# نگاهی نظریه محور به تاریخ ریاضیات

**آرش رستگار**

**خلاصه_** در این دیدگاه نظریات ریاضی به عنوان جریانهایی که وقایع تاریخ ریاضیات را به هم می پیوندند در نظر گرفته می شوند. مقالات مشابهی در باب نگاه مفهوم محور، مسئله محور، شناخت محور و حقیقت محور به تاریخ ریاضیات نگاشته شده که این مقاله در آن سری از مقالات می گنجد. تاریخ تحول نظریات ریاضی مدلی کوچک از تاریخ تحول ریاضیات است که می تواند به عنوان مدلی برای بررسی این تحولات به کار رود.

**مقدمه_**تاریخ تحول قدیمی ترین نظریه ها طولانی ترین مدل برای بررسی تحولات ریاضی است. نظریه هندسه اقلیدسی و نظریه معادلات دیوفانتی نظریاتی بسیار قدیمی هستند که با نام دو ریاضی دان یونانی نام گذاری شده اند. تاریخ تحول این نظریات و تاریخ تحول اهمیت این نظریات در بین سایر نظریات ریاضی می تواند درسهای زیادی در مورد تاریخ تحول ریاضیات در خود داشته باشد. نظریه معادلات چند جمله ای نیز در یونان باستان متولد شد. اروپای قرن شانزدهم محل تولد نظریه هندسه تحلیلی، نظریه حساب دیفرانسیل و نظریه حساب انتگرال و نظریه معادلات دیفرانسیل بودند. قرن نوزدهم زمان تولد نظریه مدرن اعداد، نظریه فضاهای هندسی، نظریه توپولوژی جبری، نظریه مجموعه ها و نظریه منطق ریاضی بودند. قرن بیستم عصر تولید بسیاری از نظریات ریاضی بود که تاریخ تحول طولانی و بلند نداشتند. هم تعداد زیاد این نظریات و هم تاریخ تحول کوتاه آنها، نظریات ریاضی را که در قرن بیستم متولد شدند خارج از موضوع مطالعه ما قرار می دهد. اینکه چرا یونان باستان و اروپای رنسانس و قرن نوزدهم دروازه عصر جدید، گهواره چندین نظریه بودند، به اوضاع اجتماعی این اعصار بازمی گردد. اینکه چه شرایطی در تاریخ تمدن بستر جامعه را برای توسعه ریاضیات هموار می سازند موضوع مطالعه ما در این مقاله نیست و در کتاب "اندیشه ریاضی در بستر تاریخ تمدن" به آن پرداخته ایم. بررسی شباهتهای بین تحولات این نظریات نیز به همان بستر اجتماعی مربوط می شود که در اینجا به آن نمی پردازیم. برخی از این نظریات در برهه ای افول کرده اند مانند نظریه هندسه اقلیدسی و برخی هنوز شادابند و به شکوفایی خود ادامه می دهند. مثل نظریه معادلات دیوفانتی. این پدیده که دو نظریه کاملاً مستقل در هم ادغام شوند، در لیست نظریاتی که ما مورد مطالعه قرار می دهیم دیده نمی شود. مثل نظریه حساب دیفرانسیل و نظریه حساب انتگرال.

## 1- نظریه هندسه اقلیدسی

هندسه اقلیدسی در واقع توسط تالس بنیان گذاشته شد و به دنبال فلسفه علم ارسطو در کتاب "اصول اقلیدس" هندسه اقلیدسی بر مبنای قضیه و برهان بود و از اصول موضوعه شروع می شد، فرمولبندی شد. یک انقلاب در اصول هندسه اقلیدسی، ظهور مثلثات بود که از مثلثات کروی و در نتیجه مطالعه نجوم و کرۀ سماوی وارد هندسه اقلیدسی شد، تشابه مثلثات کروی و مثلثات اقلیدسی از اولین دیکشنریهایی بود که

در ریاضیات ظاهر شد. روش اثبات محاسباتی توسط مثلثات به زودی به روش اثبات با روابط طولی توسعه یافت و بسیاری از این پیشرفتها توسط مسلمانان انجام گرفت. در قرن شانزدهم به بعد چند انقلاب رخ داد. یکی ظهور هندسه تحلیلی که جداگانه آن را و عواقب آن را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. یکی ظهور هندسه تصویری و تبدیلهای تصویری و اثبات به کمک تبدیلهای تصویری . البته اثبات به کمک تبدیل قبلا توسط ابن هیثم پایه گذاری شده بود. ابن هیثم از کار با عدسیها ایده گرفت و ایده تبدیل هندسی را به کار برد. بعد ها لایبنیتز از کارهای ابن هیثم الهام گرفت و ایده تبدیلهای هندسی را توسعه داد. ولی پاسکال و دزارک در توسعه هندسه تصویری و اثبات به کمک تبدیلهای هندسی پیشرفت زیادی کردند. هندسه روابط طولی منجر به تبدیل قطب و قطبی و اعداد مختلط مستقیم یا غیر مستقیم منجر به ظهور انعکاس شد. اینجا هندسه اقلیدسی به کمال خود رسید و باقی داستان هندسه اقلیدسی را باید از طریق هندسه جبری حقیقی دنبال کرد. نیوتون حجم زیادی از تحقیقات خود را به رده بندی خمهای درجه سوم در صفحه اختصاص داد. پس از کشف اعداد مختلط رده بندیهای نیوتون ارزش خود را از دست دادند. مهمترین انقلاب در هندسه اقلیدسی کشف هندسه هذلولوی بود. چرا که مدلهایی دیگر از هندسه اقلیدسی در هندسه هذلولوی و هندسه کروی قابل فرمولبندی بودند. برای مثال، دوایری که از یک نقطه می گذرند، در کره، می توانند توسط تصویر گنج نگاشتی هندسه اقلیدسی روی نیم کره را به دست بدهند و یا مرز فضای سه بعدی هذلولوی دارای هندسه اقلیدسی طبیعی است. و همینطور هندسه کروی و هندسه هذلولوی درون هندسه اقلیدسی اولین بار مدل شدند که مفهوم مدل ریاضی برای یکسری اصول موضوعه در اینجا ظهور پیدا کرد. در قرن نوزدهم که اعداد مختلط باب شدند، روشن شد که بسیاری از قضایای هندسه اقلیدسی قابل تعمیم به میدان اعداد مختلط نیستند و لذا باید هندسه اقلیدسی را به عنوان پدیده ای در هندسه جبری حقیقی دید. از همین رو داستان نظریه هندسه تحلیلی را که قابل تعمیم به میدان دلخواه است را از داستان نظریه هندسه اقلیدسی جداگانه مورد بررسی قرار می دهیم.

## 2- نظریه معادلات دیوفانتی

نظریه معادلات دیوفانتی توسط دیوفانتوس در یونان باستان فرمولبندی شد. اصل موضوعه سازی ریاضیات توسط اقلیدس در رشد آن تاثیر زیادی داشت. پیش از دیوفانتوس، حل صحیح معادله فیثاغورس در تمدن بابل سابقه داشت. جداول گلی بسیاری از سه تایی های فیثاغورسی در بین لوحه های گلی بابل در ایران یافت شد. حل معادلات دیوفانتی در تمدن اسلامی مورد توجه قرار بود. از جمله مربعهای وفقی که به نوعی معادله دیوفانتی بودند، بسیار مورد توجه قرار گرفتند. البته بسیاری از مربعهای وفقی را شاخه ای از ترکیبیات می دانند، اما اینکه چه اعدادی ساختار مربع وفقی می پذیرند، مسئله نظریه اعدادی است. پس از کارهای فرما در باره معادلات دیوفانتی خمهای بیضوی ( که البته هنوز در زمان او مفهوم خمهای بیضوی مطرح نشده بود) این نظریه دوباره مورد توجه قرار گرفت، اما هنوز به دانشمندان به حل مثالهای خاص اشتغال داشتند. اولین نظریه کلی در معادلات دیوفانتی در اوایل قرن بیستم مطرح شد. پوانکاره حدس زد که نقاط گویای خم بیضوی گویا یک گروه متناهیا تولید شده را تشکیل می دهند. این حدس توسط مردل ثابت شد و توسط ویل به ابعاد بالا تعمیم داده شد و روی میدان اعداد دلخواه مورد مطالعه قرار گرفت. مردل حدسی در مورد تناهی جوابهای یک خم جبری هذلولوی روی میدان عددی داشت که در اواخر قرن بیستم توسط فالتینگز به اثبات رسید. مهم ترین تکنیک در حل معادلات دیوفانتی نظریه ارتفاع است که منجر به نظریه آراکلو شد و شاخه ای موازی با هندسه جبری را شکل داد. نظریه خمهای بیضوی با نظریه نمایش گالوایی و نظریه فرمهای مدولار پیوند خورد و منجر به حل معادله فرما توسط وایلز

گردید. وایلز و شاگردانش ثابت کردند که هر خم بیضوی روی اعداد گویا مدولار است و این در راستای حدس لنگلندز در باب مدولار بودن همه بن مایه ها و در حالت خاص همه واریته ها جبری قرار داشت. نظریه جبری اعداد در واقع در پاسخ به حل معادلات دیوفانتی شکل گرفت و پیشرفت کرد. برخلاف هندسه اقلیدسی که در اوایل قرن بیستم به بعد دچار رکود شد. نظریه معادلات دیوفانتی از اوایل قرن بیستم به بعد شکوفا گردید و جزو مهمترین نظریات ریاضی قرار گرفت. البته باید هندسه جبری را به عنوان تعمیمی از هندسه تحلیلی زیرشاخه ای از نظریه هندسه اقلیدسی در نظر گرفت که در کنار نظریه اعداد از شکوفاترین شاخه های ریاضی است.

### 3- نظریه هندسه تحلیلی

نظریه هندسه تحلیلی در قرن شانزدهم فرمولبندی شد، ولی پیشینه آن روش جبری بود که توسط خوارزمی ابداع شد و اینکه خیام خط را به عنوان مدلی برای اعداد حقیقی و مدلی برای تغییر پیوسته و مدلی برای زمان در نظر گرفت. دکارت از کار خیام مطلع بود. هدف دکارت تایید این فلسفه بود که هر مسئله ریاضی را می توان به زبان جبری ترجمه کرد و سپس به کمک معادلات به روش جبری حل نمود. دکارت برای تایید این برنامه تحقیقاتی آن را برای هندسه اقلیدسی پیاده کرد. موفقیت دکارت چشم گیر بود. به خصوص اینکه خط دقیقا توسط معدله درجه یک و مقاطع مخروطی دقیقا توسط معادله درجه دوم رده بندی می شدند. دکارت با کمک هندسه تحلیلی مدلی نامتناهی برای فضا داد و مقدمه را برای فیزیک نیوتنی فراهم کرد. با این کار او فیزیک و ریاضیات هر دو را دچار انقلاب بزرگی کرد. در قرن هفدهم، رده بندی و رسم معادلات درجه سوم سالها نیوتن را به خود مشغول کرد و در قرن نوزدهم هندسه تحلیلی مختلط و واریته های آبلی در فضای افکنشی مختلط فرمولبندی شدند. هندسه جبری ایتالیایی شهود هندسی را ترویج کرد و هندسه جبری فرانسوی روشهای جبری را بعد از هیلبرت و مدرسه آلمان تقویت کرد. هندسه جبری روی میدانهای دلخواه و به خصوص میدانهای مشخصه متناهی با نظریه اعداد پیوند خورد و هندسه جبری روی حلقه جابجایی دلخواه نیز با نظریه آراکلو ارتباط پیدا کرد. نظریه رسته ها و نمایش پذیری و روشهای بعد از گروتندیک، انقلابی در هندسه جبری بوجود آورد. امروز هندسه جبری یکی از مرکزی ترین شاخه های ریاضیات است. همانطور که گفته شد می توان هندسه جبری را در ادامه هندسه اقلیدسی به حساب آورد. زبان رسته ها اما کاملا هندسه جبری را از فرمولبندی سنتی هندسی جدا کرده و منجر به فرمولبندی هندسه جبری ناجابجایی توسط رسته ی بافه های روی یک فضای هندسی کرد. در هندسه جبری ناجابجایی چنان در جبری سازی هندسه افراط شده بود که دیگر جایگاهی برای شهود هندسی باقی نمانده بود. ولی بسیاری از شاخه های دیگر هندسه جبری هنوز به حیات خود ادامه می دهند. برنامه لنگلندز و این حدس که هر بن مایه مدولار است، بین نظریه هندسی جبری و نظریه جبری اعداد و نظریه تحلیلی اعداد پیوندهای ناگسستنی فراوانی را ایجاد کرد. این دو نظریه امروز تبدیل به دو نظریه همسایه و مرتبط بدل شده اند و به نوعی وحدت یافته اند.

### 4- نظریه حساب دیفرانسیل

رسم خط مماس بر دایره و بیضی توسط خط کش و پرگار در ریاضیات باستان در عصر یونان رواج داشته. حتی رسم مماس بر برخی خمهای غیر متعارف مانند مارپیچ توسط هم عصران ارشمیدس انجام می شده است. اما مفهوم تابع در کارهای شرف الدین طوسی و بهاسکارا دیده می شود. پیدا کردن نقاط کمینه و یا بیشینه توسط خط مماس اولین بار توسط فرما مطرح شد و بعد از مطرح شدن مفهوم مشتق توسط

نیوتن و لایبنیتز منجر به ظهور شاخه بهینه سازی و حساب تغییرات گردید. قضیه استوکس نشان می دهد که اپراتور دیفرانسیل گیری و اپراتور مرز گیری دوگان یکدیگر هستند و هر دو اپراتور در فرمول لایبنیتز صدق می کنند. حساب تغییرات و همینطور حساب دیفرانسیل به نوبه خود تحولات چشمگیری در فرمولبندی فیزیک بوجود آوردند. البته نیوتن در کتاب اصول فلسفه طبیعی خود از روش حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده نکرد، بلکه از نوع هندسه اقلیدسی بی نهایت کوچکها بهره برد. اما بعد از نیوتن به سرعت فیزیک نیوتنی به حسابان ترجمه شد و در قرن هجدهم لاگرانژ فرمولبندی لاگرانژی و سپس هامیلتون فرمولبندی هامیلتونی از فیزیک نیوتنی را ارائه کردند که اساس مکانیک کلاسیک را تشکیل می دهد. در قرن بیستم حساب دیفرانسیل وارد جبر شد و هم به خمینه های بعد دلخواه کارتان تعمیم پیدا کرد. فرمهای دیفرانسیل معرفی شدند و پاد همانندی دورام تعریف شد. همینطور ایده دیفرانسیل چنان مجرد شد که در جبر همولوژی به کار رفت و سرانجام در جبرهای دیفرانسیلی مدرج به کار رفت که برای مدلسازی فضاهای مدولی استفاده می شد. آلن کن آن را در هندسه ناجابجایی به کار برد و همینطور وارد توپولوژی گردید و شاخه توپولوژی دیفرانسیل را تشکیل داد. مفهوم خمینه در دستان ریمان و گاوس و پوانکاره به پختگی رسید و توسط انیشتن در فرمول بندی نسبیت عام به کار گرفته شد. انیشتن اولین کسی بود که متریک را تحت معادلات دیفرانسیلی دگردیسی کرد و بعد از هشتاد سال این ایده توسط هامیلتون وارد ریاضی گردید و سر آخر منجر به اثبات حدس پوانکاره از طریق اثبات حدس ترستون برای خمینه های سه بعدی گردید. نظریه حساب دیفرانسیل به موازات نظریه حساب انتگرال رشد کرد، که البته بعضی از ابعاد توسعه نظریه حساب انتگرال مستقل از ایده مشتق بود. بنابراین این نظریه را به عنوان نظریه ای مستقل مطالعه خواهیم کرد.

## 5- نظریه حساب انتگرال

مساحت و حجم اشکال و احجام ساده هندسی توسط تمدنهای باستانی نظیر مصر و بابل بوسیله فرمولهای که اکثر آنها کم و بیش درست بودند، محاسبه می شد. تمدن یونان این فرمولها را منظم کرد و برای آنها اثبات دقیق ریاضی ارائه داد. نتیجه این تلاشها در کتاب اصول اقلیدس به نمایش گذاشته شد. نظریه مساحت توسط ارشمیدس بزرگترین ریاضیدان تاریخ به قطاع سهمی تعمیم داده شد. و نظریه بی نهایت کوچکها و مجموعهای نامتناهی بنیان گذاری شد. حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال نیز توسط نیوتن و لایبنیتز بازسازی شد و فرمولهای حجم و مساحت جانبی کره و مساحت دایره به طور دقیق تری اثبات شدند. حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال توسط قضیه اساسی حسابان به هم مربوط شدند و اولین ایده ها در این زمینه توسط ایزاک بارو استاد نیوتن داده شد. قضیه اساسی حسابان به ابعاد بالا تعمیم پیدا کرد و سرانجام به صورت قضیه استوکس درآمد. نظریه انتگرال فرمهای دیفرانسیل روی خمینه دلخواه در فرمولبندی نظریه پاد همانندی دورام به کار رفت. مفهوم اندازه و نظریه انتگرال لبگ انقلابی دیگر در مفهوم مساحت بود که به زودی در احتمالات و هم در نظریه ارگودیک به کار رفت. مفهوم مجموعه اندازه صفر به یکی از کلیدی ترین مفاهیم ریاضیات جزء نگرانه در ریاضیات کل نگر تبدیل شد. ضمنا مفهوم انتگرال در قرن نوزدهم در کنار مفهوم مشتق هر کدام به طریق دیگری به آنالیز مختلط وارد شدند و نظریه انتگرال روی مسیر مطرح شد که از مقدمات توپولوژی جبری بود. نظریه انتگرال روی مسیر در فیزیک کاربرد پیدا کرد و توسط فاینمن در نظریه انتگرالهای فاینمن به کار رفت. نظریه لاگرانژ و هامیلتون در مکانیک کلاسیک هم از مفهوم انتگرال به عنوان نوعی برهم نهی استفاده می کردند. مفهوم مرکز ثقل نیوتن هم باید نوعی برهم نهی تصور شود که مسلما با مفهوم انتگرال گره خورده است. انتگرال روی فضاهای p- نقش، نقش مهمی در نظریه فرمهای مدولارp- نقش و نظریه L- تابعهای p- نقش ایفا

کرد. این سری از ایده ها در تز تیت فرمولبندی شدند و بعد به حالتهای بسیار کلی تر تعمیم پیدا کردند. به موازات نظریه حساب دیفرانسیل و نظریه حساب انتگرال هم در حل معادلات دیفرانسیل کارآمد بودند و در واقع این دو نظریه به هم پیوسته و نظریه حسابان را تشکیل دادند که در نظریه معادلات دیفرانسیل و بسیاری از شاخه های دیگر ریاضیات کاربرد پیدا کرد.

## 6- نظریه معادلات دیفرانسیل

اواخر قرن هفدهم و تمام قرن هجدهم به بعد سالهای شکوفایی نظریه معادلات دیفرانسیل بودند و این شکوفایی همچنان ادامه دارد. نظریه معادلات دیفرانسیل یکی از کلیدی ترین روشهای کلی حل مسئله توسط بشر بوده است. مدلسازی پدیده های طبیعی با هیچ تکنیکی بهتر از معادلات دیفرانسیل ممکن نبوده است. معادلات دیفرانسیل لزوما با توابع ساده قابل حل نیستند. از این رو روشهای آنالیز عددی برای تقریب جوابها به کار آمدند و تا جایی پیش رفتند که آنالیزعددی به موازات آنالیز رشد کرد و تمام جنبه های آنالیز را در بر گرفت و همچون شاهراهی موازی با آنالیز به رشد و توسعه ادامه داد. از طرف دیگر حل معادلات دیفرانسیل روشی تحلیلی و جزء نگرانه به مقوله بررسی مدلهای ریاضی بود. در قرن بیستم حل کیفی معادلات دیفرانسیل مورد توجه قرار گرفت و منجر به ظهور شاخه ای به نام سیستمهای دینامیکی شد. در سیستمهای دینامیکی شیئ هندسی مورد مطالعه صلب نیست و در آن حرکت هست و اینکه حرکت شیئ مورد مطالعه در هندسه بررسی شود یکی از مراتب تجرید است که دیر اتفاق افتاد. ابتدا از هندسه تبدیلات شروع شد و کارهای ابن هیثم در نور و عدسی مقدمه ای شد برای تبدیلات و بعد لایبنیتز از ابن هیثم الهام گرفت و در آخر جوردن گروههای تبدیلات خطی را مطالعه کرد و در خاتمه کلاین در برنامه ارلانگن یک هندسه را با گروه تبدیلات آن رده بندی کرد. اما مطالعه کیفی معادلات دیفرانسیل از زمان پوانکاره شروع شد و کم کم ریاضیدانان زبان مختلط را نیز مورد مطالعه قرار دادند و مفهوم برگبندی مورد مطالعه قرار گرفت و پیشرفتهای قابل توجه در نظریه برگبندی در اواخر قرن بیستم توسط ترستون و شاگردان او به وقوع پیوست. حرکت شیئ هندسی منجر به ایده حرکت فضا شد و انیشتن حرکت فضا و متریک آن را در نسبیت عام خود مطرح کرد که منجر به کارهای هامیلتون و اثبات حدس ترستون و حدس پوانکاره توسط پرلمان گردید که پیش از این درباره آنها سخن گفتیم. ایده حرکت منجر به ایده دگردیسی ساختارهای هندسی و در نهایت دگردیسی ناجابجایی ساختارهای هندسی و ظهور دگردیسی کوانتیزه شد که سرآخر منجر به تحقیقات کانسیویچ در این زمینه گردید. هنوز این دگردیسی به معادلات دیفرانسیل مربوط است، چون ساختار مشتقپذیر خمینه هموار تحت این دگردیسی به یک ساختار دیفرانسیلی روی جبرهای مدرج تبدیل می شود که به نوعی عمیق با معادلات دیفرانسیل مرتبط است.

## 7- نظریه معادلات چند جمله ای

معادلات خطی توسط خوارزمی و سایر مسلمانان برای حل مسائل ارث به کار رفتند. معادلات درجه دوم قبل از خوارزمی به روش هندسی توسط اقلیدس بررسی شده بودند و خیام این روشها را به معادلات درجه سوم توسعه داد. در قرن هفدهم معلوم شد که روشهای خیام برای معادلات درجه چهارم نیز کار می کرده اند. در قرن شانزدهم دکارت تحت تاثیر خیام روش مختصات دکارتی و هندسه تحلیلی را ابداع کرد و بدین وسیله معادلات جبری تعیین کننده اشکالی هندسی شدند که امروزه گراف تابع خوانده می شوند. نیوتن وقت زیادی را برای رده بندی اشکال معادلات درجه سوم با دو متغیر گذراند و امروز تحقیقات او

فراموش شده است. اما منجر به ظهور هندسه جبری حقیقی شد. حل معادلات جبری توسط رادیکالها در قرن هفدهم برای چند جمله ایهای درجه سوم و درجه چهارم انجام شد. اما در قرن نوزدهم گالوا و آبل ثابت کردند که حل چند جمله ای درجه پنجم دلخواه توسط رادیکالها ممکن نیست و این منجر به ظهور نظریه گالوا برای توسیعهای متناهی میدان اعداد گویا گردید. هم زمان، گالوا ثابت کرد تثلیث زاویه توسط خط کش و پرگار (که مسئله ای بسیار قدیمی است) ممکن نیست. نظریه معادلات چند جمله ای در اواخر قرن بیستم به نظریه معادلات دیفرانسیل جبری منجر شد که روی اعداد حقیقی و اعداد مختلط و یا حتی میدان دلخواه جوابهای جبری معادلات دیفرانسیل یا معادلات دیفرانسیل با تمام جوابهای جبری مورد مطالعه قرار می دهد. نظریه معادلات جبری با ضرایب گویا منجر به نظریه ساختارهای عددی و توسیعهای متناهی اعداد گویا و یا میدانهای توابع شد که نظریه مدرن جبری اعداد را به ظهور آورد. در قرن نوزدهم انقلاب دیگری در حل معادلات جبری اتفاق افتاد و آن قضیه اساسی جبر بود که می گفت هر معادله جبری در اعداد مختلط ریشه دارد و کاملا تجزیه به عوامل درجه یک می شود. این آغاز علم جبر مدرن بود و منجر به نظریه حلقه های جابجایی و ساختارهای عددی دلخواه شده است که در بخش بعد به مطالعه آنها می پردازیم. به نظر این بنده ساختارهای ناجابجایی ساختارهای هندسی هستند و نه ساختار عددی و باید به صورت خانواده مطالعه شوند. مطالعه حلقه های ناجابجایی حلقه به حلقه مانند حلقه های جابجایی صحیح نیست و کنه ساختارهای ناجابجایی را به نمایش نمی گذارد. ساختارهای ناجابجایی فقط به عنوان دگردیسی کوانیزه ساختارهای جابجایی اهمیت دارند.

### 8- نظریه ساختارهای عددی

ساختارهای عددی از زمان آغاز ریاضیات وجود داشت، ولی رسما از وقتی اعداد منفی معرفی شدند توسط دکارت مطرح گردیدند. گاوس در قرن نوزدهم حلقه اعداد صحیح مختلط و میدانهای مربعی را مطالعه کرده و بسیاری از میدانهای اعداد توسط او و کومر و کرونکر بررسی شدند. با توجه به دیکشنری بین میدان توابع و میدان اعداد، نظریه میدانهای اعداد مورد مطالعه جبری قرار گرفتند و مشابه با اشیاء هندسی با آنها برخورد شد. در بخش قبل اشاره کردیم که ریشه ساختارهای عددی در حل معادلات دیوفانتی و حل معادلات جبری بوده است. پوانکاره حل خمهای بیضوی در ساختارهای عددی را مطرح کرد و حدس پوانکاره را پیش پا گذاشت. مطالعه فرمهای مربعی و اعداد که توسط آنها نمایش داده می شوند در سراسر قرن نوزدهم و بسیاری از ریاضیدانان را در قرن بیستم به خود مشغول کرد. حل معادلات دیوفانتی پیش از این مطرح شد و در اینجا به آن نمی پردازیم. اما نظریه میدانهای اعداد و میدانهای توابع تبدیل به نظریه میدانهای موضعی و سرتاسری شد و شمارش ساختارهای عددی با خواص داده شده در دستور کار قرار گرفت. مطالعه اعداد اول و توزیع اعداد اول در این میدانها شاخه نظریه تحلیلی اعداد را بوجود آورد. توابع زتا توسط اویلر و ریمان مطالعه شد. حدس ریمان یکی از بزرگترین مسائل لاینحل ریاضی است که مورد توجه ریاضیدانان قرار دارد. حتی تصور درستی از این که حل این مسئله با تکنیکهای کدام شاخه از ریاضی انجام خواهد گرفت وجود ندارد. نظریه پادهمانندی گالوا نیز از نظریاتی است که در مورد ساختارهای عددی مطرح شده است. گروه گالوایی یکی از پیچیده ترین ساختارهایی است که مورد مطالعه بشر قرار گرفته و در بسیاری از شاخه های ریاضی نقش ایفا می کند. بین گروه گالوا و فضای پوششی در توپولوژی یک دیکشنری وجود دارد که به آن خواهیم پرداخت. گروه گالوا در میدانهای توابع تعریف هندسی مشابه با توپولوژی دارد. این ایده ها منجر به طراحی نظریه پادهمانندی تخت برای واریته های حسابی توسط گروتندیک شدندکه سرآخر منجر به اثبات حدس ریمان در حالت میدانهای توابع گردید. این

گروههای پادهمانندی وجودشان از قبل توسط آندره ویل حدس زده شده بود و پیش از حدسهای لنگلندز یکی از مهمترین حدسیات راهگشای هندسه جبری محسوب می شد. گروتندیک در شکل گیری شاخه هندسه حسابی نقش مهمی ایفا کرد و در سالهای اخیر تلاشهای گروتندیک به نتیجه رسید و حدس فرما توسط وایلز اثبات گردید.

### 9- نظریه فضاهای هندسی

نظریه فضاهای هندسی از نظریه فضاهای فیزیکی شروع شد. خط و صفحه و فضای سه بعدی تنها فضاهای ریاضی متصور بودند و مدل بطلمیوس از عالم خلقت پس از مدل ائودکسوس آمد تا اینکه کپلر و کوپرنیک فیزیک جدید را بنیان گذاشتند و دکارت فضای سه بعدی را با فضای فیزیکی یکی گرفت. از زمان بطلمیوس روی کره سماوی نیز هندسه انجام می دادند. لذا کره سماوی به عنوان فضا تصور می شد. در قرن هفدهم فضای افکنشی مطرح شد و در فضای افکنشی دو بعدی و سه بعدی تئوری هندسه ای برپا کردند. در زمان نیوتن فضا – زمان چهاربعدی مطرح شد و زمان ریمان تئوری برای متریک روی یک فضای هندسی که بتواند فضای فیزیکی باشد مورد سوال قرار گرفت. پاسخ ریمان فضای با انحنای ثابت بود. دریک فضای با انحنای ثابت حرکت فیزیکی امکان دارد. جسم صلب نمی تواند در فضایی با انحنای متغییر حرکت کند. پس از دانستن نسبیت عام این خود یک اثبات برای حرکت مولکولهای اجسام است. نظریه خمینه های پیوسته و گسسته توسط ریمان ارائه شد و البته ریمان کره ریمان و نظریه رویه های ریمانی را هم مطرح کرد که مقدمه نظریه خمینه های مختلط شد. معادلات دیفرانسیل روی خمینه دلخواه منجر به مفهوم برگبندی گردید که پیش از این از آن سخن به میان آوردیم. معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم روی خمینه دلخواه توسط دکتر شهشهانی فرمولبندی شد و هنوز این شاخه از ریاضیات پیگیری نشده است. به دگردیسی متریک توسط انیشتن و فضاهای توپولوژیک و توپولوژی جبری توسط پوانکاره و دگردیسی ناجابجایی فضاهای جابجایی توسط کانتسویچ اشاره شد. انجام دادن مکانیک کلاسیک روی خمینه های دلخواه نیز در دستور کار قرار گرفت. حدس پوانکاره تلاش برای پیدا کردن هندسه عالم بود که اینطور وانمود می کرد که شاید هندسه عالم کره سه بعدی باشد. چنین هندسه ای با نظریه انفجار بزرگ هماهنگی دارد که البته در زمان پوانکاره پیش پا گذاشته نشده بود. نکته جالب اینکه اگر عالم کره سه بعدی باشد، مانند فضای آفین سه بعدی باز یک گروه لی خواهد ماند. البته در دیدگاه پوانکاره که نگاهی توپولوژیک داشت این توپولوژی فضای سه بعدی است که اهمیت پیدا می کند، نه اینکه هندسه فضای سه بعدی چه باشد. نگاه توپولوژیک به فیزیک در قرن بیستم در نظریه میدانهای کوانتومی بسیار مورد تاکید قرار گرفت، ولی کسی نام پوانکاره را به عنوان واضح این نظریه نمی شناسد.

### 10- نظریه توپولوژی جبری

نظریه توپولوژی جبری یک نظریه اواخر قرن نوزدهمی است، اما تا اعماق مبانی ریاضی پیش رفت. شاید یکی از عمیق ترین نظریاتی که در ریاضیات مدرن فرمولبندی شد، نظریه توپولوژی جبری باشد. نگاه توپولوژیک به فضا از دیدگاه هم ارزی همسانی شروع می شود که دو فضا که به طور پیوسته (در چارچوب زمان) قابل تبدیل به یکدیگر باشند را هم ارز هم سانی می گویند. این دیدگاه منجر به نظریه رسته ها و نظریه گروههای همانندی و پاد همانندی و جبر همانندی شد که بعد از حسابان دومین بزرگترین روش کلی حل مسئله در ریاضیات بود. روش توپولوژی جبری شدیدا بر ساختارهای ترتیبی و ساختار پیوستگی اعداد حقیقی تکیه می کند. البته مشابه نظریه رسته ها تئوری همسانی نیز به طرز ضعیفی این

دو مفهوم را در بر دارد. وئوودسکی با کمک این ایده یک نظریه محاسبه ایجاد کرد که با کمک آن امید داشت بتواند اثبات را توسط کامپیوتر چک کند، که ما را وارد مرتبه دیگری از نظریاتی که از اواخر قرن نوزدهم شروع شدند می کند و آن نظریه مجموعه هاست که پیشنهادی برای مبنای ریاضی بود و نظریه منطق که پیشنهادی برای فرمول بندی ریاضی زبان استدلال ریاضی .

## 11- کلام آخر

در مورد این دو نظریه اطلاعات چندانی ندارم اما می دانم که راسل کسی بود که برنامه کانتور در نظریه مجموعه ها را با شکست مواجه کرد و گودل کسی بود که برنامه هیلبرت برای اصول موضوعه سازی ریاضیات را به زمین زد. اما در نیمه دوم قرن بیستم منطق موفقیتهای چشمگیری در ریاضیات به دست آورد. قرن بیستم شلا قهرمان این نگاه به ریاضیات را پیش پای ما گذاشت. هنوز هم نمی دانیم که ریاضیات شلا چه ارمغانی برای ریاضیات خواهد آورد. اما بدون شک منتظر انقلاب های بزرگی از این سرچشمه ریاضی هستیم. منطق ریاضی از آرزوهای تئوری پردازی لایبنیتز شروع شد و با فرگه فرمولبندی شد و با براوئر آبیاری گردید و با گودل هرس شد و باغبان فعلی آن شلا می باشد.