نگاهی به تاریخ ریاضیات کل‌نگر و سرتاسری

آرش رستگار

۱۱ شهریور ۱۳۹۸

خلاصه

منظور از ریاضیات کل‌نگر و سرتاسری توجه به کل پیش از توجه به جزء است وگرنه یک ریاضی‌دان جزءنگر هم از جزء به سمت کل حرکت می‌کند. در این مقاله برآنیم تا نگاهی به تاریخ تحول ریاضیات کل‌نگر بپردازیم.

مقدمه

اکثر ریاضی‌دانان از جزء به سوی کل حرکت می‌کنند و ریاضی‌دانان کمی نگاهی کل‌نگرانه و سرتاسری دارند. از این رو معدودی از صحنه‌های تاریخ ریاضیات و شاخه‌های ریاضیات به کل‌نگری قبل از جزءنگری اختصاص یافته است. خصلت کل‌نگران این است که به کلیات قبل از جزئیات توجه می‌کنند و جزء را در سایه کل تعریف می‌کنند. در حالی که ریاضی‌دانان تحلیلی و جزءنگر کل را در سایه اجزا تعریف می‌کنند و نه برعکس. کل‌نگرترین ریاضی‌دانی که می‌شناسم گروتندیک بوده است. در ریاضیات گروتندیک لزوماً این طور نیست که اشیاء ریاضی لزوماً از برهم‌نهی اجزاء ساخته شده باشند. اما نگاه به اشیاء و مطالعه آن‌ها در چارچوب نظریه رسته‌ها و کل‌نگرانه است. نگاه جزء به کلی که در ساختار خمینه‌ها وجود دارد در ساختار شماها کم‌رنگ شده است بلکه ردپای آن نیز پاک شده است. مفهوم شیء جهانی یک شی را به کمک مورفیسم‌های آن تعریف می‌کند و نه با کمک اجزای مولدها و روابط بین آن‌ها. ممکن است تصور شود که چنین ریاضیاتی بسیار مدرن و نوساخته است و پیش از قرن بیستم نبوده است. اما باید گفت که نه تنها در جبر و آنالیز و هندسه و نظریه اعداد و ترکیبیات از بدو تولد آن‌ها حاضر بوده است، بلکه در هندسه اقلیدسی به سبک باستانی آن به شکل روابط طولی مطرح می‌شده است. بنابراین سابقه ریاضیات کل‌نگر را باید در یونان باستان و روابط طولی در مثلث جست‌وجو کرد. فرمول‌های مساحت اجسام ساده نگاهی نه جزئی بلکه کلی دارند و هم روابط طولی در سایه مثلثات به مطالعه کل‌نگرانه ساختارهای هندسی می‌پردازند. مسلما روابط

سینوس‌ها و کسینوس‌ها در مثلث (نسبت‌های سایه‌ای و پادسایه‌ای) روابطی کل‌نگرانه هستند و در حالت خاص قضیه فیثاغورس نیز کل‌نگرانه است. رابطه هرون هم در سایه روابط کل‌نگرانه در مثلث اثبات می‌شود و لذا کل‌نگرانه است.

۱ هندسه روابط طولی

این که چرا هندسه روابط طولی کل‌نگرانه است و نه جزءنگرانه نیاز به توضیح دارد. چرا که روابط طولی برای خانواده‌ای از اشکال هندسی که متغیرند برقرار است. بسیاری از قضایای هندسه اقلیدسی چنین هستند و لذا این قضایا نیز کل‌نگرانه هستند. البته هر دانش‌آموزی به سطح کل‌نگری در هندسه اقلیدسی نمی‌رسد و بسیاری حتی به عنوان ریاضی‌دان هندسه را مطالعه شئیی ثابت می‌دانند. اما همین ریاضیات را می‌توان کل‌نگرانه مطالعه کرد و کلیات را پیش از جزئیات دید. هر چند که در آن اشکال هندسی مرحله به مرحله و جزء به جزء ساخته شده باشند. دانش‌آموز در روند آموزش هندسه اقلیدسی به سطحی از تجرید می‌رسد که قادر است در مورد شکل در حال تغییر استدلال کند. استدلالی که در طی همه مراحل تغییر پایدار بماند. با نگاهی به هندسه اقلیدسی می‌توان دید که همه‌ی هندسه بر همچنین نگاهی بنیان‌گذاری شده است اما این نگاه از ابتدا در ذهن دانش‌آموز حاضر نیست. چه بسا هندسه‌دانانی که هنوز به این درجه تجرید نرسیده‌اند. توجه کنید که کل‌نگری به یک شکل هندسی با کل‌نگری به یک فضای هندسی یک چیز نیستند. در هر حال شیء هندسی خودش جزء است و کل‌نگری به شکل هندسی به نوعی کل‌نگری به اجزا است. اما می‌توان پس از سیر جزء به کل نوعی سیر کل به جزء را نیز در پیش گرفت و مثلاً قضیه‌ای را در حالات حدی بررسی کرد. یا از تعمیم و حالت کلی قضیه به حالات خاص آن پرداخت و در حالت خاص نیز اثباتی برای قضیه ارائه داد که از خواص خاص آن حالت استفاده کرده باشد. اما اصل این است که اگر اجزاء یک شکل کل آن شکل را به طور یگانه مشخص می‌کنند، هر جزء دیگری از آن شکل نیز باید قابل محاسبه بر حسب همان اجزاء مشخص‌کننده باشد. این‌جاست که می‌توان روابط طولی را نگاهی کل‌نگرانه محسوب کرد که البته همین روابط را یک نگاه جزءنگر جزءنگرانه و تحلیلی می‌بیند که اجزاء را برحسب اجزاء محاسبه می‌کند. اما گاهی در روابط طولی فرمول‌هایی به دست می‌آید که کل شکل توسط قسمتی از داده‌های اجزاء در آن فرمول مشخص نمی‌شود. مثلاً این که مساحت مثلث برابر حاصل‌ضرب شعاع دایره محاطی در نصف محیط است، یا این که مساحت مثلث برابر قاعده در نصف ارتفاع است که این اجزاء مثلث را به کلی مشخص نمی‌کنند و خانواده‌ای از اشکال در روابط طولی داده‌شده صدق می‌کنند. اما همین دلالت بر کل‌نگری روابط طولی دارد.

۲ حل معادله به کمک روش‌های سرتاسری

حل معادله به روش موضعی مانند روش نیوتن در برابر حل معادله به روش سرتاسری مانند حل به روش جبری توسط فرمول‌هایی بر حسب ضرایب معادله است. می‌دانیم که در درجات پایین

می‌توان معادله را توسط رادیکال‌ها حل و بحث کرد و در درجات پنجم به بالا در حالت کلی این کار امکان‌پذیر نیست. حل معادلات درجه دوم به روش جبری توسط خوارزمی و حل معادلات درجه سوم و چهارم در قرن هفدهم صورت گرفت و منجر به ظهور مفهوم عدد مختلط نیز شد که البته تمامی روش‌ها برای اثبات قضیه اساسی جبر جزءنگرانه هستند. روش‌های هندسی برای حل معادلات نیز به نوعی سرتاسری هستند. حل معادلات درجه دوم توسط خط‌کش و پرگار در کتاب اصول اقلیدس آمده است و با کمک سهمی‌کش حل معادلات درجه سوم توسط خیام انجام شد و در قرن هفدهم مشخص شد که روش‌های خیام برای حل معادلات درجه چهارم نیز کاربرد داشته است. روش‌های جبری برای حل بسیاری از معادلات مثلثاتی نیز که در دبیرستان مطرح می‌شوند روش‌هایی کل‌نگرانه هستند. اما گمان نمی‌کنم همه معادلات مثلثاتی را بتوان با این روش‌ها حل کرد. رسم نمودار معادلات جبری نیز یک مسئله کل‌نگرانه است چرا که رفتار تابع چندجمله‌ای یا پیچیده‌تر را در سرتاسر دامنه به نمایش می‌گذارد. روش‌های جبری الگوریتمی مانند تقسیم چندجمله‌ای‌ها نیز به نوعی کل‌نگرانه هستند یا لااقل قابل تعبیر به زبان کل‌نگرانه می‌باشند. نکته جالبی که در مورد کل‌نگری در روش حل معادلات توسط جبر به نظر می‌رسد این که جبر غالباً کلامی است و ریاضی‌دانان کلامی غالباً جزءنگر هستند. جبر کل‌نگرانه در مرزهای جبر با هندسه اتفاق می‌افتد که ریاضی‌دانان مشغول به آن غالباً تصویری و کل‌نگر هستند. بسیاری از روش‌های فرمال حل معادله در جبر مشابه روش‌های فرمال حل معادلات دیفرانسیل هستند که آن‌ها نیز کلامی و کل‌نگرانه می‌باشند. در فصل بعد به روش حل معادلات دیفرانسیل می‌پردازیم. گرایش‌های جزءنگرانه به جبر در قرن بیستم باب شدند و توسعه پیدا کردند، اما این طور نبود که گرایش‌های کل‌نگرانه به فراموشی سپرده شوند. همواره چنین بوده است که ابتدا تفکر هندسی راه را برای فهمیدن یک مفهوم باز می‌کند سپس فرمول‌بندی جبری مقدمات تعمیم مفهوم به حالت‌های خیلی کلی را فراهم می‌آورد. معمولاً اگر یک حقیقت هندسی را چندین بار تعمیم دهیم کمکمک به زبان جبر نزدیک می‌شود. زبان جبر برای تفکر کل‌نگرانه مناسب‌تر است.

۳ مدل‌سازی به کمک معادله دیفرانسیل

هر چند تلاش‌ها برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولاً جزءنگرانه است اما مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط معادلات دیفرانسیل که به مدل‌سازی تغییر خلاصه می‌شود غالباً از لحاظ شناختی فرآیندی کل‌نگرانه است چرا که معمولاً تغییرات یک کل مدل‌سازی می‌شود. البته مثال‌هایی هم هست که تغییرات اجزاء مدل می‌شوند. برای مثال معادلات دیفرانسیل توزیع گرما جزءنگرانه است. ولی معادلات دیفرانسیلی که در مکانیک برای مدل‌سازی حرکت به کار می‌روند غالباً کل‌نگرانه هستند. البته مواردی هم‌چون مکانیک آماری یا مکانیک سیالات را باید جزءنگرانه محسوب کرد. مدلسازی به کمک معادلات دیفرانسیل در مدل‌سازی طبیعت بی‌جان و هم در مدل‌سازی پدیده‌های زیستی در چارچوب‌های خرد تا کلان به کار می‌رود. بسیاری

از معادلات دیفرانسیل به روش‌های جبری کل‌نگرانه قابل حل هستند. این روش‌ها بسیار شبیه روش‌های کل‌نگرانه در حل معادلات جبری می‌باشند. بسیاری از جواب‌ها نیز با روش‌های ساده و اولیه و توابع ساده قابل بیان نیستند و تنها می‌توان با روش تقریب عددی آن‌ها را محاسبه کرد. ساده‌ترین معادله دیفرانسیل محاسبه انتگرال توابع است که روش‌های محاسبه در آن سراسر از حقه‌های محاسباتی تشکیل شده است. این حقه‌های محاسباتی نیز به نوبه خود مانند روش‌های جبری حل معادلات جبری به نوعی کل‌نگرانه هستند. از طرف دیگر روش‌های کیفی حل معادلات دیفرانسیل و آن‌چه مطالعه سیستم‌های دینامیکی خوانده می‌شود نگاهی کل‌نگرانه به معادلات دیفرانسیل و جواب‌های آن‌ها دارد ولی اگر کمی عمیق‌تر در این روش‌ها تفحص کنیم درمی‌یابیم که این کل‌نگری در چارچوب نگاهی جزء به کل مطرح می‌شود و نه در چارچوب نگاهی که از کل به سوی جزء حرکت می‌کند و جزء را در سایه کل تعریف می‌کند. کل‌نگری در سیستم‌های دینامیکی کل را برهم‌نهی اجزا می‌داند. این نگاه به کل نگاهی جزءنگرانه و تحلیلی است و با دیدگاه کل‌نگرانه و سرتاسری که ما در این مقاله به بررسی آن می‌پردازیم مطابقت ندارد. چنین نگاهی به کل که از جزء سرازیر می‌شود در اکثر شاخه‌های هندسه مانند هندسه دیفرانسیل، نظریه خمینه‌ها، هندسه مختلط، قابل مشاهده است. نگاه کل‌نگرانه به اجزاء اصولاً با تفکر جبری نزدیک‌تر است و شاخه‌هایی از هندسه که چنین نگاهی به اجزاء دارند مانند هندسه جبری و توپولوژی جبری بسیار به روشهای جبری کل‌نگرانه مانند نظریه رسته‌ها نزدیک هستند.

۴ نظریه گالوا و ساختارهای عددی

نظریه گالوا در چارچوب نظریه جبری اعداد نگاهی کل‌نگرانه به میدان‌های اعداد و ساختارهای عددی دارد. پیش از نظریه گالوا عدد مطالعه می‌شد و نه ساختار عددی. در قرن نوزدهم مفهوم فضا نیز چنان توسعه پیدا کرد که در برابر اشکال هندسی همانند ساختارهای عددی در برابر اعداد خودنمایی کرد که در فصل بعد به نوبه خود مورد بررسی قرار می‌گیرد. نگاه نظریه گالوا به میدان‌های عددی نیز کل‌نگرانه است. به جای این که آن‌ها نیز را با مولدها و روابط در نظر بگیرد، ساختار حلقه چندجمله‌ای‌ها را در یک چندجمله‌ای با ضرایب گویا خلاصه می‌کند. گویی این طور به ساختار عددی نگاه می‌کند که اگر ریشه‌های این چندجمله‌ای را نیز عدد بگیریم به چه ساختاری می‌رسیم و این ساختارها در کنار هم چه‌گونه مقایسه می‌شوند و چه تقارن‌هایی دارند؟ البته مفهوم تقارن ساختار عددی احتمالاً با توجه به دیکشنری بین میدان‌های اعداد و میدان‌های توابع از مفهوم تقارن هندسی می‌آید. تقارن هندسی می‌تواند هم برای اشکال هندسی و هم فضاهای هندسی مطرح شود که البته هر دو کل‌نگرانه است. اصولاً ریاضیات تقارن یک ریاضیات کل‌نگرانه است و نظریه گالوا نیز جزئی از ریاضیات تقارن است. مفهوم گروه نیز از همین تقارن نشأت می‌گیرد. البته در توپولوژی جبری گروه به عنوان یک ناوردای سرتاسری فضا مطرح می‌شود و نظریه فضاهای پوششی فرمالیسمی شبیه نظریه گالوا را در هندسه

فرمول‌بندی می‌کند. از طرف دیگر مفهوم گروه تقارن به دنبال خود عمل گروه بر ساختارهای عددی یا هندسی را می‌آورد که می‌توان به چنین عمل‌هایی گروه‌های پادهمانندی نسبت داد. از جمله این ریاضیات کل‌نگرانه می‌توان نظریه گروه‌های پادهمانندی گالوا را نام برد که به مطالعه گروه گالوا به عنوان یک گروه توپولوژیک پادمتناهی می‌پردازد. این نظریه جزئی از نظریه جبری اعداد است که خود نگاهی کل‌نگرانه به ساختارهای عددی دارد. مطالعه میدان‌های اعداد به مطالعه میدان‌های متناهیاً تولیدشده روی اعداد گویا تعمیم پیدا می‌کند که در سایه نظریه آراکلو که خود نظریه‌ای کل‌نگرانه است بررسی می‌شوند. کل‌نگری نظریه آراکلو نیز مانند هندسه از در کنار هم گذاشتن اجزاء به وجود آمده است. اما این اجزا را می‌توان در بستر یک نگاه کلی به واریته حسابی تعریف کرد. لذا نظریه آراکلو در چارچوب نگاه کل‌نگر و سرتاسری این مقاله می‌گنجد.

۵ هندسه ریمانی و مفهوم فضا و دگردیسی فضا

این نگاه که فضای هندسی را یک کل ببینیم که اشیاء هندسی در این کل زندگی می‌کنند در مفاهیم صفحه و فضای سه بعدی در هندسه اقلیدسی یونان باستان وجود داشته و در هندسه تحلیلی دکارت هم این مفهوم پررنگ‌تر شده است اما با ظهور هندسه افکنشی بود که مفهوم فضای هندسی شکل گرفت و کم‌کم ریاضی‌دانان به توازی مثلثات کروی و مثلثات مسطحه به عنوان دو فرمول‌بندی مربوط به دو مفهوم فضای مختلف اما مشابه نگاه کردند. این مقدمه‌ای شد که در قرن نوزدهم هندسه نااقلیدسی کشف شود و هندسه هذلولوی در کنار هندسه مسطحه و هندسه کروی و مثلثات هذلولوی در کنار مثلثات اقلیدسی و مثلثات کروی فرمول‌بندی شوند. تحت تأثیر و زیر سایه ریمان فضاهای هندسی فرمول‌بندی فلسفی کلی‌تری پیدا کردند و این نظریه توسط پوانکاره تجسد یافت و نظریه خمینه‌ها شکل گرفت. از زمان ریمان این سوال که یک فضای فیزیکی همگن چه‌گونه خواصی باید داشته باشد راه بطلمیوس و دکارت را ادامه داد و به جایی رسید که فضاهای با خمیدگی ثابت مطرح شدند. نظریه رویه‌های ریمانی مثالی بعد پایین از چنین نظریه‌ای را در خود داشت و قضیه نگاشت ریمان هندسه رویه‌های ریمانی را به هندسه‌های هذلولوی، سهموی و بیضوی تقسیم می‌کرد که مقدمه را برای شکل‌گیری مفاهیم ریاضیات هذلولوی، ریاضیات سهموی و ریاضیات بیضوی فراهم کرد. نگاه کل‌نگرانه به مفهوم فضا انقلاب‌های بزرگی را در هندسه حادث کرد همان‌طور که نگاهی کل‌نگرانه به ساختار عددی شاخه نظریه اعداد را منقلب کرد و آن را از علم مطالعه معادلات دیوفانتی به علم مطالعه ساختارهای عددی تبدیل کرد. انیشتین انقلابی در مفهوم فضا به وجود آورد چرا که او فضایی فیزیکی را تصور کرد که فیزیک آن تحت تأثیر معادلات دیفرانسیل تغییر می‌کند. پیش از او هندسه‌دانان عموماً فضاهایی ثابت و بدون تغییر را مطالعه می‌کردند. این نگاه انیشتین در اواخر قرن بیستم توسط هامیلتون وارد ریاضیات شد و سرآخر منجر به اثبات پرلمان از حدس پوانکاره گردید. اگر چه معادلات دیفرانسیل انیشتین و هامیلتون به طور موضعی روی فضا

تعریف می‌شوند اما نگاهی که نظریه دگردیسی بر مفهوم فضا دارد کل‌نگرانه است و در مورد توپولوژی فضا قضاوت می‌کند و نگاهی به کل دارد که از برهم‌نهی اجزاء به دست نیامده است.

۶ توپولوژی جبری و ناورداهای سرتاسری

توپولوژی جبری اگر چه نگاهی کل‌نگرانه و سرتاسری به فضای هندسی دارد اما ناورداهای توپولوژی جبری از روش‌های جزء به کل و موضعی به سرتاسری تعریف می‌شوند. مثلاً پوانکاره همه نگاشت‌های از دایره به فضای توپولوژیک را در نظر می‌گیرد و روی آن‌ها ساختار می‌گذارد. این شبیه کاری است که ویتن در تبعیت از پوانکاره می‌کند و روی فضای حلقه‌های بسته در یک فضا هندسه دیفرانسیل تعریف می‌کند. پوانکاره این فضای نگاشت‌ها را خلاصه می‌کند و در نهایت در یک گروه کوچک خلاصه می‌کند که به آن گروه بنیادی گفته می‌شود. مشابه همین کار در گروه همانندی انجام می‌شود که فضای همه نگاشت‌ها از مثلث به فضا در نظر گرفته می‌شود و روی این نگاشت‌ها مفهوم مرز تعریف می‌گردد که البته این دقیقاً صورتی از گروه همانندی نیست که توسط پوانکاره تعریف شده است. اما صورت پوانکاره هم بر یک مثلث‌بندی فضا تکیه می‌کند که نگاهی کل‌نگرانه به فضاست که البته بر نگاه جزء به کل بنا شده است. اما پوانکاره پس از تعریف ناورداهای سرتاسری به روش جزء به کل به مطالعه آن‌ها تحت نگاهی کل‌نگرانه به مفهوم فضا می‌پردازد و ناوردایی گروه بنیادی را نسبت به همسانی بین فضاهای توپولوژیک بررسی می‌کند که نگاهی کل‌نگرانه به فضاست و در تاریخ ریاضی نیز چنین ریاضیاتی منجر به ظهور نظریه رسته‌ها شد که کل‌نگرانه‌ترین نظریه موجود در ریاضی است. یک نکته که بسیار قابل توجه است نقش مهمی است که ساختار پیوسته اعداد حقیقی در توپولوژی جبری ایفا می‌کند. به گمان این‌جانب باید بتوان آن را با مشابه p–نقش کرات از ابعاد مختلف جای‌گزین کرد و یک نظریه همسانی p–نقش را فرمول‌بندی کرد. عجیب اینجاست که طرح چنین نظریه‌ای از مرزهای تخیل پوانکاره بیرون بوده است. در حالی که در زمان پوانکاره نظریه میدان‌های p–نقش پیش‌تر مطرح شده بود. نظریه کلاس‌های مشخصه بر توپولوژی تکیه می‌زند و خود نظریه‌ای سرتاسری و کل‌نگرانه در مورد ناورداهای فضاهای هندسی است که مانند بسیاری از مفاهیم هندسی در مسیر تعمیم خود به زبان جبر نزدیک شده است به طوری که در صورت هندسه جبری آن به یک فرمول‌بندی کاملاً جبری تقلیل پیدا می‌کند که دیگر رنگ و روی توپولوژیک ندارد. نگاه کل‌نگرانه گروه‌های پادهمانندی در نیمه دوم قرن بیستم وارد هندسه جبری شد که از آن سخن خواهیم گفت.

۷ نظریه رسته‌ها

نظریه رسته‌ها توسط آیلنبرگ و مکلین فرمول‌بندی شد و به فرمول‌بندی جدیدی از ریاضیات گرایش پیدا کرد که در آن به جای مطالعه ساختارها به کمک روابط درونی اجزاء آن‌ها به مطالعه ساختارها توسط مورفیسم‌های بین ساختارها پرداخت. این همچون نگاهی جامعه‌شناسانه

به ریاضیات بود که در برابر نگاه سنتی به ریاضیات که به نوبه خود روان‌شناسانه بود قرار می‌گرفت. خیلی زود نظریه‌هایی مانند نظریه گروه‌ها و نظریه جبر خطی فرمول‌بندی کل‌نگرانه پیدا کردند و به زبان نظریه رسته‌ها ترجمه شدند. این منجر به تعریف نظریه رسته‌های آبلی شد که در آن عمل‌گرهایی مانند جمع مستقیم و دنباله دقیق قابل تعریف هستند. البته نظریه رسته‌ها نگاهی جدید به جمع مستقیم در ساختار ریاضی ارائه کرد. چرا که پیش از نظریه رسته‌ها جمع مستقیم با کمک اجزاء درونی تعریف می‌شد اما پس از نظریه رسته‌ها جمع مستقیم با خاصیت جهانی جمع مستقیم رده‌بندی شد. خاصیت‌های جهانی و فرمول‌بندی وردش‌های نمایش‌پذیر انقلابی در ریاضیات ایفا کردند که سراسر جبر را در برگرفت اما تا سال‌ها هندسه سنتی در برابر آن مقاومت کرد. تا جایی که این سد شکست و هندسه ناجابه‌جایی و دگردیسی فضاهای ناجابه‌جایی به کمک نظریه رسته‌ها فرمول‌بندی شد و هندسه معنایی نو به خود گرفت. البته الن کون نیز یک فرمول‌بندی از هندسه ناجابه‌جایی ارائه کرد که توسط فضاهایی تابعی و آنالیز تابعی چیده شده بود اما این جز تأییدی بر این که حقیقتی پشت مفاهیم هندسه‌های ناجابه‌جایی پنهان شده است نبود. ریاضی‌دانان همگی به این دو نظریه به عنوان دو فرمول‌بندی موازی و مستقل از نظریه مشترکی یا بهتر بگوییم حقیقت مشترکی نگاه می‌کردند. نظریه همسانی خود به زبان نظریه رسته‌ها فرمول‌بندی شد و در دستان وئودسکی به سوی فرمول‌بندی جدیدی برای مبانی ریاضیات حرکت کرد که کاستی‌های نظریه مجموعه‌ها را جبران می‌کرد. نظریه مجموعه‌ها به نوبه خود در کنار منطق نگاهی کل‌نگرانه به مبانی ریاضیات داشتند که در مقاله ما مورد بررسی قرار نگرفته‌اند. این به خاطر تفاوت ذاتی ریاضیات منطق با سایر قسمت‌های ریاضیات است. بسیاری منطق را علمی مستقل ولی نه جزء ریاضیات به حساب می‌آورند.

۸ هندسه جبری و ناورداهای سرتاسری

هندسه جبری تحت تأثیر نظریه اعداد و تحت تأثیر توپولوژی جبری (شکل‌شناسی جبری) به مطالعه ناورداهای سرتاسری واریته‌های جبری روی آورد و سعی کرد کم و بیش تمام مفاهیم هندسه را به زبان واریته‌های جبری که بر حسب معادلات جبری فرمول‌بندی می‌شوند ترجمه کند. به خصوص انجام هندسه روی میدان‌های بسته جبری بلکه میدان‌های دل‌خواه بلکه حلقه‌های جابه‌جایی در دستور کار قرار گرفت. فرمول‌بندی ویل از هندسه جبری که بر اساس نظریه توابع گویا صورت می‌گرفت سعی کرد لغت‌نامه بین نظریه اعداد و هندسه جبری را توسعه دهد و یا لااقل با کمک همان زبان هندسه جبری را فرمول‌بندی کند. سر نظریه‌ای از هندسه جبری مختلط را فرمول‌بندی کرد و مفاهیم بافه را وارد هندسه جبری کرد و تحت تأثیر او گروتندیک نظریه شماها را فرمول‌بندی کرد که هندسه جبری را روی حلقه‌های جابه‌جایی مطالعه می‌کرد. نظریه گروتندیک مقدمات را فراهم کرد تا نظریه اعداد دانانی چون میزور و وایلز ارتباط بین نظریه جبری اعداد و هندسه جبری را محکم‌تر کنند و بسیاری از مسائل حل نشده نظریه اعداد را مانند حدس مردل و قضیه فرما را مورد تسخیر ریاضی‌دانان قرار دهند. بسیاری از ناورداهای سرتاسری نظریه اعداد وارد هندسه جبری شدند و محاسبات مشابهی را در چارچوب هندسی‌تری به دست دادند. روزنبرگ از نظریه رسته‌ها استفاده کرد و فرمول‌بندی جدیدی از هندسه جبری

ناجابه‌جایی ارائه کرد. از طرف دیگر هندسه جبری به پختگی‌ای رسید که می‌توانست توسط فیزیک‌دانان برای مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی به کار برود و این منجر به ظهور فیزیک جدیدی شد که با نگاهی کل‌نگرانه و سرتاسری طبیعت را مدل‌سازی می‌کند. واریته‌های کالابی و یائو و ریاضیات وفا و ویتن به چنین نگاهی به فیزیک نظری دارند. نگاه نظریه رسته‌ها که در نیمه اول قرن بیستم فرمول‌بندی شده بود در نیمه دوم قرن بیستم در هندسه جبری شکوفا شد و عرصه‌های تفکر فیزیکی و ریاضی را پس از یک قرن دوباره به هم نزدیک کرد. امروز برای مطالعه پدیده‌های فیزیکی به زبان ریاضیات سرتاسری همه مقدمات فراهم آمده است. الن کون البته سعی می‌کند با کمک هندسه ناجابه‌جایی که توسط آنالیز تابعی فرمول‌بندی می‌شود نیز فیزیک انجام دهد.

۹ آنالیز تابعی

در آنالیز ریاضی نیز سعی می‌شود نگاهی کل‌نگرانه به اشیاء ریاضی حاضر باشد چرا که یک تابع شیئی سرتاسری تلقی می‌شود. اما درست مانند هندسه دیفرانسیل و نظریه خمینه‌ها این نگاه کل‌نگرانه به روی‌کردی که از جزء به سوی کل حرکت می‌کند تعلق دارد نه روی‌کردی که جزء را در سایه کل تعریف می‌کند. اما درست مانند توپولوژی جبری پس از فرمول‌بندی آنالیز تابعی آنالیزدانان سعی می‌کنند نگاه به اجزاء را به کناری بگذارند و سعی می‌کنند ریاضیاتی انجام دهند که فقط به کلیات می‌پردازد. گروتندیک هم که ساختاری شناختی داشت که از کل به سوی جزء حرکت می‌کرد ریاضیات را با نظریه اندازه و سپس آنالیز تابعی شروع کرد. تا بعد که تحت تأثیر سر به هندسه جبری تغییر رشته داد. الن کون نیز از سوی دیگر به آنالیز تابعی مربوط به هندسه ناجابه‌جایی پرداخت که آن نگاه نیز به دلیل کل‌نگری این ریاضی‌دان بود. این نوع کل‌نگری در فرمول‌بندی مکانیک لاگرانژی و مکانیک هامیلتونی نیز حاضر بود که از ریاضیات وارد فیزیک شد و در فرمول‌بندی مکانیک کوانتوم به اوج خود رسید. فون نویمان از فضای هیلبرت کمک گرفت تا فرمول‌بندی ریاضی کل‌نگرانه‌ای از مکانیک کوانتوم به دست دهد و پس از او فاینمن نظریه میدان‌های کوانتومی را به وجود آورد که فیزیک را با همان فرمول‌بندی کل‌نگرانه‌اش به پیش راند.

۱۰ کلام آخر

امروزه ریاضیات کل‌نگر و فیزیک کل‌نگر هر دو به پایه‌ای از پختگی رسیده‌اند که می‌توانند بدون توجه به سرچشمه‌هایشان از ریاضیات جزءنگر به حیات خود ادامه دهند و نوید شاخه‌ای جدید از ریاضیات به نام ریاضیات کل‌نگر و سرتاسری در برابر نگاه سنتی که جزءنگر و تحلیلی بود به پهنه آینده ریاضیات تقدیم کنند. بسیاری از دانش‌مندانی که تنها فلسفه قاره‌ای آن‌ها را ارضا می‌کرد امروز می‌توانند به ریاضیات بپیوندند و با کمک روش‌های ریاضی تفکرات دقیق‌تری داشته باشند. بلکه ریاضیات کل‌نگرانه می‌تواند به عنوان آزمایش‌گاهی برای تفکرات

فلسفی به کار رود که در آن به تأویل فلسفی یافته‌های ریاضی کل‌نگرانه پرداخته می‌شود. احتمالاً این همان مسیری است که گروتندیک در اواخر عمر خود به آن می‌پرداخت و ریاضی‌دانان را با عزلت خود از این حکمت‌ها محروم کرده بود.

View publication stats