضیهٔ ۱.۸.۶، حدود نزدیکتری برای $\frac{1}{2}\pi$، $\frac{1}{6}<\frac{1}{2}\pi<\frac{1}{5}$، ارائه دهید، (سریهای $\cos x$ و $\sin x$، نمی‌توانند برای محاسبهٔ تقریب کاملی از π روشی عملی ارائه دهند. برای مشاهدهٔ روشهای بهتری به‌بخش ۹.۷ مراجعه شود).

۲ ــ گزارهٔ بعدازقضیهٔ ۲.۸.۶ را، که 2π کوچکترین دورهٔ تناوب $\cos x$ و $\sin x$ است، ثابت کنید.

۳ ــ اگر a و b مقادیر ثابت مثبت و x حقیقی باشد، ثابت کنید که

$$f(x)=a\cot x+b\operatorname{cosec} x$$

درحالت $a>b$، تمام‌مقادیرحقیقی و درحالت $a<b$، تمام‌مقادیرحقیقی، به‌استثنای مقادیری در یك دامنهٔ خاص، را اختیار می‌کند.

نمودار $y=f(x)$ را برای $a>b$، $a=b$ و $a<b$ رسم کنید.

۴ ــ ثابت کنید که، وقتی $n\to\infty$،

$$\left(\cos\frac{\alpha}{n}\right)^{n^{۲}}\to e^{-\frac{۱}{۲}\alpha^{۲}}$$

۹.۶. توابع مثلثاتی معکوس

قضیهٔ ۹.۶.۱. معادلهٔ $x=\sin y$ یك تابع معکوس را تعریف می‌کند که به صورت $y=\arc\sin x$ نوشته می‌شود، به طوری که وقتی، x از ۱ — به ۱ صعود کند y از $-\frac{۱}{۲}\pi$ به $\frac{۱}{۲}\pi$ صعود می‌کند.

همچنین

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

برهان. به‌ازای $-\frac{۱}{۲}\pi<y<\frac{۱}{۲}\pi$، $\frac{dx}{dy}=\cos y>۰$.

بنابراین وقتی که y از $-\frac{۱}{۲}\pi$ بــه $\frac{۱}{۲}\pi$ صعودمی‌کند $\sin y$ از ۱ — به ۱ اکیداً صعود می‌کند، بنابرقضیهٔ ۹.۳ ، یك تــابع معکوس با مجموعهٔ مقادیر مورد ذکر موجود است. همچنین، بنابر بخش ۲.۴ (۶)،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{dx/dy}=\frac{۱}{\cos y}=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}}$$

کــه درآن، ریشهٔ دوم مثبت باید انتخــاب شود. زیرا، $\cos y$ برای مقــادیر y در بیــن $-\frac{۱}{۲}\pi$ و $\frac{۱}{۲}\pi$ مثبت است. ▌

چند تبصره درمورد قضیهٔ ۹.۶.۱. (۱) معادلهٔ $x=\sin y$ به‌ازای هر x، به‌طوری که $-۱\leqslant x\leqslant ۱$، بی نهایت مقدار برای y تعریف می‌کند. زیرا، با توجه به‌تناوبی بودن $\sin y$، هرمضرب صحیحی از ۲π را می‌توان به‌مقــادیر y کــه بین $-\frac{۱}{۲}\pi$ و $\frac{۱}{۲}\pi$ هستند، اضافه‌کرد. ما درقضیهٔ بالا، مقداراصلی $\arc\sin x$ را انتخاب کرده‌ایم.

(۲) به‌طریق مشابه، معادلهٔ $x=\cos y$، تابع $y=\arc\cos x$ را تعریف می کند که وقتی x از ۱ — به ۱+ صعود می‌کند، y از π به ۰ نزول می‌کند. دراینجا،

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

قضیهٔ ۲.۹.۶. معادلهٔ $x=\tan y$ تابع معکوس $y=\operatorname{arc\,tan} x$ را، به‌ازای همهٔ مقادیر x، تعریف می‌کند، y تابعی صعودی است و

$$\lim_{x\to-\infty} y=-\frac{۱}{۲}\pi,\ \lim_{x\to\infty} y=\frac{۱}{۲}\pi$$

همچنین،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۱}{۱+x^۲}$$

برهان.

$$\frac{dx}{dy}=\sec^۲ y=۱+x^۲$$

$\tan y$ برای $-\frac{۱}{۲}\pi<y<\frac{۱}{۲}\pi$ ، تـابعی پیوسته و صعودی است و وقتی $y\to\pm\frac{۱}{۲}\pi$، $x\to\pm\infty$. وجود تابع معکوس ومقادیرمشتق آن از قضیهٔ ۹.۳ و بخش ۲.۴ (۶) نتیجه می‌شود. ▌

تذکر. مقداراصلی را مثل قضیهٔ ۱.۹.۶، تعریف می کنیم. اگربرای مقدارمفروضی‌از x، مثلا $x_۱$، مقدار $y=y_۱$ درمعادلهٔ $x=\tan y$ صدق کند، مقدار $y_۱+n\pi$ نیز دراین معادله صدق می‌کند، که در آن، n هرعدد صحیح مثبت یا منفی می‌تواند باشد.

۱۰.۶. توابع هذلولی‌گون ومعکوس آنها

کسینوس وسینوس هذلولی‌گون‌را بافرمولهای زیرتعریف می‌کنیم

$$\cosh z=\frac{۱}{۲}(e^z+e^{-z}),$$

$$\sinh z=\frac{۱}{۲}(e^z-e^{-z})$$

بنابراین،

$$\cosh z=\cos iz \quad \text{و} \quad i\sinh z=\sin iz$$

تقریباً درهمهٔ کاربردها z حقیقی است. این توابع نام خود راباتوجه‌به‌این‌حقیقت گرفته‌اند که نقطهٔ $x=\cosh t$، $y=\sinh t$، هذلولی $x^۲-y^۲=۱$ را رسم‌می‌کند (درصورتی

که $x=\cos t$، $y=\sin t$ دایرهٔ ۱ $x^{2}+y^{2}=1$ را رسم می‌کند).

توابع هذلولی‌گون دارای خواصی شبیه به توابع مستدیر کسینوسی وسینوسی هستند. خواص ذیل ازمفیدترین آنها هستند.

$$\frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,\quad \frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,$$

$$\cosh^{2}x-\sinh^{2}x=1,$$

$$\cosh^{2}x+\sinh^{2}x=\cosh 2x,$$

$$2\cosh x\sinh x=\sinh 2x$$

خواننده می‌تواند برهانها را تهیه‌کرده فرمولهای دیگری نیز بسازد. همچنین می‌تواند نمودارهای آنها را رسم کند.

توابع معکوس در انتگرالگیری مفید خواهند بود. اگر $x=\cosh y$، دراین صورت، بنابرتعریف،

$$e^{2y}-2xe^{y}+1=0,$$

در نتیجه

$$e^{y}=x\pm\sqrt{x^{2}-1}$$

وهمچنین

$$y=\log\{x\pm\sqrt{x^{2}-1}\}$$

که معادل است با

$$y=\pm\log\{x+\sqrt{x^{2}-1}\}$$

اگر علامت $+$ را برداریم، y برای تمام مقادیر $x\geqslant 1$ تعریف می‌شود و به $y=\arg\cosh x$ نشان داده می‌شود. دراین صورت،

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}=\frac{1}{\sinh y}=\frac{1}{\sqrt{x^{2}-1}}.$$

بحث در مورد $\sinh x$ ساده‌تر است. اگر $x=\sinh y$ آنگاه، وقتی y از $-\infty$ به ∞ صعود می‌کند، x از $-\infty$ به ∞ صعود می‌کند و تابع معکوس یکتایی

$$y=\arg\sinh x$$

موجود است، یا، به‌صورت لگاریتمی

$$y=\log\{x+\sqrt{x^{۲}+۱}\}$$

تمرین ۶ (د)

۱ ــ مجموع $\sum_{r=0}^{n}\cosh(\alpha+۲r\beta)$ را پیدا کنید.

۲ ــ ثابت کنید که معادلهٔ $x=۲+\log x$ دارای دو ریشهٔ مثبت، مانند a و b است.
دنبالهٔ x_n چنین تعریف می‌شود

$$x_{n+۱}=۲+\log x_n \quad (n=۱,\ ۲,\ ۳,\ \ldots)$$

که در آن، $a<x_۱<b$. ثابت کنید که $x_n\to b$.

۳ ــ ثابت کنید که اگر $-۱<r<۱$،

$$۱+r\cos\theta+\cdots+r^n\cos n\theta+\cdots=\frac{۱-r\cos\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^{۲}}$$

$$r\sin\theta+\cdots+r^n\sin n\theta+\cdots=\frac{r\sin\theta}{۱-۲r\cos\theta+r^{۲}}$$

۴ ــ نتایجی، شبیه‌آنچه را که در ۳ بیان شد، درمورد توابع هذلولی‌گون تحقیق کنید.

۵ ــ ثابت کنید که اگر $y=e^{-\frac{۱}{۲}x^{۲}}$ آنگاه

$$y^{(n+۲)}+xy^{(n+۱)}+(n+۱)y^{(n)}=0$$

توابع f_n چنین تعریف می‌شوند

$$f_n(x)=(-۱)^n e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-\frac{۱}{۲}x^{۲}}\right)$$

ثابت کنید که

(i) $f'_{n+۱}=(n+۱)f_n$،

(ii) $f_{n+۱}=xf_n-f'_n$،

(iii) $f_{n+۲}-xf_{n+۱}+(n+۱)f_n=0$،

(iv) f_n کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ n است.

۶ ــ بسط سری توانی توابع ذیل‌را پیدا کنید. درصورت امکان جملهٔ عمومی ودر غیراین صورت، سه جملهٔ اول ناصفر بسط را پیدا کنید.

(i) $\cos^{۳}x$، (ii) $\tan x$، (iii) $(\arcsin x)^{۲}$،

(iv) $\sin(m\arcsin x)$، (v) $e^x\cos ۲x$، (vi) $\cos\log(۱+x)$

۷

حساب انتگرال

۱.۷. مساحت و انتگرال

از لحاظ تاریخی مفهوم یك انتگرال معین به منظور نمایش سطح محدود به خطوط منحنی پدیدار شده است. این معادل هندسی، در متصورساختن مفهوم عبارتهای تحلیلی که در تعریف و اعمال جبری انتگرالها پیش می‌آید، به ما کمك می‌کند.

فرض کنید تابع f بر (a, b) تعریف شده باشد. مساحتی که اقدام به‌اندازه‌گیری آن می‌کنیم محدود به منحنی $y=f(x)$ و عرضهای $x=a$ و $x=b$ ومحور xها است. (فرض اینکه f تنها مقادیر مثبت بر بازهٔ (a, b) اختیار می‌کند، ممکن است این مزیت را داشته باشد که مطلب روشنتر شود، ولی تحلیل زیر موقعی برقرار است که f بتواند مقادیری با هر یك از دو علامت را اختیار کند.) درحال حاضر تنها چیزی که در مورد f فرض می‌کنیم کراندار بودن آن است. در عمل معمولا f پیوسته است و این فرض در مرحله‌ای که باعث سهولت بحث شود، به‌کارخواهد رفت.

روش ما به دست آوردن تقریبهای پایینی و بالایی برای مساحت محدود به منحنی، که مایل به اندازه‌گیری آن هستیم، خواهد بود. ما مطلب را با تعدادی تعریف شروع می‌کنیم.

تعاریف: بازهٔ (a, b) مفروض است. دراین‌صورت، مجموعهٔ متناهی ازاعداد a، x_1، x_2، . . . ، x_{n-1} و b، که درآن،

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$$

یك افراز (a, b) نامیده می‌شود. هر یك از x_rها را یك **نقطهٔ تقسیم** افراز می‌نامند.

برای یك شکل کردن اندیسها، می‌توانیم $a = x_0$ و $b = x_n$ بنویسیم.
به‌ازای $r = 1, 2, \ldots, n$، هریك ازبازه‌های (x_{r-1}, x_r) یك زیر بازهٔ این افراز است، فرض کنیم δ_r طول زیر بازهٔ rام باشد،

$$\delta_r = x_r - x_{r-1}$$

طول بزرگترین زیر بازه را،

$$\delta^* = \max \delta_r$$

نرم این‌افراز می‌نامند.

اینك، مجموعهای تقریبی بالایی و پایینی را تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم که M_r و m_r، به‌ترتیب، سوپرموم و اینفیموم $f(x)$، برای x در rمین زیر بازه‌که یك بازهٔ بسته گرفته می‌شود، باشد، یعنی به‌ازای xهایی‌که

$$x_{r-1} \leqslant x \leqslant x_r$$

می‌نویسیم

$$s = \sum_{r=1}^{n} m_r \delta_r \quad \text{و} \quad S = \sum_{r=1}^{n} M_r \delta_r$$

دراین‌صورت، مجموع بالایی S حاصلجمع مساحتهای n مستطیلی‌است‌که rمین آن دارای قاعدهٔ (x_{r-1}, x_r) و ارتفاع M_r است. حاصلجمع این مساحتها بزرگتر از یا مساوی مساحت ناحیهٔ R است‌که بین منحنی $y = f(x)$ و خطوط $x = a$، $x = b$ و $y = 0$ واقع است. به همین‌طریق، مجموع پایینی s کوچکتر از مساحت R یا مساوی آن است.

حال اگر ξ_r مقدار دلخواه x در rمین زیربازه باشد،

$$x_{r-1} \leqslant \xi_r \leqslant x_r \quad (r = 1, 2, \cdots, n),$$

و اگر حاصلجمع زیر را تشکیل دهیم،

$$\sigma = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r$$

دراین‌صورت،

$$s \leqslant \sigma \leqslant S$$

هدف غایی ما اثبات این‌است‌که، اگر f تابعی از انواع معمولی‌آن باشد (مشتمل بر توابع پیوسته و یکنواخت) حاصلجمع σ وقتی‌که δ^* به‌صفر میل می‌کند به یك حد میل می‌نماید. این حد را انتگرال تابع f بر (a, b) می‌خوانیم.

مشاهده خواهیدکرد که این عمل حدگیری از انواع نسبتاً ساده‌ای که تاکنون با آنها مواجه بوده‌ایم نیست. اگر f تابع مفروضی باشد، عدد σ به x_r و ξ_r بستگی دارد. درحقیقت، σ تابعی است که حوزهٔ تعریف آن مجموعه‌ای از افرازهاست. موقع حدگیری، فرض می‌کنیم δ^* دنباله‌ای ازمقادیر راکه به‌صفر میل می‌کند، اختیار می‌کند و افرازهای مورد قبول به طور تصاعدی مقید به این شرط هستندکه نرم آنهاکوچکتر از δ^* است.

به‌علت پیچیدگی عمل حدگیری، ابتدا راه ساده‌تری برای انتگرالگیری، ازطریق کرانهای مجموعهای S و s برای کلیهٔ افرازها، انتخاب می‌کنیم.

۲.۷. انتگرالهای بالایی و پایینی

اگر M و m سوپرموم و اینفیموم $f(x)$ در $a \leqslant x \leqslant b$ باشند، و اگر به ازای افراز دلخواه مفروضی مانند $\mathcal{D}$، مجموعهای S و s را مانند بالا بسازیم وآنها را $S(\mathcal{D})$ و $s(\mathcal{D})$ بنامیم، از نامساویهای

$$M_r \leqslant M \text{ و } m_r \geqslant m \quad (r = ۱, ۲, \dots, n)،$$

نتیجه می‌شود که

$$m(b-a) \leqslant s(\mathcal{D}) \leqslant S(\mathcal{D}) \leqslant M(b-a)$$

درنتیجه، مجموعهٔ اعداد $S(\mathcal{D})$ متناظر با همهٔ افرازهای $\mathcal{D}$ از (a, b)، که دارای کران پایین $m(b-a)$ است، اینفیمومی مانند J دارد. همچنین، مجموعه اعداد $s(\mathcal{D})$ دارای سوپرمومی مانند j است.

هدف ما، که در قضیهٔ ۲.۲.۷ به‌آن می‌رسیم، اثبات نامساوی $J \geqslant j$ است.

قضیه ۱.۲.۷. با اضافه‌کردن یك نقطه جدید تقسیم به‌افراز، مجموع بالایی S کاهش می‌یابد.

برهان. فرض کنید $S(\mathcal{D}_۱)$ مجموع بالایی برای افراز $\mathcal{D}_۱$، و افراز $\mathcal{D}_۲$ متشکل از افراز $\mathcal{D}_۱$ به‌انضمام نقطهٔ جدید تقسیمی مانند x'_r در بازهٔ $(x_{r-۱}, x_r)$ باشد. فرض کنید M_r' و M_r''، به ترتیب، سوپرمومهای $f(x)$ بر بازهٔ بسته $(x_{r-۱}\ ,\ x'_r)$ و $(x_r'\ ,\ x_r)$ باشند. دراین صورت، $M'_r \leqslant M_r$ و $M''_r \leqslant M_r$. سهم بازهٔ $(x_{r-۱}\ ,\ x_r)$ در $S(\mathcal{D}_۱)$ به‌اندازهٔ $M_r(x_r - x_{r-۱})$ است، و سهم آن در $S(\mathcal{D}_۲)$ عبارت است از

$$M_r'(x'_r - x_{r-۱}) + M_r''(x_r - x_r')$$
$$\leqslant M_r(x_r - x_{r-۱})$$

چون سهم هریك از بازه‌ها بجز (x_{r-1}, x_r) در $S(\mathcal{D}_1)$ و $S(\mathcal{D}_2)$ یکسان است، خواهیم داشت

$$S(\mathcal{D}_2)\leqslant S(\mathcal{D}_1)$$

نتیجه. اگر $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ افرازهایی از بازهٔ (a, b) باشند به‌طوری‌که هر نقطهٔ $\mathcal{D}_1$ یك نقطهٔ $\mathcal{D}_2$ باشد، آنگاه

$$S(\mathcal{D}_2)\leqslant S(\mathcal{D}_1)$$

و به طریق مشابه،

$$s(\mathcal{D}_2)\geqslant s(\mathcal{D}_1)$$

تعریف. اگر $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ مطابق آنچه در نتیجهٔ فوق ذکر شد به هم مرتبط باشند، می‌توان گفت که $\mathcal{D}_2$ یك **تظریف** $\mathcal{D}_1$ است.

قضیهٔ ۲.۲.۷. $J\geqslant j$

برهان. فرض کنید $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ دو افراز دلخواه (a, b) باشند.

فرض کنید $\mathcal{D}_3$ افرازی باشد که نقاط تقسیم آن همهٔ نقاط تقسیم هریك از $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ باشد. بنابراین، $\mathcal{D}_3$ تظریفی برای هردوی $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ است. بنا بر نتیجهٔ قضیهٔ اخیر،

$$s(\mathcal{D}_3)\geqslant s(\mathcal{D}_2) \quad \text{و} \quad S(\mathcal{D}_3)\leqslant S(\mathcal{D}_1)$$

اما، با توجه به اینکه $S(\mathcal{D}_3)$ و $s(\mathcal{D}_3)$ مجموعهای بالایی و پایینی برای افراز یکسانی هستند،

$$S(\mathcal{D}_3)\geqslant s(\mathcal{D}_3)$$

از ترکیب همهٔ این نامساویها، خواهیم داشت

$$S(\mathcal{D}_1)\geqslant s(\mathcal{D}_2)$$

چون این نامساوی به‌ازای هر افرازی مانند $\mathcal{D}_1$ برقرار است،

$$J=\inf S(\mathcal{D}_1)\geqslant s(\mathcal{D}_2)$$

و چون رابطهٔ اخیر به‌ازای هر افراز $\mathcal{D}_2$ راست است،

$$J\geqslant \sup s(\mathcal{D}_2)=j \quad \blacksquare$$

اگر فرضهای ما در مورد f **تنها** فرضهای قبلی باشند، یعنی f تابعی کراندار

باشد، دراین‌صورت، ممکن است که J بزرگتر از j یا مساوی با j باشد.

مثال. مثالی که برای‌آن $j<J$. تابع f را چنین تعریف کنید

اگر x منطق باشد، $f(x)=1$

اگر x اصم باشد، $f(x)=0$

و بازهٔ $(a\,,\,b)$ را به‌صورت $(0\,,\,1)$ انتخاب کنید.

دراین‌صورت، افراز $\mathcal{D}$ به هر صورتی انتخاب شود، هر M_r مساوی یك است و $S(\mathcal{D})=1$. هر m_r مساوی 0 است و $s(\mathcal{D})=0$. بنابراین، $J=1$ و $j=0$.

دراینجا، $y=f(x)$، که ازنمایش یك منحنی در مفهوم متداولی که قادر به محصور نمودن یك مساحت باشد، به دور است، به‌ازای هر مقدار x ناپیوسته‌است.

تمرین. ساده‌ترین مثالی را که به‌نظرتان می‌رسد ارائه دهیدکه درآن $j=J$.

اعداد J و j، که تقریبهایی برای مفهوم شهودی ما از یك انتگرال هستند، اغلب، انتگرالهای بالایی و پایینی نامیده می‌شوند. معمولا اینها را با اضافه کردن خط کوچکی دربالا وپایین‌علامت انتگرال معمولی نشان می‌دهند. ما وارد جزئیات بیشتری درخصوص انتگرالهای بالایی وپایینی نمی‌شویم، ولی خود را به مفیدترین حالت‌آن که $j=J$ است و یك انتگرال به مفهوم عادی وجود دارد، محدود می‌کنیم.

۳.۷. انتگرال به عنوان یك حد

تعریف. اگر، با علامات بخش ۱.۷، هنگامی که $\delta^*\to 0$،

$$\sigma=\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r$$

به یك حد میل نماید آنگاه گوییم که f بر بازهٔ $(a\,,\,b)$ انتگرالپذیر است و این حد را به صورت ذیل می‌نویسیم

$$\int_a^b f \quad \text{یا} \quad \int_a^b f(x)dx$$

معمولا شکل کوتاهتر دوم در بحث خواص عمومی انتگرالها، مانند خواص بخش ۵.۷، مناسبتر است. اگر از تابع خاصی انتگرال گرفته شود، آن را باید به صورت

زیر مشخص کرد:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ ، مانند ، } \int_0^1 (x^2+3)\, dx$$

قضیهٔ ۰۱۰۳۰۷. اگر $0 \leftarrow S-s$ وقتی که $0 \leftarrow \delta^*$، آنگاه f بر $(a\ ,\ b)$ انتگرالپذیر است.

برهان. با ε مفروض، δ یی وجود دارد که به ازای هر افرازی که در مورد آن $\delta^* < \delta$،

$$S-s<\varepsilon$$

اینك،

$$S-s=(S-J)+(J-j)+(j-s)$$

و هر یك از جملات طرف راست آن بزرگتر از صفر یا مساوی صفر است.

دراین‌صورت، اگر نرم افراز کوچکتر از δ باشد آنگاه

$$J-j \leqslant S-s<\varepsilon$$

اما، J و j به ε بستگی ندارند و بنابراین،

$$J-j=0$$

درنتیجه S و s هر دو، وقتی که $0 \leftarrow \delta^*$، به σ میل می‌کنند، و همچنین σ، که بین S و s قرار دارد به J میل می‌کند. ▌

عکس این قضیه نیز برقرار است.

قضیهٔ ۰۲۰۳۰۷. اگر f بر $(a\ ,\ b)$ انتگرالپذیر باشد آنگاه،

$$S-s \rightarrow 0 \ (\text{وقتی که } \delta^* \rightarrow 0)$$

برهان. اگر I مقدار این انتگرال باشد آنگاه، با ε مفروض، δ یی وجود دارد که اگر $\mathscr{D}$ افراز دلخواهی با نرم کوچکتر از δ باشد،

$$I-\varepsilon<\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\,\delta_r<I+\varepsilon$$

که در اینجا، ξ_r نقطهٔ دلخواهی از δ_r است.

اگر M_r سوپرموم f در δ_r باشد، می‌توانیم ξ_r را طوری انتخاب کنیم که

$$f(\xi_r)>M_r-\frac{\varepsilon}{n}$$

بنا بر این،

$$\sum_{r=1}^{n} M_r \delta_r < \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\,\delta_r + \varepsilon$$
$$< I + 2\varepsilon$$

به طور مشابه $\sum_{r=1}^{n} m_r \delta_r > I - 2\varepsilon$

در نتیجه $S - s < 4\varepsilon$، وقتی که $\delta^* \to 0$ و در این صورت $S - s \to 0$. ▎

۴.۷. توابع یکنواخت یا پیوسته انتگرالپذیرند

شرایط قضیهٔ ۱.۳.۷ را به سادگی می‌توان برای توابع پیوسته و توابع یکنواخت برقرار نمود.

قضیهٔ ۱.۴.۷. تابعی مانند f که در بازهٔ بستهٔ $(a\,,\,b)$ پیوسته است، انتگرالپذیر است.

برهان. بنابر قضیهٔ ۲.۸.۳ با ε مفروض، δیی وجود دارد که به‌ازای هر زیر بازه و هر افرازی مانند $\mathscr{D}$ با نرم کوچکتر از δ،

$$M_r - m_r < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

در این صورت،

$$S(\mathscr{D}) - s(\mathscr{D}) = \sum (M_r - m_r)\,\delta_r$$
$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum \delta_r = \varepsilon \quad ▎$$

قضیهٔ ۲.۴.۷. تابع f که در بازهٔ بستهٔ $(a\,,\,b)$ یکنواخت است، انتگرالپذیر است.

برهان. می‌توان فرض کرد که f صعودی است.

در این صورت، در $x_{r-1} \leqslant x \leqslant x_r$،

$$m_r = f(x_{r-1}) \quad \text{و} \quad M_r = f(x_r)$$

در نتیجه،

$$S - s = \sum (M_r - m_r)\delta_r$$
$$\leqslant \delta^* \sum (M_r - m_r)$$
$$= \delta^* \{f(b) - f(a)\} \quad ▎$$

تمرین ۷ (الف)

محاسبهٔ انتگرالهای ساده با استفاده از تعریف آن.

۱ ــ باافرازکردن $(۰, ۱)$ به n جزء مساوی، $\int_{۰}^{۱} xdx$ را محاسبه کنید.

۲ ــ باتقسیم (a , b) به n جزء که درنقاط $aq, aq^{۲}, \dots , aq^{n-۱}$، که در آن، $aq^{n}=b$، تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند، $\int_{a}^{b} x^{k}dx$ را محاسبه کنید، دراینجا $k> ۰$.

۳ ــ باافرازکردن $(۰, \alpha)$ بهاجزاء مساوی، $\int_{۰}^{\alpha} \sin xdx$ را محاسبه کنید.

۴ ــ باتوجه به‌روش تمرین ۲، ثابت کنید که

$$\int_{۱}^{۲} \frac{dx}{x^{۲}}=\frac{۱}{۲}$$

نتیجه بگیرید که

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{\frac{۱}{(n+۱)^{۲}}+\frac{۱}{(n+۲)^{۲}}+\dots+\frac{۱}{(۲n)^{۲}}\right\}=\frac{۱}{۲}$$

قضیه‌ای از داربو[1]

۵ ــ باعلامت بخش ۷.۱، اگر $۰ \to \delta^*$ آنگاه $J \to S$.

این قضیهٔ مهمی است و نشان می‌دهد که عدد J که به‌عنوان یك کران تعریف می‌شود، درحقیقت، یك حد است. از آنجایی که این برهان، کمی مشکلتر از برهان هر نتیجه‌ای دراین کتاب است، خواص انتگرال را مستقل از آن پیش برده‌ایم.

۷.۵. خاصیتهای انتگرال

درتعریف انتگرال، فرض کردیم که $a<b$. اگر $a>b$ آنگاه چنین تعریف می‌کنیم

$$\int_{a}^{b} f(x)dx=-\int_{b}^{a} f(x)dx$$

خواص ذیل دائماً به‌کاربرده می‌شوند.

---

1) Darboux

(۱) اگر $a \leqslant c < d \leqslant b$ و f بر (a, b) انتگرالپذیر باشد آنگاه f بر (c, d) انتگرالپذیر است.

برهان. با ε مفروض، بنا بر قضیهٔ ۲.۳.۷، δیی وجود دارد که اگر $\mathscr{D}$ افرازدلخواهی از (a, b) با نرم کوچکتر از δ باشد آنگاه

$$S(\mathscr{D}) - s(\mathscr{D}) < \varepsilon$$

فرض کنید $\mathscr{D}'$ افرازدلخواهی از (c, d) با نرم کوچکتر از δ باشد. با اضافه کردن نقاط تقسیم مقتضی به (a, c) و (d, b)، افرازی از (a, b)، مانند $\mathscr{D}$، به‌دست‌می‌آوریم که $\mathscr{D}'$ یك «قسمت» آن است.

$$S(\mathscr{D}') - s(\mathscr{D}') = \sum (M_r - m_r)\delta_r$$

که مجموع برروی زیربازه‌های $\mathscr{D}'$ گرفته شده است.

عبارت $S(\mathscr{D}) - s(\mathscr{D})$ شامل همهٔ جملات طرف راست فوق می‌باشد. بنابراین،

$$S(\mathscr{D}') - s(\mathscr{D}') \leqslant S(\mathscr{D}) - s(\mathscr{D}) < \varepsilon$$

تنها به‌شرط آنکه نرم $\mathscr{D}'$ کوچکتر از δ باشد. بنابراین، با توجه به‌قضیهٔ ۱.۳.۷، $\int_c^d f$ موجود است.

(۲) اگر $a < c < b$، و f بر (a, b) انتگرالپذیر باشد، آنگاه

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

برهان. فرض کنید $\mathscr{D}$ افرازی از (a, b) باشد که c را به‌عنوان یکی از نقاط تقسیم داشته باشد.

در این‌صورت، باعلامتی که مفهوم آن به‌خودی خود روشن است،

$$\sum_{(a, b)} f(\xi_r)\,\delta_r = \sum_{(a, c)} f(\xi_r)\,\delta_r + \sum_{(c, b)} f(\xi_r)\,\delta_r$$

حد فوق را، وقتی که نرم $\mathscr{D}$ به ۰ میل می‌کند، به‌دست آورید. ❙

(۳) اگر k ثابت باشد،

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

برهان آن ساده است.

(۴) اگر f و g بر (a, b) انتگرالپذیر باشند، مجموع آنها؛ $s = f + g$، نیز انتگرالپذیر است، و

$$\int_a^b s = \int_a^b f + \int_a^b g$$

برهان. به‌ازای هر افراز $\mathscr{D}$ و هر انتخاب ξ_r در δ_r،

$$\sum_{r=1}^{n} s(\xi_r)\,\delta_r = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r + \sum_{r=1}^{n} g(\xi_r)\,\delta$$

هر یك از دو جمع طرف راست، وقتی که $\delta^* \to 0$، به انتگرال متناظر آن میل می‌کند.

بنابراین، $\int_a^b s$ موجود و مساوی مجموع انتگرالهای f و g است. ▌

در نامساویهایی، مانند (۵)، و در زمینه‌های دیگر به‌اقتضای مورد، فرض می‌کنیم $a < b$. درعبارتی مانند (۵) بدیهی‌است که f را انتگرالپذیر فرض کرده‌ایم و لزومی ندارد که آن را به‌طور صریح بیان کنیم.

(۵) اگر $m \leqslant f \leqslant M$ آنگاه

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a)$$

برهان. به‌ازای هر افرازی،

$$m(b-a) \leqslant \sum f(\xi_r)\delta_r \leqslant M(b-a) \quad ▌$$

نتیجهٔ ۱. اگر $f \geqslant 0$ آنگاه

$$\int_a^b f \geqslant 0$$

نتیجهٔ ۲. اگر f پیوسته باشد آنگاه به‌ازای ξیی در (a, b)،

$$\int_a^b f = f(\xi)\,(b-a)$$

(۶) اگر f و g بر (a, b) انتگرالپذیر باشند، در این صورت، حاصلضرب آنها؛ یعنی fg، نیز انتگرالپذیر است.

برهان. اگر ثابت کنیم که مربع یك تابع انتگرالپذیر، انتگرالپذیر است؛ این نتیجه از (۳) و (۴) و اتحاد ذیل به‌دست خواهد آمد،

$$4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2$$

لذا، ثابت خواهیم کرد که $f^{۲}$ بر (a, b) انتگرالپذیر است.

فرض کنید M_r و m_r سوپرموم و اینفیموم f و M_r'، m_r' سوپرموم و اینفیموم $f^{۲}$ در δ_r باشند. با ε مفروض، δ^*یی‌وجود دارد که اگر $\max \delta_r < \delta^*$ آنگاه

$$\sum (M_r - m_r)\,\delta_r < \varepsilon$$

اگر بر (a, b) داشته باشیم $K = \sup |f|$ آنگاه (به‌ازای هرعلامت M_r، m_r)

$$M_r' - m_r' \leqslant ۲K(M_r - m_r)$$

بنابراین اگر $\max \delta_r < \delta^*$ آنگاه $\sum (M_r' - m_r')\delta_r < ۲K\varepsilon$، و این مستلزم آن است که $f^{۲}$ انتگرالپذیر باشد. ▎

(۷) (بسط (۵)). اگر، همچنین فرض کنیم‌که، $g \geqslant ۰$ آنگاه

$$m \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M \int_a^b g$$

نتیجه. ۱اگر f پیوسته باشد آنگاه

$$\int_a^b fg = f(\xi) \int_a^b g$$

برهان. با به‌کار بردن نتیجهٔ ۱ از (۵)، برای $g\ (f - m)$ خواهیم داشت

$$\int_a^b (f - m) g \geqslant ۰$$

(۸) اگر f در (a, b) انتگرالپذیر باشد، $|f|$ نیزانتگرالپذیر است و

$$\left| \int_a^b f \right| \leqslant \int_a^b |f|$$

برهان. توجه کنید که درهر بازه،

$$\sup |f| - \inf |f| \leqslant \sup f - \inf f$$

(۹) نامساوی شوارتز،

$$\left(\int_a^b fg\right)^{۲} \leqslant \left(\int_a^b f^{۲}\right)\left(\int_a^b g^{۲}\right)$$

برهان. این را می‌توان ازنامساوی کوشی (تمرین ۱ (د)، ۶) و یا ازاین واقعیت که

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)^{۲} = \lambda^{۲} \int_a^b f^{۲} + ۲\lambda\mu \int_a^b fg + \mu^{۲} \int_a^b g^{۲},$$

به‌ازای همهٔ مقادیر ثابت λ و μ، بزرگتر از صفر یا مساوی آن است، نتیجه گرفت.

۶.۷. انتگرالگیری به‌عنوان معکوس دیفرانسیلگیری

فرض کنید که f بر (a, b) انتگرالپذیر باشد و بنویسید

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

قضیهٔ ۱.۶.۷. تابع F پیوسته است.

برهان.

$$F(x+h)-F(x)=\int_x^{x+h} f(t)dt$$

با علامات بخش ۵.۷ (۵)، مقدار قدرمطلق طرف راست آن از $\max(|mh|, |Mh|)$ تجاوز نمی‌کند. بنابراین، وقتی که $h \to 0$،

$$F(x+h)-F(x) \to 0 \quad \blacksquare$$

اگر فرض اضافی پیوستگی f را درنظر بگیریم، می‌توانیم نتیجهٔ ظریفتری را ثابت کنیم.

قضیهٔ ۲.۶.۷. اگر f بر (a, b) انتگرالپذیر باشد آنگاه به ازای هرمقدار x که در آن f پیوسته است

$$F'(x)=f(x)$$

برهان. فرض کنید که $h>0$، وهمچنین، به‌ازای $x \leqslant t \leqslant x+h$،

$$M=\sup f(t), \quad m=\inf f(t)$$

دراین صورت، M و m به x و h بستگی دارند. بنابر بخش ۵.۷ (۵)

$$mh \leqslant \int_x^{x+h} f(t)dt \leqslant Mh$$

بنابراین،

$$m \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M$$

فرض کنیم $h \to 0+$، چون f در x پیوسته است، M و m هردو به $f(x)$ میل می‌کنند. هنگامی که $h \to 0-$، بااستدلال مشابهی حکم برقرار است. ▌

قضیهٔ ۳.۶.۷. فرض کنید f بر (a, b) پیوسته باشد، و فرض کنید که ϕ تابعی دارای این خاصیت باشد، که

$$\phi'(x) = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

دراین صورت، به‌ازای $a \leqslant x \leqslant b$،

$$\int_a^x f(t)dt = \phi(x) - \phi(a)$$

برهان. از قضیهٔ ۲.۶.۷، تابع $F - \phi$ بر $a \leqslant x \leqslant b$ دارای مشتق ۰ است. بنا بر قضیهٔ ۱.۶.۴ (نتیجهٔ ۱)، $F - \phi$ ثابت است و، چون $F(a) = 0$، خواهیم داشت

$$F(x) = \phi(x) - \phi(a) \quad ▌$$

وجود تابعی مانند ϕ که دارای مشتق پیوستهٔ مفروضی، مانند f، باشد به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۲.۶.۷ ثابت می‌شود. چنین تابعی که، به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۳.۶.۷، بجزیك مقدار ثابت جمعی، معین می‌شود، انتگرال نامعین f نامیده شده وچنین نوشته می‌شود،

$$\int f(x)dx$$

یك انتگرال نامعین، ممکن است برحسب توابع معین قابل بیان باشد ویا نباشد، اگر چنین باشد، قضیهٔ ۳.۶.۷ روش معمولی محاسبهٔ انتگرال معین

$$\int_a^b f(x)dx$$

را حاصل می‌کند. تعدادی مثالهای توضیحی دربخشهای ۷.۷ و ۸.۷ می‌آید.

۷.۷. انتگرالگیری به‌روش جزء به‌جزء و به‌روش جایگزینی

جستجوی منظم برای یافتن تابعی که مشتق آن به ما داده شده است، روشهایی را به‌کار می‌برد که احتمالا از کارهای قبلی خودتان در حسابان از آنها اطلاع دارید. دراین روشها تأکید برتکنیك است نه برشالوده‌های آنالیز و ما آن را نسبتاً به‌طور مختصر بحث می‌کنیم. در این بخش دو روش کلی راکه بارها مورد استفاده قرارخواهد

گرفت بیان می‌کنیم. هر دوی اینها از «معکوس کردن» فرمولهایی در مشتقگیری ناشی می‌شوند تا فرمولی را در انتگرالگیری عاید نمایند.

انتگرالگیری به‌روش جزء به جزء. انتگرالگیری جزء به‌جزء عمل معکوس مشتقگیری یك حاصلضرب است.

اگر u و v توابعی از x باشند آنگاه

$$\frac{d(uv)}{dx}=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$$

با انتگرالگیری، داریم:

اگر $\frac{du}{dx}$ و $\frac{dv}{dx}$ پیوسته باشند آنگاه

$$\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx$$

انتگرالگیری به روش جایگزینی. این طریقه از نتیجهٔ مشتقگیری تابعی از یك تابع

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

به دست می‌آید. با نوشتن $\frac{dy}{dx}=f(x)$ و $x=g(t)$، داریم:

اگر $f(x)$ و $g'(t)$ پیوسته باشند آنگاه

$$\int f(x)dx=\int f\{g(t)\}g'(t)dt$$

قضیهٔ تیلر با باقیماندهٔ انتگرالی. با انتگرالگیری یك انتگرال مناسب به روش جزء به جزء می‌توانیم صورت دیگری از قضیهٔ مقدار میانگین مرتبهٔ nم (بخش ۸.۴) را، که در بعضی مواقع مفید است، ثابت کنیم. برای اختصار به جای aی قضیهٔ ۱.۸.۴ و ۲.۸.۴ عدد ۰ را قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۷.۷. فرض کنید، به ازای $0\leqslant x\leqslant h$، تابع $f^{(n)}$ پیوسته باشد. در این صورت،

$$f(h)=f(0)+\dots+\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+R_n,$$

که در آن

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}\int_0^1(1-t)^{n-1}f^{(n)}(th)dt$$

برهان. با جایگزین کردن $th=u$،

$$R_n=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^h (h-u)^{n-1} f^{(n)}(u)du$$

به روش جزء به جزء انتگرال می‌گیریم، داریم

$$R_n=-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^h (h-u)^{n-2} f^{(n-1)}(u)du$$

با علامات ما، انتگرال اخیر R_{n-1} است. اگر $n-1$ بار به روش جزء به جزء انتگرال بگیریم، به عبارت ذیل می‌رسیم

$$R_n=-\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)-\dots-hf'(0)+\int_0^h f'(u)du$$

برای انتگرال اخیر $f(h)-f(0)$ را بنویسید و جملات آن را تغییر آرایش دهید. ▌

با به‌کاربردن نتیجهٔ ۲ از بخش ۵.۷(۲)، به دو روش متفاوت در قضیهٔ ۷.۷، ابتدا جملهٔ برحسب h^n را که درقضیهٔ ۲.۸.۴ داده شده است از نو می‌سازیم (بافرض پیوستگی آن و نه صرفاً وجود $f^{(n)}$). نتیجهٔ دوم جملهٔ مانده قضیهٔ ۳.۸.۴ را به‌دست می‌دهد.

نتیجهٔ ۱.

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}f^{(n)}(\theta h)\int_0^1 (1-t)^{n-1}dt=\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(\theta h)$$

نتیجهٔ ۲.

$$R_n=\frac{h^n}{(n-1)!}(1-\theta)^{n-1} f^{(n)}(\theta h)$$

۸.۷. تکنیك انتگرالگیری

رئوس روشهایی را که معمولی‌ترین موارد استفاده را دارد، بانمایش مثالها، دوره می‌کنیم.

توابع منطق. برای انتگرالگیری ازیك تابع‌منطق، آن را به صورت کسرهای جزئی در می‌آوریم. ریشهٔ حقیقی a در مخرج مضارب ثابت $(x-a)^{-n}$ را به دست می‌دهد، که در آن $n\geqslant 1$.

اگر $n>1$،
$$\int\frac{dx}{(x-a)^n}=\frac{(x-a)^{1-n}}{1-n}$$

اگر $n=1$،

$$\int \frac{dx}{x-a}=\begin{cases}\log(x-a) & (x>a)\\ \log(a-x) & (x<a)\end{cases}$$

یا اگر برای سهولت ازیك فرمول استفاده کنیم،

$$\int \frac{dx}{x-a}=\log|x-a|$$

کسری که مخرج آن معادلهٔ درجهٔ دومی با ریشه‌های مختلط باشد، به‌صورت ذیل انتگرالگیری می‌شود.

مثال.

$$\int \frac{4x-1}{3x^2-4x+5}\,dx$$

مشتق مخرج آن $6x-4$ است. عدد $4x-1$ را به‌صورت $\frac{2}{3}(6x-4)+\frac{5}{3}$ بنویسید. از اولین جمله به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{2}{3}\int \frac{6x-4}{3x^2-4x+5}\,dx=\frac{2}{3}\log(3x^2-4x+5)$$

از دومین جمله به‌دست می‌آوریم،

$$\frac{5}{9}\int \frac{dx}{x^2-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}}=\frac{5}{9}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{11}{9}}$$

$$=\frac{5}{9}\,\frac{3}{\sqrt{11}}\arctan\frac{x-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}\sqrt{11}}=\frac{5}{3\sqrt{11}}\arctan\frac{3x-2}{\sqrt{11}}$$

برای انتگرالگیری یك کسر جزئی به‌صورت

$$\frac{px+q}{(x^2+2ax+b)^n}\ (n>1),$$

صورت آن‌را به‌شکل $p(x+a)+(q-ap)$ می‌نویسیم و این مسئله به‌انتگرال گرفتن‌از

$\frac{۱}{(x^{۲}+۲ax+b)^{n}}$ تحویل می‌شود. این‌کار به‌وسیلـه «تقلیل» متـوالی توان n انجـام می‌پذیرد، درمورد فرمولهای تقلیل به‌پاراگراف زیرمراجعه کنید.

توابع مثلثاتی. (الف) برای انتگرالگیری حاصلضرب کسینوس وسینوس، با به‌کار بردن فرمولهایی مانند ذیل، حاصلضرب‌را به‌مجموع و تفاضل تبدیل می‌کنیم.

$$۲\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$$

مثالها.

(i) $\int \cos^{۲} x \cos ۴x \, dx$.

(ii) $\int \sin^{۲} x \cos^{۳} x \, dx$.

در(i)،

$$\cos^{۲} x \cos ۴x = \frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲x)\cos ۴x$$

$$= \frac{۱}{۲}\cos ۴x + \frac{۱}{۴}\cos ۶x + \frac{۱}{۴}\cos ۲x$$

بنابراین، انتگرال آن چنین است،

$$\frac{۱}{۸}\sin ۴x + \frac{۱}{۲۴}\sin ۶x + \frac{۱}{۸}\sin ۲x$$

در (ii)، توان‌فرد $\cos x$ جایگزین کردن $u=\sin x$ را پیشنهادمی‌کند، و$\int u^{۲}(۱-u^{۲})du$ ازآن عاید می‌شود، ودرنتیجه، $\frac{۱}{۳}\sin^{۳} x - \frac{۱}{۵}\sin^{۵} x$ حاصل می‌گردد.

(ب) انتگرال‌هرتابع منطق‌از $\cos x$ و $\sin x$را باجایگزین‌کردن $\tan \frac{۱}{۲} x = t$ و بااستفاده از

$$\cos x = \frac{۱-t^{۲}}{۱+t^{۲}}, \quad \sin x = \frac{۲t}{۱+t^{۲}}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{۲}{۱+t^{۲}}$$

می‌توانیم تبدیل به‌انتگرال توابع جبری منطق بنماییم.

مثال.

$$\int \frac{dx}{5+4\cos x}=\int \frac{2dt}{9+t^2}=\frac{2}{3}\arc\tan\left(\frac{1}{3}\tan\frac{1}{2}x\right)$$

فرمولهای تقلیل فرض کنیدکه بخواهیم

$$\int \sin^n x\,dx$$

را محاسبه کنیم. این موردی ازحالت (الف) بالا است، اما، باتقلیل توان به‌روش مرحله به‌مرحلــه می‌توان آن‌را به‌روش ساده‌تری پیدانمود. فرمول تقلیل تقریبــاً همواره به کمك انتگرالگیری به‌روش جزء به‌جزء مناسبی به‌دست می‌آید. دراینجا،

$$\begin{aligned}\int \sin^n x\,dx&=\int (\sin^{n-1} x)\sin x\,dx\\&=-\sin^{n-1} x\cos x+\int(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\cos x\,dx\\&=-\sin^{n-1} x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx,\end{aligned}$$

و بنابراین،

$$n\int \sin^n x\,dx=-\sin^{n-1} x\cos x+(n-1)\int\sin^{n-2} x\,dx$$

وما انتگرال $\sin^n x$ را به انتگرال $\sin^{n-2}x$ مربوط ساخته‌ایم. اگر حوزهٔ تعریف انتگرال $\left(0,\frac{1}{2}\pi\right)$ باشد، این انتگرال بخصوص ساده می‌شود، زیرا دراین صورت

$$n\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,dx=(n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\,dx$$

بـا تکرار کاربــرد این فرمول تقلیل ، چنین نتیجه می گیریم که مقدار $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,dx$ عبارت است از

$$\frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 1}{n\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}\,\frac{\pi}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 2}{n\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}$$

بسته به‌اینکه n فرد یا زوج باشد.

توابع اصم. تنها ساده‌ترین حالتها را انتخاب می کنیم.

مثال.

$$\int \frac{dx}{(x+a)\sqrt{x+b}}$$

تابع زیرعلامت $\sqrt{\ }$ خطی است و با جایگزین کردن $x+b=u^۲$، انتگرال یك تابع منطق برحسب u به‌دست می‌آید.

اینك، ریشهٔ دوم معادلهٔ درجهٔ دومی مانند $px^۲+۲qx+r$ را بررسی می‌کنیم. تغییرمتغیر $u=px+q$، جملهٔ اصم را به‌یکی ازصورتهای ذیل تغییرمی‌دهد،

$$\sqrt{a^۲-x^۲},\quad \sqrt{x^۲-a^۲},\quad \sqrt{x^۲+a^۲}$$

به‌ترتیب، با جایگزین کردن (تغییرمتغیر) مثلثاتی یا هیپربولیکی به‌صورت

$$x=a\sin u,\ \ x=a\cosh u,\ \ x=a\sinh u,$$

$\sqrt{\ }$ را ازبین می‌بریم.

مثال.

$$\int\sqrt{(۸x^۲+۱)}\,dx$$

با جایگزین کردن $x=\frac{(\sinh u)}{۲\sqrt{۲}}$، چنین به‌دست می‌آید

$$\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\int\cosh^۲ u\,du=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\int(۱+\cosh ۲u)du$$

$$=\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\,(u+\sinh u\cosh u),$$

و بنابراین، با بازگشت به x،

$$\frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\operatorname{arc\,sinh} ۲\sqrt{۲}x+\frac{۱}{۲}x\sqrt{۸x^۲+۱}$$

بنابراین، انتگرالی مانند

$$\int\sqrt{(ax^۲+۲bx+c)}\,dx$$

را می‌توان برحسب (معکوس) توابع هیپربولیکی یا مثلثاتی بیان نمود. اگر به‌جای‌معادلهٔ درجه دوم عبارت زیرعلامت انتگرال، یك کثیرالجمله یا درجهٔ بالاتررا قرار دهیم آنگاه،

در صورتی که بخواهیم صریحاً انتگرال آن را بیان کنیم، باید به لیست توابع استانده، مطلبی بیفزاییم. (توابع تحت عناوین توابع بیضوی مارا قادر می‌سازند که ریشهٔ سوم یا چهارم را مورد رسیدگی قراردهیم)

این حقیقت که تنها ساده‌ترین توابع به انتگرالگیری صریح تن درمی‌دهند، تأکیدی براهمیت بخشهای ۱۲.۷ و ۱۳.۷ درروشهای تقریبی است.

تمرین ۷ (ب)

۱ ــ انتگرالهای زیررا محاسبه کنید.

$$\frac{1}{x^4+a^2x^2+a^4},\quad \frac{x^4}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)},\quad \frac{1}{(x-2)^2(x^2+1)}$$

$$\frac{1}{x^6+1},\quad \frac{1}{x^5+1}$$

۲ ــ انتگرال $\frac{x^5}{(x^2+a^2)^4}$ را،

(i) با جایگزین کردن $u=x^2+a^2$، و (ii) باجایگزین کردن $x=a\tan\theta$ محاسبه کنید. بررسی کنید که دونتیجه مطابقت دارند.

۳ ــ حاصلضرب والیس برای π.

با نوشتن $I_n=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^n x\,dx$، ثابت کنید که I_{2m}/I_{2m+1} بین ۱و $1+(1/2m)$ قراردارد. نتیجه بگیرید که

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{m\to\infty}\frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7}\cdots\frac{2m}{2m-1}\frac{2m}{2m+1}$$

فرمول تناوبی زیررا به‌دست آورید

$$\sqrt{\pi}=\lim_{m\to\infty}\frac{(m!)^2 2^{2m}}{(2m)!\sqrt{m}}$$

۴ ــ انتگرالهای $\sin^3 2x\cos^2 3x$، $\tan x\sec x$، $\operatorname{cosec}^3 x$ را محاسبه کنید.

۵ ــ انتگرالهای $\int_0^{\pi}\sin 7x\sin nx\,dx$، $\int_0^{\pi}\sin 7x\sin^3 nx\,dx$ را محاسبه‌کنید.

۶ ـ چگونگی انتگرالگیری ذیل را نشان دهید.

$$\frac{a+b\cos x+c\sin x}{p+q\cos x+r\sin x}, \quad \frac{1}{a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x}$$

۷ ـ فرمول تقلیل‌را برای انتگرالهای زیربه‌دست آورید.

$$\frac{1}{(x^2+1)^n}, \quad x^m(\log x)^n, \quad x^n\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\tan^n x, \quad \sec^n x, \quad \frac{1}{(a+b\cos x)^n}$$

۸ ـ فرمول تقلیل‌را برای انتگرال زیر به‌دست آورید،

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{ax^2+2bx+c}}$$

وازآن برای محاسبهٔ

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$$

استفاده کنید.

۹ ـ برحسب اینکه n عدد صحیح مثبت فرد یا زوج باشد، ثابت‌کنید که

$$\int_0^\pi \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}d\theta = 0 \text{ یا } \pi$$

اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، انتگرال زیرزا محاسبه کنید.

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$$

۱۰ـ اگرکثیرالجملهٔ $P_n(x)$ به‌صورت زیرتعریف شود

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n(x^2-1)^n,$$

ثابت کنید که

(i) اگر $Q(x)$ کثیرالجمله‌ای ازدرجهٔ کوچکتراز n باشد،

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\,Q(x)\,dx=0,$$

(ii) اگر $m\neq n$، $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$ و اگر $m=n$ مقدار انتگرال برابر $\frac{2}{2n+1}$ است.

۱۱ـ ثابت کنید که

$$\int \frac{ax^2+2bx+c}{(Ax^2+2Bx+C)^2}\,dx$$

یك تابع منطق برحسب x است فقط وفقط وقتی که $AC-B^2$ یا $aC+cA-2bB$ مساوی صفر باشد.

۹.۷ عدد ثابت π

در بخش ۸.۶ مشخص‌شد که $\cos x$ و $\sin x$، که به‌وسیلهٔ سریهای مربوطه تعریف شدند، تناوبی هستند و دارای دورهٔ تناوبی هستند که ما آن را با 2ϖ نشان دادیم. هنوز باید ثابت کنیم که ϖ همان عدد π است که درخواص هندسهٔ مستدیر پیش می‌آید.

دایره‌ای به‌مرکز O وشعاع a انتخاب کنید. استدلالی را که πa^2 بودن مساحت آن را ثابت می‌کند در ذهن می‌آوریم. یك چند ضلعی دراین دایره محاط کنید، مساحت آن $\frac{1}{2}lp$ است، که درآن l پیرامون‌آن و p طول عمود وارد از O به‌یك ضلع است. به‌طریق مشابه ، چند ضلعی منتظمی محیط در دایره دارای مساحت $\frac{1}{2}l_1a$ است، که در آن، l_1 پیرامون‌آن است.

بنابراین، اگر A مساحت این دایره باشد،

$$\frac{1}{2}lp < A < \frac{1}{2}l_1a$$

چنانچه عدهٔ اضلاع چند ضلعی به‌بی‌نهایت میل کند، p به a میل می‌نماید، و l و l_1 هردو به‌طول محیط دایره، یعنی $2\pi a$، میل می‌کنند. بنابراین،

$$A=\pi a^2$$

اینك، این‌مساحت را بامساحتی که به‌وسیلهٔ انتگرال به‌دست‌می‌آید مقایسه می‌نماییم، و ازتوابع مثلثاتی (که باسری تعریف می‌شود) برای محاسبهٔ این‌انتگرال استفاده‌می‌کنیم.

$$\frac{1}{2}A = (\text{مساحت نیمدایره‌ای که در آن } y > 0)$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\int_{1}^{-1} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

باقراردادن $x = a\cos\theta$، چنین به‌دست می‌آید

$$\frac{1}{2}A = \int_0^{\varpi} a^2 \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}a^2 \int_0^{\varpi} (1 - \cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\varpi a^2$$

درنتیجه، ثابت کردیم که ϖ و π یك عدد هستند.

دراینجا ممکن است برای سهولت توضیحی درباب محاسبهٔ عددی π درج کنیم. ساده‌ترین طریقه به‌کاربردن سری توانی معکوس تانژانت است.

قضیهٔ ۰.۹.۷ اگر $-1 \leqslant x \leqslant 1$،

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

برهان. با توجه به‌قضایای ۲.۹.۶ و ۳.۶.۷،

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

اینك،

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^{m-1} t^{2m-2} + \frac{(-1)^m t^{2m}}{1+t^2}$$

بنابراین،

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{2m-1} + (-1)^m R_m,$$

که درآن،

$$R_m = \int_0^x \frac{t^{2m}}{1+t^2}\, dt$$

اگر $0 \leqslant x \leqslant 1$،

$$0 \leqslant R_m \leqslant \int_0^x t^{2m}\, dt = \frac{x^{2m+1}}{2m+1} \leqslant \frac{1}{2m+1}$$

بنابراین، وقتی که $m \to \infty$، $R_m \to \circ$. به‌طریق مشابه، اگر $-۱ \leqslant x \leqslant \circ$ مجدداً $R_m \to \circ$. ▌

با انتخاب $x = ۱$ درنتیجهٔ قضیهٔ ۹.۷، داریم

$$\frac{۱}{۴}\pi = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \dots$$

این وسیله‌ای جهت محاسبهٔ π عرضه می‌کند، ولی همگرایی سری خیلی کندتر از آن است که برای محاسبات عددی مفید باشد. روابط سادهٔ ذیل، که خواننده می‌تواند آن را از فرمول مجموع برای تانژانتها ثابت کند، به‌سریی منجر می‌شود که همگرایی سریعتری دارد.

$$\frac{۱}{۴}\pi = \text{arc tan}\frac{۱}{۲} + \text{arc tan}\frac{۱}{۳},$$

$$\frac{۱}{۴}\pi = ۴\text{arc tan}\frac{۱}{۵} - \text{arc tan}\frac{۱}{۲۳۹}$$

۱۰.۷. انتگرالهای نامتناهی

انتگرالها بر روی یك بازهٔ نامتناهی

با انتخاب یك مثال ساده، داریم

$$\int_{۱}^{X}\frac{dx}{x^{۲}} = ۱ - \frac{۱}{X}$$

وقتی که $X \to \infty$، طرف راست به‌حد ۱ میل می‌کند. علامت مناسبی برای بیان این مطلب چنین است

$$\int_{۱}^{\infty}\frac{dx}{x^{۲}} = ۱$$

ازلحاظ هندسی، مساحت بین منحنی $y = \frac{۱}{x^{۲}}$ ومجانب آن محور xها و خط $x = ۱$، متناهی است.

تعریف. اگر، زمانی‌که $X \to \infty$،

$$\int_{a}^{X} f(x)\,dx \to l$$

گوییم که $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ موجود، یا همگرا، است ومقدارآن مساوی l است.

اگر، به‌ازای جمیع مقادیر X بزرگتر از a، $\int_a^X f(x)\,dx$ موجود باشد، ولی وقتی که $X \to \infty$ این انتگرال به‌یك حد متناهی میل نکند، گوییم که $\int_a^\infty f(x)\,dx$ واگــراست. (همان‌طوری که در بخش ۹.۲ بیان شد، می‌توان دقت بیشتری معمول داشت و واگرایی را به $+\infty$ یا به $-\infty$ و نوسانی کراندار یا بی‌کران تفکیك نمود.)

تعریف مشابهی برای

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$$

می‌توان به‌کار برد.

اگر $\quad \int_a^\infty f(x)dx = l_1 \quad$ و $\quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = l_2$

آنگاه $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = l_1 + l_2$

به‌سادگی می‌توان دریافت که مقدار انتگرال اخیر مستقل ازمقدار خاص a است.

قضیهٔ ۱۰.۷. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ همگراست فقط وفقط وقتی‌که $k > 1$.

برهان. اگر $k \neq 1$،

$$\int_1^X \frac{dx}{x^k} = \frac{X^{1-k} - 1}{1-k}$$

حد طرف راست‌آن فقط وفقط وقتی متناهی است‌که $k > 1$.

اگر $k = 1$،

$$\int_1^X \frac{dx}{x} = \log X ,$$

که چنانچه $X \to \infty$، این مقدار به بی‌نهایت میل می‌نماید. ▌

تذکر. هــرعدد بزرگتر از ۰ را می‌توان به‌جــای ۱ به‌عنوان حد پایین انتگــرال به‌کاربرد.

انتگرالهای توابع‌بی‌کران. اگر $\delta > 0$، تابع $\frac{1}{\sqrt{x}}$ بر $(\delta, 1)$ پیوسته است و

$$\int_{\delta}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - 2\sqrt{\delta}$$

چون $\frac{1}{\sqrt{x}}$ در بازهٔ $(0, 1)$ بی‌کران است، ساختن مجموعهای تقریبی را نمی‌توان به‌طور مستقیم در تعریف انتگرال بر $(0, 1)$ به‌کار برد. درعوض نتیجهٔ اعمال $\delta \to 0$ را در معادلهٔ فوق به‌کار می‌بریم و

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

را برابر $\lim\limits_{\delta \to 0} \int_{\delta}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ تعریف می‌کنیم که مقدار آن ۲ است.

چنین انتگرالی را یك انتگرال نامتناهی از نوع دوم می‌نامند.

به تأسی از بحث دربارهٔ $\frac{1}{\sqrt{x}}$، خواننده قادر خواهد بود تعریفی را برای یك تابع کلی تدوین نماید.

تمرین ۷ (ج)

۱ ـ این انتگرالها را محاسبه کنید

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}, \quad \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 1}}$$

۲ ـ ثابت کنید که اگر $0 < \alpha < \pi$،

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x\cos\alpha + 1} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

۳ ـ ثابت کنید که $\int_{0}^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!$

۴ ـ این انتگرالها را محاسبه کنید

$$\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos bx\, dx \,(a > 0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech} ax\, dx$$

۵ ـ ثابت کنید که $(b > a)$ $\int_{a}^{b} \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ موجود است. مقدار آن را با دو تغییر متغیر متفاوت ذیل محاسبه کنید

$$(b-x)/(x-a)=u^{2} \quad \text{(ii)} \quad , \quad x=a\cos^{2}\theta+b\sin^{2}\theta \quad \text{(i)}$$

۶ ـ وقتی که (i) $0<r<1$، (ii) $r>1$، انتگرال ذیل را محاسبه کنید

$$I=\int_{-\delta}^{\delta}\frac{1-r\cos\theta}{1-2r\cos\theta+r^{2}}\,d\theta \quad (0<\delta<\pi)$$

ثابت کنید که، اگر δ ثابت باشد، وقتی که r بامقادیر کوچکتر از ۱ به ۱ میل کند، I بهیك حد میل می کند، وزمانی که r با مقادیر بزرگتر از ۱ به ۱ میل کند، بهحد دیگری میل می نماید.

همچنین نشان دهید که وقتی $r=1$، هیچیك از دوحد فوق مساوی مقدار I نیست.

۱۱.۷. سریها و انتگرالها

شباهت نزدیکی بین خواص همگرایی سریهای نامتناهی و خواص همگرایی انتگرالهای نامتناهی وجود دارد. دربخش ۱۲.۲، بعضی از قضایای مقدماتی در باب همگرایی سریها ثابت شد. خواننده باید عبارتهای متناظری راکه در باب انتگرالها وجود دارد حدس بزند. بهعنوان مثال، مشابه (۶) را بیان می کنیم وبرهان آن را به عهده خواننده می گذاریم.

اگر، بهازای هر x که $x\geqslant a$،

(۱) $f(x)\geqslant 0,\ g(x)\geqslant 0$؛

(۲) K ی ثابتی باشد که $f(x)\leqslant Kg(x)$؛

(۳) $\int_{a}^{\infty}g(x)\,dx$ همگرا باشد؛

دراین صورت، $\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$ همگراست. همچنین،

$$\int_{a}^{\infty}f(x)dx\leqslant K\int_{a}^{\infty}g(x)\,dx$$

درتدوین این شباهت کمی دقت ضروری است. از (۳) بخش ۱۲.۲ میدانیم که، اگر $\sum u_n$ همگرا باشد آنگاه $u_n\to 0$. باتوجه بهاین مطلب، ممکن است انتظار داشته باشیم که اگر $\int_{a}^{\infty}f(x)\,dx$ همگرا باشد آنگاه

$$f(x)\to 0 \quad \text{،} \quad x\to\infty \text{ وقتی که}$$

ولی مثال زیر ثابت می کند که این استنباط درست نیست.

تابعی مانند f را که نمودار آن متشکل از پاره خطهای مستقیمی است که درشکل ۴ نشان داده شده، تعریف می کنیم.

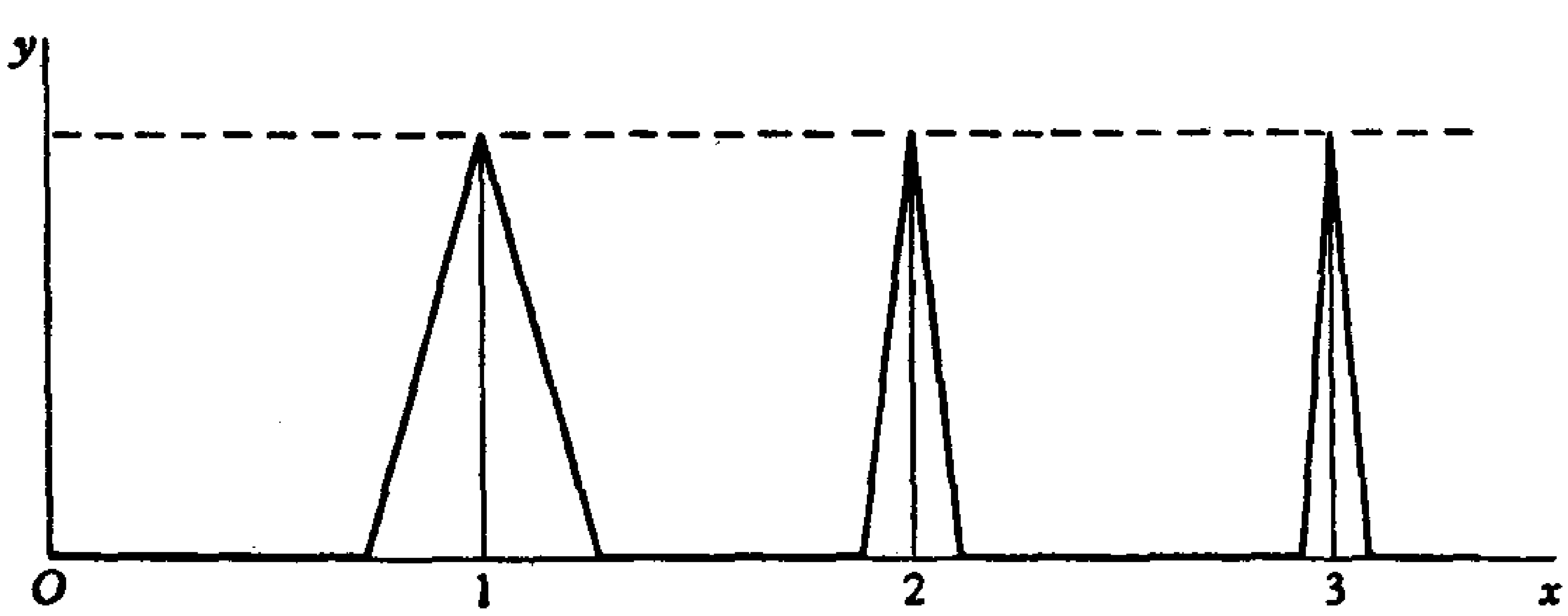
درهرمقدار x، که $x=n$، ارتفاع رأس آن ۱ است. طول قاعدهٔ مثلث به‌مرکز n عبارت از $2/(n+1)^2$ می‌باشد. f در نقاطی که براضلاع یکی ازاین مثلثها نباشد صفر است. مساحت مثلث بالای $x=n$، $1/(n+1)^2$ است، وبنابراین،

$$\int_0^X f(x)\,dx<\sum_1^\infty \frac{1}{(n+1)^2}\quad (\text{به‌ازای هر } X)$$

که نشان می‌دهد $\int_0^\infty f(x)\,dx$ همگراست. ولی وقتی که $x\to\infty$، تابع $f(x)$ بـه ۰ میل نمی‌کند. نتیجه‌ای کـه می‌توانیـم به‌دست بیـاوریم آن است کـه وقتی $n\to\infty$، $\int_n^{n+1} f(x)\,dx$ به‌صفرمیل می‌کند.

یك انتگرال نامتناهی، اگرچه مشابه یك سری نامتناهی است، مفهوم مشکلتری‌است. حـاصلجمع یك سری نامتناهی، تنهـا نتیجهٔ یك عمل حدگیری است ($\lim s_n$ وقتی‌که $n\to\infty$). انتگرال برروی یك حوزهٔ انتگرالگیری متناهی، $\int_0^X f(x)\,dx$ خود یك حد است (حد مجموعهای $\sum f(\xi_r)\,\delta_r$). بنابراین، انتگرال برحوزهٔ انتگرالگیری نامتناهی $\int_0^\infty f(x)\,dx$ حد یك حد است، بدین معنی‌که یك حد مکرر است.

قضیه مهم وسادهٔ زیرارتباط نزدیکی بین مجموع یك سری باجملات نزولی مثبت‌و یك انتگرال مربوط به‌آن برقرارمی‌کند.



شکل ۴

قضیهٔ ۱۱.۷. (قضیهٔ انتگرال کوشی - ماکلورن). فرض کنید به‌ازای $x \geqslant ۱$، $f(x)$ تابع نزولی مثبتی از x باشد. در این صورت،

(۱) انتگرال $\int_{۱}^{\infty} f(x)\,dx$ وسری $\sum_{۱}^{\infty} f(n)$ هر دو همگرا یا هر دو واگرا هستند.

(۲) وقتی‌که $n \to \infty$،

$$\sum_{r=۱}^{n} f(r) - \int_{۱}^{n} f(x)\,dx$$

به‌یك حد مانند l، که $۰ \leqslant l \leqslant f(۱)$، میل می‌کند.

برهان. چون $f(x)$ نزولی است، انتگرالپذیری آن در هربازهٔ $(۱, X)$ از قضیهٔ ۲.۴.۷ نتیجه می‌شود.

اگر $n - ۱ \leqslant x \leqslant n$، داریم

$$f(n-۱) \geqslant f(x) \geqslant f(n)$$

از $n - ۱$ تا n انتگرال می گیریم، نتیجه می‌شود،

$$f(n-۱) \geqslant \int_{n-۱}^{n} f(x)dx \geqslant f(n) \qquad \text{(الف)}$$

برای بازه‌های $(۱, ۲)$، $(۲, ۳)$، ...، $(n-۱, n)$ این نامساویها را اضافه می‌کنیم، بنابراین، داریم

$$\sum^{n-۱} f(r) \geqslant \int_{۱}^{n} f(x)\,dx \geqslant \sum_{۲}^{n} f(r) \qquad \text{(ب)}$$

حال، اگرسری همگرا باشد، نامساوی طرف‌چپ نشان می‌دهدکه تابع‌صعودی‌از X؛ یعنی، $\int_{۱}^{X} f(x)\,dx$، وقتی که $X \to \infty$، به‌یك حد متناهی میل‌می‌کند. اگرسری واگراباشد، نامساوی طرف راست (ب) نشان می‌دهدکه انتگرال واگراست.

ما (۱) را ثابت‌کرده‌ایم، برای اثبات (۲)، استدلال فوق‌را تهذیب می کنیم. اگر

$$\phi(n) = \sum_{۱}^{n} f(r) - \int_{۱}^{n} f(x)\,dx$$

دراین صورت،

$$\phi(n) - \phi(n-۱) = f(n) - \int_{n-۱}^{n} f(x)\,dx$$

$$\leqslant \circ \quad (\text{بنا بر الف})$$

همچنین، بنا بر (ب)،

$$\circ \leqslant \phi(n) \leqslant f(\text{۱})$$

بنابراین، تابع نزولی $\phi(n)$ به حدی مانند l میل می‌کند که در رابطهٔ ذیل صدق می‌کند:

$$\circ \leqslant l \leqslant f(\text{۱}) \quad \blacksquare$$

برای توابع بسیاری مانند f محاسبهٔ انتگرال $\int f(x)\,dx$ امکان‌پذیر است؛ ولی، به‌دست آوردن مجموع صریحی برای سری $\sum f(n)$ میسر نیست. قضیهٔ کوشی ـ مـاکلورن برای چنین سریهایی مفید است. ما باقرار دادن $f(x)=\frac{1}{x}$، در قضیهٔ ۱۱.۷ (۲)، نتیجهٔ مهمی به‌دست می‌آوریم.

نتیجه. (ثابت اویلر). وقتی که $n\to\infty$،

$$\text{۱}+\frac{1}{\text{۲}}+\frac{1}{\text{۳}}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n$$

به‌یك حد متناهی مانند γ میل می‌کند، که درآن، $\circ<\gamma<\text{۱}$.

ثابت اویلر، γ، درآنالیز غالباً دیده می‌شود ومقدار آن ...۵۷۷/۰ است.

تمرین ۷ (د)

۱ ــ ثابت کنید که

$$\log\frac{n}{n-\text{۱}}-\frac{\text{۱}}{n}=\int_{\circ}^{\text{۱}}\frac{t}{(n-t)n}dt \quad (n=\text{۲}, \text{۳}, \ldots)$$

با نشان دادن هریك ازاین عبارتها به‌وسیلهٔ u_n، ثابت کنید که

$$\circ<u_n<\frac{\text{۱}}{\text{۲}(n-\text{۱})n}$$

و سری $\sum_{n=\text{۲}}^{\infty} u_n$ به‌مجموع U، که در رابطهٔ $\circ<U<\frac{1}{\text{۲}}$ صدق‌می کند، همگراست

نتیجه بگیرید که $\frac{1}{\text{۲}}<\gamma<\text{۱}$.

(نتیجهٔ بالا تنها نشان می‌دهد که $\circ<\gamma<\text{۱}$.)

۲ ــ حدود ذیل را وقتی که $n \to \infty$، به‌دست آورید؛

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n},$$

$$\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$

۳ ــ ثابت کنید که

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\pi$$

۴ ــ ثابت کنید که، اگر $-1<k\leqslant 0$

$$1^k+2^k+\cdots+n^k-\frac{n^{k+1}}{k+1}$$

وقتی که $n \to \infty$، به یك حد متناهی میل می‌کند

نتیجه بگیرید که

$$\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}} \to \frac{1}{k+1}$$

۵ ــ ثابت کنید که، وقتی $k \to 0+$،

$$k\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+k}} \to 1$$

۶ ــ ثابت کنید که

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^k}$$

اگر $k>1$، همگراست و اگر $k\leqslant 1$، واگراست.

۷ ــ ثابت کنید که

$$\int_{1}^{n}\log x\,dx<\sum_{r=2}^{n}\log r<\int_{1}^{n}\log x\,dx+\log n$$

حد $(n!)^{1/n}/n$ را، وقتی که $n \to \infty$، مورد بررسی قرار دهید.

۸ ــ این حکم در مثال عددی پایـان قضیهٔ ۱۱.۲ را کـه مجموع 10^8 جمله از $\sum\frac{1}{n}$

کوچکتر از ۲۰ است تحقیق کنید.

۹ ــ در همگرایی سریهای ذیل تحقیق کنید.

$$\sum \frac{1}{n(\log \log n)^q} \quad \text{(ii)}, \quad \sum \frac{1}{n^p(\log n)^q} \quad \text{(i)}$$

۱۲.۷. تقریبهایی برای انتگرالهای نامعین

در پایان بخش ۸.۷ تذکر دادیم که قادر نیستیم مقادیر انتگرالی مانند

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}},$$

را دقیقاً محاسبه کنیم؛ زیرا، انتگراندی که شامل ریشهٔ دوم کثیرالجمله‌ای از درجه سوم است مشتق هیچ ترکیب متناهی از توابع استانده نیست. باید این امر را بدون ارائه برهان بپذیرید که هر انتگرال نامعین را نمی‌توان به‌طور صریح به دست آورد. براهین عدم امکان آنها مشکل و کاملا خارج از قلمروی این کتاب است. عدم موفقیت روشهای معمولی، مانند انتگرالگیری جزء به جزء یا جایگزینی، شما را به قبول این امر متمایل خواهد کرد که انتگرال معینی که با جستجو پیدا شود وجود ندارد. بنابراین، مسئله به‌صورت پیداکردن یك مقدار عددی تقریبی از انتگرال معین در می‌آید.

دستهٔ دیگر انتگراندها که در مورد آنها پیداکردن تقریبهایی به ما تحمیل می‌شود، آنهایی هستند که به هیچ عنوان با یك فرمول تحلیلی مشخص نشده‌اند، ولی مثلا، به‌وسیلهٔ یك قلم ثبات که به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری وصل شده‌اند و کمیت فیزیکی خاصی را اندازه می‌گیرند، مشخص می‌شوند.

لذا فرض کنید که ما در صدد به دست آوردن تقریبی برای انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ باشیم که دقیقاً نمی‌توانیم آن را محاسبه کنیم. اگر توابع g و h را چنان اختیار کنیم که

$$g(x) \geqslant f(x) \geqslant h(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

دراین‌صورت، انتگرالهای g و h برروی $(a\ ,\ b)$ تقریبهای اضافی و نقصانی برای انتگرال f ارائه می‌دهند. موارد استعمال این روش در مثالهای ذیل، ارائه می‌شود.

مثال ۱. انتگرال ذکرشده درآغاز این بخش را در نظر بگیرید؛

$$I=\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{3}+1}}$$

$\sqrt{\ }$ نشان می‌دهد که نامساوی شوارتز بخش ۵.۷ (۹)، تقریبی اضافی به دست می‌دهد

$$I^{2}<\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{3}+1}$$

$$=\left[\frac{1}{3}\log(x+1)-\frac{1}{6}\log(x^{2}-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}<0/836$$

محاسبهٔ انتگرال نامعین به روش بخش ۸.۷ به دست آمده است.

نتیجه می‌شود که $I<0/915$.

برای پیدا کردن تقریب نقصانی، مشاهده کنید که به‌ازای $1>x>0$، $x^{3}<x^{2}$، و لذا،

$$I>\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{x^{2}+1}}=\left[\log\{x+\sqrt{x^{2}+1}\}\right]_{0}^{1}=\log(1+\sqrt{2})$$

$$>0/896$$

روشهایی که تقریبهای دقیقتری به دست می‌دهد، در بخش ۱۳.۷ عرضه خواهد شد.

مثال ۲. تقریب برای

$$I=\int_{0}^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\sin x}\,dx$$

(این انتگرال نامعین به کمک توابع خاصی که در فصل ۶ گنجانده شده‌است، قابل بیان نیست).

(۱) $\sqrt{\sin x}>\sin x$، نتیجه می‌شود $I>1$.

(۲) داریم $\frac{2x}{\pi}<\sin x<x$ $(0<x<\frac{1}{2}\pi)$. با انتگرالگیری از ریشهٔ دوم آن، داریم

$$1/047<I<1/31$$

(۳) از نامساوی شوارتز (مانند مثال ۱) حاصل می‌شود که

$$I < \sqrt{\tfrac{۱}{۲}\pi} < ۱/۲۵۴$$

۱۳.۷. تقریبهایی به‌کمك تقسیم جزء . قاعدهٔ سیمسن

از تعریف انتگرال ، طبیعی است که تقریبهایی با تقسیم کردن حوزه انتگرالگیری به اجزاء و در صورت امکان باکنترل نمودن خطاهایی که ممکن است درقسمتهای مختلف رخ می‌دهند، انجام داد. چند روش ساده و مفید ارائه می‌دهیم.

روش ذوزنقه‌ای. اولین تقریب برای

$$I = \int_c^d f(x)dx$$

عبارت از $T = \frac{۱}{۲}(d-c)\{f(c)+f(d)\}$ است.

اگر فرض کنیم که f دارای مشتق دوم کراندار باشد، می‌توان به طریق زیر کران بالایی برای مقدار خطا در این تخمین به دست آورد.

قضیهٔ ۱.۱۳.۷. اگر $|f''(x)| \leqslant M$ آنگاه

$$|I-T| \leqslant \frac{۱}{۱۲}M(d-c)^۳$$

برهان. برای ایجاد تسهیل، می‌توانیم $c = ۰$ و $d = h$، اختیار کنیم. استدلال مانند استدلال قضیهٔ ۷.۷ است. با نوشتن

$$\phi(h) = \int_۰^h t(h-t)f''(t)dt$$

به روش جزء به جزء دوبار انتگرال می‌گیریم. به طور متوالی خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\phi(h) &= \int_۰^h (۲t-h)f'(t)dt \\ &= h\{f(h)+f(۰)\} - ۲\int_۰^h f(t)dt\end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$\int_{\circ}^{h} f(x)\,dx=\frac{۱}{۲}h\{f(\circ)+f(h)\}+R,$$

که در اینجا،

$$|R|\leqslant\frac{۱}{۲}M\int_{\circ}^{h}t(h-t)dt=\frac{۱}{۱۲}Mh^{۳}$$

برای تقریب انتگرال $f(x)$ بر (a, b)، می‌توان این بازه را به n جزء مساوی تقسیم کرد، که در آن $b-a=nh$، و قاعدهٔ ذوزنقه را برای هر جزء به‌کار برد. در این صورت، مقدار تقریبی عبارت است از

$$h\left\{\frac{۱}{۲}f(a)+f(a+h)+f(a+۲h)+\cdots+\frac{۱}{۲}f(a+nh)\right\},$$

اولین و آخرین جمله دارای ضریب $\frac{۱}{۲}$ هستند. اگر، بعلاوه، $|f''(x)|\leqslant M$، دراین‌صورت، حداکثر مقدار خطا عبارت است از

$$\frac{۱}{۱۲}M\frac{(b-a)^{۳}}{n^{۲}} \text{ یا } \frac{۱}{۱۲}Mnh^{۳}$$

قاعدهٔ سیمسن. این روش، که مبتنی بر ایدهٔ تقریب کردن منحنی $y=f(x)$ با یك سهمی است که از سه نقطهٔ آن می‌گذرد (به جای خط مستقیمی که از دو نقطه می‌گذرد) محتملا تخمین بسیار نزدیکتری برای انتگرال می‌دهد.

تقریب سیمسن برای

$$I=\int_{c}^{d}f(x)dx$$

عبارت است از

$$S=\frac{۱}{۶}(d-c)\left\{f(c)+۴f\left[\frac{۱}{۲}(c+d)\right]+f(d)\right\}$$

برای به دست آوردن کران بالایی برای مقدار خطا، فرض خواهیم کرد که $f(x)$ دارای مشتق چهارم کراندار است.

لم. فرض کنیم $y=p(x)=lx^{۲}+mx+n$ سهمیی باشد (با محوری موازی Oy

که از سه نقطهٔ $y=f(x)$؛ که در آن $x=-h,\ \circ,\ h$ می‌گذرد. در این صورت،

$$\int_{-h}^{h} p(x)dx=\frac{۱}{۳}h\{f(-h)+۴f(\circ)+f(h)\}$$

برهان این لم را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اینك، به‌عنوان یك مقیاس «خطا» $E(h)$ را چنین تعریف می‌کنیم،

$$E(h)=\int_{-h}^{h} f(x)\,dx-\frac{۱}{۳}h\{f(-h)+۴f(\circ)+f(h)\}$$

قضیهٔ ۷.۱۳.۲۰. اگر $|f^{(۴)}(x)|\leqslant M$، آنگاه $|E(h)|\leqslant\frac{۱}{۹\circ}Mh^{۵}$.

برهان. فرض کنید $\circ\leqslant x\leqslant h$. دراین‌صورت، با توجه به قضیهٔ مقدارمیانگین‌داریم،

$$E'(x)=f(x)+f(-x)-\frac{۱}{۳}\{f(-x)+۴f(\circ)+f(x)\}$$
$$-\frac{۱}{۳}x\{f'(x)-f'(-x)\}$$

$$=\frac{۲}{۳}f(x)-\frac{۴}{۳}f(\circ)+\frac{۲}{۳}f(-x)-\frac{۱}{۳}x\{f'(x)-f'(-x)\}$$

$$E''(x)=\frac{۱}{۳}f'(x)-\frac{۱}{۳}f'(-x)-\frac{۱}{۳}x\{f''(x)+f''(-x)\},$$

$$E'''(x)=-\frac{۱}{۳}x\{f'''(x)-f'''(-x)\}$$

$$=-\frac{۲}{۳}x^{۲}f^{(۴)}(\xi)$$

که در آن $-x<\xi<x$. بنابراین،

$$-\frac{۲}{۳}Mx^{۲}\leqslant E'''(x)\leqslant\frac{۲}{۳}Mx^{۲}$$

با انتگرالگیری از $\circ$ تا x، و با توجه به اینکه، $E''(\circ)=\circ$، داریم

$$-\frac{۲}{۹}Mx^{۳}\leqslant E''(x)\leqslant\frac{۲}{۹}Mx^{۳}$$

با دوبار انتگرالگیری دیگر و استفاده از $E'(\circ)=E(\circ)=\circ$، داریم

$$-\frac{۱}{۱۸}Mx^{۴}\leqslant E'(x)\leqslant\frac{۱}{۱۸}Mx^{۴}\ (\circ\leqslant x\leqslant h)$$

و بالاخره،

$$-\frac{۱}{۹\circ}Mh^{۵}\leqslant E(h)\leqslant\frac{۱}{۹\circ}Mh^{۵}$$

در عمل، برای تقریب $\int_a^b f(x)dx$، بـازه $(a,\ b)$ را به $۲n$ جزء مساوی تقسیم کنید، که درآن $b-a=۲nh$. فرض کنید مقادیر $f(x)$ در $۲n+۱$ نقطهٔ انتهایی بازه‌های جزء اعداد زیر باشند

$$y_{\circ},\ y_{۱},\ \cdots,\ y_{۲n}$$

بـا به کار بردن روش لم برای n مجموعه از دو زیر بـازهٔ مجاور، مقدار تقریبی زیر به دست می‌آید

$$\frac{۱}{۳}h\{(y_{\circ}+y_{۲n})+۴(y_{۱}+y_{۳}+\cdots+y_{۲n-۱})+۲(y_{۲}+y_{۴}+\cdots+y_{۲n-۲})\}$$

اگر، بعلاوه، $|f^{(۴)}(x)|\leqslant M$، قضیهٔ ۲.۱۳.۷ نشان می‌دهد که حـداکثر مقدار خطـا عبارت است از

$$\frac{۱}{۹\circ}Mn\left(\frac{b-a}{۲n}\right)^{۵}=\frac{۱}{۲۸۸\circ}M\frac{(b-a)^{۵}}{n^{۴}}$$

تمرین ۷ (هـ)

۱ ـ ثابت کنید که اگر $f(x)=\left(۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۱\circ}x^{۲}\right)/\sqrt{(۱+x)}$ آنگـاه در بـازهٔ

$\circ\leqslant x\leqslant\frac{۱}{۲}$، $۱\leqslant f(x)<۱/\circ\circ\circ۸$. بنابراین، انتگرال

$$\int_{\circ}^{\frac{۱}{۲}}\frac{۱+\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۱\circ}x^{۲}}{\sqrt{۱-x^{۲}}}dx$$

را تا سه رقم اعشار محاسبه کنید $(\sqrt{۲}=۱/۴۱۴۲\ldots)$

۲ ـ ثابت کنید که

$$\int_{\circ}^{۱}\frac{u^{۴}(۱-u)^{۴}}{۱+u^{۲}}du=\frac{۲۲}{۷}-\pi$$

انتگرال $\int_{0}^{1} u^{4}(1-u)^{4}\,du$ را محاسبه کنید و نتیجه بگیرید که

$$\frac{22}{7}-\frac{1}{1260}>\pi>\frac{22}{7}-\frac{1}{630}$$

۳ ــ اگر $\phi(x)$ کثیرالجمله‌ای از درجهٔ پنجم باشد، ثابت کنید که

$$\int_{0}^{1}\phi(x)\,dx=\frac{1}{18}\{5\phi(\alpha)+8\phi\left(\frac{1}{2}\right)+5\phi(\beta),$$

که در اینجا، α و β ریشه های معادلهٔ $x^{2}-x+\frac{1}{10}=0$ هستند.

۴ ــ به ازای $x\geqslant 0$ ، تابع $f(x)$ دارای n مین مشتق پیوسته است و $f(x)$ و $n-1$ مشتق اول آن، به‌ازای $x=0$، صفرند. نشان دهید که

$$\int_{0}^{a}\frac{(a-x)^{n}}{n!}f^{(n)}(x)dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$$

نتیجه بگیرید که، اگر در $0\leqslant x\leqslant a$ داشته باشیم $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$ آنگاه

$$\left|\int_{0}^{a}f(x)dx\right|\leqslant\frac{a^{n+1}}{n!}\cdot\frac{M}{\sqrt{2n+1}}$$

۵ ــ در بارهٔ این فرض متداول بحث کنید که تقریب سیمسن، که با تقسیم کردن مجموعهٔ مقادیر (a,b) به $2n$ جزء مساوی به‌دست آمده است، درمعرض خطایی که مطابق n^{-4} تغییر می کند، قرار دارد.

اگر I_1 و I_2 تقریبهایی باشند که به وسیلهٔ قاعدهٔ سیمسن، درحالی که مجموعهٔ مقادیر به‌ترتیب به $2n$ و $4n$ جزء تقسیم شده‌اند، به دست آمده‌اند؛ ثابت کنید که ، برای فرض بالا، عدد $\frac{16I_2-I_1}{15}$ تقریب مناسبتری است.

این را برای $\int_{4}^{8}\frac{dx}{x}$ ، با $n=1$، به کار ببرید و نتیجه آن را با مقدار درست $0/693147...$ مقایسه کنید.

۶ ــ (فرمول استرلینگ برای $n!$) این فرمول تقریب خوبی را برای $n!$ ، هنگامی که n عدد بزرگی باشد، ارائه می‌دهد (ج. استرلینگ[1] ۱۶۹۲ــ۱۷۷۰).

---

1) J. Sterling

ثابت کنید که وقتی $n \to \infty$،

$$\phi(n)=\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}} \to \sqrt{2\pi}$$

برهان شامل دو قسمت است: (الف) ثابت کنید که $\phi(n)$ به Aی ثابتی میل می‌کند، (ب) ثابت کنید که $A=\sqrt{2\pi}$.

(الف) اگر r عدد صحیح ناکمتر از ۲ باشد،

$$\int_{r-\frac{1}{2}}^{r+\frac{1}{2}} \log x\,dx < \log r,\ \frac{1}{2}\{\log(r-1)+\log r\} < \int_{r-1}^{r} \log x\,dx \quad \text{(i)}$$

$$\int_{\frac{3}{2}}^{n} \log x\,dx < \log(n!) - \frac{1}{2}\log n < \int_{1}^{n} \log x\,dx \quad \text{(ii)}$$

(iii) اگر $u_n=\log(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n+n$

آنگاه $u_n > u_{n-1}$ و $\frac{3}{2}\left(1-\log\frac{3}{2}\right) < u_n < 1$

(iv) $\phi(n) \to A$، که درآن، $2/43 < A < e$.

(ب) فرمول والیس[1] را (تمرین ۷ (ب)، ۳) برای $\phi(2n)/\{\phi(n)\}^2$ به‌کار ببرید.

تمرین ۷ (و) (متفرقه)

۱ ــ حدود زیر را، وقتی که x با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، به دست آورید.

$$\text{(i)}\ \frac{1}{x}\int_{0}^{x}\sqrt{3t^2+2}\,dt, \quad \text{(ii)}\ \frac{1}{x^2}\int_{-x}^{x}|t|\,dt$$

۲ ــ اگر

$$G(x,\xi)=\begin{cases} x(\xi-1) & \text{وقتی که } x\leqslant\xi\text{ ،} \\ \xi(x-1) & \text{وقتی که } \xi\leqslant x\text{ ،} \end{cases}$$

1) Wallis

و اگر $f(x)$ در $\circ \leqslant x \leqslant 1$ تابعی پیوسته باشد و

$$g(x)=\int_{\circ}^{1} f(\xi)\, G(x,\, \xi) d\xi$$

ثابت کنید که $g''(x)=f(x)$، و $g(\circ)$ و $g(1)$ را به دست آورید.

۳ ــ اگر

$$f(p,\ q)=\int_{\circ}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx,$$

که درآن، $p \geqslant 1$ و $q \geqslant 1$، ثابت کنید که

$$f(p+1,\ q)+f(p,\ q+1)=f(p,\ q),$$
$$qf(p+1,\ q)=pf(p,\ q+1)$$

مقدار $f(p,\ n)$ را، که درآن، n عدد صحیح مثبت است محاسبه کنید.

۴ ــ فرض کنید $(r \geqslant \circ)$ $S_r=\int_{\circ}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^r\theta\, d\theta$، $(r \geqslant 1)$ $P_r=rS_rS_{r-1}$ دراینجا لازم نیست که r یک عدد صحیح باشد. ثابت کنید که

(i) $P_r=P_{r+1}(r \geqslant 1)$، (ii) $P_1=\frac{1}{2}\pi$،

(iii) وقتی که r صعودی باشد، P_r/r نزولی است $(r \geqslant 1)$.

از (i)، (ii) و (iii) نتیجه بگیرید که

(iv) (kیک عددصحیح است؛ $1 \leqslant k \leqslant r < k+1$) $\frac{r}{k+1}\frac{\pi}{2} < P_r \leqslant \frac{r}{k}\frac{\pi}{2}$؛

و از (i) و (iv) نتیجه بگیرید که

(v) به ازای هر r که $r \geqslant 1$، $P_r=\frac{1}{2}\pi$

۵ ــ از مجموعهای تقریبی برای انتگرالهای مقتضی، وقتی که $n \to \infty$، حدود ذیل را پیدا کنید.

(i) $n\sum_{m=\circ}^{n-1} \frac{1}{n^2+m^2}$،

$$\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}}{n} \quad \text{(ii)}$$

۶ ــ از اتحاد

$$1-a^{2n}=(1-a^{2})\prod_{r=1}^{n-1}\left(1-2a\cos\frac{r\pi}{n}+a^{2}\right)$$

(که درآن، $\prod$ حاصلضرب عوامل ارائه شده با $r=1, 2, \ldots, n-1$ را مشخص می‌کند) ثابت‌کنیدکه (a حقیقی است) انتگرال

$$\int_{0}^{\pi}\log(1-2a\cos x+a^{2})dx$$

اگر $|a|<1$، مساوی ۰ می‌شود و اگر $|a|>1$ مساوی $2\pi\log|a|$ می‌شود.

۷ ــ (برهان اینکه π اصم است.) اگر

$$I_{n}(\alpha)=\int_{-1}^{1}(1-x^{2})^{n}\cos\alpha x\,dx,$$

ثابت‌کنیدکه اگر $n\geqslant 2$،

$$\alpha^{2}I_{n}=2n(2n-1)I_{n-1}-4n(n-1)I_{n-2}$$

نتیجه بگیریدکه به‌ازای مقادیر صحیح مثبت n،

$$\alpha^{2n+1}I_{n}(\alpha)=n!(P\sin\alpha+Q\cos\alpha),$$

که در آن، P و Q کثیرالجمله‌هایی‌از درجهٔ کوچکتر از $2n+1$ برحسب α بـا ضرایب صحیح اند.

ثابت‌کنید که اگر $\frac{1}{2}\pi$ مساوی $\frac{b}{a}$ باشد،که درآن، b و a عدد صحیح‌اند، آنگاه لازم است که

$$\frac{b^{2n+1}I_{n}\left(\frac{1}{2}\pi\right)}{n!}$$

یك عدد صحیح باشد. با توجه به مقادیر بزرگ n، ثابت‌کنیدکه π اصم است.

۸

توابع چند متغیره

۱.۸. توابعی از x و y

قبلا اعمال حدی را در مورد یك تابع $f(x)$، از یك متغیر واحد x، به‌کار بردیم. حال این تحلیل به توابعی که به بیش از یك متغیر مستقل حقیقی بستگی دارند، تعمیم داده خواهد شد. در این بیان، زبان هندسی درجهت اختصار و وضوح به‌ما کمك خواهد کرد. نسبت به یك زوج محورهای متعامد، دو عدد حقیقی متناظر با یك نقطه در صفحه هستند. اکنون به تعریف یك تابع از دو متغیر x و y می‌پردازیم.

فرض کنیم E مجموعه‌ای از نقاط P درصفحهٔ $(x\ ,\ y)$، یا معادل آن، یك مجموعه از زوج اعداد حقیقی $(x\ ,\ y)$ باشد. اگر قاعده‌ای داشته باشیم که به هر زوج مرتب $(x\ ,\ y)$ عدد یکتایی مانند z رانظیر کند، دراین‌صورت، z را تابعی از x و y می‌خوانند و مجموعهٔ E را حوزهٔ تابع می‌نامند.

دراین‌صورت می‌نویسیم

$$z=f(x,\ y)$$

یا، معمولا

$$z=z(x,\ y)$$

را به‌کار می‌بریم که z درعین حال، بدون اینکه ابهامی پیش‌آید، برای نمایش نماد تابعی و مقدار عددی به‌کار می‌رود.

تذکرات. (۱) برای سهولت حرف z تاحال برای نمایش عدد مختلط $x+yi$ به‌کاررفته

است. در این فصل مورد استعمال آن متفاوت بوده ومتناظر با هندسه تحلیلی سه بعدی نسبت به سه محور Ox، Oy، و Oz است.

(۲) تذکرهای (۱) تا (۴) بخش ۱.۳، در این قسمت بـا تغییراتی جزئی برقرار هستند. تابع f تبدیل یا نگاشتی از یك حوزهٔ دو بعدی بـا نقاط (x, y) به مجموعه‌ای خطی با مقادیر z است، بـا این شرایط که به هر زوج (x, y) یك و تنهـا یك مقدار z نظیر می‌شود.

مثالها. $z = (1 - x^2 - y^2)^k$ درحالتهای زیر تابعی از (x, y) را تعریف می کند

(i) وقتی $k = 2$، به‌ازای هر (x, y)،

(ii) وقتی $k = -1$، به ازای هر (x, y) به استثنـای نقـاطی که روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ هستند،

(iii) وقتی $k = \frac{1}{2}$، به‌ازای همهٔ نقاطی که در داخل یا روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ هستند.

معادلهٔ $z = f(x, y)$ نسبت بدستگاه سه محور Ox، Oy، وOz رویه‌ای رانمایش می‌دهد. به همان سهولتی که منحنی $y = f(x)$ را ، که یك تابع یك متغیره است، می‌توان نشان داد، برای مقادیر تـابع $z = f(x, y)$ نمی‌توان نمـایش تصویری به دست آورد. نمایش ممکنی بر صفحهٔ کاغذ با رسم منحنیهای

$$f(x, y) = k$$

به ازای مقادیری از k هـای مناسب، حـاصل می‌شود. این منحنیهـا خطوط تراز سطح $z = f(x, y)$ هستند.

مثال. خطوط تراز تابع

$$z = x^2 + 4y^2$$

از بیضیهای متشابهی به مرکز مبدأ مختصات تشکیل شده‌اند.

اگر بیش از دو متغیر مستقل موجود باشد رابطهٔ تـابعی را دیگر نمی‌توان به طور تصویری نشان داد. روشهـای تحلیلی این فصل، در مورد توابع بـا هر چند متغیر به‌کار می‌روند؛ برای سادگی تعداد متغیرها را دو یا سه خواهیم گرفت.

۲.۸. حدود و پیوستگی

ابتدا مفهوم حد را برای توابعی با بیش از یك متغیر روشن می کنیم.

تعریف. تابع $f(x, y)$ را، وقتی (x, y) به (a,b) میل می‌کند، دارای حد l می‌نامیم در صورتی که به ازای ε مفروض، δیی باشد که به ازای هر x و y، اگر

$$0 < \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < \delta$$

آنگاه

$$|f(x, y)-l| < \varepsilon$$

این تعریف بیان می‌کند که با اختیار کردن نقطهٔ (x, y) در داخل دایره‌ای به‌قدر کافی کوچك و به‌مرکز (a, b)، می‌توان $f(x, y)$ را با هر تقریبی که بخواهیم به l نزدیك کنیم. در تعریف فوق به جای دایره می‌توان مربعی به مرکز (a, b) و به ضلع 2δ، یا ناحیه‌ای به هر شکلی را که شامل نقطهٔ (a, b) باشد، به‌کار برد. ما ناحیه‌ای مثل دایره یا مربع فوق را یك همسایگی نقطهٔ (a, b) می‌نامیم.

تعریف. $f(x, y)$ را در (a , b) پیوسته خوانیم در صورتی که وقتی (x, y) به (a, b) میل می‌کند، $f(x, y)$ به $f(a, b)$ میل‌کند.

طبیعی است که پیوستگی تابع f در یك حوزهٔ E از صفحهٔ (x, y) را پیوستگی آن در هر نقطهٔ E تعریف کنیم. بر خواننده است که به تعریف پیوستگی توابعی از x در یك بازهٔ باز یا بسته، که در آخر بخش ۴.۳ بیان شد، مراجعه کند. تعریف زیر در این‌فصل برای ما کافی است.

تعریف. $f(x, y)$ را در حوزهٔ باز مستطیلی $x_0 < x < x_1$ و $y_0 < y < y_1$، پیوسته خوانیم اگر در هر نقطه از آن حوزه پیوسته باشد.

با این حال اگر مجموعه شامل نقاط مرزی خود باشد، تعریف صوری محتاج دقت بیشتری است؛ زیرا، مرز حوزه‌ای با بیش از یك بعد خیلی پیچیده‌تر از مرز یك بازه خطی است که صرفاً شامل دو نقطهٔ انتهایی آن است. نظر کلی (به تأسی از بخش ۴.۳) این است که مقادیری از f را که تابع در نقطه‌ای غیر از نقاط E اختیار می‌کند مستثنی کنیم.

باید ملاحظه کرد که پیوستگی $f(x, y)$ به عنوان تابعی از دومتغیر (x, y)، چیزی بیشتر از پیوسته بودن $f(x, y)$ به‌عنوان تابعی فقط از یك متغیر (با فرض ثابت بودن متغیر دیگر) را بیان می‌کند.

مثال. فرض کنیم

$$f(x, y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

اگر x و y هر دو صفر نباشند.

$$f(0, 0)=0$$

در این صورت $f(x, y)$ در تمـام نقاط دو محور Ox و Oy صفر است. لذا $f(x, 0)$ در نقطهٔ $x=0$ تابعی است پیوسته از x، و $f(0, y)$ نیز تـابعی پیوسته از y، به‌ازای $y=0$، است. ثابت می‌کنیم $f(x, y)$ تـابع پیوسته‌ای از (x, y) در $(0,0)$ نیست. این هم با استفاده از مختصات قطبی؛ $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، به سهولت روشن می‌شود. زیرا، به‌ازای هر r مخالف صفر خواهیم‌داشت $f(x, y)=\sin 2\theta$. بنا براین، تابع در هر دایره‌ای به‌مرکز $(0, 0)$، ولو هرچندکوچك، تمام مقادیر بین ۱ و ۱− را می‌گیرد و در نتیجه، وقتی (x, y) به $(0, 0)$ می‌رود تابع به حدی میل نمی‌کند.

۳.۸. مشتقات نسبی

بـا ثـابت نگهداشتن y می‌توانیم از $f(x, y)$ برحسب x مشتق بگیریـم؛ یعنی اینکه، حد

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x,y)}{h}$$

را پیدا کنیم. این حد را مشتق نسبی $f(x, y)$ نسبت به x می‌خوانند و به‌صورتهای زیر نشان می‌دهند.

$$f_x \quad \text{یا} \quad f_x(x, y) \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

علامات فوق را می‌توان در مورد هر تابعی با دو متغیر یا بیشتر به‌کار برد، با این شرط‌که همهٔ متغیرها را به استثنای متغیری‌که نسبت به‌آن مشتق گرفته می‌شود، ثابت نگهداریم.

مشتقات مرتبه اول $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ خود توابعی‌از (x, y) هستند، ومی‌توان دوباره از آنها مشتق گرفت. در این صورت خواهیم داشت

$$f_{yy} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{و} \quad f_{xx} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

و همچنین مشتقات نسبی مرتبه دوم‌آمیخته نیز حاصل می‌شوند:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

با به‌کاربردن علامت اندیس، اولی را می‌توانیم به صورت $(f_x)_y$ و یا، با حذف پرانتز، به صورت f_{xy} بنویسیم.

دراغلب مسائل ساده ملاحظه می‌شود که مشتق مرتبهٔ دوم مستقل از ترتیب مشتقگیری است.

در واقع اغلب داریم

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

که در این صورت هریك ازآنها را می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad (\text{یا } f_{xy})$$

اولین قضیهٔ ما شرایط این قابلیت تعویض‌ترتیب مشتقگیری، برای مشتقات نسبی را، بیان می‌کند.

قضیه ۳.۸. اگر f_{xy} و f_{yx} بــه عنوان توابعی از (x, y) در نقطه (a, b) پیوسته باشند، در آن نقطه با هم برابرند.

برهان. چون f_{xy} و f_{yx} در (a, b) پیوسته‌اند، پس، مربعی‌به مرکز (a, b)، مثل N، هست‌که درآن این‌مشتقها موجودند. بنابراین، توابع f_x و f_y که توابع ما ازآنها مشتق‌شده‌اند، همچنین f، باید در N موجودباشند. برای بقیهٔ برهان، h و k چنان‌کوچك فرض می‌شوندکه $(a+h, b+k)$ در N باشد.

برهان مبتنی بر در نظرگرفتن نمو تابع f متناظر با نموهــای متغیرهــای x و y می‌باشد.

اگر

$$\phi(x, y)=f(x, y+k)-f(x, y),$$

$$D=\phi(x+h, y)-\phi(x, y),$$

در این صورت

$$D=f(x+h, y+k)-f(x+h, y)-f(x, y+k)+f(x, y)$$

اینك، باگرفتن نموهــایی از x و y، بــا ترتیب عکس، D را به طور دیگری می‌توان

به دست آورد: زیرا، اگر

$$\psi(x, y) = f(x+h, y) - f(x, y),$$

خواهیم داشت،

$$D = \psi(x, y+k) - \psi(x, y)$$

بنا بر قضیهٔ مقدار میانگین (۱.۶.۴)،

$$\phi(a+h, b) - \phi(a, b) = h\phi_x(a+\theta_1 h, b)$$

که در آن θ_1، و همهٔ θهایی که در بقیهٔ برهان می‌آیند، بین ۰ و ۱ هستند. بنا بر تعریف ϕ،

$$\phi_x(a+\theta_1 h, b) = f_x(a+\theta_1 h, b+k) - f_x(a+\theta_1 h, b)$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین در طرف راست، با $(x, y) = (a, b)$ در D، خواهیم داشت

$$D = hkf_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k)$$

صورت دیگر تعریف D به عنوان نمو $\psi(a, y)$ در بازهٔ $(b, b+k)$ چنین نتیجه می‌دهد

$$D = hkf_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k)$$

بنابراین، اگر $h \neq 0$ و $k \neq 0$،

$$f_{xy}(a+\theta_1 h, b+\theta_2 k) = f_{yx}(a+\theta_3 h, b+\theta_4 k)$$

حال فرض کنیم $(h, k) \to (0, 0)$. از پیوستگی f_{xy} و f_{yx} در (a, b)، نتیجه می‌شود

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$$

تمرین ۸ (الف)

۱ ـ کدام یك از توابع زیر (با تکمیل مناسب تعریف آنها در $x=0$ و $y=0$) در $(0, 0)$ پیوسته‌اند؟

$$\text{(i)}\ \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \qquad \text{(ii)}\ \frac{xy^2}{x^2+y^4} \qquad \text{(iii)}\ \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

۲ ـ با فرض $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$، مشتقات نسبی r و θ را برحسب x و y پیدا کنید.

آیا درست است که

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)=۱$$

درستی مطلب را با نمودار نشان دهید.

۴.۰۸ دیفرانسیلپذیری

می‌خواهیم ببینیم که طبیعی‌ترین تعمیم مفهوم دیفرانسیلپذیری، در صورتی که تعداد متغیرها ازیکی تجاوز کند، چیست. اگر تابعی یك متغیره مانند f داشته‌باشیم،دیفرانسیلپذیری دریك نقطه به معنی‌وجود خط مماس ــ یك تقریب خطی برای منحنی $y=f(x)$ ــ است. روی رویه‌ای مانند $z=f(x, y)$، تقریبی که نسبت به متغیرها خطی باشد، یك صفحهٔ مماس را مطرح می‌کند. این، ما را به تعریف زیر هدایت می‌کند.

تعریف. تابع $f(x, y)$ در نقطهٔ (a, b) دیفرانسیلپذیر است ، اگر به ازای $(a+h, b+k)$ در یك همسایگی (a, b)،

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=Ah+Bk+\varepsilon(|h|+|k|),$$

که در آن A و B مستقل از h و k هستند، و وقتی که $(h, k)\to(۰, ۰)$، ε به صفر میل می‌کند.

این بدان معنی است که صفحهٔ

$$z-f(a, b)=A(x-a)+B(y-b)$$

درفاصله‌ای از رویهٔ $z=f(x, y)$ قراردارد که درمقایسه با فاصلهٔ نقطهٔ $(a+h, b+k)$ از (a, b) کوچك است و صفحهٔ مماس بر رویه می‌باشد.

«جملهٔ خطا» را، که ما در تعریف دیفرانسیلپذیری به صورت

$$\varepsilon(|h|+|k|)$$

نوشتیم، به صورتهای مختلفی‌می‌توان نوشت، که معادل بودن آنها به سهولت ثابت می‌شود. برای نمونه، می‌توانستیم به جای آن بنویسیم

$$\varepsilon\sqrt{h^۲+k^۲}$$

همچنین، شرط فوق را می‌توان دوباره چنین نوشت

$$f(a+h,\, b+k)-f(a,\, b)=\alpha(h,\, k)h+\beta(h,\, k)k,$$

که درآن، وقتی $(h,\, k) \to (0\,,\, 0)$، داریم $\alpha(h,\, k) \to A$ و $\beta(h,\, k) \to B$.

اگر (در تعریف اولیه) $k=0$ گرفته، h را به صفر میل دهیم خواهیم داشت

$$A=f_x(a,\, b)$$

و نظیر آن

$$B=f_y(a,\, b)$$

دیده می‌شود که دیفرانسیلپذیری، با این‌تعریف، چیزی بیش از وجود مشتقات نسبی نسبت به x و y را بیان می‌کند. از لحاظ هندسی، وجود مشتق نسبی $f_x(a,\, b)$، وجودیك خط مماس بر منحنی حاصل از مقطع رویهٔ $z=f(x,\, y)$ با صفحهٔ $y=b$ را نتیجه می‌دهد. برای وجود صفحهٔ مماس بر یك سطح چیزی بیش از وجود خطوط مماس به دو منحنی حاصل از مقطع صفحات متعامد لازم است. قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که اگر ما نه تنها وجود f_x و f_y، و بلکه پیوستگی آنهـا را فرض‌کنیم دراین‌صورت، دیفرانسیلپذیری f نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۴۰۸.۱ اگر f_x و f_y در یك نقطه، مـانند $(x,\, y)$، پیوسته بـاشند، f درآن نقطه دیفرانسیلپذیر است.

برهان. h و k را چنان‌کوچك اختیار می‌کنیم تا $(x+h,\, y+k)$ در داخل یك همسایگی مستدیر از $(x,\, y)$ باشدکه درآن f_x و f_y موجودند. دراین صورت داریم

$$\begin{aligned} &f(x+h,\, y+k)-f(x,\, y)\\ &\quad=\{f(x+h,\, y+k)-f(x,\, y+k)\}+\{f(x,\, y+k)-f(x,\, y)\} \end{aligned}$$

در آکولاد اول فقط x و دردومی فقط y تغییر می‌کند. با به‌کار بستن قضیهٔ مقدار میانگین برای هر یك، خواهیم داشت

$$hf_x(x+\theta_1 h,\, y+k)+kf_y(x,\, y+\theta_2 k)$$

این‌هم، بنا بر پیوستگی f_x و f_y؛ برابر است با

$$h\{f_x(x,\, y)+\varepsilon_1\}+k\{f_y(x,\, y)+\varepsilon_2\},$$

که درآن ε ها، وقتی $(h,\, k) \to (0\,,\, 0)$، به صفر میل می‌کنند وتعریف دیفرانسیلپذیری برقراراست.

تمرین ۸ (ب)

۱ ــ دیفرانسیلپذیری توابع ذیل را، در $(0\,,\,0)$، تحقیق کنید.

$$\text{(i)}\quad |x^2-y^2|,\qquad \text{(ii)}\quad |xy|^k$$

۲ ــ فرض کنیم که

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\quad \text{وقتی}\\[2ex] 0 & (x,y)=(0,0)\quad \text{وقتی}\end{cases}$$

اولا پیوستگی f، ثانیاً وجود f_x و f_y ، ثالثاً دیفرانسیلپذیری f، را در $(0\,,\,0)$ تحقیق کنید.

۳ ــ تابعی از $f(x\,,\,y)$ مثال بزنید که در $(0\,,\,0)$ دیفرانسیلپذیر بوده ولی در هیچ نقطهٔ دیگری پیوسته نباشد.

۵.۸. توابع مرکب

اینك فرمول

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

را، که در بخش ۲.۴ (۵) ثابت شد، برای توابعی از دو متغیر تعمیم می‌دهیم.

قضیهٔ ۵.۸. ۱ اگر توابع $x=x(t)$ و $y=y(t)$ به ازای t مفروضی دیفرانسیلپذیر بوده و $z=z(x,\,y)$ در $(x,\,y)$ متناظر با t بالا، دیفرانسیلپذیر باشد، در این صورت

$$z=z\{x(t),\ y(t)\}$$

تابعی دیفرانسیلپذیر در t است و

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

برهان. فرض کنیم t به $t+\delta t$ تغییر کند و δx و δy نموهای متناظر برای x و y باشند.

در این صورت،

$$\delta x=\left(\frac{dx}{dt}+\varepsilon_{1}\right)\delta t,$$

$$\delta y=\left(\frac{dy}{dt}+\varepsilon_{2}\right)\delta t,$$

که درآن، ε_1 و ε_2، وقتی‌که $\delta t \to 0$، به صفر میل می‌کنند. با نوشتن

$$\delta z=z(x+\delta x,\ y+\delta y)-z(x,\ y),$$

و با توجه به دیفرانسیلپذیری z، داریم

$$\delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\delta y+\varepsilon(\,|\,\delta x\,|+|\,\delta y\,|\,),$$

که درآن، ε، با $(\delta x,\ \delta y) \to (0,\ 0)$، به صفر میل می‌کند.

اگر δx و δy هردو صفر باشند (که وقتی $dx/dt=dy/dt=0$، برای δtهای کوچك ممکن است پیش‌آید) رابطهٔ اخیر ε را مشخص نمی‌کند، دراین‌حالت‌آن را صفر تعریف می‌کنیم.

با قراردادن δx و δy برحسب δt، خواهیم داشت،

$$\delta z=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\delta t+\eta\delta t,$$

که درآن به سهولت ملاحظه می‌شود‌که، وقتی $\delta t \to 0$، $\eta \to 0$. ▌

نتیجهٔ ۱. در قضیه، اگر x و y توابعی با بیش از یك متغیر، مثل

$$x=x(t,u,v),\quad y=y(t,u,v)$$

باشند‌که دارای مشتقهای نسبی هستند، در این صورت به‌ازای هرمتغیر، با ثابت نگهداشتن بقیه، چنین حاصل می‌شود

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

و روابط مشابهی به‌وسیلهٔ تعویض t با u و v به‌دست می‌آید.

این دستور مفید برای دیفرانسیلگیری از طریق متغیرهـای واسطه، معمولا قـاعده زنجیری نامیده می‌شود.

نتیجهٔ ۲. در نتیجهٔ ۱ ، اگر $x(t, u, v)$ و $y(t, u, v)$ به معنی بخش ۴.۸ دیفرانسیلپذیر باشند، دیفرانسیلپذیری

$$z\{x(t, u, v),\ y(t, u, v)\}$$

نسبت به t ، u و v، با تغییر مختصری در برهان قضیهٔ بخش ۵.۸ نتیجه می‌شود.

۶.۸. تغییر متغیر. توابع همگن

این قسمت حاوی موارد استعمال قضیهٔ ۵.۸ است.

مثال . عبارت

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$$

را، با فرض پیوستگی مشتقات مرتبهٔ دوم، در مختصات قطبی بنویسید.

حل. اولین نتیجهٔ قضیهٔ قبل نتیجه می‌دهد

$$\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial V}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial V}{\partial y}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=\frac{\partial V}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial V}{\partial y}r\cos\theta$$

در این مرحله جملاتی در سمت راست داریم که هم شامل (x, y) وهم (r, θ) هستند. برای تفکیک مختصات دکارتی و قطبی بهتر است آنها را نسبت به $\frac{\partial V}{\partial x}$ و $\frac{\partial V}{\partial y}$ حل کنیم. خواهیم داشت (با فرض $r\neq 0$)

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$

این معادلات ما را قادر می‌سازند که عملگرهای $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ را، که هریك بر تابعی عمل

می‌کنند، به‌عملگرهایی متضمن $\partial/\partial r$, $\partial/\partial\theta$ تبدیل کنیم. بنابراین،

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$=\cos\theta\left\{\cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta}+\frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right\}$$

$$-\frac{\sin\theta}{r}\left\{\cos\theta\frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial\theta}-\sin\theta\frac{\partial V}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}-\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right\}$$

برای $\partial^2 V/\partial y^2$ نیز عبارت مشابهی موجود است که خواننده باید آن را بنویسد. با جمع کردن آنها خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} \quad \blacksquare$$

اینك برای تشریح بیشتر قضیهٔ ۵.۸ به توابع همگن می‌پردازیم. مقدماتی‌ترین مصادیق توابع همگن، چند جمله‌ایهای چند متغیری هستند که همهٔ جملات آن از یك درجه می‌باشند. مثلا $2x^3-x^2y+4y^3$ همگن از درجهٔ سه است. تعریف کلیتری که در زیر خواهد آمد، اجازه می‌دهد که، مثلا

$$\frac{(x^3+2y^3)^{\frac{1}{2}}}{x+3y}$$

همگن از درجهٔ $\frac{1}{2}$ باشد.

تعریف. $f(x, y)$ همگن از درجهٔ h است در صورتی که به ازای هر t مثبت و هر x و yی که f در آنها تعریف شده است،

$$f(tx, ty)=t^h f(x, y)$$

قضیهٔ ۶.۸. یك شرط لازم و کافی برای آنکه تابع دیفرانسیلپذیر $f(x, y)$، همگن از درجهٔ h باشد آن است که به‌ازای هر x و y،

$$xf_x+yf_y=hf$$

برهان. لزوم شرط را ثابت می‌کنیم، که مربوط به زمان اویلر است. با قراردادن $\xi = tx$, $\eta = ty$ داریم

$$f(\xi, \eta) = t^h f(x, y)$$

با ثابت نگهداشتن x و y نسبت به t مشتق می‌گیریم. از قضیهٔ ۵.۸ نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt} = ht^{h-1} f(x, y)$$

با قراردادن $t = 1$، رابطهٔ مطلوب حاصل می‌شود:

$$f_x x + f_y y = hf$$

برای اثبات کفایت این شرط، مثل قبل، فرض کنیم $\xi = tx$ و $\eta = ty$. با ثابت نگهداشتن x و y داریم:

$$\frac{d}{dt} f(\xi, \eta) = x\frac{\partial f}{\partial \xi} + y\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{t}\left(\xi\frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)$$

و بنا به فرض، عبارت اخیر برابر $hf(\xi, \eta)/t$ است. لذا، اگر $v = f(\xi, \eta)$،

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = \frac{h}{t}$$

بنابراین $v = At^h$، که در آن A مستقل از t است. حال با قراردادن $t = 1$، خواهیم داشت.

$$f(tx, ty) = At^h = t^h f(x, y) \quad \blacksquare$$

تمرین ۸ (ج)

۱ – (ژاکوبین) فرض کنیم u و v توابع دیفرانسیلپذیر از x و y باشند. دترمینان

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

را، که به اختصار چنین نوشته می‌شود

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

ژاکوبین تبدیل از (x,y) به (u,v) می‌نامند. نقش آن متناظر با نقش مشتق du/dx برای تابعی از یك متغیر مانند $u(x)$ است. خواص زیر را، که این‌نقش را تشریح می‌کنند، ثابت کنید.

(i) اگر رابطهٔ $\phi(u, v)=0$ به‌ازای هر (x, y) از یك حوزهٔ D برقرارباشد، در این صورت در D داریم:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$$

(عکس این مطلب نیز برقرار است ولی اثبات آن مشکل است.)

(ii) اگر x و y توابع دیفرانسیلپذیر از s و t باشند، دراین‌صورت،

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(s, t)}=\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)}$$

این مطالب را می‌توان برای n تابع از n متغیر تعمیم داد.

۲ ــ تابعی‌مانند $f(x)$ بااین خواص تعریف می‌شود: $f'(x)=1/(1+x^2)$ و $f(0)=0$.
با استفاده از ۱ (i)، (یعنی، قسمت عکس) نشان دهید معادلهٔ تابعی‌زیربرقراراست،

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$$

۳ ــ مساحت مثلث Δ به‌وسیلهٔ اندازه‌گیری a، B و C پیدا می‌شود. ثابت‌کنید که مقدار خطا در مقدار محاسبه شدهٔ Δ به علت خطاهای کوچك δa، δB، δC به‌طور تقریبی چنین است:

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta}=2\frac{\delta a}{a}+\frac{c}{a}\frac{\delta B}{\sin B}+\frac{b}{a}\frac{\delta C}{\sin C}$$

۴ ــ اضلاع a، b، c از مثلثی با یك خطای درصد ε اندازه‌گیری شده و مساحت آن محاسبه شده‌است. ثابت‌کنید خطای درصد ممکن در مساحت تقریباً برابراست‌با 2ε یا $2\varepsilon \cot B \cot C$، برحسب اینکه مثلث در رأس A حاده‌الزاویه یا منفرجه‌الزاویه باشد.

۵ ــ (معادلهٔ موج) ثابت‌کنید با تبدیل $u=x-ct$ و $v=x+ct$ معادله بامشتقات نسبی

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

به معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}=0$$

تقلیل می‌یابد، و از این طریق آن را حل کنید.

۶ ـ اگر $f(x,\ y)$ با تبدیل

$$x=u^2-v^2,\quad y=2uv,$$

به $g(u,\ v)$ تبدیل شود، ثابت کنید

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{4(u^2+v^2)}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)$$

کلیترین تابع $f(x,\ y)$ را که تابعی تنها از $x+\sqrt{x^2+y^2}$ است و در

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

صدق می‌کند، پیدا کنید.

۷ ـ ثابت کنید که اگر r و θ مختصات قطبی باشند و $\lambda=\log r$، معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=0$$

به صورت زیر درمی‌آید

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}=0$$

۸ ـ به‌ازای همهٔ مقادیر مثبت λ، تابع g در رابطهٔ

$$g(\lambda^r x,\ \lambda^s y)=\lambda^n g(x,\ y)$$

صدق می‌کند که در آن r، s، و n اعداد صحیح مثبت‌اند. ثابت کنید

$$rx\frac{\partial g}{\partial x}+sy\frac{\partial g}{\partial y}=ng$$

۹ ـ تابع $F(u,\ v)$، وقتی تبدیل

$$u=x^3-3xy^2$$

$$v=3x^2y-y^3$$

به عمل می‌آید، به $f(x,\ y)$ تبدیل می‌شود. ثابت کنید

$$\frac{1}{9(x^2+y^2)^2}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\}=\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}$$

۷.۸. قضیهٔ تیلر

قضیهٔ مقدار میانگین مرتبهٔ nم را، که در صفحهٔ ۹۸ ثابت شد، به‌تابعی با دومتغیر تعمیم می‌دهیم.

قضیهٔ ۷.۸. فرض کنیم مشتقات نسبی مرتبهٔ nم تابع $f(x, y)$ در یك همسایگی (a, b) که حاوی خط واصل بین (a, b) و $(a+h\ ,\ b+k)$ است، پیوسته هستند. دراین‌صورت،

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k)=f(a, b)&+\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a, b)+\cdots\\ &+\frac{1}{(n-1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n-1}f(a, b)\\ &+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{n}f(a+\theta h, b+\theta k),\end{aligned}$$

که در آن، $0<\theta<1$.

معنی عملگر

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m}f(x, y)$$

چنین است

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}h^{m-r}k^{r}\frac{\partial^{m}}{\partial x^{m-r}\partial y^{r}}f(x, y)$$

در بسط $f(a+h, b+k)$، به‌جای (x, y)، بعد از عمل مشتقگیری تا مرتبهٔ $n-1$ مقادیر (a, b)، و برای جملهٔ مرتبهٔ nم مقدار $(a+\theta h, b+\theta k)$ را قرار می‌دهیم. فرض پیوستگی مشتقات نسبی، درستی عدم رعایت ترتیب مشتقگیری در هر یك از

$$\frac{\partial^{m}}{\partial^{m-r}x\partial^{r}y}f(x, y)\quad (m\leqslant n)$$

را تضمین می‌کند.

برهان قضیهٔ ۷.۸. تعداد متغیرها را با نوشتن

$$F(t)=f(a+ht, b+kt)$$

به یك (t) تبدیل می‌کنیم. بنا برقضیهٔ ۲.۸.۴ ،

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}F^{(n-1)}(0)+\frac{1}{n!}F^{(n)}(\theta),$$

که در آن، $0<\theta<1$.

مشتقات متوالی $F'(t)$ ، $F''(t)$ ، ... ، توسط قضیهٔ ۵.۸ محاسبه می‌شوند. با علامات قراردادی

$$F'(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial a}+k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a,b),$$

$$F''(0)=\left(h^2\frac{\partial^2}{\partial a^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial a\partial b}+k^2\frac{\partial^2}{\partial b^2}\right)f(a,b),$$

و غیره. بالاخره، $F^{(n)}(\theta)$ دارای مقدار مذکور در قضیه است. ▌

تعمیم احتمالی این نتیجه به موازات قضیهٔ ۸.۵ که بسط $f(x,y)$ را به سری نامتناهی برحسب قوای x و y فراهم نماید، از بسط $f(x)$ به صورت $\sum a_n x^n$ کمتر اهمیت دارد.

۸.۸. ماکزیموم و مینیموم

بحث بخش ۷ از فصل ۴ را به یك تابع f با دو متغیر مستقل تعمیم می‌دهیم.

تعریف. f دارای ماکزیمومی در (a,b) است هرگاه یك همسایگی (a,b) موجود باشد که در آن، به استثنای $(x,y)=(a,b)$، داشته باشیم $f(x,y)<f(a,b)$. مینیموم را با تبدیل $>$ به $<$ تعریف می‌کنیم.

مشابه زیر از قضیهٔ ۱.۷.۴ به فوریت نتیجه می‌شود.

اگر f_x در (a,b) موجود باشد، یك شرط لازم برای آنکه f دارای ماکزیموم یا مینیموم در (a,b) باشد آن است که $f_x(a,b)=0$.

این با اعمال قضیهٔ ۱.۷.۴ برای $f(x,b)$ حاصل می‌شود.

یك حکم مشابه برای $f_y(a,b)$ موجود است .

بررسی شرایط کافی برای یك ماکزیموم یا مینیموم دارای وجهی است که در مورد یك متغیر پیوستهٔ تنها موجود نبود. این، در یك لم جبری تجسم یافته است.

لم. اگر $\phi(x, y)=ax^2+2hxy+by^2$، که در آن همهٔ اعداد حقیقی اند و $D=ab-h^2$، داریم

(i) اگر $D>0$ و $a>0$ آنگاه به ازای هر (x, y) به استثنای $(0, 0)$، $\phi(x, y)>0$؛

اگر $D>0$, $a<0$ آنگاه به ازای هر (x, y) به استثنای $(0, 0)$، $\phi(x, y)<0$

(ii) اگر $D<0$، در این صورت مقادیری به حد کافی نزدیك $(0, 0)$، مانند (x_1, y_1)، (x_2, y_2)، وجود دارند که برای آنها

$$\phi(x_1, y_1)>0, \ \phi(x_2, y_2)<0$$

برهان. (i) ملاحظه شود که از $D>0$ نتیجه می‌شود که $a\neq 0$. دراین‌صورت، مگر اینکه $x=y=0$،

$$a\phi=(ax+hy)^2+(ab-h^2)y^2>0$$

بنابراین، اگر $a>0$ آنگاه $\phi>0$، و اگر $a<0$ آنگاه $\phi<0$

(ii) فرض کنیم $a\neq 0$، مثلا $a>0$. دراین‌صورت اگر $y_1=0$ و x_1 دارای مقداری (به‌استثنای 0) باشد، از نمایش $a\phi$ در (i) چنین حاصل می‌شود:

$$\phi(x_1, y_1)>0$$

اگر (x_2 , y_2) مخالف $(0 , 0)$ بوده و در رابطهٔ $ax_2+hy_2=0$ صدق کند آنگاه

$$\phi(x_2, y_2)<0$$

وقتی $a=0$ و $b\neq 0$، استدلال مشابهی برقرار است.

اگر $a=b=0$ آنگاه $h\neq 0$ و $\phi(x, y)=2hxy$، که به‌ازای $x=y$ و $x=-y$ علامات مخالفی می گیرد.

قضیهٔ ۸۰۸. فرض کنیم f دارای مشتقات مرتبهٔ اول و دوم f_x، f_y، f_{xx}، f_{xy}، f_{yy} باشد که در (a, b) پیوسته اند ، و مقادیر آنها را در (a, b) با p، q، r، s، t نشان می دهیم.

در این صورت، f دارای ماکزیموم یا مینیموم در (a, b) است در صورتی که

$$p=q=0 \qquad \text{(i)}$$

$$rt-s^2>0 \qquad \text{(ii)}$$

بعلاوه، اگر $r<0$، (a, b) ماکزیموم، و اگر $r>0$، یك مینیموم است. (از (ii)، $r\neq 0$)

اگر $rt-s^2<0$، (a, b) نه ماکزیموم و نه مینیموم f است.
اگر $rt-s^2=0$، چیزی ثابت نمی‌شود.
برهان. بنا بر قضیهٔ ۷.۸، اگر h و k به قدر کافی کوچك باشند،

$$f(a+h, b+k)=f(a, b)+ph+qk+\frac{1}{2}(r_1h^2+2s_1hk+t_1k^2),$$

که درآن r_1، s_1، t_1، مقادیر f_{xx}، f_{xy}، و f_{yy} به‌ازای $x=a+\theta h$ ، $y=b+\theta k$ بوده و θ، که وابسته به a، b، h و k است، در $0<\theta<1$ صدق می‌کند.

اگر شرط (i) برقرار باشد،

$$f(a+h, b+k)-f(a, b)=\frac{1}{2}(r_1h^2+2s_1hk+t_1k^2)$$

حالا روشن‌است که برای‌اتمام برهان چه باید بکنیم. ضرایب r_1، s_1، t_1 ازصورت درجهٔ دوم برحسب h و k، با $(h, k)\to(0, 0)$، به r، s، t میل می‌کنند و لازم است نشان دهیم که به‌ازای همهٔ مقادیر به قدرکافی کوچك (h, k)، دو صورت درجهٔ دوم

$$r_1h^2+2s_1hk+t_1k^2,$$
$$rh^2+2shk+tk^2,$$

دارای علامات ثابت بوده و یا هر دو می‌توانند هر علامتی را اختیار کنند.

می‌نویسیم

$$D=rt-s^2,\ D_1=r_1t_1-s_1^2$$

(بنابراین، D_1 وابسته به h و k است).

فرض‌کنیم $D>0$. دراین‌صورت، $r\neq 0$. فرض‌کنیم $r>0$. چون با به‌قدر کافی نزدیك‌شدن (h, k) به $(0, 0)$، مقادیر $|r-r_1|$، $|s-s_1|$، $|t-t_1|$ به قدر دلخواه کوچك هستند، δ را می‌توان طوری اختیار کرد که به‌ازای هر h و k در $h^2+k^2<\delta^2$،

$$D_1>0,\ r_1>0$$

بنا بر لم، به‌ازای هر h و k در $0<h^2+k^2<\delta^2$.

$$r_1h^2+2s_1hk+t_1k^2>0,$$

و لذا (a, b) یك مینیموم f است.

به طریق مشابه، اگر $D > 0$ و $r < 0$ آنگاه (a, b) یك ماکزیموم است.
اینك، حالت $D < 0$ را در نظر می‌گیریم.
بنا بر لم، (h_1, k_1)یی هست که به‌ازای آن

$$rh^2 + 2shk + tk^2$$

کوچکتر از صفر بوده و (h_2, k_2)یی هست که به‌ازای آن بزرگتر از صفر است.
می‌نویسیم

$$F(t) = f(a+ht, b+kt) - f(a, b)$$

در این صورت،

$$F(0) = F'(0) = 0$$

$$F''(0) = rh^2 + 2shk + tk^2$$

به‌ازای $h = h_1$ و $k = k_1$، تابع $F(t)$ در $t = 0$ دارای یك ماکزیموم است (با توجه به قضیهٔ ۲.۷.۴). بنابراین در هر همسایگی (a,b)، نقطه‌ای مانند (x, y) هست که به‌ازای آن $f(x, y) < f(a, b)$.
به طریق مشابه از $h = h_2$ ، $k = k_2$، نقطه‌ای به دست می‌آوریم که در آن نقطه $f(x, y) > f(a, b)$. |

۹.۸. توابع ضمنی

مسئله را می‌توان با مثال خاصی شروع کرد. فرض کنیم

$$x^2 + y^2 = 1$$

به چه مفهومی (درصورت وجود) این رابطه، y را به عنوان تابعی از x تعریف می‌کند؟ اگر مقداری از x بین ۱ و ۱ — انتخاب شود، دو مقدار برای y هست که در معادله صدق می‌کنند. ما در صفحهٔ ۶۰ قرار گذاشتیم که توابع ما یك متغیری باشند. فرض کنیم از یك نقطه مثل $(0, +1)$ شروع کنیم و x مقادیری اختیار کند که به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. در این صورت، به سادگی می‌توانیم مقادیر متناظر y را طوری بیابیم که y به طور پیوسته تغییر نموده و (x, y) در معادله صدق کند. به زبان نموداری، باید نقطهٔ (x, y) را در قسمت بالایی دایره نگهداشته و نگذاریم که به قسمت پایین دایره بپرد.

بعلاوه، با دانستن اینکه

$$y=+\sqrt{1-x^{2}}$$

y دارای مشتقی خواهد بود که چنین است

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^{2}}}$$

اغلب نامناسب یا غیرممکن است که معادلهٔ $f(x, y)=0$ را به‌طور صریح برحسب y حل کنیم. مع‌هذا قضیهٔ آتیه شرایطی را به ما می‌دهد که تحت آن می‌توانیم بگوییم که معادله تابعی مانند $y=f(x)$ را تعریف می‌کند و، بعلاوه، تابع دیفرانسیلپذیر است.

قضیهٔ ۹.۸. فرض‌کنیم $F(x, y)$ در نقطهٔ (x, y) از مربعی به مرکز (a, b) در شرایط ذیل صدق کند:

(i) $F(x, y)$ دیفرانسیلپذیر است.

(ii) $F(a, b)=0$،

(iii) $F_{y}(x, y)>0$.

در این صورت، تابعی مانند $y=f(x)$، که در بازه‌ای به مرکز a تعریف می‌شود، موجود است که

(iv) $y=f(x)$ در همه جا در $F(x, y)=0$ صدق می‌کند،

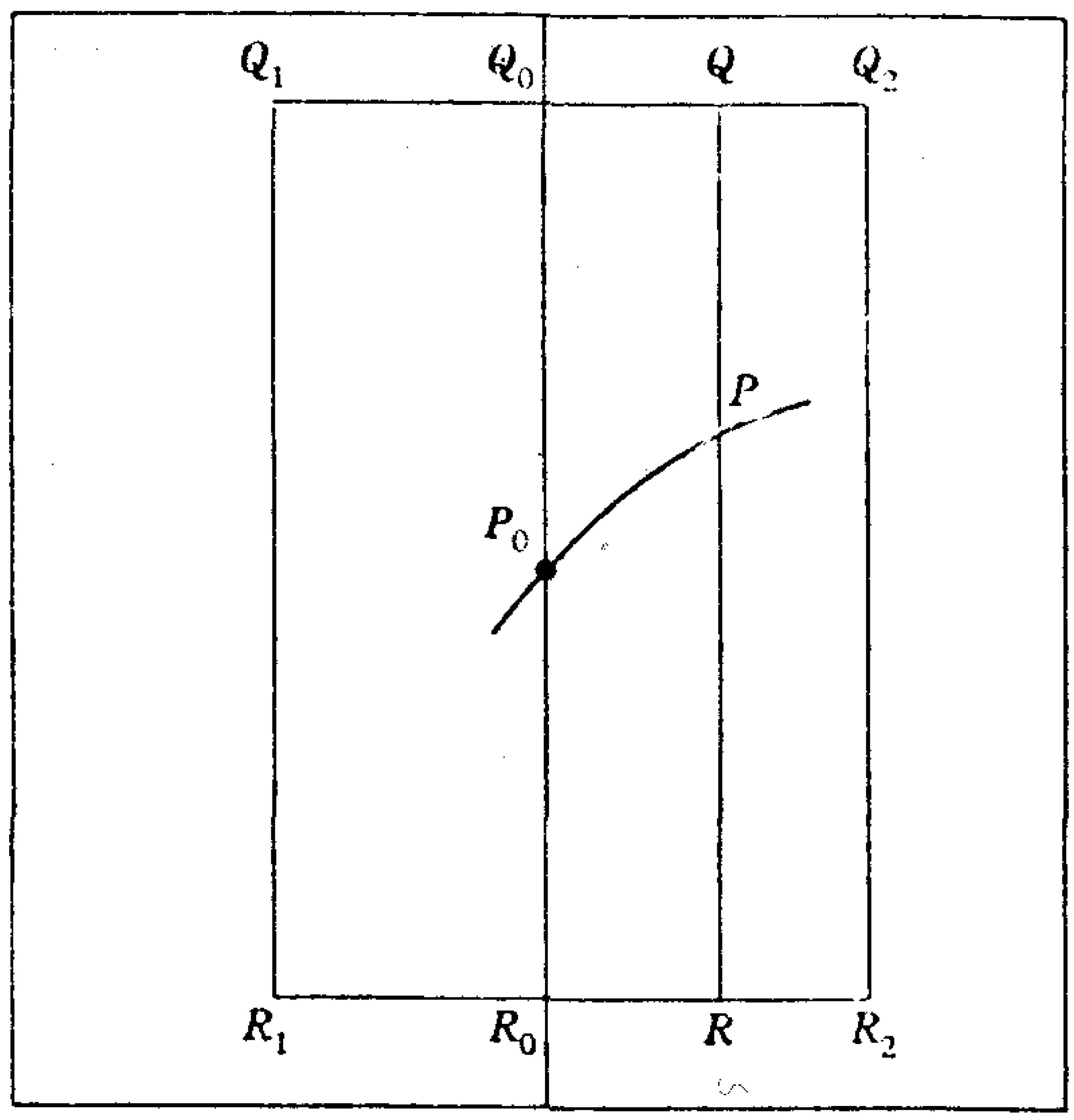
(v) dy/dx موجود است و با رابطهٔ زیر تعریف می‌شود

$$F_{x}+F_{y}\frac{dy}{dx}=0$$

برهان. در شکل ۵، P_{0} نقطهٔ (a, b) است و در مربع داده‌شده شرایط $(i)-(iii)$ برقرارند. بنا برشرط (iii) در Q_{0}، $F(x, y)>0$، و در R_{0}، $F(x, y)<0$.

از (i)، F پیوسته است و لذا می‌توان خطوط قائم $Q_{1}R_{1}$ و $Q_{2}R_{2}$ را طوری یافت که برای تمام نقاط $Q_{1}Q_{2}$، $F>0$ و برای تمام نقاط $R_{1}R_{2}$، $F<0$.

حال فرض کنیم QR هر خط عمود بین $Q_{1}R_{1}$ و $Q_{2}R_{2}$ باشد. بنا بر (iii)، F از یك مقدار منفی در R به یك مقدارمثبت در Q (اکیداً) صعود می‌کند. چون F پیوسته است، یك نقطه منحصر به فرد مانند P هست که در آن $F=0$. عرض P، $y=f(x)$ را تعریف می‌کند، و (iv) ثابت می‌شود.



شکل ۵

اینك (v) را ثابت می‌کنیم. اگر (x, y) و $(x+h, y+k)$، که $h\neq 0$، دونقطه‌ای باشند به طوری که در آنها $F=0$، با توجه به دیفرانسیلپذیر بودن F، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+h,\ y+k)-F(x,\ y) \\ &= hF_x(x,\ y)+kF_y(x,\ y)+\varepsilon(|h|+|k|) \end{aligned}$$

که در آن، با نزدیك کردن (h, k) به قدر کافی به $(0, 0)$، می‌توان ε را به اندازهٔ دلخواه کوچك نمود.

طرفین را بر h و بر $F_y(x, y)$ (که بنا برفرض (iii) مقدور است) تقسیم می‌کنیم و سپس h را به صفر میل می‌دهیم. نتیجه می‌شود که $\lim (k/h)$ موجود است و داریم

$$\frac{F_x}{F_y}+\frac{dy}{dx}=0 \quad \blacksquare$$

تمرین ۸ (د)

۱ ــ اگر A، B، C زوایای یك مثلث باشند، ثابت کنید

$$\cos A+2^{\frac{1}{2}}(\cos B+\cos C)\leqslant 2$$

۲ ـ ماکزیموم و مینیموم توابع ذیل را بررسی کنید.

$$\text{(i)} \qquad (x-y)^2(a^2-x^2-y^2),$$

$$\text{(ii)} \qquad (x-y^2)(x-2y^2)$$

۳ ـ اگر $f(x, y)\equiv x^3+2x^2y-xy^2-8y^3$، نشان دهید که فقط یك نقطه مانند (x_0, y_0) هست که شرایط لازم ماکزیموم یا مینیموم در آن برقرار است. با در نظر داشتن مقادیر f در خط $y=y_0$، ثابت کنید تابع نه ماکزیموم دارد و نه مینیموم.

۴ ـ فرض کنیم $u=x^2+y^2$ و $v=x^3+y^3$، ثابت کنید، در صورتی که x به عنوان تابعی از u و v فرض شود،

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{y}{2x(x-y)} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{3x(x-y)}$$

ثابت کنید که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}=-\frac{1}{6xy(x-y)}$$

۵ ـ اگر $f(x, y, z)=0$، که در آن f تابعی دیفرانسیلپذیر از x، y ، z است ، ثابت کنید ،

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z=-1$$

که درآن ، $(\partial z/\partial y)_x$ مشتق z نسبت به y را ، وقتی x ثابت است، نشان می‌دهد.

۶ ـ معادلات

$$f(x, y, z, w)=0, \quad g(x, y, z, w)=0$$

را که در آن f و g توابع دیفرانسیلپذیرند ، می‌توان برحسب z و w ، به عنوان تابعی از x و y حل کرد. ثابت کنید که

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial (f, g)}{\partial(x, w)}\Big/\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, w)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, w)}\Big/\frac{\partial(f, g)}{\partial(z, w)}$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ را به صورت توابعی از x، y، z ، w محاسبه کنید به شرط آنکه

$$xy+zw=0,$$

$$x^2+y^2-z^2-w^2=1$$

تذکراتی بر تمرینها

جوابها و راهنماییهایی برای حل تمریناتی داده شده‌اند که برای آنها بسیار مفید به نظر می‌رسند. اگر تمرینی متضمن نتیجهٔ مهم یا روش آموزنده‌ای باشد حل آن با جزئیات بیشتری داده خواهد شد.

۱ (الف)

۱ ــ عبارتهای سمت چپ و راست را به $l(n)$، $r(n)$ نشان دهید. فرض کنید برای nی، $r(n)=l(n)$. دراین‌صورت،

$$l(n+۱)=l(n)+(n+۱)^۲=r(n)+(n+۱)^۲$$

$$=\frac{۱}{۶}(n+۱)(n+۲)(۲n+۳)=r(n+۱)$$

اما، $r(۱)=۱=l(۱)$. بنابراین، به‌ازای هر n، $l(n)=r(n)$.

۲ ــ طرف راست را می‌توان با استفاده از تمرین ۱ یافت، زیرا،

$$\text{طرف چپ}=\sum_{۱}^{۲n} r^۲-۴\sum_{۱}^{n} r^۲$$

۳ ــ باقراردادن ۳ ,۲ ,۱ $=n$، اعداد A ، B ، C را پیدا کنید.

۵ ــ $l(n+۱)>r(n+۱)$ از $l(n)>r(n)$ نتیجه می‌شود به شرطی که $\{(n+۱)/n\}^۳>۲$ یعنی $n>۳$. اگر $n=۹$، $l(n)>r(n)$ نادرست است، و اگر $n=۱۰$، درست است.

۷ ــ کافی است که $m=pd-qc$، و $n=qa-pb$.

۱ (ب)

۳ ـ فرض کنید که a/b یك ریشه باشد، که در آن a و b اعداد صحیح بدون عامل مشترك هستند، و $b>0$. به‌جای x عدد a/b را قراردهید و در b^{n-1} ضرب کنید. $b=1$ از آن حاصل می‌شود.

۴ ـ ± 2، -3، 4؛ -1، $\frac{3}{2}$، $\frac{3}{2}$.

۱ (ج)

۱ ـ $99/70$، $239/169$.

۳ ـ از $(a-c+\sqrt{b})^2=d$ نتیجه می‌شود که $a=c$ یا $\sqrt{b}$ منطق است.

۶ ـ $ad=bc$.

۱ (د)

۳ ـ اگر A و B مجموعه هایی از اعداد مثبت باشند آنگاه $\sup D=\sup A \sup B$ و $\inf D=\inf A \inf B$. اگر A یا B شامل اعداد منفی باشند، چنین نتیجهٔ ساده‌ای برقرار نیست.

۵ ـ اگر همه aها مساوی نباشند، دومقدار a_r، a_s هست که به‌ازای آنها $a_r<A<a_s$. به‌جای a_r و a_s مقادیر b_r و b_s راقرارمی‌دهیم به‌طوری که $b_r=A$، $b_s=a_r+a_s-A$.
دراین‌صورت،

$$b_r\, b_s-a_r\, a_s=(A-a_r)(a_s-A)>0$$

بنابراین، این جایگزینی، واسطهٔ حسابی را یکسان نگهداشته، و واسطه هندسی را افزایش داده‌است. بعد از حداکثر $n-1$ بار تکراراین استدلال، همهٔ اعداد به A تبدیل می‌شوند. واسطهٔ هندسی که اکنون مساوی A است؛ با جایگزینیها، افزایش یافته و درآغاز کمتر از A بود.

۶ ـ اتحاد زیر را به‌کار ببرید

$$\left(\sum a_r\, b_r\right)^2=\sum a_r^2 \sum b_r^2-\sum (a_r\, b_s-a_s\, b_r)^2,$$

که درآن، r و s مقادیر ۱، ۲، . . . ، n را اختیار می‌کنند.

۷ ـ ثابت کنید که برای عدد طبیعی n،

$$\frac{a^{n+1}-1}{n+1}>\frac{a^n-1}{n}$$

با تقسیم بر عامل مثبت $a-1$ و، سپس، با ضرب (طرفین) آنها، نـامساوی ثابت می‌شود، مشروط بر آنکه نامساوی

$$na^n > a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1,$$

برقرار باشد که هست.

نتیجه می‌شود که اگر $m > n$،

$$\frac{a^m - 1}{m} > \frac{a^n - 1}{n}$$

برای تعمیم به‌اندیسهای منطق، فرض کنید، $r = m/p$ و $s = n/p$ (m, n, p اعداد صحیح مثبت‌اند). قراردهید $a^{1/p} = b$.

۸ ــ مانند ۷ عمل کنید.

۱ (ه)

۱ ــ از $a - c = i(d-b)$ نتیجه می‌شود کـه $(a-c)^2 = -(d-b)^2$. بـا تـوجه به خواص ترتیب در اعداد حقیقی، طرف چپ بزرگتر یا مساوی صفر است وطرف راست کوچکتر یا مساوی صفر است.

۳ ــ از $(a+bi)(c+di) = 0$ نتیجه می‌شود که $ac - bd = ad + bc = 0$. بنابراین،

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2 = 0$$

درنتیجه، $a^2+b^2=0$ یا $c^2+d^2=0$

۱ (و)

۲ ــ دایره، خط، دایره، هذلولی با کانونهای ± 1، قضیه ۱۰۵۰۱(۲) را نقض می‌کند.

۳ ــ (iii) با ترکیب مزدوج $z^3 + 2\bar{z}^3 = 3$، با معادلهٔ اصلی داریم $z^3 = \bar{z}^3$ و سپس $z^3 = 1$.

۴ ــ قراردهید $Z = z + p$.

۵ ــ اگر $|z| < \frac{1}{3}$ آنگاه $|a_1 z + \cdots + a^n z_n| \leqslant 2\left\{\frac{1}{3} + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} < 1$

۶ ــ دایره.

۸ ــ اگر ریشه‌ای با $|z|=1$ موجود باشد، آنگاه $\bar{z}=1/z$، و بنابراین، $cz^2+bz+a=0$. از مزدوج کردن نتیجه می‌شود که $\bar{c}z^2+\bar{b}z+\bar{a}=0$. با ترکیب آن با معادلهٔ اصلی به دست می‌آوریم

$$z(ab-b\bar{c})+a\bar{a}-c\bar{c}=0$$

برای عکس آن، بنویسید $w=(\bar{b}c-\bar{a}b)/(a\bar{a}-c\bar{c})$، به طوری که، $|w|=1$. $aw+b$ به $c\bar{w}$ ــ ساده می‌شود. ولی، $\bar{w}=1/w$.

۹ ــ ریشه‌های معادله درجه دوم $v+v^2+v^4$ بوده و مزدوج آن $v^6+v^5+v^3$ است. مجموع و حاصلضرب را تشکیل دهید.

۱۲ــ ابتدا برای $P(z)$ ثابت کنید.

۱۳ــ تمرین ۱۲ را به‌کار ببرید.

۲ (الف)

۱ ــ $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

۵ ــ $s_n=1/\{\sqrt{(n+1)}+\sqrt{n}\}\to 0$

۸ ــ اگر $s\neq s'$ آنگاه ε را مساوی $\frac{1}{2}|s-s'|$ اختیار کنید. Nی وجود دارد که به‌ازای کلیهٔ nهایی که $n>N$، $|s_n-s|<\varepsilon$ و $|s_n-s'|<\varepsilon$ که یك تناقض است.

۲ (ب)

۸ ــ ۱۰. همه نادرست‌اند. مثال نقضی برای ۹، دنبالهٔ $S_n=n^2+(-1)^n n$ است.

۲ (ج)

۲ ــ حد 0، a_0/b_0، $+\infty$، $-\infty$ است بسته به اینکه $p<q$، $p=q$، $p>q$ و a_0/b_0 مثبت باشد، $p>q$ و a_0/b_0 منفی باشد.

۲ (د)

۶ ــ بنا بر قضیهٔ دوجمله‌ای

$$s_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2}+\dots+\frac{1}{n^n}$$

ثابت خواهیم کرد که s_n صعودی و کراندار است. $(r+1)$مین جملهٔ بسط دوجمله‌ای یعنی،

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots r}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)$$

صعودی است وقتی که n صعودی باشد. بعلاوه، تعداد جملات آن برحسب n افزایش می‌یابد. بنابراین، s_n صعودی است.

از بسط فوق نتیجه می‌شود که

$$s_n<1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}<3$$

با توجه به قضیهٔ ۶.۲، s_n به حدی مانند e میل می‌کند، که در آن، $2<e\leqslant 3$.

۷ ـ اگر $n^{n+1}>(n+1)^n$ آنگاه $\sqrt[n+1]{(n+1)}<\sqrt[n]{n}$، یعنی، اگر $n>(1+n^{-1})^n$ و این درصورتی که $n\geqslant 3$ صحیح است (درتمرین قبل ثابت شد).

بنویسید $\sqrt[n]{n}=1+x$. دراین صورت، $n=(1+x)^n>1+\frac{1}{2}n(n-1)x^2$

و در نتیجه $x^2<2/n$. بنابراین، وقتی که $n\to\infty$، $x\to 0$.

۱۱ــ اگر $x=0$ یا m عدد صحیح مثبت باشد، $u_n=0$، در غیر این صورت

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to|x|\,.$$

۱۲ــ (i) ۳. (ii) ۱، ۰، ۱ — بسته به اینکه $b<$، $=$، $>a$،

(iii) $n\frac{n}{n^2+n}<s_n<n\frac{n}{n^2+1}$.

(iv) به‌ازای $n>N$، $n!>a^n$؛ $\sqrt[n]{n!}\to\infty$.

(v) روش ۵، ۲ (الف)، حدآن عبارت است از $-\frac{1}{2}(a+b)$.

(vi) ۱، ۲ (د) را به‌کار ببرید.

۲ (ﻫ)

با توجه به روشهای بخش ۸، حدود عبارت‌انداز:

۱ – ۴   ۲ – ۱   ۳ – ریشهٔ کوچکتر

۴ – ۲   ۵ – ۳، ولی اگر $s_1=\frac{5}{7}$ آنگاه s_4 تعریف شده نیست.

۶ – ۲

۷ – $l=\frac{1}{2}(1+\sqrt{21})$، $u_{n+1}^2-l^2=u_n-l$،

$$u_{n+1}-l=(u_n-l)/(u_{n+1}+l)<(u_n-l)/2l,\ 4l^2>20$$

۸ – ۱، ۲، ۳

۹ – $a_n>a_{n+1}>b_{n+1}>b_n$ و $a_{n+1}-b_{n+1}<\frac{1}{2}(a_n-b_n)$

همچنین، $a_{n+1}b_{n+1}=a_nb_n$.

۲ (و)

۱ – از $1/n^2<1/n(n-1)$ نتیجه می‌شود که

$$\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\frac{1}{N}$$

بنابراین، $N=10^4$.

برای $\sum(0.99)^n$، از $(0.99)^N<10^{-4}(1-0.99)$، $N>1376$ را نتیجه می‌گیریم.

دومین سری سریعتر از اولی همگراست.

۲ – اولی تصاعد هندسی است، که به‌ازای $r>0$ به مجموع $1+r$ همگراست، همچنین به‌ازای $r=0$، به مجموع ۰ همگراست. برای سومی، اگر

$$s_n=\sum_{m=0}^{n} mr^{m-1},$$

$$s_n(1-r)=\{(1-r^n)/(1-r)\}-nr^n$$

۳ – در حدود 5.4×10^{-11} از ۳ کمتر است.

۵ — $$\frac{۱}{n(n+۱)(n+۲)}=\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{n(n+۱)}-\frac{۱}{(n+۱)(n+۲)}\right\}$$

۲ (ز)

۱ — راهنمایی کلی. اگر A، B گزاره‌هایی باشند، علامت $A \Longrightarrow B$ بدین معنی است که «اگر A آنگاه B». همچنین، گوییم که (i) A مستلزم B است، یا (ii) A یك شرط کافی برای B است، یا (iii) B یك شرط لازم برای A است.

سهم دوسویی $A \Longleftrightarrow B$ بدین معنی است که A و B منطقاً هم‌ارز یکدیگرند، به عبارت‌دیگر: (i) اگر وفقط اگر A، آنگاه B؛ (ii) A یك شرط‌لازم وکافی‌برای B است.

دراین متن تقریباً همیشه به جای نمادهای $\Longrightarrow$، $\Longleftrightarrow$ ازکلمات استفاده خواهیم کرد.

در مثالهای خاص ۱، شرایط عبارت‌اند از (i) لازم و کافی، (ii) لازم و نه‌کافی، (iii) لازم اگر $P\neq ۰$، نه‌کافی.

۲ — (i) لازم، نه‌کافی، (ii) کافی، نه لازم، (iii) لازم وکافی.

۳ — (i) $u_n \to \frac{۱}{۲}$؛ (ii) تصاعد هندسی؛ (iii) s_n (n فرد، n زوج)؛ (iv) $۱/n! < ۱/۲^{n-۱}$.

۵ — رجوع کنید به ۲ (و) ۵.

۶ — برای $s_n < s_{n+۱}$ نگاه کنید به ۲(د)، ۶. برای اثبات

$$\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^n<\left(۱-\frac{۱}{n+۱}\right)^{n+۱},$$

$a_۱=a_۲=\dots=a_n=۱-۱/n$، $a_{n+۱}=۱$ اختیارکرده و از

واسطهٔ حسابی $(a_۱,\dots,a_{n+۱}) >$ واسطهٔ هندسی $(a_۱, a_۲, \dots, a_{n+۱})$.

$$t_n-s_n=\{۱-(۱-n^{-۲})^n\}/(۱-n^{-۱})^n$$

استفاده کنید. برای اثبات اینکه صورت به صفر میل می کند، $(۱-k)^n>۱-nk$ را به‌کار ببرید.

۷ — $s_n=(-۱)^n$، $(-۱)^{n+۱}$ یا $t_n=(-۱)^n$.

۸ — $(n^۳-۱)/۹(n-۱)n(n+۱)$ ۶.

۱۰ــ اگر $l \to$، r_n، l در $2A$ $= l / 1 + l$ صدق می‌کند. اگر ریشه‌های آن حقیقی باشند، $A \geqslant 1$. اگر c ریشهٔ بزرگتر باشد، $r_n - c = r_{n-1} - c / r_{n-1} c$، و نتیجه به‌استقراء ثابت می‌شود.

۱۱ــ دنباله‌ای که با افزایش n، آهسته‌تر نوسان می‌کند، مانند

$$s_n = 2 + \sin(\pi \sqrt{n})$$

اگر $\frac{1}{2} - \to s_{n+1}/s_n$ آنگاه $s_n \to 0$.

۱۲ــ قسمت آخر، $nu_n^2 < \left(n + \frac{1}{2}\right) u_n^2 < \left(1 + \frac{1}{2}\right) u_1^2$.

۱۳ــ (i) درست است. (ii) نادرست است؛ تنها می‌توان گفت که $t \geqslant s$. مثال برای اینکه $s = t$ عبارت است از $t_n = s_n = 1/n$. ــ (iii) نادرستی به‌وسیلهٔ $s_n = n^2$ (n زوج) و $s_n = (n-1)^2$ (n فرد) نشان داده می‌شود؛ دراین‌صورت، $s_n \to \infty$.

۱۴ــ بنویسید $t_n = (s_1 + s_2 + \ldots + s_n)/n$، با ε مفروض، به‌ازای $n > m$،

$$s - \varepsilon < s_n < s + \varepsilon$$

مجموع نامساویهای

$$(n-m)(s-\varepsilon) < nt_n - mt_m < (n-m)(s+\varepsilon)$$

را از $m+1$ تا n پیدا کنید. بر n تقسیم کرده نامساوی زیر را از نو مرتب کنید.

$$\left(1 - \frac{m}{n}\right)(s-\varepsilon) + \frac{m}{n} t_m < t_n < \left(1 - \frac{m}{n}\right)(s+\varepsilon) + \frac{m}{n} t_m$$

با ثابت نگهداشتن m، می‌توان n_0 را چنان انتخاب کرد که اولین عبارت بزرگتر از $s - 2\varepsilon$ و آخری کوچکتر از $s + 2\varepsilon$ باشد. بنابراین، به‌ازای $n > n_0$،

$$s - 2\varepsilon < t_n < s + 2\varepsilon$$

۱۵ــ مجموع n جمله عبارت است از

$$\frac{1 - x^n}{(1-x)^2} - \frac{nx^n}{1-x}$$

۳ (ب)

۴ ـ فرض می‌شود (با استفادهٔ پیشاپیش از فصل ۶) که تابع سینوس پیوسته است. اگر $x\neq ۰$، بنا بر قضیهٔ ۵.۳، $\sin ۱/x$ پیوسته است، و $f(x)$ حاصلضرب دو تابع پیوسته می‌باشد. پیوستگی در $x=۰$ از تعریف نتیجه می‌شود: اگر $|x|<\varepsilon$ آنگاه $|f(x)|<\varepsilon$.

۵ ـ اگر $k=۱$، تنها یك مقدار برای x وجود دارد.
اگر $k\neq ۱$، $f(x)=k$ نتیجه می‌دهد که

$$(۱-k)x^{۲}-(۶-۹k)x+۵-۱۸k=۰$$

اگر $(۶-۹k)^{۲}\geqslant ۴(۱-k)(۵-۱۸k)$، x حقیقی است؛ یعنی وقتی که $۹k^{۲}-۱۶k+۱۶\geqslant ۰$، که به‌ازای کلیهٔ k ها برقرار است.

۸ ـ (i) $(x-۱)$ یك عامل مشترك است.

۹ ـ (i) صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{۱+x}+\sqrt{۱-x}$ ضرب کنید.

(iii) حالت $p<q$. اگر $q-p$ زوج باشد، بسته به اینکه $a_۰/b_۰>۰$ یا $a_۰/b_۰<۰$، حد $+\infty$ یا $-\infty$ است. اگر $q-p$ فرد باشد، $x\to+۰$ و $x\to-۰$ را جداگانه بررسی کنید.

۱۰ ـ (i) می‌خواهیم

$$\left(p+\frac{q}{x}+\frac{r}{x^{۲}}\right)\left(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^{۲}}\right)$$

به‌ازای x های بزرگ، تا حد ممکن به $۱/x$ نزدیك شود. ضرایب $۱/x^{k}$ را به‌ازای $k=۰,\ ۱,\ ۲$ مساوی قراردهید. $p=۰$، $q=۱$، $r=-۱$.

(ii) مانند (i)، با مربع کردن $\sqrt{\ }$ را از بین می‌بریم. یا با استفادهٔ پیشاپیش از بخش ۸.۵، آنرا بسط دهید، $\{۱+(۴/x^{۲})\}^{-\frac{۱}{۲}}$.

۳ (ج)

۱ ـ (i) پیوسته، درصورتی که x اصم باشد.

(ii) به‌ازای $x=n\pi(n\neq ۰)$، ناپیوسته است.

(iii) به‌ازای $۱/(x-a)=n\pi$، ناپیوسته است.

۲ ـ به‌ازای $0<x<1$، $f(x)=1-x$، $f(0)=0$، $f(1)=1$ یا $g(x)=x$ (x منطق)، $g(x)=1-x$ (x اصم).

۴ ـ $g(x)$ در تمرین ۲ تنها به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است.

۵ ـ 10^{-3}. ۶ ـ (i) $f(0)=0$، (iii) $f(0)=a$.

۷ ـ
$$f(x+\delta)-f(x)\leqslant\frac{1}{2}\{f(x+2\delta)-f(x)\}\cdots$$
$$\leqslant\frac{1}{2^n}\{f(x+2^n\delta)-f(x)\}$$

که در آن، $a<x<b$، $a<x+2^n\delta<b$. فرض کنید $\delta\to 0$ و $\infty\to n$.

۸ ـ
$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant\alpha^{n-1}|x_1-x_0|$$

$\sum_1^\infty(x_n-x_{n-1})$ (مطلقاً) همگراست، یعنی، $x_n\to\xi$.
$$|\xi-f(0)|=|f(\xi)-f(0)|\leqslant\alpha|\xi|$$
نتیجه می‌دهد که، $-\alpha\xi\leqslant\xi-f(0)\leqslant\alpha\xi$، و غیره.

۴ (الف)

۱ ـ (i) $y=4(x-2)$، $y=-4(x+2)$. (ii) $y=-4$.

۲ ـ $y-2=-\frac{1}{2}x$، $y-2=\frac{1}{2}(x+4)$.

۳ ـ $y=3x$. ۵ ـ $y=|x-1|+|x+1|$.

۶ ـ (i) برای (a) و (b)، x عددصحیح. (ii) $x=1\,(b)$.

۷ ـ (i) مماس در $(0,\,0)$، $\arctan 18$ در $\left(\frac{9}{8},\,\frac{3}{2}\right)$.

(ii) $\frac{1}{2}\pi$ درهردو نقطه.

۴ (ب)

۹ ــ بنویسید $p(x)=(x-a)^m(x-b)^n q(x)$، که درآن a و b ریشه‌های متوالی $p(x)=0$ اند. ثابت کنید که، اگر $p'(x)=(x-a)^{m-1}(x-b)^{n-1}r(x)$ آنگاه $r(a)$، $r(b)$ مختلف‌العلامت هستند.

۱۰ ــ بنابر قواعد بخش ۲، اگر $x\neq 0$ آنگاه $f'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$. اگر $x=0$ آنگاه $\{f(h)-f(0)\}/h=h\sin 1/h\to 0$، و از آن نتیجه می‌شود که $f'(0)=0$.

مثالهایی از این قبیل مکرراً برای جواب به بعضی از سؤالهای نسبتاً مشکل در مشتقگیری، به‌کار می‌روند. مثال بالا پاسخ مثبت به این سؤال می‌دهد (به زبان هندسی) که آیا یك منحنی می‌تواند در هر نقطه دارای مماسی باشد درحالی‌که جهت مماس به‌طور پیوسته تغییر نکند؟

۱۲ ــ با استفاده از مسئله ۱۱، چهار بار مشتق بگیرید، و دترمینانهای صفر را درنظر نگیرید.

۴ (ج)

۱، ۲، ۵. به کسرهای جزء تبدیل کنید.

۴ ــ $\sin 3x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 8x)$، و از ۳ استفاده کنید.

۶ ــ تنها راه حل این مسئله، با روش اصولی، به‌کاربردن کسرهای جزء مختلط زیراست،

$$\frac{a}{a^2+x^2}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-ia}-\frac{1}{x+ia}\right)$$

nمین مشتق عبارت‌است از

$$\frac{(-1)^n n!}{2i}\left\{\frac{1}{(x-ia)^{n+1}}-\frac{1}{(x+ia)^{n+1}}\right\}$$

اگر $r=\sqrt{x^2+a^2}$، $\cos\theta=x/r$، $\sin\theta=a/r$، آنگاه از قضیهٔ دموآور (۱ (ه)، ۵) نتیجه می‌شود که

$$(x+ia)^{n+1}=r^{n+1}\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\},$$

و غیره. سرانجام، نتیجه، به‌شکل حقیقی زیراست

$$(-1)^n n!\, r^{-(n+1)}\sin(n+1)\theta,$$

که در آن، r، θ، دارای مقادیر اختصاص داده شده‌اند.

۴ (د)

۲ ــ روش ۴ (ب)، ۹.

۵ ــ حداکثر یك ریشهٔ حقیقی $p(x)=0$ بین دو ریشهٔ متوالی $p'(x)=0$ قراردارد.
دراین‌مثال، اگر n فرد باشد، به‌ازای هرx، $p'(x)=-(1+x^n)/(1+x)<0$.
باافزایشxازمقادیر بزرگ منفی‌تامقادیربزرگ مثبت، $p(x)$ کاهش می‌یابد. به‌ازای xی، $p(x)=0$.
اگر n زوج باشد، اگر $x<1$، $p'(x)>0$ و اگر $x>1$، $0<p(1)$.

۶ ــ اولین قسمت ۵ را به‌کار ببرید.

۴ (ه)

۲ ــ حد $\frac{1}{2}$ است.

۳ ــ می‌توانیم $l=0$ اختیارکنیم (وحالت خاص را برای $f(x)-lx$ به‌کاربریم).
با ε مفروض، X را طوری اختیارکنیدکه به‌ازای $x>X$، $|f'(x)|<\varepsilon$.

$$f(x)-f(X)=(x-X)f'(c)$$

به x تقسیم‌کنید. X_1 را طوری اختیارکنیدکه $|f(X)|<\varepsilon X_1$. دراین‌صورت،

$$\text{اگر } x>X_1\text{، } -2\varepsilon<f(x)/x<2\varepsilon$$

۴ ــ تابع ناپیوسته $f'(x)$ در ۴ (ب)، ۱۰ نشان می‌دهد که یکی از مراحل استدلال نادرست است.

۴ (و)

۱ ــ $x=\frac{1}{2}+h$ قراردهید، یا مطالب بخش ۹.۴ را به‌کار ببرید. (i) $m/n\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}$؛

(ii) $\frac{1}{2}\pi^2$

۲ ــ $a+b$

۳ − $$y-\frac{3at^2}{1+t^3}=\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}\left(x-\frac{3at}{1+t^3}\right)$$

اگر این مماس منحنی را درنقطه‌ای با پارامتر u تلاقی کند، حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ سوم برحسب u برابر ۱ − است، وبنابراین، u برابر t، t یا $-1/t^2$ است. هنگامی که $t \to -1$، مماس به مجانب $x+y+a=0$ میل می‌کند.

۵ − (i) ماکزیموم در x است به طوری که $x^2-2x-1=0$، مینیموم در $x=1$.
(ii) نه ماکزیموم دارد و نه مینیموم.

۶ − $3\sqrt{3}$ بزرگترین مقدار تابع به‌ازای $x=\frac{1}{3}\pi$ است، وکوچکترین مقدار ۰ است.

۸ − dy/dx نباید تغییر علامت دهد، $b^2\leqslant 3ac$.

۹ − $y=k$ برمنحنی $y=p(x)/q(x)$ مماس است.

۱۰ − نیمکره.

۱۱ − درنقطه‌ای که خط‌المرکزین را به نسبت $a^{3/2}$ و $b^{3/2}$ تقسیم می‌کند.

۱۲ − هنگامی که P، Q، R اوساط BC، CA، AB باشند، حجم، بزرگترین مقدار را دارد.

۱۳ − $0<k<1$

۱۶، ۱۷ − استقراء ۱۸ − $n=0$ و لایبنیتز.

۱۹ − $f'(x_1)>0$ و $a<x_1<c$، $\exists x_1$

۲۰ − ۲۲ − از بخش ۹.۴ استفاده کنید. ۲۱ − (i) $-\frac{1}{3}$؛ (ii) $\frac{1}{2}$

۲۱ − $\frac{1}{2}n(n+1)$

۲۱ − فرض کنید $f'(a)=\alpha$، $f'(b)=\beta$ و فرض کنید $\alpha<\gamma<\beta$. بنویسید

$$g(x)=f(x)-\gamma(x-a)$$

به‌ازای c ای بین a و b، تابع g دارای یك مینیموم است، و $g'(c)=0$.

۵ (الف)

− همگرا، همگرا، همگرا به‌ازای $x\leqslant 1$، همگرا به‌ازای $x<4$، همگرا به‌ازای $x<\frac{3}{2}$،

− $b^n/a^n\to\infty$، $a^{n+1}/b^n\to 0$

− اگر $u_n=n^{-k}$ آنگاه $\sqrt[n]{u_n}\to 1$ و $u_{n+1}/u_n\to 1$.

۸ – (i) درست‌است؛ (ii) نادرست است؛ (iii) نادرست‌است (رجوع کنید به ۳).

۵ (ب)

۲ – $k>1$، $k>0$.

۳ – (i) هیچکدام؛ (ii) -1

۴ – (i) $|u_n| \to \frac{1}{4}$، بنابراین واگراست (ii) مطلقاً همگراست؛ (iii) با توجه به قضیهٔ ۲۲.۵ همگراست.

۵ – $a=b$، همگراست. $a\neq b$، واگراست

۶ – مجموعهای ۵ و ۶ جملهٔ آن $\frac{37}{60}$ و $\frac{47}{60}$ اند.

۷ – درقضیه ۲۲.۵ این فرض که a_n نزولی است، حذف شده‌است. برای اثبات این‌که گزاره نادرست است، دنبالهٔ زیر را درنظر بگیرید.

$$a_n=\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+(-1)^n/n$$

(ii) $|u_n|\leqslant A|v_n|$. بنابراین، $\sum|u_n|$ همگراست.

۵ (ج)

۱ – نگاه کنید به **۲** (و)، ۲.

۲ – $|z|<|1-z|$

۳ – (i) قضیهٔ ۲۲.۵ را برای جزء حقیقی وموهومی به‌کاربرید.

(ii) $|u_n|=2^{\frac{1}{2}n}n^{-2}\to\infty$. (iii) بسته به‌اینکه n زوج یا فرد باشد، u_n مساوی $1/n$ یا i/n است.

۵ (د)

۱ – (i) ۱، (ii) همهٔ zها، (iii) ۱، (iv) ۰، (v) ۲، (vi) ۱، (vii) ۱، (viii) $\frac{1}{4}$

۲ – $a<1$، به‌ازای همهٔ zها همگراست.

۵ – $R\geqslant 1$، $R=1$

۶ ــ قضیهٔ ۱۰.۱ (مجموع) را به‌کار ببرید.

۷ ــ اگر $s > r$، شعاع همگرایی s است. اگر $s = r$، هر عدد نابیشتر از r (مثالهایی ارائه دهید).

۸ ــ

$$(1-z)\sum_{1}^{m}\frac{z^n}{n}=z-\sum_{1}^{m-1}\frac{z^{n+1}}{n(n+1)}-\frac{z^{m+1}}{m}$$

به‌ازای $|z|=1$، این عبارت به حد متناهی میل می‌کند.

۹ ــ $R=\frac{3}{2}$. اگر $|z|=\frac{3}{2}$ آنگاه هنگ nمین جملهٔ آن بزرگتر از ۱ است، و بنابراین سری بر دایره واگراست.

۵ (ه)

۱ ــ (i) همگرا؛ (ii) اگر $a < \max(b, c)$، همگراست؛ (iii) اگر $k > \frac{1}{2}$، همگراست؛ (iv) اگر $k > 0$، همگراست؛ (v) واگرا؛ (vi) همگرا.

۲ ــ $\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{2}{a^2-1}$

۳ ــ وقتی‌که $m\to\infty$، $u_r \to 0$ $\sum_{m+1}^{\infty} u_r <$ $\sum_{m+1}^{n} u_r <$ $(n-m)u_n$. $m=\frac{1}{2}n$ قرار دهید (در صورتی‌که n زوج باشد) یا $\frac{1}{2}(n+1)$ (درصورتی‌که n فرد باشد).

۴ ــ تعداد جملات باقیمانده با m رقم درمخرج، برابر $8 \times 9^{m-1}$ است و مجموع آنها کوچکتر از عبارت ذیل است

$$8\left(\frac{1}{1}+\frac{9}{10}+\frac{9^2}{10^2}+\dots+\frac{9^{m-1}}{10^{m-1}}+\dots\right)=80$$

۵ ــ قضیهٔ ۷.۵.

۶ (الف)

۱ ــ اگر $e=l/m$ آنگاه

$$m!\left(\frac{l}{m}-\sum_{0}^{m}\frac{1}{n!}\right)=m!\sum_{m+1}^{\infty}\frac{1}{n!}<\frac{1}{m},$$

و بنابراین، یك عدد صحیح از $\frac{1}{m}$ کوچکتر است، و این یك تناقض است.

۲ ــ مشمول تمرین ۳ است.

۳ ــ استدلال، ۲ (ج)، ۶ نشان می‌دهد که، اگر $x>0$ آنگاه

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}<\exp x<\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

(نامساویها برای $x<0$، با قراردادن $y=-x$ نتیجه می‌شوند.)
اینك، ثابت می‌کنیم که

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}-\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\to 0$$

$$\text{طرف چپ}=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n}\left\{\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^{-n}-1\right\}$$

$$<\exp x\left\{\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^{-1}-1\right\}=\frac{x^2\exp x}{n-x^2}$$

(با استفاده از نامساوی سادهٔ زیر

هنگامی که $0<b<1$ ، $(\{1-(b/n)\}^{-n}<(1-b)^{-1}$

۴ ــ به‌ازای $x>0$، $f'_n(x)<0$، و در نتیجه f_n از $k-1$ به $-k$ کاهش می‌یابد.

$f_{n+1}(x)=f_n(x)\frac{x^{n+1}e^{-x}}{(n+1)!}$ نتیجه می‌دهد که $f(x_n)>0$

۵ ــ ۰.۹۱۲۰.　　　　۶ ــ به ترتیب داده شده،کاهش می‌یابند.

۷ ــ $\exp\sqrt{x}$

۶ (ب)

۱ ــ وقتی که $h\to 0$،

$$\frac{x^h-1}{h}=\frac{\exp(h\log x)-1}{h}\to\log x$$

۲ ــ مشتقات در رابطهٔ ذیل صدق می‌کنند

$$1-x<(1+x)^{-1}<1-x+x^2$$

۳ – $yf'(xy)=f'(x)$ و $xf'(xy)=f'(y)$.

۴ – اگر $x=y-۱/(y+۱)$،

$$\text{طرف چپ}=\log(۱+x)-\log(۱-x)$$

۵ – (i) a، ۰؛ (ii) $\log(a/b)/\log(c/d)$. برای $x\to\infty$، حالتهای مختلفی وجود دارد، برای مثال، اگر $\max(a, b, c, d)$ مساوی a باشد، حد ∞ است.

۶ (ج)

۱ – چهار جملهٔ سری $\cos x$ را وقتی که $x=\frac{۳}{۲}$، و سه جملهٔ آن را وقتی کـه $x=\frac{۵}{۸}$، اختیار کنید.

۲ – از قضیهٔ ۱.۸.۶، بهازای $۰<x\leqslant\frac{۱}{۲}\pi$، $\sin x>۰$ و از ۲.۸.۶ (۱) بـهازای $\frac{۱}{۲}\pi<x<\pi$، $\sin x>۰$. از ۲.۸.۶ (۲) بهازای $\pi<x<۲\pi$، $\sin x<۰$. بنابراین، اگر $c<۲\pi$، بهازای همهٔ xها معادلهٔ $\sin(x+c)=\sin x$ نمیتواند برقرار باشد.

۴ – $(\log\cos\alpha y)/y^۲\to-\frac{۱}{۲}\alpha^۲$ (مثال بخش ۹.۴). $y=\frac{۱}{n}$ قرار دهید.

۶ (د)

۱ – $\cosh(\alpha+n\beta)\sinh(n+۱)\beta\operatorname{cosech}\beta$.

۲ – روش بخش ۸.۲.

۳ – اجزای حقیقی وموهومی سری هندسی $\sum r^n\exp(in\theta)$.

۴ – اگر $\theta>۰$، برای $|r|<e^{-\theta}$ فرمول مشابهی برقرار است.

۵ – استقراء.

۶ – (i) $\cos ۳x$ را بهکار ببرید. (ii) $x+\frac{۱}{۳}x^۳+\frac{۲}{۱۵}x^۵$.

(iii) $(۱-x^۲)y''-xy'=۲$. فرمول لایبنیتز نتیجه میدهد که

$$(۱-x^۲)y^{(n+۲)}-(۲n+۱)xy^{(n+۱)}-n^۲y^{(n)}=۰$$

با قراردادن $x=0$، ضرایب ماکلورن را به‌دست می‌آوریم.

(iv) روش (iii). جملهٔ عمومی عبارت است از

$$(-1)^n m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\dots\{m^2-(2n-1)^2\}x^{2n+1}/(2n+1)!$$

(v) $\exp(1+2i)x=\sum(1+2i)^n x^n/n!$

θ را با توجه به اینکه $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$، $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ تعریف کنید.

جزء حقیقی عبارت است از $\sum 5^{\frac{1}{2}n}\cos n\theta(x^n/n!)$.

(vi) $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3$

۷ (الف)

۲ ــ ξ_r را نقطهٔ انتهایی طرف چپ δ_r اختیار کنید.

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\delta_r &= \sum_{r=1}^{n}(aq^{r-1})^k(aq^r-aq^{r-1})\\ &= a^{k+1}(q-1)\sum q^{(r-1)(k+1)}\\ &= a^{k+1}(q-1)\{q^{n(k+1)}-1\}/(q^{k+1}-1)\\ &= (b^{k+1}-a^{k+1})(q-1)/(q^{k+1}-1)\end{aligned}$$

وقتی که $n\to\infty$، $q\to 1$، $(q^{k+1}-1)/(q-1)\to k+1$.

۵ ــ با ε مفروض، با توجه به تعریف J، افرازی مانند $\mathcal{D}_0$ وجود دارد به طوری که

$$J\leqslant S(\mathcal{D}_0)<J+\varepsilon$$

فرض کنید که $\mathcal{D}_0$ دارای p نقطهٔ تقسیم در داخل (a,b) و $\mathcal{D}$ یك افراز دلخواه، با نرم δ^*، و $\mathcal{D}_1$ افرازی شامل همهٔ نقاط تقسیم $\mathcal{D}_0$ و $\mathcal{D}$ باشد.
دراین‌صورت (قضیهٔ ۱.۲.۷)، $S(\mathcal{D}_1)\leqslant S(\mathcal{D}_0)$. همچنین، چون $\mathcal{D}_1$ از $\mathcal{D}$ با p نقطهٔ تقسیم اضافی ساخته شده‌است،

$$S(\mathcal{D})-S(\mathcal{D}_1)\leqslant p(M-m)\delta^*$$

بنابراین

$$S(\mathcal{D})\leqslant J+\varepsilon+p(M-m)\delta^*$$

اگر $\delta^*<\varepsilon/(M-m)p$، آنگاه $J\leqslant S(\mathscr{D})<J+۲\varepsilon$.

۷ (ب)

بیشتر تمرینهای این بخش و بخش آینده مستقیماً به روشهای بخشهای ۷.۷ و ۸.۷ بستگی دارند.

۳ ـ در $\left(\circ,\frac{۱}{۲}\pi\right)$،

$$\sin^{۲m-۱}x\geqslant\sin^{۲m}x\geqslant\sin^{۲m+۱}x,$$

نتیجه می‌دهد، (درحقیقت، $>$) $I_{۲m-۱}\geqslant I_{۲m}\geqslant I_{۲m+۱}$

بر $I_{۲m+۱}$ تقسیم کنید و $(۲m+۱)\ I_{۲m+۱}=۲m\ I_{۲m-۱}$ را به‌کار ببرید.

۷ (ج)

۶ ـ $\quad ۲\arc\tan\{(۱+r)\tan\frac{۱}{۲}\delta/(۱-r)\}+\delta \quad (r<۱),$

$$-۲\arc\tan\{(r+۱)\tan\frac{۱}{۲}\delta/(r-۱)\}+\delta \quad (r>۱)$$

حدود آن $\pi+\delta$ $(r<۱)$، $-\pi+\delta$ $(r>۱)$. وقتی که $r=۱$، $I=\delta$.

۷ (د)

۲ ـ مجموع اول بین

$$\int_{n+۱}^{۲n}\frac{dx}{x} \quad و \quad \int_{n}^{۲n}\frac{dx}{x}$$

قرار دارد و در نتیجه به $\log ۲$ میل می‌کند. مجموع دومی، بنا بر قضیهٔ ۲.۲.۵، به $\circ$ میل می‌کند.

۳ـ۶ و ۸ از قضیهٔ ۱.۱.۷ نتیجه می‌شوند.

۷ ـ استفاده از ایدهٔ قضیهٔ ۱.۱.۷ و به‌کاربردن آن درمورد یك f صعودی.

۹ ـ (i) بنابر بخش ۶.۶، اگر $\delta>\circ$، $(\log n)^q/n^\delta\to\circ$. اگر $p<۱$، در این صورت، مثلاً، $\delta=\frac{۱}{۲}(۱-p)$ اختیار کنید. $\sum\left(\frac{۱}{n^{p+\delta}}\right)$ واگراست. بنابراین،

$$\sum\frac{n^\delta}{n^{p+\delta}(\log n)^q}$$

نیز واگراست. به همین نحو، وقتی $p>۱$، همگراست. اگر $p=۱$، تمرین ۶ را داریم.

(ii) اگر $n>n_۰$، $\log n<(\log\log n)^q$. به‌ازای همهٔ q ها، واگراست.

۷ (ه)

۶ – (a) چون $y''<۰$، منحنی $y=\log x$ نسبت به Ox مقعر است.

(i) نامساوی اول بیان می‌کند که مساحت زیر منحنی $y=\log x$ بین $x=r-\frac{۱}{۲}$، $x=r+\frac{۱}{۲}$ از مساحت ذوزنقه، که به وسیلهٔ $y=۰$، $x=r-\frac{۱}{۲}$، $x=r+\frac{۱}{۲}$ و مماس در $x=r$ تشکیل می‌شود، کوچکتر است.

۷ (و)

۱ – (i) $\sqrt{۲}$، از قضیهٔ ۲.۶.۷. (ii) ۱

۲ – $$g(x)=(x-۱)\int_۰^x \xi f(\xi)d\xi+x\int_x^۱(\xi-۱)f(\xi)d\xi$$

با به‌کاربردن قضیهٔ ۲.۶.۷

$$g'(x)=\int_۰^x \xi f(\xi)d\xi+\int_x^۱(\xi-۱)f(\xi)\,d\xi$$
$$g(۰)=g(۱)=۰$$

۵ – (i) $$\int_۰^۱\frac{dx}{۱+x^۲}$$

(ii) $$\log f(n)=\frac{۱}{n}\left\{\log\left(۱+\frac{۱}{n}\right)+\cdots+\log\left(۱+\frac{n}{n}\right)\right\}\to\int_۰^۱\log(۱+x)dx.$$

۶ – روش ۵.

۷ – انتگرالگیری جزء به جزء. استقراء. برای قسمت آخر، وقتی که $n\to\infty$،

$$I_n\left(\frac{۱}{۲}\pi\right)<\int_{-۱}^{۱}(۱-x^۲)^n dx<۲,\quad b^{۲n+۱}/n!\to ۰$$

عدد صحیحی به‌دست می‌دهد که مساوی یك کسر است.

۸ (الف)

۱ – ناپیوسته، ناپیوسته، پیوسته.

۸ (ب)

۱ ـ (i) دیفرانسیلپذیر، (ii) اگر $k>\frac{۱}{۲}$.

۲ ـ پیوسته است، موجود است، دیفرانسیلپذیر نیست.

۳ ـ (مراجعه کنید به، ۳ (ج) ۰.۴) اگر

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & \text{اگر } x \text{ اصم باشد،} \\ x^{۲} & \text{اگر } x \text{ منطق باشد،} \end{cases}$$

$f'(x)$ در $x=۰$ مساوی صفر است و به‌ازای همهٔ مقادیر دیگر x تابع f ناپیوسته است. برای ساختن تابع مشابهی مانند $g(x, y)$ از دو متغیر، g را چنین تعریف کنید: اگر $x^{۲}+y^{۲}=r^{۲}$ آنگاه $g(x, y)=f(r)$ (سطح دوار).

۸ (ج)

۱ ـ (i)

$$\phi_u u_x+\phi_v v_x=۰,$$
$$\phi_u u_y+\phi_v v_y=۰$$

جوابهایی به‌غیر از $(۰, ۰)$ برای ϕ_u، ϕ_v دارد.

(ii) ضرب دترمینانها.

۲ ـ $u=f(x)+f(y)$, $v=(x+y)/(۱-xy)$

۳ ـ

$$\Delta=\frac{۱}{۲} a^{۲} \sin B \sin C/\sin A$$

$$\frac{\delta\Delta}{\Delta}=\frac{۲\delta a}{a}+\cot B\, \delta B+ \cot C\, \delta C-\cot A\, \delta A$$

و

$$\delta A+\delta B+\delta C=۰$$

۴ ـ روش ۳. $\delta\Delta$ بزرگترین است وقتی که،

$$\delta a>۰, \delta b>۰, \delta c>۰ \quad (\text{زاویه حاده})$$

یا

$$\delta a<۰, \delta b>۰, \delta c>۰ \quad (\text{منفرجه در } A).$$

۵ ـ $y=f(u)+g(v)$، که درآن، f, g توابع دلخواه (دیفرانسیلپذیر) هستند.

۶ ــ (همچنین ۷، ۹) تبدیلی مانند بخش ۶.۸ است.

$$u^{2}=x+\sqrt{x^{2}+y^{2}},\ g=Au+B$$

۸ ــ مانند بخش ۶.۸.

۸ (د)

۱ ــ به جای $\cos A$، $-\cos(B+C)$ قرار دهید. شرط لازم برای مقدار برگشتی آن است که $B=C$. ماکزیموم $-\cos 2B+2^{\frac{3}{2}}\cos B$ با قراردادن $B=\frac{1}{4}\pi$ نتیجه می‌شود.

۲ ــ (i) ماکزیموم در $\left(\mp\frac{1}{2}a,\ \pm\frac{1}{2}a\right)$.

(ii) درنقطهٔ $(0,0)$، $f_x=f_y=0$. این، ماکزیموم یا مینیموم نیست، زیرا، در مجاورت $(0,0)$، بین سهمیهای $y^{2}=x$، $x=2y^{2}$ تابع f منفی است، و در جاهای دیگر مثبت است.

۳ ــ $(0,0)$

۵ ــ روش ۶.

۶ ــ δx، δy، δz، δw (به تقریب) در رابطهٔ زیرصدق می‌کنند.

$$f_x\delta x+f_y\,\delta_y+f_z\delta z+f_w\,\delta w=0$$

مشابه این برای g برقرار است.

$\delta y=0$ قرارداده و برحسب $\delta z/\delta x$ حل کنید و فرض کنید $\delta x\to 0$.

$$\frac{xz-yw}{z^{2}w^{2}},\frac{xw+yz}{z^{2}-w^{2}}$$

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آزمون	test
استقراء	induction
انتگرالپذیر	integrable
انتگراند	integrand
بازه	interval
برش	cut
پوچ	null
پیوسته	continious
ترتیب	order
تظریف	refinement
تمام	complete
تمامیت	completeness
چگال	dense
حوزه	domain
دنباله	sequence
دیفرانسیلپذیر	differentiable
رده	class
زیربازه	subinterval
ژاکوبین	jacobian
سری	series
ـ توافقی	harmonic series
ـ توانی	power series
ـ تیلر	Taylor series
ـ دوجمله‌ای	binomial series
ـ متناوب	alternating series
ـ هندسی	geometric series
سوپرموم	supermum
صعودی	increasing

صورمبهم	indeterminate forms
فاز	phase
قاعدهٔ زنجیری	chain rule
قانون اسقاط	cancellation law
کران	bound
کراندار	bounded
کواترنیون	quaternion
کوده	aggregate
متناهی	finite
مجموعه	set
— تهی	empty set
مزدوج	conjugate
معادلهٔ تفاضلی	difference equation
معکوس	inverse
مقدار برگشتی	turning point
منطق	rational
میانی	intermediate
میدان	field
ناپیوسته	discontinious
نامتناهی	infinite
نرم	norm
نزولی	decreasing
واگرا	divergent
همسایگی	neighbourhood
همگرا	convergent
— ی مشروط	conditionally convergent
— یی مطلق	absolute convergence
همگن	homogenous
هنگ	modulus
یکنواخت	monotonic

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

absolute convergence	همگرایی مطلق
aggregate	کوده
alternating	متناوب
bisection	دونیم سازی
bound	کران
bounded	کراندار
cancellation	اسقاط
chain rule	قاعدهٔ زنجیری
class	رده
closed	بسته
comparison principle	اصل مقایسه
complete	تمام
completeness	تمامیت
conditionally convergent	همگرای مشروط
conjugate	مزدوج
continious	پیوسته
convergent	همگرا
cut	برش
decreasing	نزولی
dense	چگال
difference equation	معادلهٔ تفاضلی
differentiable	دیفرانسیلپذیر
discontinious	ناپیوسته
domain	حوزه
divergent	واگرا
empty	تهی
exponential	نمایی
field	میدان
finite	متناهی
generating function	تابع مولد
gradient	گرادیان
harmonic	توافقی
homogenous	همگن
implicit function	تابع ضمنی
increasing	صعودی
indeterminate forms	صورمبهم
induction	استقراء

infinite نامتناهی
integrable انتگرالپذیر
integrand انتگراند
integration by parts
انتگرالگیری به‌روش جزء به‌جزء
integration by substitution
انتگرالگیری به‌روش جایگزینی
intermediate میانی
inverse معکوس
irrational اصم

jacobian ژاکوبین

leap پرش

mean value theorem
قضیهٔ مقدارمیانگین
modulus هنگ
monotonic یکنواخت

neighbourhood همسایگی
norm نرم
null sequence دنبالهٔ پوچ

order ترتیب
oscillating sequence دنبالهٔ نوسانی

phase فاز
power series سری توانی

quaternion کواترنیون

radius of convergence
شعاع همگرایی
rational منطق
recurrence relation رابطهٔ تراجعی
refinement تظریف

sequence دنباله
series سری

turning value مقدار برگشتی

uniform continuity
پیوستگی یکنواخت

فهرست راهنما

نخستین درس در آنالیز ریاضی ترجمهٔ کتابی است به همین نام که چند سال پیش به وسیلهٔ دانشگاه **کِیمبریج** انگلستان، برای دانشجویان و پژوهشگران این رشته از ریاضیّات، چاپ و منتشر شد. نویسندهٔ کتاب، *J. C. Burkill* ، خود از استادان این رشته است که گذشته از دانش و تجربهٔ گستردهاش در این زمینه، در تهیه و ویرایش نهایی کتاب از اظهار نظرهای دانشجویان و استادان ریاضی دیگر نیز بهره جسته است. به همین سبب، کتاب در همان آغاز انتشار با اقبال دست اندرکاران دانش ریاضی و سازمانهای آموزشی روبه‌رو شد، و آن را در شمار کتابهای درخور ستایشی دانستند که این مبحث ریاضی را به شیوه‌ای نو و درخور فهم و درک دانشجویان بیان کرده است.

کتاب دارای هشت فصل است: **اعداد، دنباله ها، تابعهای پیوسته، حساب دیفرانسیل، سریهای نامتناهی، تابعهای مخصوص در آنالیز، حساب انتگرال، و تابعهای چند متغیره.** این فصلها که هریک دارای بخشهای گوناگونند و تمرینهایی در پی دارند، بهره گیرنده از کتاب را گام به گام به دانشی افزونتر و ژرفتر و کارآمدتر در این زمینه رهبری می‌کنند. **راهنمای حل تمرینها**، و **واژه نامه‌های انگلیسی به فارسی وفارسی به انگلیسی**، که در ترجمهٔ فارسی به کتاب افزوده شده است، آن را به گونه‌ای درآورده است که به صورت خودآموز می‌تواند برای دانشجویان و دبیران ریاضیّات سودمند باشد.

بها چهل هشت تومان