نگاهی به تاریخ ریاضیات کلامی

آرش رستگار

۳۰ شهریور ۱۳۹۸

خلاصه

سبک‌های شناختی کلامی در برابر تصویری بر اذهان ریاضی‌دانان حکومت می‌کنند. لاجرم قسمت‌هایی از ریاضیات، کلامی و قسمت‌هایی تصویری خواهند بود. در این‌جا تاریخ ریاضیات کلامی و پدیده‌هایی در تاریخ ریاضیات که مخصوص ریاضیات کلامی است را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. زبان جبری یکی از مشخصه‌های ریاضیات کلامی است.

مقدمه

از آغاز پیدایش ریاضیات مفهوم عدد حضور داشته و این علامت حضور همیشگی بعد کلامی در ریاضیات است. همین طور از آغاز پیدایش ریاضیات مفهوم شکل حضور داشته اما شهود تصویری تنها در برخی قسمت‌های ریاضیات ممکن بوده است. برای مثال در بدو امر نزد فیثاغورس اعداد شکل داشته‌اند اما حتی در یونان باستان این خصلت اعداد تا زمان اقلیدس حفظ نشده است. بعد کلامی ریاضیات در زبان ریاضیات و در نمادهای ریاضی همواره قابل مشاهده بوده است. مفهوم اثبات یک مفهوم کلامی، مرحله به مرحله، منطقی و جزءنگرانه است. ریاضیات بر پایه شالوده‌ای که ارسطو بنیان کرد و طراحی نمود و سپس اقلیدس آن را برپا ساخت ساخته شده است که این شالوده کلامی است و مفهوم اثبات ریاضی و دقت ریاضی که مفاهیم کلامی هستند در آن نقشی کلیدی ایفا می‌کنند. شاید بتوان گفت اگرچه تاریخ ریاضیات کلامی جزئی از تاریخ ریاضیات است اما تمام پدیده‌های تاریخی در این جزء خود را به نمایش گذاشته اند در حالی که در تاریخ ریاضیات تصویری چنین نیست. همان طور که نقش زبان در تمدن بشری بسیار تأثیرگذارتر از نقش شهود بوده است، نقش ریاضیات کلامی در توسعه ریاضیات بسیار تعیین‌کننده‌تر از نقش ریاضیات تصویری بوده است. بسیاری از شاخه‌های ریاضی هم‌چون منطق فرمول‌بندی کلامی دارند اما فاقد یک فرمول‌بندی هندسی که قابل شهودشان بکند هستند. در تجرید و تعمیم ریاضیات کلامی بر ریاضیات تصویری پیشی گرفته است. برای مثال فضاهای برداری صورت‌بندی هندسی نیز دارند ولی تنها در ابعاد پایین شهود خواص آن‌ها امکان‌پذیر

است. برای کاربرد فضاهای برداری از ابعاد بالا نیاز به مجردسازی فرمول‌بندی فضای خطی مستقل از شهود هندسی هست. از این رو بسیاری ذات ریاضیات بلکه ذات علم و ذات شناخت را کلامی می‌دانند و نه تصویری.

۱ مثلثات و سایر روابط طولی

مثلثات اولین ماشینری عمومی برای حل مسائل است. ابتدا مثلثات برای محاسبات نجومی در کره سماوی تعبیه شده بود. اما با کمک لغت‌نامه‌ای که بین مفاهیم هندسه کروی و هندسه مسطحه وجود داشت مثلثات در هندسه مسطحه نیز فرمول‌بندی شد. در تاریخ ثبت شده است که ابن سینا از ابو نصر عراقی معلم ریاضیاتش پرسید که آیا مشابه قضیه سینوس‌ها در مثلثات کروی قابل اثبات در مثلثات اقلیدسی هست یا نه و روز بعد ابو نصر عراقی با رساله‌ای نزد او آمد که در آن قضیه سینوس‌ها در مثلث را اثبات می‌کرد. از این رو می‌توان گفت ابن سینا از پدران نظریه لغت‌نامه‌ها در ریاضیات است. ذات مثلثات یک حقیقت هندسی است و آن حقیقت هندسی قضیه فیثاغورس می‌باشد که یک برابری مساحت‌هاست. اما مفاهیم سینوس و کسینوس (سایه و پادسایه) چنان فرمول‌بندی شده اند که قضیه فیثاغورس را کاملاً به زبان کلامی ترجمه می‌کنند. مثلثات سرشار از تساوی‌های جبری است. حل معادلات مثلثاتی با وجود تکنیک‌های کلامی سر آخر در بسیاری از حالات خاص به مشاهداتی هندسی در دایره مثلثاتی باز می‌گردد. در عصر حسابان توابع مثلثاتی توسط نمودارهایی به نمایش گذاشته شدند و به زبان تصویری ترجمه شدند. مفاهیمی مانند بسامد، دوره تناوب، طول موج و مانند آن به کمک نمودار توابع موجی معرفی شدند. هر چند که این مفاهیم صورت‌بندی کلامی نیز دارند. تکنیک اثبات توسط محاسبه مثلثاتی کم‌کم به تکنیکی به نام روابط طولی تعمیم پیدا کرد. روابط طولی منجر به ظهور شاخه‌ای در هندسه اقلیدسی به نام نامساوی‌های هندسی گردید. تکنیک روابط طولی به عنوان روشی برای اثبات قضایا در هندسه اقلیدسی پذیرفته شد و منجر به ظهور شاخه‌هایی مانند نسبت هم‌ساز و نسبت ناهمساز گردید که خود به عنوان روشی برای اثبات قضایا پذیرفته شدند. هندسه تبدیلات هم عمیقاً با هندسه روابط طولی ممزوج شدند چرا که تحت تبدیلات هندسی بسیاری از روابط طولی ناوردا می‌مانند و یا به روابطی ساده‌تر تبدیل می‌شدند. اثبات‌های مرحله به مرحله و نمادین و از جزء به کل مشخصه تمام اثبات‌ها به کمک روابط طولی هستند. علی‌الخصوص اثبات قضایا به کمک روابط مثلثاتی نیز چنین هستند. البته بعد از توسعه روش‌های حسابان علم مثلثات نیز به فرمول‌بندی عمیق‌تری دست پیدا کرد و به عنوان مدلی برای پدیده‌های متناوب به کار رفت.

۲ حل جبری معادلات جبری

حل معادلات جبری به روش کلامی از زمان خوارزمی آغاز شد و نویدبخش آغاز شاخه جبر بود. ایرانیان در روش‌های الگوریتی محاسبات بسیار پیش‌رفت کرده بودند و نوشتن کتاب‌های جبر و مقابله در بین ریاضی‌دانان ایرانی رواج داشت. از بین این‌ها کتاب جبر و مقابله خوارزمی و کتاب

جبر و مقابله خیام به شهرت رسیدند و خوارزمی را واضع روش‌های جبری در ریاضیات می‌دانند. حل معادلات درجه دوم توسط روش‌های جبری و مفهوم مبین معادله و حل و بحث معادله درجه دوم تا بعد از دکارت به تأخیر افتاد. دکارت اگرچه اولین کسی بود اعداد منفی را مطرح کرد و روش‌های جبر را به کمال رساند اما هندسه تحلیلی او منجر به روش رسم نمودار توابع چندجمله‌ای و گویا شد که ریاضیات کلامی را قابل ترجمه به ریاضیات تصویری نمود. حل معادلات چندجمله‌ای درجه سوم و چهارم توسط رادیکال‌ها و مفهوم مبین این چندجمله‌ای‌ها و بحث تعداد جواب‌های این معادلات در قرن هفدهم انجام شد و منجر به ظهور مفهوم عدد مختلط گردید. نظریه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی و مختلط و حل مختلط آن‌ها تز دکتری گاوس را تشکیل می‌داد که به آن قضیه اساسی جبر گفته می‌شد که در قرن نوزدهم به روش‌های آنالیزی ثابت شد. در قرن هفدهم حسابان برای درک به‌تر تصویری نمودارهای توابع جبری کمک‌کار شدند و روش‌های کلامی آنالیز عددی نیز برای تقریب جواب‌های معادلات جبری به کار گرفته شدند. از جمله این روش‌ها روش نیوتون برای تقریب صفرهای یک تابع بود. در مورد روش‌های آنالیز عددی در حل معادلات دیفرانسیل سخن خواهیم گفت. روش‌های گالوا و آبل برای اثبات این که معادلات درجه پنجم به بالا لزوماً توسط رادیکال‌ها قابل حل نیستند همه به کمک تکنیک‌های کلامی ممکن شد. این تکنیک‌ها حتی توانستند عدم امکان تثلیث زاویه دل‌خواه را نیز به اثبات برسانند. با این که عدم امکان تثلیث حکمی هندسی بود اما روش‌های کلامی برای اثبات این قضیه کارآمد شدند. روش‌های هندسی هندسه تحلیلی بعدها در هندسه جبری حقیقی تعمیم پیدا کردند و بسیاری از این روش‌ها روی میدان اعداد مختلط نیز به کار برده شدند. در مورد هندسه جبری روی حلقه و میدان دل‌خواه پس از این سخن به میان خواهد آمد. خلاصه این که ظهور علم کلامی جبر با تکیه بر مسئله حل معادلات جبری اتفاق افتاد. حل معادلات دیوفانتی نیز در این مسئله بی‌تأثیر نبودند. مهم‌ترین انقلاب در روش جبری تعریف اعداد منفی توسط دکارت بود.

۳ حسابان و مبانی آنالیز

حسابان به دو حساب مشتق و انتگرال(حساب فاضله و حساب جامعه) برمی‌گردد که علمی است مخلوط شده از اجزاء کلامی و تصویری. روش‌های محاسباتی در حسابان عموماً کلامی هستند ولی بسیاری از اثبات‌های قضایا در حسابان مانند قضیه مقدار میانگین ذاتاً تصویری هستند. تدریس حسابان به همین دلیل طبیعت کلامی و تصویری هر دو تبدیل به معضلی شده چرا که دانش‌آموزان کلامی با قسمت‌های تصویری حسابان مشکل دارند و دانش‌آموزان تصویری با قسمت‌های کلامی. بدون داشتن این مهارت‌های شناختی در کنار هم یادگرفتن حسابان بسیار دشوار می‌نماید. بسیاری از مبانی کلامی حسابان توسط لایب‌نیتز فرمول‌بندی شد که شخصیتی بسیار کلامی داشت. البته فرمول‌بندی نیوتون به موازات فرمول‌بندی لایب‌نیتز نیز اگر چه از لحاظ نمادین ساده‌انگارانه‌تر است اما از لحاظ دقت ریاضی استوارتر می‌باشد. پس از کشف فرمول‌بندی حسابان به وسیله مفهوم حد توسط کوشی و صورت‌بندی اپسیلون–دلتای مفهوم

حد توسط وایرشتراوس حسابان به استانداردهای دقت اقلیدسی در ریاضیات نزدیک شد و به عنوان یک مشرب کلامی مورد توجه قرار گرفت و نام آنالیز ریاضی را به خود گرفت که به نوعی توسعه علم جبر در نظر گرفته می‌شد که با مفهوم بی‌نهایت کوچک و بی‌نهایت بزرگ ممزوج شده بود. آنالیز به این معنی به دو شاخه آنالیز حقیقی و آنالیز مختلط تقسیم شد. توابع مشتق‌پذیر به معنای مختلط در معادلات دیفرانسیلی صدق می‌کنند که طبیعت مطالعه آنالیز مختلط را بسیار متفاوت از آنالیز حقیقی می‌گرداند. در بخش‌های بعد به جنبه‌های کلامی حل معادلات دیفرانسیل خواهیم پرداخت. اما باید توجه داشت که بسیاری از ابعاد هندسی نیز در توسعه آنالیز مختلط اهمیت پیدا می‌کنند که البته نهایتاً به زبان کلامی قابل ترجمه هستند. از جمله پیدا کردن یک‌ریختی تحلیلی بین اشکال هندسی و نواحی صفحه که جزئی از آنالیز مختلط کاربردی است. هم‌گرایی دنباله‌ها و سری‌ها از اجزاء مهم آنالیز هستند که به کمک روش‌های کلامی مدیریت می‌شوند. در شاخه‌های مختلف آنالیز مانند آنالیز فوریه، آنالیز.......، آنالیز نااستاندارد و غیره روش‌های کلامی حرف اول را می‌زنند و این نکته تأکیدی بر این است که آنالیز شاخه‌ای از ریاضیات است که از دل جبر بیرون آمده است. بی‌مناسبت نیست اگر یادی بکنم از کتاب‌های جبر و آنالیز ریاضی که در قدیم در دبیرستانهای ایران تدریس می‌شد.

۴ حل جبری معادلات دیفرانسیل

روش‌های جبری حل معادلات دیفرانسیل درست مانند حالت خاص آن که محاسبه انتگرال باشد کلامی ولی تصادفی و پر از کلک و حیله هستند. حتی بسیاری از روش‌های عددی که در آنالیز عددی مطرح می‌شوند نیز از حیله‌های محاسباتی خالی نیستند. روی هم رفته می‌توان گفت که همان طور که حل معادلات جبری توسط رادیکال‌ها روشی کارآمد نبود، حل معادلات دیفرانسیل توسط روش‌های جبری نیز در نهایت ناکارآمد است. حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل حتی انتگرال بسیاری از توابع مقدماتی بر حسب توابع مقدماتی قابل بیان نیستند. غیر از روش‌های جبری و روش‌های محاسباتی تقریب عددی، روش‌های تقریب هندسی نیز برای حل معادلات مطرح شدند اما تنها کارآمدی روش‌های هندسی، حل کیفی معادلات دیفرانسیل بود که در سیستم‌های دینامیکی کارآمد افتاد. نمی‌توان گفت که سیستم‌های دینامیکی علمی کلامی است، چرا که پر از ملاحظات تصویری است. مدلسازی توسط معادلات دیفرانسیل از طرف دیگر به نوعی ترجمه از تصویر به کلام است و خود یکی از مهم‌ترین مهارت‌های تفکر کلامی می‌باشد. هر چند که مستقیماً با تفکر هندسی ارتباط دارد. این مهارت مرا بسیار به یاد اختراع خط می‌اندازد که از طرفی تصویری است چون نمادهای خط تصویر هستند و از طرفی کلامی است چون نمادها برای کلمات و حروف به کار می‌روند. هنوز هم روش‌های حل معادلات دیفرانسیل با کمک تکنیک‌های کلامی انجام می‌شود. هر چند ظهور کامپیوتر انقلابی در حل معادلات دیفرانسیل پدید آورده است و بسیاری از پدیده‌هایی که به راحتی قابل مدل‌سازی نبودند مانند آب و هوا و بارش باران و برف توسط کامپیوتر مدل‌سازی می‌شوند و سیموله می‌گردند. یکی از مهم‌ترین تأثیراتی که کامپیوتر بر زندگی بشر داشته است همین حل معادلات دیفرانسیل با کمک کامپیوتر است که البته اگر چه محاسباتی است و از ریاضیات

کلامی و تکنیک‌هایش استفاده می کند، اما خود این روش به هیچ وجه کلامی نیست. بلکه کاملاً تصویری است. اگر چه روش‌های عددی در آن نقش مهمی ایفا می کنند. آن‌چه تا به حال در مورد حسابان و معادلات دیفرانسیل گفتیم طبیعت آنالیزی دارد. روش‌های جبری خاص که به آنالیز نیازی ندارند در شاخه مجرد جبر و به خصوص نظریه اعداد به کار می‌روند که شاخه‌ای کاملاً کلامی است که بدون هیچ‌گونه توجهی به شهود هندسی توسعه یافته است.

۵ نظریه اعداد و جبر

توسعه نظریه جبری اعداد و از آن‌جا جبر جابه‌جایی و جبر ناجابه‌جایی که از جبر هامیلتون آغاز می‌شود سراسر به روش‌های کلامی تکیه می‌زند. هر چند قسمت‌هایی از علم جبر جزءنگر است و به کار با ساختارهای ریاضی با کمک مولدها و روابط آن‌ها می‌پردازد. اما نظریه اعداد و قسمتی از جبر جابه‌جایی و ناجابه‌جایی که زیر سایه نظریه اعداد مانده است، دغدغه‌هایی کل‌نگرانه دارد که باعث می‌شود این شاخه تفاوت‌های کلانی با سایر شاخه‌های کلامی در ریاضیات داشته باشد. از جمله برنامه‌های تحقیقاتی بلندمدت و کل‌نگرانه در نظریه اعداد است که از کل‌نگری ریاضی‌دانان این شاخه نشئت گرفته است. مثال‌هایی از این برنامه‌های بلندمدت برنامه لنگلندز، حدس ریمان، حدس موردل و مانند این‌هاست که سال‌های طولانی تاریخ نظریه جبری اعداد را تحت تأثیرگذاری خود قرار دادند. نگاه کل‌نگرانه در نظریه اعداد قرابتی با نقش هندسه در توسعه نظریه اعداد نیز دارد. چرا که هندسه‌دانان غالباً ریاضی‌دانان تصویری هستند و ریاضی‌دانان تصویری غالباً کل‌نگر هستند. در مورد نقش روش‌های جبری در هندسه به خصوص در هندسه دیفرانسیل و هندسه جبری سخن به میان خواهد آمد. هر چند در هندسه دیفرانسیل تفکر کلامی نگاهی جزءنگرانه ولی در هندسه جبری تفکر کلامی نگاهی کل‌نگرانه دارد که این خود موجب گره خوردن نظریه اعداد و هندسه جبری شده است. این نکته در این حدس که هر موتیو پیمانه‌ای است آشکار است. این حدس در حاشیه حدس‌های لنگلندز قرار گرفته است و از مهم‌ترین جریان‌های تحقیقاتی در نظریه اعداد امروز می‌باشد.بسیاری از حدس‌های حل نشده در نظریه اعداد به محاسبه ناورداهای سرتاسری موجودات حسابی توجه دارند که تأییدی بر کل‌نگری شاخه نظریه اعداد است. نظریه تحلیلی اعداد نیز اگر چه شاخه‌ای کلامی است، تحت تأثیر کاربردهای آنالیز در آن نگرشی جزءنگرانه دارد. هر چند که ناورداهای سرتاسری در نظریه تحلیلی اعداد هم فراوانند. از آن جمله می‌توان تابع زتای ریمان را نام برد که محل صفرهای آن اطلاعات مهمی در مورد اعداد اول و توزیع آن‌ها را در خود محفوظ دارند. نظریه تحلیلی اعداد با هندسه دیفرانسیل که آن هم به نوعی جزءنگر است قابلیت ممزوج شدن دارد. مثلاً توزیع اعداد اول مشابه توزیع ژئودزیک‌های با طول متناهی در ساختارهای هندسی مختلف می‌باشد.

۶ هندسه دیفرانسیل و هندسه ریمانی

مبانی هندسه دیفرانسیل توسط گاوس چیده شد و مبانی هندسه ریمانی توسط ریمان که شاگرد گاوس بود بنیان‌گذاری و سپس توسط پوانکاره فرمول‌بندی شد. ریمان در یک سخن‌رانی در دانش‌گاه گوتینگن مبانی فلسفه فضا را بنیان‌گذاری کرد. او به مفهوم متریک در خمینه‌های پیوسته و گسسته پرداخت. خمینه‌های پیوسته توسط پوانکاره و پیروانش فرمول‌بندی شدند. اما خمینه‌های گسسته از زبان فلسفی فراتر نرفتند. به خاطر تأکید بر فاصله موضعی فرمول‌بندی خمینه‌ها از جزء به کل شکل گرفت و به زبان کاملاً کلامی ترجمه شد. مفاهیم هندسی موضعی نظیر ژئودزیک (زمین‌پیما) به زبان معادلات دیفرانسیل موضعی قابل بیان هستند. مفهوم فضای مماس توسط پوانکاره و مفهوم فرم‌های دیفرانسیل توسط کارتان فرمول‌بندی شدند و حسابان به صورت قضیه استوکس روی خمینه‌های دل‌خواه توسعه پیدا کرد. انیشتین دگردیسی متریک فضا را مطرح کرد که آن هم تحت حکومت معادلاتی دیفرانسیل بود. این ایده توسط هامیلتون وارد ریاضی شد که منجر به اثبات حدس پوانکاره از طریق اثبات حدس ترستن توسط پرلمان گردید. با این که این حکم کل‌نگرانه و کاملاً تصویری است، اثبات آن جزءنگرانه و آنالیزی و کاملاً کلامی است. پیچیدگی‌های شهود هندسی جز به کمک روش‌های کلامی و جز با استفاده از زبان جبری قابل رام شدن نیستند. به علاوه زبان شهود یک زبان دقیق ریاضی نیست و نمی‌توان با کمک شهود به اثبات قضایای پیچیده همت گماشت. شهود راه را برای حدس احکام و مشاهده حالات خاص هموار می‌کند و سپس عقل و منطق و کلام راه را برای یقین ذهن ریاضی باز می‌کند. با وجود این که هدف هندسه ریمانی اثبات احکام تصویری و کل‌نگرانه است اما روش ریاضی هندسه ریمانی کلامی و جزءنگرانه می‌باشد. البته وضعیت در توپولوژی جبری و هندسه جبری متفاوت است که به نوبه خود به این شاخه‌ها نیز خواهیم پرداخت. پایه همه این روش‌های کلامی توسط گاوس در هندسه دیفرانسیل خم‌ها و رویه‌ها گذاشته شد و مفهوم بنیادی خمیدگی خم و خمیدگی صفحه با متریک القایی به زبان کاملاً کلامی فرمول‌بندی شد که استانداردگذاری لازم برای توسعه شاخه هندسه دیفرانسیل و بعد هندسه ریمانی را فراهم کرد. مفهوم خمیدگی اگرچه موضعی است اما اصالتاً به زبان هندسی مطرح شد و ظهور پیدا کرد. در حالی که گاوس کاملاً این مفهوم را بر مبانی کلامی فرمول‌بندی کرد.

۷ توپولوژی جبری و روش‌های جبری در توپولوژی

توپولوژی جبری توسط پوانکاره فرمول‌بندی شد. اگرچه این شاخه درباره مفاهیم سرتاسری هندسی است و نه موضعی، اما از زبان کاملاً کلامی برای مفهوم‌سازی و محاسبه کمک می‌گیرد. مفهوم تغییر پیوسته و تداوم و توالی زمان در شاخه توپولوژی جبری نقش مهمی ایفا می‌کند. فرمالیسم کلامی توپولوژی مقدمه لازم برای فرمول‌بندی نظریه رسته‌ها را فراهم کرد که نظریه‌ای کاملاً کلامی اما کل‌نگرانه است بدون هیچ ارجاعی به تفکر هندسی که از این لحاظ بسیار جالب

است. چون در عین این که هندسی نیست، اما کل‌نگرانه است. البته بسیاری از شاخه‌های هندسه من‌جمله و البته توپولوژی جبری قابل مطالعه به زبان نظریه رسته‌ها هستند. یک نکته جالب مفهوم همسانی دو فضاست که یک رابطه هم‌ارزی است که بر مبنای حرکت پیوسته فضا تعریف شده است. این رابطه هم‌ارزی شهودی توپولوژیک ولی هندسی بنیان‌گذاری می‌کند که پیش از آن در هندسه غایب بوده است. این رابطه هم‌ارزی بین نگاشت‌های بین دو فضای توپولوژیک هم تعریف می‌شود. با کمک روابط هم‌ارزی متنوع مفاهیم جبری مختلفی به عنوان ناوردا برای فضاهای هندسی معرفی می‌شود. از جمله این ناورداها گروه بنیادی یا گروه همسانی و یا گروه‌های همسانی بالا که با تعریف روابطی هم‌ارزی روی نگاشت‌های پیوسته از کرات با ابعاد مختلف به فضاهای هندسی تعریف می‌شوند به دست می‌آید و عمیقاً با گروه تقارن‌های فضا ممزوج شده است. مثال دیگر گروه‌های همانندی و پادهمانندی هستند که به نوبه خود به این فلسفه که شکل همان عدد است و با کمک نگاشت‌های پیوسته از یک سادک با ابعاد مختلف به فضاهای هندسی تعریف می‌شوند. از عمیق‌ترین نتایج در توپولوژی جبری مفهوم دوگانی پوانکاره است که یک دوگانی بین فضاهای برداری همانندی و پادهمانندی با ضرایب در اعداد حقیقی است. مفهوم دوگانی فضاهای برداری از عمیق‌ترین مفاهیم کلامی در ریاضیات است. توپولوژی جبری تبلور دوباره این دیدگاه فلسفی فیثاغورس است که مفاهیم شکل و عدد بر هم منطبق اند. این ایده‌های جبری که از توپولوژی جبری برخاسته‌اند وارد جبر شدند و شاخه‌ای از جبر به نام جبر همانندی به وجود آوردند که شاید دومین تکنیک عمومی برای حل مسائل است که بعد از حسابان توسط بشر به دست آمده است. جبر هومولوژی بسیار به زبان نظریه رسته‌ها نزدیک و مرتبط است. به خصوص رسته‌های آبلی که در آن‌ها دنباله‌های دقیق قابل تعریف شدن هستند.

۸ نظریه رسته‌ها

نظریه رسته‌ها گوی سبقت را در کلامی بودن از جبر که واضع روش‌های کلامی در ریاضیات است ربوده است. بیش‌تر از این حیث که جبر نگاهی روان‌شناسانه و درون‌نگرانه به اشیاء ریاضی دارد اما نظریه رسته‌ها نگاهی جامعه‌شناسانه و برون‌نگرانه به همان اشیاء جبری دارد. نظریه رسته‌ها نیز مانند جبر یک نظریه کاملاً کلامی است. در نظریه رسته‌ها به هندسه مورفیسم‌ها (ریختارها) بین اشیاء ریاضی پرداخته می‌شود و این که این ریختارها از درون به کمک اطلاعات موضعی چه‌گونه تعریف می‌شوند توجهی ندارد. تنها می‌خواهد بداند که ترکیب کدام ریختارها برابر با ریختاری است که شاید از پیش بشناسیم. ساختار ریختارها بین یک مجموعه از اشیاء ریاضی و یکسانی بین این ساختارها که با کمک تبدیلات طبیعی تعریف می‌شوند که خود به نوعی ریختار بین رسته‌هاست نگاه ما به ساختار ریاضی را دگرگون می‌کند. خاصیت جهانی یکی از ابعاد نظریه رسته‌هاست که در ریاضیات جدید نقش مهمی ایفا کرد. به علاوه وردش‌های نمایش‌پذیر نگاهی جدید به این که یک شیء ریاضی چیست و چه‌گونه می‌توان یک ریختار بین رسته ها را در یک شیء خلاصه کرد، دارند. کل‌نگری نظریه رسته‌ها رابطه محکمی بین

این شاخه و نظریه اعداد که آن هم کلامی و کل‌نگر است ایجاب کرد. بلکه هندسه جبری نیز که به نوعی کل‌نگر است و هم کلامی در این مثلث وارد شد و شاخه هندسه حسابی را به وجود آورد. فضاهای مدولی نظریه فرم‌های مدولار را توسعه دادند و نظریه نمایش‌های گالوایی در چارچوب خاصیت جهانی ابزاری محاسباتی و قوی را به وجود آورند که منجر به اثبات وایلز از قضیه فرما شد. در مورد ابعاد کلامی هندسه جبری پس از این سخن خواهیم گفت. اما آن‌چه اهمیت دارد کاربرد نظریه رسته‌هاست که این همه را ممکن کرد. از طرف دیگر نظریه رسته‌ها و علی‌الخصوص توپولوژی جبری در دستان وئودسکی صورت‌بندی جدیدی از مبانی ریاضی به دست داد که ریاضیات را برای ارائه آن به کامپیوتر و اثبات‌های کامپیوترمحور از قضایای پیچیده ریاضی فراهم کرد که البته هنوز به بهره‌برداری نرسیده است. البته نظریه مجموعه‌ها نیز مانند نظریه رسته‌ها کل‌نگرانه و کلامی است اما در نظریه رسته‌ها آزادی‌های زبانی وجود دارد که نظریه مجموعه‌ها از آن بری است. البته نظریه مجموعه‌ها به زبان منطق نزدیک‌تر است. از این رو بسیاری آن را شاخه متمایزی از ریاضیات به حساب می‌آورند و بسیاری نظریه مجموعه‌ها و منطق را در فاصله‌ای با ریاضیات قرار می‌دهند.

۹ فضای هیلبرت و آنالیز تابعی

آنالیز تابعی نگاهی کل‌نگرانه به مفهوم تابع دارد. اما این کل‌نگری بر مبنای حرکت از جزء به کل بنا شده است. با این حال روی‌کرد آنالیز تابعی مانند سایر شاخه‌های آنالیز کاملاً کلامی و تحلیلی است. مفهوم فضای هیلبرت بسیار به شاخه آنالیز تابعی خدمت کرد. در واقع هیلبرت همان کسی است که فلسفه فرمالیسم را در ریاضیات پیش پا نهاد که دیدگاهی کاملاً کلامی به کل ریاضیات است. بلکه برنامه اصل موضوعه‌ای سازی ریاضیات که هندسه و همه ریاضیات را بر اساس اعداد حقیقی و اعداد حقیقی را بر اساس اعداد صحیح بنا می‌کرد برنامه کاملاً کلامی بود. در واقع در دستان هیلبرت تفکر کلامی کل ریاضیات را درنوردید و همه گوشه‌های آن را اشغال کرد. اما برنامه اصل موضوعه‌سازی ریاضیات توسط قضایای گودل که آن‌ها هم کلامی بودند به شکست انجامید. جای دیگری که فضای هیلبرت به کار رفت، استفاده از آن در مدل‌سازی فیزیک کوانتوم بود. البته فرمول‌بندی فیزیک کوانتوم در زبان هایزنبرگ هم کلامی بود و در فرمول‌بندی فون نویمان هم چنین شد. البته از قرن‌ها قبل از آن از عصر دکارت تفکر کلامی فیزیک مدرن را تحت سیطره خود در آورده بود. فیزیک گالیله، نیوتون، لاگرانژ، هامیلتون و انیشتین همگی از فرمول‌بندی‌های کلامی استفاده می‌کردند و بعد از فون‌نویمان هم وضع به همین منوال گذشت. در اواخر قرن بیستم تکنیک‌های آنالیز تابعی و فضای هیلبرت برای حل مسائل ترکیبیات به کار گرفته شدند و شاخه ترکیبیات را که فرمول‌بندی هندسی اما گسسته و متناهی داشت به زبان کلامی فضای هیلبرت و آنالیز تابعی ترجمه کردند. در جای دیگر تلاش کردند فرمول‌بندی مکانیک کلاسیک روی خمینه‌ها را به خمینه‌های بی‌نهایت بعدی که موضعاً باز فضای هیلبرت هستند ترجمه و توسعه دهند که این کار البته با توجه به فرمول‌بندی کلامی هندسه ریمانی سهل‌الوصول بود. نکته جالب برای بنده این است که هیلبرت که شخصیتی کلامی

داشت هم او بود که مفهوم فضای هیلبرت را تدوین کرد که به ریاضیات کلامی خدمت کرد. شاید باید این نکته را مورد توجه قرار داد که سبک شناختی ریاضی‌دانان چه قدر بر ریاضیاتی که تولید می‌کنند حکومت دارد و چه قدر به نوع تأثیری که بر توسعه ریاضیات در آینده می‌گذارند مربوط می‌شود و در آن نقش ایفا می‌کند. این که یک نظریه توسط چه کسانی توسعه می‌یابد و فرمول‌بندی می‌شود در چه‌گونگی فرمول‌بندی این نظریه تأثیر دارد. برای مثال هندسه جبری دارای فرمول‌بندی‌های کلامی و تصویری هر دو هست و هر یک دستاوردهای خاص خود در ریاضیات را دارند.

۱۰ هندسه جبری روی میدان و حلقه جابه‌جایی

فرمول‌بندی میدان توابع که توسط ویل از هندسه جبری ارائه شد این قابلیت را به وجود آورد که هندسه جبری روی میدان دل‌خواه فرمول‌بندی شود و فرمول‌بندی شماها که توسط گروتندیک از هندسه جبری ارائه شد این قابلیت را به وجود آورد که هندسه جبری روی حلقه جابه‌جایی دل‌خواه فرمول‌بندی شود که هر دو این نظریات بسیار کارآمد بودند. البته هر دو این فرمول‌بندی‌ها زیر سایه جبر و تفکر جبری و لذا تفکر کلامی انجام شدند. هندسه جبری با چندین نظریه دیگر نیز پیوند خورد. از جمله نظریه رسته‌ها که با طبیعت کلامی آن پیش از این آشنا شدیم. هم‌چنین نظریه آراکلو بین آنالیز روی اعداد اول نامتناهی و هندسه جبری روی اعداد صحیح پیوند داد که بسیار در اثبات قضایای متناهی در هندسه جبری کارآمد بود. به طور کلی ارتباطات هندسه جبری با نظریه اعداد چه در قسمت‌های جبری مانند خم‌های بیضوی و چه در زمینه‌های تحلیلی مانند تابع زتای ریمان روی میدان توابع هر دو کاملاً ارتباطاتی کلامی بودند که همه این پیوندها بین شاخه‌های مختلف ریاضیات را از دو طرف حمایت می‌کردند.

۱۱ کلام آخر

روی هم رفته مثال گاورز که بین ترکیبیات و آنالیز تابعی هم‌نشینی به وجود آورد تنها مثالی نیست که در تاریخ ریاضیات دیده می‌شود که اطلاعات هندسی را به زبان جبری ترجمه می‌کند و قابل دست‌رسی توسط اثبات می‌نماید. در واقع حسابان و توپولوژی جبری و هندسه دیفرانسیل و هندسه ریمانی همه چنین نقشی را ایفا کرده‌اند. هم‌نشینی بین شاخه‌های کلامی هم مثال‌های فراوانی دارد که از بسیاری از آن‌ها در این مقاله نام برده شده است. اما تا کنون مثالی سراغ نداریم که در یک نظریه ریاضی یک تئوری کلامی به یک زبان تصویری و شهودپذیر ترجمه شده باشد و از این ترجمه برای توسعه نظریه کلامی استفاده شده باشد. برای مثال شاید تصور کنید که نظریه شماها چنین کاری می‌کند و طیف یک حلقه را به عنوان فضایی هندسی در نظر می‌گیرد. اما باید توجه داشت نظریه شماها خود یک تئوری کلامی است و به هیچ وجه فرمول‌بندی کلامی نظریه حلقه‌ها را به یک فرمول‌بندی تصویری ترجمه نکرده است. که البته این نکته شایسته تأمل و توجه می‌باشد. به ظاهر ترجمه از شهود به عقل میسرتر است تا ترجمه از عقل به شهود و این مسئله‌ای بسیار عمیق است. به نظر عقل در دسترس تر از شهود است.