گفتگوهایی درباره حدگیری در نظریهٔ اثبات

امیرحسین اکبرطباطبایی، آرش رستگار

پیاده‌سازی و بازنویسی: محمدمهدی نسیمی

آرش رستگار: سوال من ریشه در تحقیقات در دو دهه اخیر در نظریه اعداد دارد. وایلز و شاگردانش در ده پانزده سال اخیر، به یک جاهایی رسیده است کارهایشان در جبر، که یک چیزهایی می‌خواهند ثابت بکنند، زورشان نمی‌رسد، ولی در یک مجموعه‌ای که به یک معنی چگال است در آن چیزهایی که می‌خواهند ثابت بکنند، آنجا می‌توانند coordinatize بکنند، مختصاتگذاری بکنند، و محاسباتی بکنند که همه‌جا ممکن نیست، و بعد می‌گویند با حد گیری از آن ساختارها، آن چیزی که ما می‌خواهیم برآورده می‌شود. حالا مثلا یک مثالش این‌که، کیسین در مقالهٔ اصلی‌اش که درباره finite flat group schemes است، که روش تیلور-وایلز را کرد روش کیسین-تیلور-وایلز، به خاطرش شغل هاروارد گرفت، کیسین در آن مقاله، می‌آید و یک ترتیبی تعریف می‌کند روی finite flat group schemes، چه کار عجیبی، بعد می‌گوید حالا که شد مرتب، ما اینجا limsup می‌گیریم، liminf می‌گیریم، infimum می‌گیریم، supremum می‌گیریم. خب این در نظریهٔ اعداد سابقه داشته است. یعنی آرتین که class field theory را فرمولبندی کرد نمی‌توانست ثابتش بکند، چبیشف که تزش را درآورد و ثابت کرد، اول قضیهٔ چبیشف را برای گروه‌های دوری ثابت کرد، بعد برای گروه‌های آبلی ثابت کرد، بعد برای گروه‌های دلخواه. این سه تا قدم را آرتین یاد گرفت، او هم همین کار را کرد. در این اثبات‌ها این‌ها به طرز عجیبی مجبور می‌شوند از supremum اعداد حقیقی استفاده بکنند. یعنی آدم برای algebraic number theory به supremum در اعداد حقیقی احتیاج دارد؟ این چه حرف عجیبی است. ولی همهٔ اثبات‌هایی که موجود است، این ساختار را در خود دارد، نتوانسته‌اند از این فرار بکنند، بنابراین یک‌طورهایی این حد گیری وجود دارد. حالا حرف من این است. یک حرفی در نظریهٔ اثبات، و فلسفی، نه به زبان یک منطقدان، ولی شما که اینقدر قشنگ من را می‌فهمید، حالا به شما می‌زنم دیگر، ببینم چگونه پاسخ می‌دهید. این حرف، این است که متصور است برای من که ما برای یک مجموعهٔ چگالی، حالا به هر معنی‌ای، از اشیائی که می‌خواهیم، این قضیه را برای آنها ثابت کنیم، آن مجموعه را بتوانیم به شده‌ها به یک معنی‌ای coordinatize بکنیم، و اثبات برای آنها ممکن باشد، و اثبات بکنیم، و بگوییم چون در حد، قضیه‌ای اگر درست باشد، برای حالت‌های حدی هم درست است، قضایایی که این خاصیت را داشته باشند، که حالا معلوم نیست به چه معنایی حد بگیریم، چون در منطق این‌چنین چیزی نداریم، تا جایی که من می‌دانم، بعد پس آن قضیه‌ها را هم ما در حالت کلی ثابت کرده‌ایم. بنابراین، می‌گوید: برای اثبات قضایا، شما لازم نیست که همهٔ موجودات را، همه اشیاء را درگیر بکنید. و فکر می‌کنم این یک نگاه جدیدی به نظریهٔ اثبات باشد. بعد یک مثال بزنم که ذهنم را نشان بدهد، ولی به زبان دنیایی است، نه به زبان آخرتی. یعنی مثلا خدا به ما چشم داده با چربی، با یک تکه چربی، می‌بینیم و با یک تکه پوست می‌شنویم. ولی با این چیزها که ما سمیع و بصیر را نمی‌فهمیم، ولی باز خدا با همین چیزهایی که ما از سمیع و بصیر می‌دانیم، راجع به اسمائش با ما حرف می‌زند. حالا من هم همین کار را می‌آورم پایین‌تر و در یک دنیای عالم معمولی می‌خواهم این را بگویم. مثل این می‌ماند که شما یک قضیهٔ هندسه‌ای را بخواهید ثابت بکنید،

برای مثلث‌ها، بعد بگویید من یک اثبات دارم که فقط برای مثلث‌هایی که مختصات رئوسشان گویا است کار می‌کند بعد که ثابت کردید، بگوبید حالا هر مثلثی، حد مثلث‌های با مختصات گویا است. حالا حد اینجا به یک معنای معمولی‌ای، نه به معنای عجیبی که آن جای دیگر منظورم بود. و چون این حکم تحت حد حفظ می‌شود، پس این حکم برای همهٔ مثلث‌ها برقرار است. هرچند که اثبات من فقط برای آنهایی که مختصات رئوسش گویا است، کار می‌کند. این را برای تقریب به ذهن گفتم.

امیرحسین اکبرطباطبایی: درباره نظریه مدل‌ها- عرض به حضورتان و اما، یک نکتهٔ دیگری هم می‌گویید، و دربارهٔ این حرف می‌زنید که خب این دار و دسته وایلز یک کارهایی دارند می‌کنند و یک جاهایی گیر می‌کنند و بعد یک فنی می‌زنند و بعد اساسا این فن را انگار دنبال اصلش، دنبال تئوری‌اش می‌گردید. که چیزی شبیه به این می‌خواهید که ما یک سری موجودات کوچکتری، ساده‌تری، به یک معنی‌ای قابل محاسبه‌تری، این‌که «می‌شود روی آن مختصات گذاشت»تری داریم و با این‌ها مثلا بلدیم کار کنیم، به یک معنی‌ای راه‌دست ترند، و اینها، و از قضا اما یک‌جور چگال هستند، به آن معنی‌ای که می‌گویید که چگال به معنی مثلا در یک سری ویژگی چگال‌اند، که مثلا اگر من یک حکمی را برای این‌ها ثابت کنم، آنوقت یک‌هو خود به خود برای همهٔ اثبات می‌شود. عرض به حضورتان که بعد می‌گویید که در منطق همچین چیزی نیست، ولی من فکر می‌کنم که هست اتفاقا. این از معدود جاهایی است که یک چیز به درد بخور در منطق هست. این قضیهٔ، حالا البته احتمالا چیزی که در ذهن شما هست خیلی بزرگ‌تر و پیچیده‌تر از این نسخه‌ای است که من می‌خواهم بگویم، ولی دست کم یک نسخهٔ کاملا اجرا شده‌اش هست که این چیز بعیدی هست که چیزی در ذهن من باشد و نسخه‌ای از آن کامل اجرا شده باشد و گیرم نسخهٔ خیلی اولیه‌ای، و آن قضیهٔ فشردگی است که معادل تمامیت است در منطق مرتبهٔ اول، و خلاصه‌اش این‌طور است که، صورت قضیه به شما می‌گوید که اگر یک سری جمله به من بدهید، حالا در یک زبانی تصور بکنید، خیلی مبهم بگیرید همه چیز را. یک سری جمله بنویسید، حالا در یک زبان فرمال ریاضی‌ای، دقیق‌ترش آن‌که در یک زبان مرتبهٔ اولی، یعنی سورهاتان را فقط حق دارید روی مجموعه‌های جهان بگذارید، نه روی زیرمجموعه‌هایش، نه زیرمجموعهٔ زیرمجموعه‌هایش، فقط روی اعضاء، که برای هر عددی، برای هر عدد حقیقی‌ای، برای هر عضو آن حلقه، و نه مثلا برای هر ایده‌آلی و چیزهایی شبیه به این. بعد یک جمله‌هایی بنویسید، حال اگر یک مجموعه‌ای از این جملات به من دهید، قضیهٔ فشردگی می‌گوید که این، اگر هر زیرمجموعهٔ نامتناهی‌اش از این جمله‌ها، یک مدل داشته باشد، کلش یک مدل دارد. حالا به نظر می‌رسد یک شباهتی دارد به آنچه شما می‌خواهید، ولی شاید آن‌قدر نباشد. بعد، از این استفاده‌های مختلف می‌کنند، من مثلا یک استفادهٔ نمونه بگویم: مثلا شما فرض کنید که یک حکمی نوشتید در زبان نظریهٔ حلقه‌ها، یک چیزی نوشتید که سور دارد، به ازای هر، وجود دارد، and و or دارد، عرض به حضورتان که ضرب و جمع چندجمله‌ای‌ها دارد، آن‌چه که معمول است، در زبان خیلی پایه‌ای حلقه. و دوباره تاکید می‌کنم که چیزی دربارهٔ همهٔ ایده‌آل‌ها، و وجود دارد ایده‌آل و این‌ها نمی‌گویید، اما مثلا می‌توانید بگویید برای هر r داخل آن حلقه‌تان، که یک حلقهٔ مشخصی دارید و دارید این‌جا از آن حرف می‌زنید و توصیفش می‌کنید و یک حرف‌هایی می‌توانید بزنید. می‌توانید بگویید این میدان است و غیره. اگر یک حکمی را ثابت کنید، این از نتیجه‌های فشردگی است، اگر یک حکمی را ثابت کنیم برای مثلا میدان‌ها، ولی برای هر میدان، عرض به حضورتان که، بگذارید این‌طور

بگم، برای اینکه غلط نگفته باشم، می‌خواهم هم غلط نگویم، و هم برای این‌که دسترس‌پذیرتر باشد، باید یک مقدار تغییراتی بدهم، ولی نه این نمی‌ارزد به غلط گفتنش. دقیقش این است که اگر شما فرض کنید که یک حکمی دارید که این حکمتان به ازای هر مشخصهٔ ناصفر p، اگر شما بتوانید یک میدان با آن مشخصه پیدا کنید که این جمله در آن درست باشد، ولی برای هر p بتوانید این کار را بکنید، آنگاه حکمتان برای یک میدان با مشخصهٔ صفر هم درست است. یعنی یک‌جور حد اینجا هست، که اگر من بتوانم حکمم را در مثلا میدان‌های $\mathbb{Z}_p$ درست باشد، آن‌وقت در یک میدان با مشخصهٔ صفر هم درست است. این تسری می‌کند. این‌جا آن کوچک‌هایی که با آنها کار کردن آسان است، مشخصهٔ p دارد، که مثلا از قضا شاید بتوانیم برایش $\mathbb{Z}_p$ را برداریم، و آن مورد سخت‌تر مثلا، مشخصه‌اش صفر است. حالا بعد می‌توانیم فرض بکنیم که دربارهٔ میدان‌های بستهٔ جبری حرف می‌زنیم و انواع مختلف این بازی‌ها این‌جا هست. این یک پروسهٔ حدی مربوطه است، که انگار صفر حد همهٔ pها است. این یک نمونه، از این استفاده‌های مختلفی می‌توانند بکنند. اساسا یک جور کاربرد دیگرش این است که، مثلا می‌خواهند حکمی را برای یک مجموعهٔ عریض طویل مثلا ثابت بکنند، با یک ساختمان و این‌هایی که طرف دارد به فرض، و بعد کافی است برای همهٔ ساختمان‌های از آن جنس متناهی این کار را بکنند، بعد این به ارث می‌رسد، خود به خود به آن مجموعه بزرگ. این از استفاده‌های معمولی است که از فشردگی می‌کنند. و چیزهای خیلی بانمک و عجیب و غریب جبری هم می‌شود با آن ثابت کرد. یک نسخهٔ حالا جبری‌تری هم از این قضیه هست،که یک جور نسخهٔ فرمال آن اصل "local to global principle" مربوطه که در جبر عزیز دل مردم است، که آیا ممکن است که مثلا من به یک معنی‌ای از میدان موضعی برسم به میدان سرتاسری، یا مثلا یک مقدار خاص‌ترش، ریشهٔ چندجمله‌ای‌ها و غیره، از $\mathbb{Q}_p$های p-adic برسم به $\mathbb{Q}$، که بعد ما می‌دانیم که آن حدس در تاریخ درست نبوده است، برای معادلات درجهٔ ۳ به فرض. اما خب برای خیلی چیزهای دیگر درست است، از جمله مثلا برای معادلات درجهٔ ۲ و غیره، فرم‌های درجهٔ ۲، و نکته‌ام این است که آن هم قضیه‌ای است که اساسا از همین مسیر رد می‌شود، یعنی از فشردگی استفاده می‌شود در اثبات کردنش. و خب خود صورتش هم از همان جنس است دیگر، شما همه چیز را برای یک حکمی دارید حالا، نه لزوما هر حکمی، باید بسته‌بندی کنید دیگر حکم را با این شرایط دارید که، درست است برای همهٔ $\mathbb{Q}_p$ ها و در نتیجه برای $\mathbb{Q}$ هم درست است به فرض. این هم از همین جنس است. بنابراین، از این موجودات موجود است اتفاقا، اما خب در نظریهٔ اثبات نیست، در نظریهٔ مدل است که خیلی مهم نیست، به خاطر این‌که در این‌جا چیزی که برایتان مهم است این است که درست باشد در همهٔ مدل‌ها، مثلا خیلی مراقب این نیستید که حالا اثبات بشود، یا معادلا در نظریهٔ گروه‌ها اثبات شود، یا برای همهٔ گروه‌ها درست باشد. بنابراین، آن‌طور که معمول است جایش در نظریهٔ مدل است و عرضم به حضورتان، هستهٔ اصلی قضیه هم این است که برهان‌ها متناهی‌اند. یعنی از اینجا نتیجه می‌شود که برهان‌ها متناهی‌اند، برهان بلند نامتناهی نداریم. حالا طبیعی است که می‌توانید دنبال این بگردید که این را گسترش و این‌ها دهید. من چیزی که می‌خواهم بگویم این است که این را می‌گویند قضیهٔ فشردگی، به یک دلیلی. دلیلش هم این است که واقعا یک مثال فشردگی است واقعا، یعنی فشردگی توپولوژی، این یک حالت خاص آن است، که دقیق‌ترش این است که یک فضایی را می‌سازید و بعد ربط دارد به فضای تیخونوف یعنی به آن قضیهٔ مربوطهٔ تیخونوف که آخرش قرار است ثابت کنید که هر چندتا ضرب صفر و یک در هم، مجموعهٔ صفر و یک بولی، درست و غلط، هر چند تا ضرب کنید، این فشرده می‌ماند. چون ضرب چیزهای فشرده، فشرده است. اساسا کاهش پیدا می‌کند به این. و بعد می‌بینیم که عجیب

نیست، انگار آن چیزی که شما دلتان می‌خواهد، احتمالا آن بزرگ‌ترین فرمی که دلتان می‌خواهد را پیدا کنید، احتمالا دور نیست از همچین حال فشردگی‌ای. به این معنی که، حالا شاید هم باشد، به این معنی که فشردگی به شما گذر از متناهی به نامتناهی را می‌دهد. همانطور که در تعریف فشردگی و این‌ها هم هست. هر چند تا باز، نمی‌دانم هر چند تا متناهی تا باز، حالا شما انگار که یکجور فشردگی که جای متناهی را با یک جور orderی، یک جور چگال بودنی عوض می‌کنید که رفتارش این‌طور است که مثلا یک حالت خاص آن مفهوم چگالی‌ای که شما می‌گویید، زیرمجموعه‌های متناهی یک مجموعهٔ نامتناهی، همه‌اش را که بگیریم، این یک مجموعهٔ چگالی تشکیل می‌دهد، از همهٔ زیرمجموعه‌ها. مثلا X مجموعهٔ من است، P(X) مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌هایش است و متناهی‌ها این‌جا چگال‌اند، به فرض. فرمالیسم این، آن چیزی است که ما می‌شناسیم به فشردگی مثلا. حالا نسخهٔ ضعیفی از فشردگیِ توپولوژیک، اما نسخهٔ دقیقی از فشردگیِ مرتبهٔ اول، که همان فشردگی نظریهٔ مدلی که گفتم. ولی خب می‌توانم تصور کنم که شما نسخه‌های خیلی جالب‌تری دنبالش باشید که به فرض، یک جور notionی از چگال بودن داشته باشید که بعد احکام برای آن زیرساختمان‌ها درست باشند، برای کل درست باشند یا اگر برای نقطه‌ها درست باشند ،برای کل درست باشند. به هر حال، جواب خلاصه‌ای که باید می‌دادم این است که این اصلا نامعمول نیست، بلکه هم خیلی معمول است در نظریهٔ مدل‌ها و هم ابزار خیلی کمک‌کننده‌ای است و هم اصلا نوعِ نگرش طبیعی‌ای است به، عرض کنم که، به ساختمان‌های مرتبهٔ اول.

امیرحسین اکبرطباطبایی: تخیل‌تان را که گران است خرج کنید- و اما می‌رسیم به بحث کمابیش اصلی در حال حاضرمان، عرضم به حضورتان که می‌گویید که این جواب من همچین شما را قانع نمی‌کند که مثلا فشردگی، که حالا شما یک معادل دیگری از آن مثال می‌زنید همان وسط که دارید می‌گویید که ultraproduct مثلا، و بله می‌گویید، به یک معنی ما داریم همهٔ اینها را می‌سازیم در model theory و شما دنبال چیزی هستید که خب نتوانیم بسازیم. و این limit و colimit چه در توپولوژی چه در شکل مجردترش در نظریهٔ رسته‌ها، این‌ها کافی نیست. می‌گویید این‌ها یک مقدار دم‌دستی است، شما یک چیز متعالی‌تری مدنظرتان است. که من همزمان که یک حسی دارم که، یک حس خیلی مبهمی دارم که می‌فهمم چه می‌گویید، بالاخره برای من واجب است که آن گیری که می‌گویید شما را باید بیندازم، بیندازم. که خب پس برای من یک مثال بزنید. استدلالم هم این هست و نیست، یک بخشی از آن همان‌طور که می‌فرمایید این است که خب ما همه چیز را می‌سازیم، تعریف می‌کنیم، بدون این‌ها که من نمی‌توانم ریاضیاتی درست کنم که. پس آن خیالی که گران است را خرج باید بکنید اینجا ،که من حداقل بفهمم که مثلا شما دنبال چه می‌گردید. اما یک استدلال دیگر هم دارم. و آن این است که تا وقتی که مرزهای ساختمان برای شما روشن نباشد، این خیلی سؤال ناروشنی می‌شود. برای این‌که بالاخره من انتظار دارید که یک همچنین جهانی را، چه شما چه من، بالاخره یکی، یک مثالی از آن داشته باشد دیگر. جهانی متعالی که تحت تسلط مطلق ساختمان به فرض نیست. محدود نباشد به آنی که من آن را برای شما بیان کنم یا بسازم، حالا یه یک معنی‌ای، هرجوری، انگار یک جوری ساختمش، اگر ساختمان مفهومش خیلی روشن و حالا خیلی خیلی روشن هم نه، ولی بالاخره چیز محدودی نباشد، من هر آنی می‌توانم ادعا بکنم که ساختمان است و بنابراین ساخته‌ام دیگر. یک ساختمان را باید یک جایی محدود بکنیم و بعد آن‌چه بیرون است را بگوییم امری ناساختنی یا به

تعبیری متعالی و بعد آنوقت از من بپرسید که حالا این‌جا می‌توانی آن کارها را بکنی یا نه. به یک تعبیری که به نظرم تعبیر نامربوطی هم نیست، می‌شود. مثلا یک وقتی می‌توان فکر کرد که ساختمان یک موجود جبری است به فرض. موجود finitery جبری است، و بعد آن‌وقت حد حقیقتا شما را به امر متعالی می‌رساند. حد کاری می‌کند که معمول نیست آدمیزاد بکند. یا مثلا در مورد حالا همان حد در امر چگال و غیره هم همین است، از یک جنس‌اند دیگر. یا مثلا درمورد فشردگی، شما می‌توانید بگویید که من دارم با موجودات متناهی کار می‌کنم و متناهی‌ای که می‌توانم مثلا تعریفش را بنویسم در چند خط و این‌ها، یا اصلا تعریف‌پذیر به یک معنی‌ای در جبر و غیره، در نظریهٔ مدل و غیره، این‌ها موجودات مورد علاقهٔ من هستند و من اینها را مجاز می‌دانم و ساختنی و غیره. و خب این‌جا روشن است که دوباره حد واقعا برای شما دارد کاری می‌کند، شما را دارد می‌برد به مرحلهٔ دیگری، و حد، واقعا گذشتن از متناهی است به نامتناهی، گذر است از جبری به توپولوژیک به فرض و غیره. ولی متوجهم که شما می‌توانید بگویید که نه، حد هم بالاخره یک جور ساختن است، ولی اگر قرار باشد حد هم یک‌جور ساختن باشد، آن‌وقت حد ساختنتان را باید کجا بگیریم؟ چون من آن‌وقت اگر یک چیزی هم باشد که با حد نشود ساخت، احتمالا با یک چیز دیگر می‌سازمش که به شما ارائه می‌کنم و بعد شما دوباره همین را، می‌گویید نه، آن هم که ساختن است. باید معلوم باشد یک مقدار که چی ساختن نیست. به اضافهٔ یک نکته‌ای هم که می‌گویید که، می‌گویید که نه، آنی را که دوست دارید دنبالش هستید در واقع، یک جور حد، حد منطقی است نه از این جنس توپولوژی و این‌ها. من خیلی اینها را مجزا از هم نمی‌بینم حقیقتا. یعنی تصور می‌کنم که منطق بیان متفاوتی است با موجودات معمولی که ما بلدیم. یکم دست و بالش بازتر است اصولا، از جبر به معنی معمولش که فقط یک ساختمان است و یک سری روابطی روی آن هست و غیره. این‌جا یک مقدار دست و بالمان بازتر است. ولی علی الاصول یک نسخهٔ جبر یا به‌طور دوگان، توپولوژی که خیلی چیز جدایی نیست، و یک جور تفاوت در نمایش است، در نوع نگاه فلسفی به مطلب. به این معنی، من تصور می‌کنم که هر چیزی که من به معنی‌ای بستار حد منطقی باشد، که شما دنبالش هستید، اگرچه motivateید با فلسفه و جهانتان که خیلی بزرگ است و ما فقط پاره‌ای از آن را دسترسی داریم و می‌فهمیم و می‌خواهیم حالا دربارهٔ همه، یک چیزهایی بگوییم، خیلی من دور نمی‌بینم که اگر یک روزی به فرض یک فرمالیسمی هم ارائه دادیم که شما دوست داشته باشید، آن همچین دور هم نیست از جبر، احتمالا اتفاقا مادر همهٔ حدهای دیگر هم هست، یعنی بسته به اینکه به اندازهٔ کافی اگر مجرد نوشته باشید، احتمالا همه‌جا می‌توانید استفاده کنید، و حد معمول، و نمی‌دانم حد توپولوژیک هم همه حالت‌های خاص این باشند. تصورم این است که حتی می‌شود گفت این یک‌جور [???] است که اگر آن جواب خوبی باشد، باید اینها حالت‌های خاصش باشند. به این معنی، حد منطقی را من چیز دیگری نمی‌بینم، کما این‌که حالا حرف من را یک مقداری هم تایید می‌کند: مثلا تجربهٔ نظریهٔ مدل. آنجا می‌بینید که همهٔ اینها در واقع ساختمان‌های معمولی‌اند که ما داریم جای دیگری استفاده می‌کنیم. همانطوری که مثلا می‌زنید مثلا ultraproduct، خب مثال خوبی است دیگر، که من آنجا دارم یک ultraproduct می‌سازم، حالا همچنین کار عجیبی هم دارم نمی‌کنم؛ که می‌شود تعبیر که به امری جبری، امری مطلقا جبری، که حالا شما دارید مثلا یک فیلتری، یا فرا-فیلتر دارید و بعد بر آن تقسیم می‌کنید، ضرب می‌کنید و تقسیم می‌کنید و غیره، که این کار را من می‌توانم مدعی شوم که هم می‌توانم خوانش فلسفی از آن داشته باشم، فیلتر به عنوان آن چیزهایی که درست است و خب چون درست را کلاسیک دارم می‌گیرم، بنابراین فرا-فیلتر است. هر چیزی که درست است یا درست نیست یعنی نقیضش درست است، و بعد ضرب می‌کنم این‌ها را به

منزلهٔ چیزهایی که در زمان تغییر می‌کنند و بعد تقسیم می‌کنم به یک جور رابطهٔ هم‌ارزی که motivated است بر اساس یک‌جور ارزش درستی، می‌توانم این بارِ فلسفی را به آن بدهم، که باید هم بدهم که از آنجا motivate شده است. اما اساسا دارم یک کار جبری می‌کنم، و تازه به اندازهٔ کافی هم این چیز نیست، کلی نیست که همهٔ مابقی ساختمان‌ها را از توی آن در بیاورم. اما به هر حال، اصل حرفم این است که این مرز ساختمان خیلی ناروشن است این‌جا، و این خب خطرناک است. ولی خب شما احتمالا باید یک مثال دم‌دستی‌ای داشته باشید که حالا همچین هم سر و ته روشنی ندارد حالا، در آن ساختن تعریف نشده است و این‌ها، اما عوضش یک حسی می‌دهد که ها! من وقتی می‌گویم یک چیزی که بیرون دسترسی ماست به عنوان یک کل، منظورم چیست؟ خب این خیلی به جزئیات بستگی دارد، مثلا من می‌توانم تصور بکنم که شما به فرض یک sheafی داشته باشید اصلا، به عنوان یک فضایی که یک global section اصلا ندارد، یا آن‌طور که مثلا در point free topology دارند که مثلا یک فضایی دارید که هیچ نقطه‌ای ندارد، به تعبیری هیچ مدلی ندارد، انگار که یک نظریه‌ای دارید که هیچ مدلی ندارد، مدل به معنی معمول finitery، من می‌توانم این‌ها را همه را تصور بکنم به موجوداتی که بیرون دسترس من هستند. بالاخص در مورد sheaf من می‌توانم تصور بکنم که با یک دنیایی طرف هستم که بزرگ‌تر از این است که در چنگ من بیفتد و تنها داده‌ای که من از این دارم محلی است. یعنی می‌توانم این را به طور محلی کاوش کنم، اینجایش را ببینم، آنجایش را ببینم، همهٔ داده‌ها را با هم بدوزم و این لحاف چهل‌تکه را بگویم همهٔ درک من از آن جهان به فرض. و خب آن‌جا مثلا شما می‌توانید بگویید ساختمان به فرض، خیلی دارم البته مفهوم ساختمان را باز می‌گیرم، متوجهم ولی ساختمان را می‌توانید با این local probeها درنظر بگیرید، یعنی توابعی که من به طور محلی دارم می‌نویسم و اینها، و کل را هم از آن‌جایی که هیچ global sectionی نداریم، شما می‌توانید بگویید که بابا اصلا یک سندی است که این در چنگ من در نمی‌آید این جهان، در چنگِ ساختن معمول با توابع با مقدار حقیقی بیاییم نگاه بکنیم، این کافی نیست. باید محلی نگاه بکنیم و هی به هم بچسبانیم، راهی نداریم دیگر جز این. حالا الی ماشاالله دیگر این گذر از محلی به سرتاسری را شما هر کجا می‌توانید ببرید، کل هندسه اساسا همین است، غیر از این است؟ انواع مختلف از این مثال‌ها هست که من می‌توانم با آن هم‌زاد پنداری بکنم و اینی را که شما می‌گویید متوجهم، ولی این همه‌شان بر اساس این هستند که یکجور notion معقولی که حالا motivate شده، مثلا در مورد منیفلدی که الآن مثال زدم، در این مورد مثلا motivate شده با این‌که ما به عنوان آدمیزاد مثلا، یا به عنوان هندسه‌دان خب، محلی ما می‌توانیم اینجا نقشه بکشیم، و درک بکنیم جهان را مثلا. این طبیعی است که بگویم من به این که این ابزار درک من است، این ابزار ساختمان است، شاید حتی بخواهم جرئت بکنم یک variantی ارائه بدهم از چیزی که البته شما نگفته‌اید کامل. بگویم ساختمان یک مقدار دست و پا گیر است، ساختمان را جایگزین کنید با «observable» به یک معنی‌ای. یعنی آنچه که من، به عنوان آدم مثلا، با یک سری محدودیت‌هایی، توانایی‌هایی، گاهی این توانایی‌های مثلا مبنایی به این معنی که مثلا من متناهی فقط می‌فهمم چون آدمی‌زاد هستم مثلا، گاهی این‌طور است که من به عنوان آدم مثلا، فقط محلی می‌توانم یک فضا را بفهمم، به خاطر اینکه توابع روی یک بازهای کوچکی مثلا قابل فهم‌اند، حقیقی مقدار فقط برای من قابل فهم است به فرض. یا اصلا همین observable یک وقت به این معنی است که اگر یک نیم‌نگاهی داشته باشیم به کوانتوم، به این معنی است که مثلا من یک‌جور تبدیلات خطی‌ای در دسترس من است واقعا، بالاخره یک موجوداتی در دسترس من است و بعد شما می‌خواهید این موجودات را با جوری از چسب، آن عالم بالا را بفهمید، آن عالمی را که

نیست بفهمید! حالا آن عالم را چطور باید بفهمیم؟ به چه معنی‌ای؟ و بهترین فرمالیزیشنی که من از این در ذهن دارم، حالا اگر دارید هندسی فکر می‌کنید، می‌توانید جبری هم فکر بکنید، همان حرف colimitی است که همان دفعهٔ اول زدم. حالا فرمال‌ترش این است که شما یک رسته یا موجوداتی دارید، حالا می‌توانند آن گوی‌های باز باشند و غیره و این‌ها، و بعد از این‌ها اجازه دارید که به هم بچسبانیدشان که می‌شود colimit و بعد می‌روید در توپوس مربوطه که روی [site] نوشتید در مجموعه مثلا به توان C opposite به فرض. و وقتی می‌روید آن‌جا، آن‌جا موجوداتی در واقع دارید که ظاهرا فانکتور هستند، ولی اساسا مجموعهٔ همهٔ probeهای ممکن یک فضا را جمع کرده‌اید یک جا، که به شکل coherent زدید زیر بغلتان و می‌گویید که این عالم متعالی چیزی نیست، جز آن‌چه که من می‌توانم ببینم از آن، همه با هم، در یک زمان، به عنوان یک فانکتور مثلا. این تعبیر را من درک می‌کنم و می‌توانم یک عالمه چیزها درباره‌اش این‌طوری مثلا پیاده کنیم، ولی خب باز شما مثلا متوجهم که می‌آیید و آن حرف را می‌زنید و می‌گویید که خب، الآن داریم جهان را می‌شناسیم. اصلا شما جهان را مساوی گرفتی، آن جهان متعالی را مساوی گرفتی با میزان مشاهده‌های من، گفتی همهٔ مشاهده‌های من، یک‌جا آن فانکتوره، خود آن جهان است. نگفتی که جهان چیز بیشتری است که ما با این نگاه می‌کنیم به آن و دوباره همان دعوا را ما می‌توانیم بکنیم، حالا در نسخهٔ یک مقدار فرمال‌ترش که خب پس آن جهان را چه بگیرم من اصلا آن، انگار که داریم دعوای تعبیر کوپنهاکی از مکانیک کوانتوم را با تعبیر معمول deterministicش با هم داریم می‌کنیم دعوا. من انگار دارم به شما می‌گویم که اگر یک چیزی را نمی‌شود مشاهده کرد، آن به چه معنی اصلا کمیت فیزیکی است مثلا؟ و شما می‌گویید که نه، آن فیزیک یک عالمی جداست، هست و من دارم آن را مشاهده می‌کنم و یک جاهایی‌اش را هم نمی‌توانم مشاهده بکنم. و من می‌گویم که آن جایی در فیزیک ندارد آن‌وقت. همان حرف را داریم با یک نسخهٔ دیگرش همین‌جا می‌زنیم کم و بیش. آن‌چنان هم دور نیست، ولی خب به هر حال نکتهٔ اصلی‌ام از این مثال و این‌ها این بود که بگویم که شاید بشود مفهوم ساختن را گسترش داد به یک جور مشاهده‌پذیری‌ای که حالا ساختنی بودن یک چیزی هم یک مصداق مشاهده پذیرش است و بعد دربارهٔ آیا مشاهده ناپذیری که نشود کاهشش داد به مشاهده‌پذیرها هست و معنی‌دار است پرسیدن یک همچنین چیزی یا نه، و اگر هست به چه معنی‌ای معنی‌دار است، مثلا یک مثال قابل تصور است یا نه. حالا من خواهش می‌کنم از شما که آن تخیلی که گران است را خرج کنید و یک مثال کمابیش قانع‌کننده‌ای پیدا بکنیم که واقعا می‌شود از یک جهان متعالی‌ای حرف زد که نه‌تنها با مشاهده‌های معمول، بلکه هم اساسا غیرقابل دسترس باشد که یک کم عجیب خواهد بود و این‌ها. حالا به هر حال این هم از این.

آرش رستگار: حکمت پارادایم- عرض شود که پس من تکلیف سختم را انجام می‌دهم. بد نیست اگر فرصت داشتید، در ریسرچ گیت اخیرا من یک مقاله‌ای گذاشتم که اسمش هست حکمت پارادایم، که یک قسمتی از تیترش این است، اگر آن مقاله را ببینید راجع به این است که من در دوران دانشجویی چگونه ریاضی انجام می‌دادم و راجع به پرش بین فرمول‌بندی‌های مختلف یک تئوری است. آن را اگر ببینید، کمک می‌کند به این بحث ما. ولی خلاصه این است که ما یک حقیقتی داریم که تجلی می‌کند در زمین بازی‌های مختلفی، که این‌ها می‌شوند تئوری‌هایی که بین این‌ها آنالوژی برقرار است و این می‌شود آن چیزهایی که ما مشاهده می‌کنیم و از این‌ها می‌خواهیم راجع به آن حقیقت پشت صحنه که تجلی کرده و در دسترس ما نیست

صحبت کنیم. یا این‌که اصلا این آنالوژی‌ها را further توسعه دهیم با کمک مقایسه‌شان، این می‌شود حکمت فراپارادایم. حکمت پارادایم این می‌شود که فرمول‌بندی‌های مختلف یک تئوری را ما با هم مقایسه بکنیم، و چگونه بین اینها پرش بکنیم در شناختمان، برای فهم بهتر آن چیزی که تجلی کرده، حقیقتی تجلی کرده و این فرمول‌بندی‌های مختلف را داده است. این‌ها فکرهای کلیدی‌ای است که آن مقالهٔ حکمت پارادایم شاید بتواند روشن‌تر بیان کند و مثال بزند. و این یک استایل ریاضی‌ای است که خب مصادیقش کم است، ریاضیدانان کمی هستند که با این استایل ریاضی انجام می‌دهند. بعد باید آن‌ها را خواند. یک نقل قولی هست از آندره ویل، بعضی‌ها می‌گویند از باناخ، که راجع به این موضوع است. این پشت صحنهٔ حرف من، ولی آن کامنتی که شما کلمهٔ مشاهده‌پذیر را استفاده کردید، خیلی کلیدی است و شما یک راهی را در فلسفه باز کردی با این حرفت، و یک عالمه حکمت‌هایی که در فیزیک develop شده، در کوآنتوم develop شده را راه دادی به اینجا. و خیلی کار بزرگی بود این کلمه را استفاده کردن. حالا من بعدا یک قصری از این بسازم. ولی الآن به همان مثال‌های خودم قناعت می‌کنم.

آرش رستگار: مشاهده ناپذیرها- عرض شود که، مثال اول، مال خیلی سال پیش است شاید آن موقع ۱۸ سالم بود. داستان این است که دکتر اسدی، استاد دانشگاه ویسکانسین، که اصالتا یک توپولوژیست بود و شاگرد براودر، می‌آمد ایران و سه تا دوستش را می‌آورد که برای ما کنفرانس می‌گذاشتند، که ما Arakelov theory یاد بگیریم. من و علی رجایی علاقه‌مند بودیم به نظریهٔ آرکلوف، دوستانمان هم بودند، آنها کوچکتر بودند. این سه نفر، نوربرت شاپاخر، پیتر اشنایدر و اووه یانسن بودند. اووه یانسن، یادم است وقتی پرینستون بودم، کتز آن موقع سال حالا ۹۳، می‌گفت تنها قضیه‌ای که در نظریهٔ motive وجود دارد، کار اووه یانسن است. حالا ما چند سال قبلش، یک سال، دو سال، سه سال قبلش، با این‌ها آن موقع ایتالیا بودیم، در آی سی تی پی و دعوت کردیم، من عجب نادان بودم، ۱۸ سالم بود .گفتم که می‌شود شما نوربرت شاپاخر، پیتر اشنایدر و اووه یانسن و دکتر اسدی مهمان شوید یک شنبه ظهر، که غذا نمی‌دهد آی سی تی پی، بیایید اتاق ما در گالیلئو و ما شما را میهمان کنیم؟ عجب نادانی! بعد آن‌ها گفتند حتما می‌آییم، باشد. بعد من و علی رجایی رفتیم از سوپر مارکت یک سری غذاهای سوپر مارکتی گرفتیم. مثلا یادم است یک ظرف‌های خیلی کوچک سالاد اولویه بود، یک نفره، که گوشت و این‌ها هم نداشت دیگر، چون ما آن موقع خیلی مهم بود برایمان حلال باشد، فقط سبزیجات بود و یک ذره نان و چیزهای مختلف، که آره، ما داریم از شما پذیرایی می‌کنیم. و بعد دکتر اسدی با ماشینی که کرایه کرده بود، و بعد من خیلی تعجب کردم که ایشان چرا در ایتالیا ماشین دارد؟ اینجا که خانه‌اش نیست، با نوربرت شاپاخر رفته بودند یک مرغ سوخاری بزرگ، یک جعبهٔ بزرگ مرغ سوخاری گرفتند و دکتر اسدی آمد در اتاق و آن را گذاشت وسط میز بعد گفت که "This is my contribution" و ما را نجات داد. دو تا فنقله بچه، آدم بزرگ‌ها را دعوت کرده بودند. آن‌جا من از نوربرت شاپاخر، او بعدا رفت در تاریخ ریاضی ولی در نظریهٔ اعداد بود آن موقع، این سؤال را پرسیدم که سؤال الآن مبسوط‌تر می‌گویم. شما $\mathbb{R}^2$، $\mathbb{Z}^2$، یک مدل گسسته از آن است. که این یکی می‌شود $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ و آن می‌شود $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. خب ولی $\mathbb{Z}^2$، حالا شما گراف کیلی‌اش را در نظر بگیرید که می‌شود یک شبکهٔ مربعی، یک آنالوگ ناجابجایی دارد که آن باشد F^2، گراف کیلی گروه آزاد روی دو تا عضو. و خب این سؤال مطرح می‌شود برای من، که این F^2، مشابه گسستهٔ چه موجود پیوسته‌ای است؟ من دو تا جواب

برای این داشتم، اگر می‌خواستم با هندسه بسازم، می‌گفتم فضای خم‌هایی را که از مبدا شروع می‌شوند در نظر بگیرید، اگر روی یک مسیر دو تا خم مساوی بودند، فضای مربوط به آن را مساوی بگیرید در صفحه، به محض آنکه دو تا مسیر مسیرشان از هم جدا شد، شما فرض کنید که وارد دو تا فضای، دو قسمت مختلف می‌شویم. یک چیزی شبیه به همان اتفاقی که در F^2 می‌افتد، آنتن شیطان به آن می‌گویند. بعد سؤال این بود که خب این یک صورت هندسی‌ای داری می‌دهی از آن فضا، به زبان جبری چه می‌شود؟ بعد به زبان جبری باید کار کرد. شما از $\mathbb{R}^2$ هم تصویر هندسی داری و هم تصویر جبری داری $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. و حدس من این بود که تصویر جبری‌اش $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ باشد. نوربرت شاپاخر این سؤال جذبش نکرد و گفت $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ خیلی حلقهٔ بزرگی است و این پایان مکالمه بود. ولی خب $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ چون $\mathbb{R}$ توپولوژی دارد، حتما یک توپولوژی خوبی دارد و حدس من این است که همان فضایی می‌شود که من با خم‌هایی که از مبدا شروع می‌شوند، درست کردم. ولی نتوانستم این را ثابت کنم. الآن هم نمی‌توانم ثابت بکنم. بنابراین، من دو تا کانستراکشن دارم، یکی هندسی و یکی جبری که analogyای بین اینها دارم و می‌توانم این طرف یک ریاضیاتی انجام دهم و آن طرف هم ریاضیاتی انجام دهم. conjecturally اینها the sameاند. ولی نمی‌توانم constructively بگویم این‌ها the sameاند. نمی‌توانم بسازم بگویم این‌ها چرا the sameاند، ولی این مثال، مثال ضعیفی است، چون conjecturally دو طرف آنالوژی یک چیزند، مثال قوی‌تر هم دارم.

آرش رستگار: یک نقد به منطق، و ارائه مثالی از مشاهده ناپذیرها- عرض شود که، خب یک انتقادی که من به منطق دارم، و خب این تقصیر از فرگه و این‌ها نیست، برنامه‌ای که اصلا لایبنیتز طراحی کرد، این ضعف را دارد. و کانت هم متوجه این ضعف نشد. حالا قبل از این‌که ضعف اصلی را بگویم، شما در هندسه‌های هذلولوی و کروی و این‌ها، دوگانی ندارید، سه‌گانی است. یعنی یا می‌گویید که از هر نقطه خارج از خط یک خط موازی می‌شود رسم کرد، یا می‌گویید که نمی‌شود رسم کرد، یا می‌گویید بینهایت‌تا. این باید در منطق وجود داشته باشد. چرا می‌گویند اصلا یک گزاره و نقیض آن؟ خیلی ضعیف است این مدل. حالا بگذریم، از این چیزها بگذریم. چیز مهمتر این است: شما می‌آیید می‌گویید باشد، فرض کنید از یک نقطه خارج یک خط هیچ خط موازی‌ای نمی‌توانیم رسم کنیم، می‌شود هندسهٔ کروی و ما مثلثات کروی را درست می‌کنیم، بطلمیوس درست کرد. بعد می‌گویید که خب در هندسهٔ اقلیدسی که یک خط موازی می‌توان رسم کرد، بعد می‌آیید هندسهٔ اقلیدسی را درست می‌کنید، اصلا by analogy، یعنی قضیهٔ سینوس‌های هندسهٔ اقلیدسی در تاریخ ثبت شده. ابن سینا سر کلاس ابونصر عراقی بود، آن درس داد قضیهٔ سینوس‌های بطلمیوس را و ابن سینا گفتش که خب analogue این در هندسهٔ اقلیدسی چه می‌شود؟ فردایش آن ابونصر عراقی آمد، با یک رساله که قضیهٔ سینوس‌ها را ثابت کرده بود. پس می‌دانستند by analogy. بعد هندسهٔ هذلولوی آمد، حتی فکر کنم خود لباچفسکی، مثلثات هذلولوی را برای سینوس هایپربولیک و کسینوس هایپربولیک درست کرد، و به گمانم آن‌ها نمی‌دانستند اصلا $\frac{(e^x+e^{-x})}{2}$ مثلا فرمولش است. ولی بعد دیدیم، عجب، مثلثات هذلولوی عین مثلثات کروی است، عین مثلثات اقلیدسی است، قضیهٔ سینوس‌ها همان، قضیهٔ کسینوس‌ها همان، قشنگ آنالوژی است، شما یک ترجمهٔ کوچک انجام می‌دهید، همهٔ قضیه‌ها به آن‌طرف ترجمه می‌شود. بعد من از منطق‌دان می‌پرسم که چه شد؟ بالاخره از یک نقطه خارج خط، این

تئوری مثلثات را درست کردی، یک خط موازی می‌شود رسم کرد، یا هیچی نمی‌توان رسم کرد، یا بی‌نهایت تا می‌شود رسم کرد؟ چرا پس جفتش شد یک تئوری؟ پس این‌ها عین هم هستند، آنالوژی دارند. منطق‌دان، چه می‌توانی بگویی؟ می‌گویی که پس اصلا این اصل موضوعۀ توازی مهم نبود، برش دارید. نمی‌گوییم اصلا از یک نقطه خارج خط، خط موازی می‌شود رسم کرد، یا نه. اصلا مفهوم توازی را برداریم. به منطق‌دان می‌گوییم که خب، شما چه می‌گویی؟ بعد می‌گوید من هیچ چیز نمی‌توانم بگویم. بعد می‌گوییم خب، حالا تو یک فرضی راجع به توازی بکن، هر کدام از این سه تا را که دوست داشتی، بعد می‌گوید بیا این مثلثات. بعد می‌گویم که خب این فرض را یک جور دیگر فرض می‌کردی که همان بود، چگونه توضیح می‌دهی؟ می‌گوید هیچ چیز، من نمی‌توانم توضیح دهم. بنابراین منطق، خیلی ضعیف است. به حقیقت پشت صحنه توسعه پیدا نمی‌کند، راجع به آن نمی‌تواند صحبت کند. ولی ما همه‌اش داریم از این استفاده می‌کنیم. ما همه‌اش داریم از آنالوژی‌ها استفاده می‌کنیم، بلکه خیلی گسترده‌تر، ما همه‌اش داریم از استعاره‌ها استفاده می‌کنیم. حالا شما می‌توانی مراجعه بکنی به این نظریۀ انقلاب دوم زبان‌شناسی لاکف که بعد از چامسکی است که تحت تاثیر انقلاب‌هایی است که در علوم شناختی تحت تاثیر نوروساینس و کشفیات آن به وجود آمده است. می‌توانید مراجعه بکنید به مقالۀ منین راجع به استعاره در ریاضیات و این‌که چرا کامپیوتر هرگز نخواهد توانست ریاضی انجام بدهد مثل ریاضیدان‌ها، چون استعاره را نمی‌فهمد. و بعد هم بروید و بپرسید که اوه پس چرا جی‌پی‌تی شعر می‌تواند بگوید؟ یک شعر را می‌دهی و می‌گویی به سبک شکسپیر بگو، برایت مثل شکسپیر می‌گوید، می‌گویی به سبک دانته بگو، برایت مثل دانته می‌گوید، پس چرا می‌تواند؟ چه چیز را نمی‌تواند؟ چه چیز را می‌تواند؟ خب، برگردیم به مقالۀ علی خزلی، مقالۀ علی خزلی دارد می‌گوید که، ما می‌توانیم زبان درست کنیم، زبانی که فراتر از مدل باشد، فراتر از انتخابی باشد که اصل موضوعۀ توازی می‌کند از آن سه‌راهی. می‌شود. خب چرا نکنیم؟ می‌شود فراتر از زبان رفت. به یک معنی‌ای فراتر از مدل رفت. زبان می‌تواند فراتر از مدل برود. به معنا علی خزلی نه به معنایی که الآن در منطق هست. یعنی در چندتا مدل حرف بزند، در چند تا تجلی یک حقیقت حرف بزند و در هر کدام از آن زمین‌های بازی ببیند که آری! دارد راست می‌گوید! و یک قضایایی ثابت کند، این قضایا analog هستند، ولی دقیقا یکی نیستند. در این دنیا یک چیز است، در آن دنیا یک چیز است. می‌شود این‌طوری حرف زد. چرا منطق به همچنین achievementی دست پیدا نکرده؟