پرسش و پاسخ درباره وردش‌های ساختنی

امیرحسین اکبرطباطبایی، آرش رستگار

پیاده‌سازی و بازنویسی: محمدمهدی نسیمی

آرش رستگار: عرض شود که داشتم راجع به رسته‌ها فکر می‌کردم و این‌که، حالا بگذارید من بگویم که این کتگوری تئوری یک‌جوری بیرون‌شناسی باشد، بیرون شناسی اشیاء ریاضی باشد، آن روشی را که با درون ساختار اشیاء کار دارد را بگویم درون‌شناسی. من می‌خواستم بگویم ما وقتی فانکتورها را در نظر می‌گیریم، فقط به بیرون‌شناسی فکر می‌کنیم. ولی فانکتورهایی ارزش دارند، که بشود با استفاده از درون‌شناسی آنها را تعریف کرد. یعنی ساختاری که در مبدا است، بشود از رویش و اطلاعاتی که داخلش است و این‌که چگونه ساخته شده است، ساختار مقصد را ساخت. و همهٔ فانکتورها این‌گونه نیستند. و این سؤال برایم پیش آمد که به این نکته توجه شده است یا خیر؟ بعد یاد تابع افتادم، خب این‌که یک تابع ساختنی باشه و شما به یک عدد یک عدد دیگر نسبت دهید و با یک الگوریتم متناهی بسازیدش، این هم مهم می‌شود. ولی خب، من می‌دانم راجع به این خیلی فکر کرده‌اند، و احتمالا در ریاضیات براور می‌گنجد، ولی باز هم به عنوان کسی که هنوز از پیش چیزی نمی‌داند، پیش‌داوری دارد، اصلا خود عدد حقیقی الگوریتم متناهی برای ابرازش نیست، برای ضرب کردنش نیست، برای هیچی. بنابراین اصلا صحبت کردن راجع به این‌که تابع باید با یک الگوریتم متناهی تعریف شدنی باشد، یک ذره پیچیده می‌شود. ولی حتما راه‌حلی در این زمینه دارند دیگر، و یک فکرهایی براور و شاگردهایش کرده‌اند راجع به این مشکلی که من گفتم و یک تعریفی دارند. و یک جوری توابعی که مثلا ساختنی هستند را تعریف می‌کنند و من می‌خواهم یکجوری وردش‌های ساختنی را بین رسته‌ها تعریف کنم و این احتمالا در منطق بگنجد، ولی خب می‌خواهم بدانم کسی راجع به این کاری کرده است؟ هر منبعی بگویید که من یاد بگیرم ممنون می‌شوم، چه راجع به توابع باشد، چه راجع به همین وردش‌ها باشد، ولی خب، مثلا حس کارآگاهی‌ام می‌گوید که یک منطق‌دان برای چه به کتگوری کار داشته باشد؟ برای این‌که از نظریهٔ مجموعه‌ها فرار کند دیگر. بخواهد فراتر از نظریهٔ مجموعه‌ها برود، یک زبان آزادتری داشته باشد. خب وقتی برود فراتر از نظریهٔ مجموعه‌ها، دیگر درواقع از آن حیطه‌ای که می‌توانست وردش‌های ساختنی را تعریف کند به نظر دور شده است. بنابراین به نظرم طبیعی نمی‌آید که منطقدان‌ها قبلا به همچین مسئله‌ای علاقه‌مند شده باشند، ولی من عذر می‌خواهم جسارت کردم راجع به چیزی که نمی‌فهمم سؤال کردم. و این‌که لطف کنید در حد فهم ناقص من صحبت کنید که من متوجه بشوم. چون می‌بینید که من هیچ چیز بلد نیستم. خیلی متشکرم.

امیرحسین اکبرطباطبایی: عرضم به حضورتان که همان‌طور که حتما خودتان تایید می‌کنید، سوال سختیست و من تلاشم را می‌کنم که یک‌جور فرمالیسمی را که در ذهن دارم سوار کنم به سؤال، و سؤال را تبدیل کنم به چیزی که به نظرم می‌رسد این‌طور بشود به آن جواب داد و بعد بهش جواب بدهم، به روش‌های مختلفی هم می‌توانم تعبیر بکنم. بنابراین به همان روشهای مختلف هم سعی می‌کنم جواب بدهم. حالا امیدوارم که فایده‌ای هم داشته باشد. عرضم به حضورتان اول از همه این‌که خیلی جواب کوتاه و سرضرب بدم: چیزی شبیه آن‌چه منظور شما هست من این‌طرف و آن‌طرف ندیده‌ام دقیقا. مشخصا

فانکتورهایی که به یک معنی موجهی ساختنی باشند، و ما اینها را فرمال کرده باشیم و برایشان یک کلکیولسی داشته باشیم و بگوییم چه موقع این‌ها ساختنی‌اند، با این فرمت من هرگز ندیده‌ام، و بنابراین جواب کوتاهم این هست که من ندیده‌ام و نمی‌دانم. اما اگر کمی بلندتر اگر بخواهم پاسخ دهم و از قوهٔ خیال هم کمک بگیرم، آنوقت باید اولین چیزی که بگویم این باشد که بروم سراغ آن حس کارآگاهی که گفتید و بگویم که احتمالا درست می‌گویید، بعید است که همچین notionی مورد علاقهٔ منطق‌دان و حتی بیشتر، کتگوری تئوریست باشد. استدلالم هم کمابیش همان‌چیزی است که گفتید، با روح کتگوری تئوری در تضاد است این کار. کتگوری تئوریست همان‌طور که گفتید علاقه دارد که اشیا را، از جمله فانکتورها، که قرار است اشیائی در یک کتگوری دیگر باشند، همهٔ موجودات را بر حسب رفتارشان با همگنانشان تعبیر بکند و بفهمد این‌ها چه کار می‌کنند؛ کاری به ساختمانشان، به داخلشان و به این‌ها ندارد، و اصلا روحیه‌اش این‌طور است. و اگر قرار باشد که روحیه‌اش این‌طور باشد، طبیعتا فاصله می‌گیرد از هر نوع تعریف کردنی که «این را باید این‌طور ساخت». طبیعتا در هر نوع ساختنی قرار است سر و کلهٔ یک سری آجر و ملات ساختمانی باشد که حالا Set Theory یا هرجور presentation دیگری که به شما می‌دهد، و حالا کتگوری تئوری علاقه دارد که presentation free باشد و به این معنی خب نباید هیچ علاقه‌ای به ساختمان اشیا نشان دهد، و این طبیعیست. ولی آن‌وقت این‌جاست که من سؤال شما را تغییر می‌دهم، و تعابیر دیگری هم خواهم کرد که حالا سعی می‌کنم با آن تعابیر که به سؤال شما نزدیک‌تر است هم جواب دهم. ولی با این تعبیر اولیه‌ام، سؤال شما، سؤال اصلیتان، چون این پروپوزال کانستراکتیو بودن به یک معنی‌ای از فانکتورها را این‌طور توضیح می‌دهید که، این را مطرح می‌کنید برای جواب دادن به این سؤال که فانکتورها زیاد هستند و همه‌شان که به درد ما نمی‌خورند، ظاهرا آن‌هایی به درد می‌خورند که به یک معنی‌ای بشود ساختشان، انگار که دارید تلاش می‌کنید جواب بدهید پس کدام فانکتورها واقعا به درد می‌خورند؟ و جوابش این است که آن‌هایی که مثلا به یک معنی‌ای ساختنی هستند. من می‌خواهم جواب کتگوری تئوریست را بدهم این‌جا، که سؤال مهمی هم هست و طبیعتا همهٔ فانکتورهای بین دو تا کتگوری به درد نمی‌خورند و جواب کتگوری تئوریست این است که فانکتورهایی به درد می‌خورند که یکجور یونیورسالیتی دارند. یعنی فانکتور که نباید به مثابه فانکتور اهمیتی برای ما داشته باشد، یعنی همان جوابی را می‌دهم که در مورد اشیاء، که یک عالمه شیء هم هست که در کتگوری به شما بدهند، همه‌شان که اشیا جالبی نیستند برای ما، شما آن‌جا می‌توانید بگویید اشیائی جالبند که یک‌طوری می‌شود ساختشان، یا معادلا می‌گویید که اشیائی جالبند، این جواب دوم جواب یک کتگوری تئوریست است طبیعتا، که یک خاصیت یونیورسالی دارند، حالا یک initiality دارند، یک terminality دارند، product یک چیزی هستند، limit یک سری اند، colimit یک سری موجودات طبیعی‌ای‌اند، به این معنی ساختمان دارند، یعنی ساختن را اگر بگیرم limit و colimit و اشیائی از این دست آن‌وقت می‌شود این‌طور که یک یونیورسالیتی دارند، یک‌جور خاصی هستند در رفتارشان با همگان، نه؟ که این خاص بودن ویژگی هست که به طور یکتایی در حد isomorphism معلومشان می‌کند. همین‌طور این جواب را کتگوری تئوریست هم به شما خواهد داد احتمالا ،که فانکتوری مهم است که در یک خاصیت یونیورسالی‌ای شرکت می‌کند، و اضافه می‌کند که معمولا خاصیت یونیورسالیتی هم این‌طور است که این بخشی از یک adjunction است یعنی خودش adjoint چپ یا راست یک چیز طبیعی خیلی بدیهی است. مثلا، مثل فانکتور فراموش‌کار است مثلا. مثلا freely دارد یک چیزی را می‌سازد. اصولا او که مشخصا خوشرفتار می‌کند یک فانکتور را، که ما به آن علاقه داشته باشیم، حضور بخشی از یک adjunction

طبیعی بودنش است، که مشخصا مبهم هم هست این، که این adjunction باشد، ولی این adjunction داشتن، ویژگی خوبی است. ولی حالا این دور هم نیست، مثلا از آن حرف که مثلا اشیائی مورد علاقهٔ ما هستند که با limit و colimit از یک سری اشیا پایه‌ای ساخته باشید، شما حالا چون علاقه‌تان هم همان‌طور که گفتید به ساختن است، ساختن هم طبیعتا relative به یک چیزی است. مثلا اگر من می‌خواستم بگویم چه شیئی مورد علاقه است، شاید می‌گفتم که اولا بستگی دارد که شما از کجا می‌آیید و به چه چیزی علاقه دارید، و مثلا ادعا می‌کردم که Geometric علاقه‌تان هندسی است یا علاقه‌تان algebraic است و این‌ها دوگان هم هستند و فرق می‌کند. ولی به فرض مثلا اگر علاقه‌تان هندسی بود، آن‌وقت من می‌گفتم که یک فرمالیزیشن خیلی دم دستی، مثلا از این‌که یک کتگوری داده شده‌ای به شما می‌دهند، یک کتگوری‌ای و یک زیرکتگوری این را هم به شما می‌دهند، که این همان اشیاء آجرهایتان است، این آن‌هایی است که شما دوست دارید. و بالاخره باید از یک جایی شروع بکنیم دیگر، و این را به من دادید و من می‌گویم از آن‌جایی که علاقهٔ شما هندسی است، بنابراین به چسباندن اشیا علاقه دارید و بنابراین همهٔ colimitهای دیاگرام‌های داخل این کتگوری، همهٔ آن‌چیزی که می‌شود با colimit ساخت، از آن‌چه که پایه‌ای است، این احتمالا موجودات مورد علاقهٔ شما هستند، مثلا. خیلی سردستیش دارم می‌گویم دیگر. یعنی یک سری اشیا را باید شما شروع بکنید و دست من نیست و در مورد سؤال شما از یک سری فانکتور باید خودتان شروع بکنید، مثلا، و بعد تحت limit و colimit و این‌ها ببندید به آنها، ولی خب می‌تونید اعتراض بکنید که limit و colimit هم چنین چیزی نیستند، همهٔ این‌ها حالت‌های خاص اشیاء یونیورسال‌اند و بنابراین، آن‌طوری خیلی دست باز و این‌ها می‌شود، اما خب راهی هم نمی‌ماند، من تنها کاری که می‌توانم بکنم این است که بگویم که، عرضم به حضورتان، یک‌جور adjunctionی در کار باشد. ولی خب می‌توانید با بیان representability هم بگوییدش، مثلا بگویید که، برای این‌که خیلی کلی گفته باشم، و از limit و colimit هم فراتر بروم، اصولا تمایل کتگوری تئوریست همان‌طور که می‌دانید این است که، حالا یا علاقه دارد به یک شیئ یونیورسال، این‌ها همه معادلند دیگر، یونیورسال بودن و adjunction، و عرضم به حضورتان representability که آخری‌اش می‌خواهم بگویم مورد علاقه است. مثلا می‌رفتند سراغ فانکتورهایی که representable هستند. یک چیزی از این دست، یک ملقمه‌ای از ترکیب این چیزهایی که گفتم، به نظر جواب سؤال شما باشد. در تعبیر اول من و خلاصهٔ خیلی کوتاهش هم این است که علی الاصول باید یک‌جور یونیورسالیتی باید باشد، یعنی وارد ساختمان من حق ندارم بشوم، همان‌طور که کتگوری تئوری مرا منع می‌کند از این، ولی می‌توانم بگویم که این مخصوص باشد بر اساس رفتارش نسبت به بقیه. همان‌طور که ما می‌دانیم مثلا فانکتوری که فراموش‌کار است، free functor است، این‌ها همه مهم‌اند، به خاطر adjunctionهایی که ایجاد می‌کنند. بنابراین جوابتان در adjunction است. اما این بحثی که می‌کنم در بحث‌های فسلفی که حول کتگوری تئوری است، حتما می‌دانید که این مهم است، یعنی اینکه adjunction اساسا یا یونیورسالیتی یا representability چیزی است که هستهٔ اصلی مهم بودن یک چیزی در کتگوری تئوری است، در این‌باره بحث خیلی عریض و طویلی شده است، اگرچه دربارهٔ ساختن و ساختمان نشده. اما می‌توانم دوباره، یعنی ساعت‌ها همین‌طور حرف بزنم که لزوما پرفایده هم نخواهد بود، اما این تمایل که آقا این‌ها را محدود بکنیم که مثلا colimit مهم است، و خب واضح است که colimit حالت خاص یونیورسالیتی است، ولی خب من می‌گویم بالاخره محدود بکنم توجهم را، هندسی هم بگیریم، ما این را بلدیم. یعنی می‌دانیم که این روحیه را مردم صبح تا شب در گوشه‌هایی از هندسه به

تقلید از هندسهٔ جبری انجام می‌دهند، نمی‌دهند؟ چه می‌دانم، مثلا ما می‌دانیم که اسکیم در واقع colimit اسکیم‌های آفین است، منیفلدها colimit مثلا گوی‌های باز مربوطه‌اند یا بیشتر، همهٔ presheafها colimitهای آزادانه تولید شدهٔ اشیا پایه‌ای هستند که شما دادید در آن سایتی که آن پایین دارد. نکته‌ام این است که این نوع نگرش که ما همه چیز را نسبت به colimit ببندیم مثلا، و به آن بگوییم construct شده مثلا، مورد علاقه است، خب از این کارها ما می‌کنیم، حالا فانکتورهایش هم دقیقا همان‌کار را می‌کنند، برای آن‌که آن نگاهی relativeی مثلا گروتندیک، که اشیا را فانکتور می‌بینند، که مثلا over یک چیز دیگری است و بنابراین colimitها هم در آن فانکتور کتگوری اتفاق می‌افتد. اینها همه آن چیزی است که معمول است در عمل می‌کنند. ولی حرف، آن‌طور که چه باید constructive باشد، به آن صراحت بلد نیستم و ندیدم راستش. این از جوابی که یک کتگوری تئوریست با کتگوری تئوریست ارتودوکس می‌توانست به سؤال شما بدهد، که کمابیش یک مقدار به سمت ساختمان و نظریهٔ مجموعه‌ها می‌رفت. ولی حالا در ادامه من سعی می‌کنم که جوابی شبیه به، با همان المان‌هایی که سؤال شما داشت هم، مهیا بکنم.

ببخشید که خیلی بلند هم شد، عرضم به حضورتان و اما بیاییم بگوییم که، خیلی کتگوری تئوریست هم حالا نباشیم، که خب خلاف اساس همان حس کارآگاهی شماست که ما رفتیم که سراغ کتگوری تئوری، که همه چیز را از بیرون طبق روابطش با دیگران ببینیم و نباید از ساختن، مگر ساختنی یونیورسال‌طور، حرف بزنیم، شبیه limit و colimit. حالا به فرض که به یک معنی هم سؤال شما هم یک چیز مهمی در آن هست، که مشاهدهٔ یک ریاضیدان که صبح تا شب کار ریاضی می‌کند، اصولا این است که آره فانکتورهایی که ما به صورت دستی‌ای به presentationهایشان داریم هم برایمان مهم است انصافا! و جواب این چه باید باشد؟ این‌جا خیلی سخت می‌شود، من همان‌طور که گفتم دربارهٔ فانکتور جواب آن را بلد نیستم، ندیده‌انم همچین چیزی. اما دربارهٔ فانکشن، همانطور که یک مرتبه می‌آوریم پایین سؤال را، و درست هم هست، دربارهٔ این خب هست کارهایی، و می‌دانیم که هست. اینجا دو تا تمایل مختلف هست، که یکی به کتگوری تئوری شبیه‌تر است و کتگوریکال نگاه کردن و دیگری کم‌تر شبیه است. آن که شبیه‌تر است، رهیافت analytic در برابر synthetic است. در واقع، آن synthetic است که نزدیک‌تر است به رهیافت کتگوری تئوری. آن analytic را ما بلدیم، به آن می‌گوییم نظریهٔ محاسبه مثلا، که یک سری موجودات را فرض کردند پایه‌ای، به یک معنی، خیلی بدون جزئیات گفتد نظریهٔ محاسبه علی الاصول این‌طور است دیگر، که شما می‌گویید این‌ها دنیای بزرگ همهٔ توابع من هستند، حالا روی اعداد طبیعی، حقیقی و هر چه، یک خانواده‌ای از توابع را به شما داده‌اند، یک خانوادهٔ بزرگ‌تر، یک criteria به من می‌دهید و یک زیر خانواده را به عنوان constructiveها به عنوان محاسبه‌پذیرها، با یک تعبیر این‌طوری جدا می‌کنید و می‌گویید این‌ها خوب هستند و خیلی معمول است که با یک presentationی توسط یک‌جور ماشینی می‌گوییم که ساخته می‌شود و یا به زبان معمول‌تری که در ریاضیات گفته می‌شود، می‌گوییم که این توابع پایه را من می‌گیرم و این operationها را و هر چه که با این‌ها ساخته شود را من می‌گیرم. فکر کنید که یک کتگوری‌ای دارید و حالا چه فانکتورهایی را می‌خواهید؟ مثلا identity را احتمالا می‌خواهید به عنوان فانکتور خوب داشته باشد به فرض، آیا مثلا این فانکتورهایی که ساختنی‌اند نسبت به چه operationهایی بسته‌اند؟ یک همچین اوپریشن‌های پایه‌ای را اگر بگذاریم، احتمالا یک خانواده می‌توانید تعبیر بکنید، نه؟ این دیگر بستگی به این دارد شما چه به construction اجازه می‌دهید در واقع. ولی این

گرایش، گرایشی نیست که اصولا کتگوری تئوریست یا ریاضیدان خوشحال بشود، برای این‌که خیلی junk زیادی دارد، خیلی به جزئیات و presentation و این‌ها حساس است، همان‌طور که نظریهٔ محاسبه به یک معنی هست. خیلی چیز نیست، معمول نیست به نظر من دست کم در مدل ریاضیاتی فکر کردن، اصولا theoretical computer scientist این‌طوری فکر می‌کند، اما تصور من این است که ریاضیدان خیلی خوشحال نمی‌شود با اینجور تعبیر. بعد ارجاع می‌دهید به براور به درستی که، ولی ما می‌دانیم که فلسفهٔ شهودگرایی و آن منطقی که براور داستان کرده، دربارهٔ این است که ما فقط دربارهٔ چیزهای ساختنی صحبت بکنیم. نکته‌ای که من می‌خواهم اشاره بکنم این است که کاری که براور می‌کند این است که دوست دارد که synthetically دربارهٔ اشیا ساختنی ریاضی حرف بزند، به این معنی که نمی‌گوید که اینها تابع‌ها هستند، کدام‌ها ساختنی هستند، بر اساس چه شرطی، از اول دست و پای ما را می‌بندد این‌طرف و آن‌طرف، و کار سختش هم همین است، به خاطر این‌که مجبور می‌شود، وقتی می‌خواهد اجازه ندهد که شما توابع غیرساختی بسازید، مجبور می‌شود این‌قدر برود پایین و مبانی منطق ما را جا به جا بکند که اجازهٔ این کار را ندهد. برای این‌که از ته، از همان اوایل منطق تسری می‌کند خلاف‌کاری ما، به تعبیر براور، به داخل تابع ساختنمان. مجبور می‌شود که مبانی همه چیز را تغییر بدهد. ولی هدف این است که اجازه به من ندهد اصلا که تابع غیرساختنی بسازم، وقتی من داخل ریاضیات شهودگرایانه هستم، اصلا نمی‌بینم که به یک تابع بگویم ساختی، به یکی بگویم غیرساختی، دست و پای من را طوری بسته‌اند که هر چیزی بسازم ساختی است، هر چیزی که تعریف بکنم، هرجور تابع دل‌بخواهی هم حتی که راجع به آن سور می‌زنم، تصور این است که این ساختی است، برای اینکه شما اصلا نمی‌توانید تابع غیرساختی بسازید. اگر بخواهم یک مثال بزنم، شبیه این است که شما در کتگوری تئوری معمول، کتگوری تئوریست طوری کار می‌کند که دست و پای شما بسته است، به این معنا که هر چیزی که می‌سازید ناورداست تحت مثلا isomorphism، این‌طور نیست که یک چیزهایی را اجازه می‌دهد به شما. در ریاضیات معمول این‌طور است دیگر، مثلا شما set theoric که می‌سازید یک چیزی‌هایی را، دربارهٔ گروه و غیره، معمول این است که حواستان را باید بدهید که این notionتان خوش تعریف باشد. به این معنا که تحت isomorphism دربارهٔ ساختار گروه باشد، تحت isomorphism بسته باشد. من به مرتبهٔ یک عضو علاقه دارم، ولی اسمش نه. ولی در کتگوری تئوری، همان‌طور که معمول است، رسم این است که شما اصلا اجازه نمی‌دهید از این حرف‌های junkدار بزنیم ما و بنابراین تهش هر چه من بسازم، چون دست و پایم را بسته‌اید، موجوداتی است که تحت isomorphism بسته است. آن‌هایی که من بتوانم با فانکتورها بدون آن‌که وارد ساختمان اشیاء بشوم، کاری نمی‌توانم بکنم جز این‌که تحت رفتارهای اشیاء، چون این product است و آن initial است، از این حرف‌ها بزنم که این‌ها همه تحت isomorphism تعریف شده‌اند. بنابراین، یک حال این‌طوری‌ای دارد. و به این معنی، اگر شما بخواهید این را مدلی براوری درست کنید، آن‌وقت باید دست و پای کتگوری تئوری‌تان را، که اتفاقا کار سختی است، چون از پایین باید ببندید، همه جا را ببندید، جوری که آن فانکتورهایی که دوست ندارید، اصلا ساخته نشوند. یعنی فانکتورهایی که خیلی دل‌بخواهی هستند و عجیب و غریب‌اند، ساخته نشوند، که بعید است این هم. بستگی دارد البته منظورتان از ساختمان چه هست، اگر خیلی ساختمان را دم دستی بگیرید و حساس باشید که ساختن یعنی خیلی چیز کوچکی و خیلی آزادی نمی‌خواهم بدهم، آن‌وقت اتفاقا نظریهٔ خیلی درست و درمانی ایجاد نمی‌شود. خیلی دیگر دست و پای ما را بسته‌اید آن‌وقت، و من دیگر نمی‌توانم constructionهای معمولم را بسازم. مهم است که دستم باز باشد. ولی اگر

خیلی هم باز بگذارید قضیه را، و خب بگویید باشد دیگر، یک کارهایی که می‌خواهیم بکنیم را بکنیم، در این نگاه synthetic، آن‌وقت احتمالا خوشحال نمی‌شوید، چون دست و پای ما را زیاد باز گذاشته‌اید و آن‌هایی که نمی‌خواستید constructive باشند را هم constructive گرفتید. این خیلی وابسته است به این که چه را constructive می‌خواهید بگیرید، ممکن است که مثلا این ریاضیات شهودی، برای این خوش تعریف است که ، و می‌شود در آن کار کرد و چیز میز هست و این‌ها، که خیلی ما را سفت و محدود نمی‌بینند نسبت به مفهوم construction. اجازه می‌دهد مثلا همهٔ توابع محاسبه‌پذیر هم constructive باشند مثلا. ولی نسخه‌های مثلا سختگیرانه‌تری هست که آن‌ها کار نمی‌کنند و نظریه راه نمی‌افتد، به اندازهٔ کافی تابع در آن نیست که بشود نظریهٔ تروتمیزی درست کرد، و operationهایی روی توابع بسته باشند. حالا امیدوارم که من این حرف‌هایی که زدم، به یک دردی خورده باشد واقعا. به قول این غربی‌ها feel free کنید که نکته‌ای بگویید، یا مثلا به سمت خاصی سؤال را سوق بدهید. ولی این تصویر عمومی که من دارم، اگر بخواهم تکهٔ دومش را هم خلاصه بکنم، دو تا گرایش synthetic و analytic هست، که analyticش به نظرم از روحیهٔ کتگوری تئوری خیلی دور است، synthetic ولی نزدیک‌تر است. اما خیلی کار بزرگی است. یعنی انگار که شما بگویید برو و همهٔ foundation را عوض کن و بیا، به معنی‌ای و به نحوی، و آن هم خیلی پر هزینه می‌شود. بنابراین، این کاری که برای توابع کرده‌اند را می‌شود ادایش را برای فانکتورها هم درآورد، ولی باید دید که دقیقا چه مدنظرتان است. من تصورم این است که جواب موجودی هست برای این. به یک معنی‌ای شبیه همین کار براوری که انگار فانکشن را یک مرتبه بیاوریم بالا. ولی احتمالا بعید است که شما را راضی بکند، چون تصورم از سؤالی که پرسیدید این است که شما construction را یک چیز خیلی سخت‌گیرانه‌تری مدنظرتان است، و نه آن‌قدر دست باز، که الآن عرض می‌کنم خدمتتان.

و اما بعد، این تعبیر شما را من اگر بخواهم خیلی جدی بگیرم، که بگویید که خیلی خوب، من مجموعه بگیرم، و توابع روی آن را که می‌گیرم بین مجموعه‌های مختلف، براور بلد استsynthetically که بگوید چه موقع به این‌ها می‌گوییم ساختی. البته که نمی‌گوید "چه موقع" ساختی است. بلد است که فقط وانمود بکند همه چیز ساختنی است و دست و پای ما را جوری ببندد و که همه چیز ساختنی بشود، و بعد ممکن است از این، تعابیر مختلفی بشود. که این‌جاها حالا بعدا اگر به نظرتان جالب بود، می‌توانم باز کنم و این‌ها، ولی می‌خواهم حالا خسته کننده نشود، و این خودش قصهٔ عریض و طویلی است که یعنی چی که آن ریاضیات synthetic ساختی را درست می‌کنیم که بعد برایش تعابیر مختلفی هست. ولی این را به نظرم صلاح است که بگویم، برای این‌که ما ببینیم چقدر دستمان باز است. براور یک ریاضیات خیلی فنی و فرمال درست می‌کند. به فرض که فقط از توابع و مجموعه و این‌ها حرف می‌زند، به فرض، اعداد و اعداد حقیقی و غیره، به همان سبک خودش. و دست و پای ما را همان‌طور که گفتم طوری بسته که ما خطایی نکنیم، چیزهای عجیب و غریب نسازیم. ولی خب شما به حق می‌توانید از من بپرسید که حالا زور این نظریه چقدر است؟ مثلا تعابیرش در دنیای ما چه می‌شود؟ یعنی اگر توابع براوری را تعبیر کنیم، به کدام توابع ما، جور در می‌آید؟ مدل‌های زیادی دربارهٔ تعابیر آن ریاضیات در ریاضیات کلاسیک هست. ولی از دو تا نسخهٔ خیلی شناخته شده، یکی که خیلی خوشمزه است، تابع را به یک معنی‌ای، که خب یک مقدار سخت است، زیرا همهٔ توابع روی اعداد نیستند و همه چیز باید یک نمایش عددی داشته باشد، و بعد می‌توانید بپرسید که اعداد حقیقی چطور می‌توانند یک نمایش عددی داشته باشند که سؤال validی است اما یک بحث

جدایی است، می‌شود همه چیز را جوری نشان داد که انگار عدد طبیعی است، و همهٔ توابع را طوری که انگار توابع روی اعداد طبیعی‌اند، و بعد آن‌وقت ما می‌بینیم که اگر توابع را بگوییم فقط توابع محاسبه‌پذیر، این برآورده می‌کند اصول ریاضیات براور را. بنابراین انگار ریاضیات براوری، با اینکه فرمال است، یکی از تعابیرش این است که آقا، هر وقت براور گفت «تابع»، شما بخوان تابع محاسبه‌پذیر. بنابراین، می‌توانید ببینید که چقدر دستِ باز می‌گیرد. اما هم‌زمان می‌توانید بگویید نه، من محاسبه‌پذیر را قبول دارم، و حاضرم همین را بگیرم به عنوان constructive و خیلی بزرگ نیست. و خب پس خوشحال می‌شوید. این دیگر بستگی دارد که شما construction را چقدر آزاد می‌گیرید. یک تعبیر دیگری هم هست که به یک نحو فنی‌ای به‌جای آن‌که همه چیز را عدد طبیعی بخواند، به یک معنی فضای توپولوژیک می‌خواند، با یک چسبی و بعد «همهٔ توابع» این‌دفعه می‌شود «توابع پیوسته». بنابراین، می‌شود گفت که یکی از تعابیر ریاضیات براور، توابع پیوسته است. یعنی ما می‌توانیم در ریاضیات کلاسیک بنشینیم و بگوییم هر کجا براور گفت تابع، شما بگیرید تابع پیوسته. که خب جالب می‌شود دیگر، داریم بدون آن‌که از تابع پیوسته یا محاسبه‌پذیر حرف بزنیم، داریم یک ریاضیاتی با یک محدودیت‌هایی می‌بریم جلو، که هیچ کجایش حرفی از این چیزها نیست، اما تعابیر این‌طوری دارد که جالبند. انگار که مثلا داریم هم‌زمان جهان محاسبه‌پذیر و جهان پیوسته را اصل موضوعه‌ای می‌کنیم. جهانی را که یک دانشمند نظری علوم کامپیوتر دوست دارد، و جهانی را که یک هندسه‌دان، توپولوژیک و غیره دوست دارد. حالا نسخه‌هایی هست که با جزئیات اضافه‌تری، یعنی دستتان دیگر آنقدر باز نیست، ولی می‌شود در آن‌ها تابع تعبیر شود به «همه جا مشتق‌پذیر»، «تحلیلی» و این‌ها که داستان دیگری دارد. حالا خب، این مقدمهٔ من دربارهٔ ریاضیات براوری که دربارهٔ تابع است، چگونه می‌تواند تعبیر شود. و بعد این چگونه تعبیر شدن به شما می‌گوید که این notion ساختن براور، چقدر زورش زیاد است. حالا می‌توانید بگویید که آقا من همین را دوست داشتم، همین خوب است، همین را شما یک مرحله بالاترش را دارید، برای این‌که اشیا را با کتگوری عوض می‌کنم و تابع را عوض می‌کنم با فانکتور. جوابش این است که بله، این را داریم. طبیعتا باید انتظارتان از من یک syntaxی باشد دیگر، یک syntax دست و پا بسته‌ای که نگذارد هر کاری که می‌خواستیم بکنیم، بعد در آن هر چه ریاضی develope کردین، بدون آن‌که اشاره بشود «تابع» چیست و «تابعِ» چیست و «تابعگون» چیست و غیره، این خودش تعبیر بشود به یک جور ساختن. حالا تعابیر مختلف داشته باشد، بسته به پیوسته و غیره، و شبیه همان یک مدتبه بالاتر از همان. من می‌خواهم یک مقدار جلوتر ببرم سؤال شما را. این‌کار را خیلی بیشترش را هم می‌شود کرد، یعنی می‌شود مرتبه‌هایش را بالاتر برد. یعنی تعبیر بکنیم که هر شیئ که داریم، نه در واقع یک مجموعه، نه یک کتگوری، نه یک 2-category، بلکه یک higher category است. یعنی یک‌جور فضاست، یک نوع homotopy type است، به این معنی، که خیلی دم دستی‌اش این است که من نه‌تنها mapدارم بین اشیا، بلکه نگاشت دارم بین نگاشت‌ها و نگاشت دارم بین نگاشت‌های نگاشت‌ها و الی ماشاالله تا بی‌نهایت دارم، و بعد، خب آن‌وقت، تابع‌های من تبدیل می‌شوند به infinity functor و برای این‌ها هم، ما آن ریاضیات براوری را داریم علی الاصول، و خب بعد، این‌ها تعابیر مختلفی هم دارند. اگر ریاضیات براوری به عنوان جواب سؤال شما توجهتان را جلب می‌کند، آن‌وقت نسخه‌های، در واقع حرفی که دارم می‌زنم این است: که ریاضیات براوری چیست، و اگر توجه شما را جلب می‌کند که جواب خوبیست، و من همین را برمی‌دارم و راضی‌ام، آن‌وقت می‌توانم بگویم که این به کتگوری، به فانکتور، فانکشن به فانکتور، فانکتور به higher functors هم تعمیم داده شده، این‌که به گامی شما می‌پرید که، به فانکتور و higher functor، چیزی است که می‌توانید در type theory پیدا کنید. ظاهرش به شما این را نمی‌گوید. ولی type theory و بعدش homotopy type theory که این روزها خیلی به عنوان مبانی این‌ها مد است، در واقع lift کردن ریاضیات براوری، که همزمان یک خوانش کتگوریک هم دارد، که این جالب است، که این دو، دوش به دوش هم هستند تقریبا، انگار کتگوری تئوری semantics است. البته یک‌جور کتگوری‌هایی در واقع، در واقع نسخهٔ semantical این syntaxاند، انگار یک نظریهٔ فرمال داریم که ریاضیات براوری است و تعابیرش کتگوری‌های مختلف‌اند به فرض، حالا نکته‌ام این است که شما به نظرتان این ریاضیات براوری خوب است، constructionش به اندازهٔ کافی دست باز نیست و خوشمزه است و قبول می‌کنید، که من البته بعید می‌دانم، چون آن تعبیری که شما از construction می‌خواهید که بگوید که کی یک فانکتور مهم است، این اینجا پیدا نمی‌شود، و یک‌کمی دست بازتر است و اجازه می‌دهد خیلی از توابع باشند. صرف این‌که ساختنی هستند، احتمالا جالب نمی‌شوند از منظر شما، ولی به فرض اگر این رو قبول کردید، و برای این‌که تبلیغش را کرده باشم، باید بگویم که این جای خوبی است که بایستیم که ریاضیات خوشمزه‌ای بتوانیم درست کنیم که خیلی ad hok نباشد به فرض، notion به اندازهٔ کافی دست باز، اما هم‌زمان به اندازه‌ای سخت‌گیرانه است این ساختن. اگر ریاضیات براوری را می‌خرید، ریاضیاتی که تابع را به فانکتور و به سطوح بالاترش ببرد، و خیلی هم شکل الگانت خیلی تر و تمیزی داشته باشد، هست موجود و می‌توانم بعد دربارهٔ این‌که کجا می‌شود پیدایش کرد، و مقدمات مربوط به براورش و type theoryاش کجا هست هم می‌توانم حرف بزنم. ولی آن جواب اول من را هم تعبیر بکنید به notionسختگیرانه‌تری از ساختن، که نه، شما ممکن است بگویید که نه این‌جور ساختنی، که من هرجور ساختی را ساختن بگیرم، خیلی دست باز است. یک‌کم سختگیرتر باش، و آن‌وقت باید به نظرم برویم سراغ universality و colimit و غیره. بخواهم مقایسه بکنم، شبیه این است که ریاضیات براوری جواب این سؤال که تابع ساختی چیست را این‌طور به شما می‌دهد که فکر کن که هر چه که می‌شود محاسبه کرد، ولی خب شاید شما بگویید که نه، «هر چی که بشود محاسبه کرد» دیگر خیلی دست باز است، این جواب مثلا colimit عین این است که، colimit و limit و این‌ها مثلا، شبیه این است که من بگویم همهٔ چند جمله‌ای‌ها، مثلا با یک حلقه‌ای به فرض سر و کار داریم، همهٔ چندجمله‌ای‌ها. این را که دیگر به عنوان تابع ساختی قبول دارید که مثلا و خیلی هم روشن است که دست و پایتان را بسته‌ام خیلی دیگر و تئوری خیلی، نمی‌شود همیشه وانمود کرد، حالا البته این روزها به نظرم می‌رسد که یک نظریه‌هایی هست که می‌شود آن کارها را هم کرد. ولی خب بالاخره خیلی دست و پاتون بسته است. نمی‌توانید واقعا همهٔ توابع را آن‌طور بخوانید. دو قرائت خیلی سختگیرانه و خیلی کمتر سختگیرانه می‌شود به آن داشت. و هر کدام هم به یک قصه‌ای منجر می‌شوند. یکی‌اش نظریهٔ فرمالیست، ریاضیات عریض و طویلی است، که ریاضیات براوری است و گسترشش به کتگوری است همانطور که گفتم. یکی‌اش خیلی دست بسته است، ولی رسمی است، که اصولا ریاضیدان و هندسه‌دان everyday mathematicaian استفاده می‌کند، که همین universality و colimit و limit و بستار نسبت به این کارهای دم دستی‌تر است، چندجمله‌ای‌طورتر است، و اجازه نمی‌دهد که خیلی برویم راه دور و این‌ها. حالا این‌طور دیگر، امیدوارم که این چیزهایی که گفتم، حالا به یک دردی خورده باشد. من هم‌زمان خوردم هم دارم ذهنم را مرتب می‌کنم که این‌هایی که دارم می‌گویم هر کدام کجا می‌نشیند. ان شاء الله باعث سخت شدن شنیدن این‌ها نشده باشد.