نگاهی به تاریخ ریاضیات تصویری

آرش رستگار

۲۱ آبان ۱۳۹۸

خلاصه

سبک‌های شناختی کلامی و تصویری دو شاه‌راه موازی در تاریخ ریاضیات به نام ریاضیات کلامی و ریاضیات تصویری به وجود آورده‌اند. در این‌جا به مطالعه شاخه‌های تصویری ریاضیات و پدیده‌هایی که در تاریخ ریاضیات تصویری مشاهده می‌شود می‌پردازیم.

مقدمه

ریاضیات کلامی بیش‌تر بر اثبات مرحله به مرحله، تکنیک‌های کلامی و فرمال و دیدگاهی منطقی به ریاضیات استوار است. در حالی‌که ریاضیات تصویری نگاهی سرتاسری، مستقل از ترتیب و توالی و شهودمآبانه به ریاضیات دارد. این نگاه منجر به آن می‌شود که ریاضیات از دید ریاضی‌دانان تصویری که در شاخه‌های تصویری ریاضیات تحقیق می‌کنند چیزی متفاوت از ریاضیات از دید ریاضی‌دانان کلامی باشد. نگاه کلامی به ریاضیات بسیار به دیدگاه اقلیدس از ریاضیات نزدیک است و نگاه تصویری به ریاضیات بسیار به دیدگاه افلاطون از ریاضیات قرابت دارد. افلاطون بیش‌تر به جنبه‌های آموزشی و رشد شناختی ریاضیات توجه دارد تا کاربردهای آن و بیش‌تر به ابعاد شناخت‌شناسانه و حقیقت‌جویانه ریاضیات تکیه می‌زند تا ابعاد مفهوم‌محور و مسئله‌حل‌کن و تئوری‌پردازانه به ریاضیات. هر چند تئوری‌ها هم اگر چه از اجزا ساخته می‌شوند و فرمال هستند اما می‌توان به آن‌ها با نگاهی تصویری و شهودمآبانه نظر کرد. منظور ما در این‌جا از شهود به هیچ وجه نادقیق، ساده‌انگارانه، حسی و تقریبی نیست، بلکه منظور ما مکاشفه، باطن‌نگری و عمیق‌اندیشی است. برای ریاضی‌دانان تصویری ریاضیات بیش‌تر به عرفان شبیه است تا فلسفه و برای ریاضی‌دانان کلامی ریاضیات نوعی فلسفه است که غالبا آن را تحلیلی و جزءنگر تصور می‌کنند و قلیلی آن را کل‌نگر و سرتاسری می‌بینند چنان که فلسفه قاره‌ای کلامی اما کل‌نگر و سرتاسری است. ریاضی‌دانان تصویری عموما کل‌نگر هستند اما قلیلی هم که جزءنگرند با روش‌های شهود عرفانی عجین‌ترند تا روش‌های کلامی فلسفه تحلیلی. از این رو تاریخ ریاضیات تصویری چیزی شبیه تاریخ عرفان در تمدن بشری است.

۱ هندسه اقلیدسی

واضع هندسه اقلیدسی به شکلی که امروز برای ما به یادگار مانده است تالس بود. پیش از تالس هندسه چیزی جز چند فرمول گاها نادرست برای مساحت و حجم اشکال ساده هندسی نبود. تالس قضایایی نظیر این که دایره با قطر به دو جزء برابر تقسیم می‌شود و یا در مثلث متساوی‌الساقین زوایای نظیر به دو ضلع مساوی با هم مساویند را مطرح کرد. البته کشف قضیه فیثاغورس توسط فیثاغورسیان انقلاب بزرگی در هندسه محسوب می‌شود اما اثبات این رابطه جبری کاملاً به زبان تصویری و به روش شهودی انجام می‌شد. هر چند هندسه پس از این که روابط طولی در آن وارد شدند به یک علم کلامی تبدیل شد اما باطن و عصاره آن همواره شهودی و تصویری باقی ماند و ریاضی‌دانان تصویری را به سوی خود جذب کرد. از پدیده‌هایی که بسیار فراوان در هندسه مشاهده می‌شود فرمول‌بندی‌های بسیار متنوع این است. هندسه تصویری، هندسه تبدیلات، قطب و قطبی، نسبت هم‌ساز و ناهم‌ساز و انعکاس همه نگاه‌های جدیدی به کل نظریه هندسه اقلیدسی را در خود جای داده‌اند که بی‌تشابه به نحله‌های مختلف عرفانی نیستند. تنوع فرمول‌بندی‌ها از ویژگی‌های بارز ریاضیات تصویری است که در سراسر تاریخ ریاضیات تصویری دیده می‌شود. این تنوع فرمول‌بندی‌ها بسیاری از اوقات به شکل گرفتن زیرشاخه جدیدی از هندسه منجر شده است. هندسه تحلیلی و پس از آن هندسه جبری و پس از آن هندسه جبری ناجابه‌جایی زیرشاخه‌هایی هستند که یکی پس از دیگری از شاخه هندسه اقلیدسی جدا شده‌اند و استقلال یافته‌اند تا بعد میزبان زیرشاخه دیگری باشند. شاید نظر به نگاه تصویری تالس به هندسه و نگاه کلامی اقلیدس به ریاضیات مناسب‌تر بود هندسه اقلیدسی را هندسه تالس بنامیم. هر چند بسیاری از پیش‌رفت‌ها در خود علم هندسه به خاطر نگاه اقلیدس و نگاه کلامی به هندسه اتفاق افتاده است. در واقع اگر روشن‌تر نگاه کنیم خواهیم دید که روش جبری که در برابر روش هندسی قد علم کرده است خود زیرشاخه‌ای از هندسه بیش نیست. چرا که روش‌های جبری حل معادلات که آغاز علم جبر بودند در پی روش‌های هندسی حل معادلات ظهور پیدا کردند تا رده‌بندی معادلات درجه دوم و سوم بر حسب ضرایب مثبت را یک‌کاسه کنند. با این وصف زمینه ظهور شاخه کلامی جبر را نیز علم تصویری هندسه به وجود آورده است. از این رو شهود بر کلام مقدم است.

۲ حل معادله به روش تصویری

حل معادلات درجه یک و درجه دوم حتی در کتاب اقلیدس نیز به روش هندسی انجام شده است. با وجود این که اقلیدس واضع دیدگاه کلامی به ریاضیات است در زمان اقلیدس هنوز نمی‌توانسته‌اند که معادلات درجه یک و درجه دوم را به زبان کلامی حل و بحث کنند. حتی تا زمان خیام که حل و بحث معادله درجه سوم کامل شد همین روش هندسی بر حل معادلات حکومت می‌کرد. خوارزمی در کتاب جبر و مقابله خود روش جبری برای حل معادلات درجه اول را ارائه کرد. بلکه او کسی بود که حل و بحث معادلات درجه دوم به زبان جبری را انجام

داد اما تا قرن هفدهم طول کشید تا حل و بحث معادلات درجه سوم و معادلات درجه چهارم به زبان جبری انجام شدند. و روش جبری چنان قوت گرفت که دیگر کسی به حل معادلات درجات بالا به روش هندسی (اما نه لزوماً به کمک خط‌کش و پرگار) فکر نکرد. البته نظریه گالوا که موفق به اثبات حل‌ناپذیری معادلات درجه پنجم به بالا توسط رادیکال‌ها شده بود در مورد رسم با خط‌کش و پرگار نیز به موفقیت‌هایی دست پیدا کرد. مثلاً ثابت کردند که تثلیث زاویه و تربیع دایره ممکن نیست که البته احکامی تصویری بودند در مورد اشکال هندسی که به روش‌های کلامی ثابت شدند. رسم هفده‌ضلعی منتظم توسط گاوس با کمک خط‌کش و پرگار دستاوردی در قرن نوزدهم در جهت رشد ریاضیات تصویری بود. در کاشی‌کاری‌های مساجد و مناره‌های مساجد از استفاده از رسم توسط خط‌کش و پرگار و همین طور استفاده از روش‌هایی مانند رسم نادقیق پنج‌ضلعی منتظم غوغا به پا کرد و زیرشاخه‌ای از هندسه اقلیدسی بود که شکوفا شد. رسم چندضلعی‌های منتظم توسط خط‌کش و پرگار به نوعی جزء حل معادله به روش تصویری محسوب می‌شود. چرا که رئوس n–ضلعی منتظم از ریشه‌های n–ام واحد قابل دست‌یابی هستند که خود با یک معادله جبری به دست می‌آید. بعدها روش‌هایی برای حل معادلات داده شد که گرچه تصویری بودند به زبان کلامی فرمول‌بندی می‌شدند. از جمله روش نیوتون برای تقریب صفرهای یک تابع که ذاتاً هندسی است اما در ظاهر به زبان کلامی فرمول‌بندی می‌شود. در روش نیوتون از مفهوم مشتق تابع استفاده شده است که آن هم به نوعی مفهومی هندسی است. اما نیوتون از آن به زبان کلامی بهره می‌برد. این روش ما را وارد شاخه دیگری از ریاضیات تصویری می‌کند به نام حل کیفی معادلات دیفرانسیل و نظریه سیستم‌های دینامیکی. این شاخه‌ها اگر چه بر مفهومی از کل تکیه می‌کند که از جمع اجزا پدید آمده اما با روش‌های تصویری قابل مطالعه است.

۳ حل کیفی معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی

روش‌های سیستم‌های دینامیکی کل‌نگرانه و تصویری هستند. روش‌های تصویری در ریاضیات اسمیل سراسر موج می‌زنند. اگر چه معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی ذاتاً جزءنگرند اما به کلی که از اجزاء تشکیل شده است تکیه می‌زنند و لذا روش‌های کل‌نگرانه تصویری در آن‌ها بسیار کارآمد هستند. یکی از نکاتی که سیستم‌های دینامیکی را تصویری می‌کند حضور مفهوم حرکت در این ساختارهای هندسی است. این نگاه به نوعی مکانیک کلاسیک را هم زیر سایه نام سیستم‌های دینامیکی قرار می‌دهد و مفهوم آشوب که در مسئله سه جسم مطرح شده بود را به طور طبیعی‌تر به عنوان مفهومی از سیستم‌های دینامیکی مطرح می‌کند. در یک سیستم دینامیکی از یک فضای حالت و یک قانون تغییر سخن گفته می‌شود که حالت‌های آینده سیستم از آن قانون تبعیت می‌کنند. البته معادلات دیفرانسیل تصادفی نیز مطرح می‌شوند که شهود هندسی به طور گسسته و دفعی در مواردی ظهور پیدا می‌کنند. در فیزیک نیز یک

سیستم دینامیکی از عده‌ای شئ که حرکت آن‌ها از قانونی پی‌روی می‌کند تشکیل شده است و هدف این است که رفتار آینده این اشیاء از پیش حدس زده شود. برای مثال این سؤال که آیا مسئله سه جسم برای ماه و زمین و خورشید حل پای‌داری دارد یا نه. حل تحلیلی معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی در بسیاری از شاخه‌های علم نظیر فیزیک، بیولوژی، شیمی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی ظهور پیدا می‌کنند و از شهود هندسی برای درک رفتار جواب‌ها کمک می‌گیرند. اطلاعاتی که شهود هندسی درباره جواب‌های سیستم‌های دینامیکی می‌دهند به سختی قابل به دست آوردن با روش‌های کلامی هستند و این روش‌های هندسی در کاربرد ریاضیات را بسیار قوت می‌بخشد. روش‌های عددی به کمک تصویرسازی کامپیوتری کاربرد روش‌های هندسی در حل معادلات دیفرانسیل را بسیار به پیش برده اند. رسم نمودار توابع امروز توسط ماشین‌حساب‌های کوچکی قابل انجام است در حالی که ریاضی‌دانان بزرگی چون نیوتون وقت زیادی از عمر خود را صرف رده‌بندی نمودارهای توابع درجه سوم در صفحه کرده‌اند که دیگر لزومی برای این تحقیقات مشاهده نمی‌شود و حجم عظیمی از مجموعه تحقیقات نیوتون را به فراموشی سپرده است. در این‌جا لازم است ابعاد تفکر هندسی که در حسابان وارد شده است را مورد بررسی دقیق قرار دهیم و مرزی بین قسمت‌های کلامی و تصویری حسابان به دست آوریم.

۴ شهود هندسی در حسابان و هندسه خمینه‌ها

مفاهیم مشتق و انتگرال و همین طور قضیه اساسی حسابان قطعاً ابعادی کاملاً هندسی در ذات خود پنهان کرده‌اند و بسیاری از این ابعاد پنهان در ظاهر حسابان نیز آشکار هستند. مفهوم مشتق هم با حرکت و تغییر مرتبط است که مفهومی هندسی است و هم با خط مماس ارتباط دارد که آن هم مفهومی هندسی است. تاریخ ریاضیات حرکت و تغییر پیش از حسابان چندان غنی نیست اما تاریخ مفهوم خط مماس به رسم مماس توسط خط‌کش و پرگار بر دایره و بیضی و حتی بر خم‌های حلزونی توسط ارشمیدس برمی‌گردد. قاعدتاً باید رسم مماس بر سهمی و هذلولی هم در تاریخ ریاضیات یونان مطرح شده باشد چون ابزارهایی برای رسم سهمی و هذلولی درست مانند ابزارهایی برای رسم بیضی در یونان باستان ابداع شده بود. مسئله مساحت و حجم هم امری کاملاً هندسی است که به دوران هندسه پیش از تالس برمی‌گردد، به جز مساحت قطاع دایره. ارشمیدس اولین کسی بود که موفق به محاسبه مساحت شکلی شد که به یک خم منحنی محدود می‌شد. ارشمیدس مساحت محدود به یک قطاع سهمی را محاسبه کرد که در آن مفهوم سری‌ها و مجموع‌های نامتناهی را هم وارد کرد. کسی که مسئله مساحت و مسئله خط مماس را به هم مرتبط دید آیزاک بارو استاد نیوتون بود که صورت ساده قضیه اساسی حسابان به او نسبت داده شده است. تعمیم قضیه اساسی حسابان به ابعاد بالا و بعد به خمینه دل‌خواه به شکل قضیه استوکس یکی از ستون‌های اصلی توسعه حسابان در ابعاد بالا و حسابان برای هندسه خمینه‌ها بود. گرچه حسابان و هندسه خمینه‌ها هر دو در روش‌های محاسبه کلامی و جزءنگر

هستند نگاه تصویری در هر دو نقش مهمی در ادراک این ریاضیات ایفا می‌کند که این دو را جزئی از ریاضیات تصویری قرار می‌دهد. در حسابان هم تنوع فرمول‌بندی‌ها فراوان است. از جمله فرمول‌بندی لایب‌نیتز و نیوتون و آنالیز نااستاندارد و در هندسه خمینه‌ها هم چندین فرمول‌بندی وجود دارد از جمله فرمول‌بندی پوانکاره و فرمول‌بندی مثلث‌بندی و فرمول‌بندی فضاهای مدولی و فرمول‌بندی خمینه‌های هیلبرتی که همه وجوه مختلف یک حقیقت مشترک هستند. البته خمینه‌های هیلبرتی به نوعی بسط تئوری مشابهی در چارچوب فضاهای بی‌نهایت بعدی است که به آن خواهیم پرداخت. مثلث‌بندی خمینه هم ریشه در نگاه توپولوژی جبری به فضاهای هندسی دارد که به آن نیز خواهیم پرداخت. نظریه هندسه دیفرانسیل ویتن هم که روی فضای حلقه‌های یک خمینه فرمول‌بندی شده است قابل ذکر است که در این‌جا به آن نخواهیم پرداخت.

۵ هندسه ریمانی و شهود هندسی

هندسه ریمانی نظریه‌ای است که به طور شهودی در یک مقاله فلسفی که متن یک سخن‌رانی ریمان در دانش‌گاه گوتینگن را تشکیل می‌داد مطرح شده بود و بعدها توسط پوانکاره فرمول‌بندی گردید. البته ریمان مفاهیم هندسه پیوسته و گسسته را در کنار هم پرورش داده بود که هندسه گسسته هرگز به روشی که ریمان در نظر داشت فرمول‌بندی نشد. در کنار هندسه ریمانی مفهوم رویه‌های ریمانی مختلط توسط ریمان فرمول‌بندی شد که در کنار هندسه‌های اقلیدسی، هذلولوی و کروی نوید ظهور ریاضیات سهموی، هذلولوی و بیضوی را می‌داد. قضیه نگاشت ریمان چنین تثلیثی را منجر شد که البته سال‌ها طول کشید تا این تثلیث راه خود را باز کرد و به فلسفه ریاضی کشیده شد. ریاضیات هذلولوی به خصوص در هندسه جبری، نظریه اعداد، سیستم‌های دینامیکی، نظریه گروه‌ها و بسیاری از شاخه‌های دیگر سرک کشید و شهود هندسی ریاضیات هذلولوی را قوی‌تر و قوی‌تر کرد. از طرفی دیگر روشن شد که بسیاری دیگر از ساختارهای هندسی که ساختار جبری می‌پذیرفتند را باید جزء ریاضیات سهموی به حساب آورد. از جمله خم‌های بیضوی که باید در دیدگاه جدید خم سهموی خوانده شوند. مثلثات کروی و فضاهای افکنشی و بسیاری دیگر از شاخه‌های ریاضیات نیز عنوان ریاضیات بیضوی را به خود پذیرفتند. از سوی دیگر نظریه نشاندن در هندسه خمینه‌ها بسیاری دیگر از رویه‌های ریمانی فشرده و غیرفشرده را قابل شهود کردند و رویه‌های جهت‌پذیر و جهت‌ناپذیر مانند نوار موبیوس و بطری کلاین مورد شهود قرار گرفتند و سپس نوبت به شهودی کردن خمینه‌های سه‌بعدی توسط ترستون رسید. این نگاه شهودی ترستون منجر به فرمول‌بندی هندسه‌های ترستون شد که در رده‌بندی خمینه‌های سه‌بعدی کارآمد بودند و روشی برای اثبات حدس پوانکاره در مورد کره سه‌بعدی را فراهم می‌آوردند. البته حدس ترستون هم سر آخر توسط روش‌های کلامی مربوط به دگردیسی متریک فضاهای هندسی توسط پرلمان به اثبات رسید. می‌توان با قدرت این جمله را بیان کرد که ریاضیات تصویری و شهودی بدون حمایت ریاضیات کلامی و جزءنگر و منطقی هرگز نهالی مستقل که بر پای خودش ایستاده باشد نبود و به درخت تنومند امروزی نمی‌رسید. اما به جرأت هم می‌توان گفت امروز این درخت تنومند می‌تواند مستقلاً به حیات خود ادامه دهد و هم این

که ریاضیات کلامی نیز خود از کنار نهال این درخت تنومند برون آمد و رشد کرد و قوی شد.

۶ توپولوژی جبری و شهود هندسی

اگر چه روش‌های محاسبه در توپولوژی جبری بسیار کلامی و محاسباتی هستند اما ماحصل این محاسبات به شهود هندسی بسیار نزدیک است. به خصوص مفهوم هم‌ارزی هم‌سانی که مفهوم هندسی جدیدی در قرن بیستم بود اما با شهود روزمره بسیار هماهنگی داشت. نکته‌ای که بسیار عجیب و غریب به نظر می‌آید اهمیت ساختار پیوسته و ترتیبی اعداد حقیقی به خصوص ساختار فشرده یک بازه بسته در توپولوژی جبری بود. هم‌ارزی همانندی راه را برای هم‌ارزی‌های دیگر بین موجودات هندسی مثل هم‌ارزی بین گره‌ها که نوعی ایزوتوپی است و هم‌ارزی کوبوردیسم (هم‌مرزی) بین خمینه‌های بسته باز کرد. حدس پوانکاره در مورد خمینه‌های سه‌بعدی بسته یکی از هدیه‌های مهم توپولوژی جبری به علم هندسه و تفکر تصویری و شهودی است. اصل موضوعه سازی نظریه‌های همانندی و پادهمانندی مقدمه را برای فرمول‌بندی نظریه رسته‌ها فراهم کرد که البته یک نظریه کلامی اما کل‌نگرانه بود. در فصل هندسه جبری ناجابه‌جایی بررسی خواهیم کرد که چه‌گونه سرانجام نظریه رسته‌ها در خدمت شهود هندسی قرار گرفت و به سرچشمه خودش بازگشت. توپولوژی جبری سفری نیز به هندسه جبری داشت و مفاهیم هم‌سانی را به زبان جبری ترجمه کرد که منجر به اثبات وئودسکی از حدس میلنور شد. دلین درباره این نظریه وئودسکی چنین گفت که مثل آشتی دادن آب و آتش بود. شاید بتوان گفت که در نظریات مدرنی که در قرن بیستم مطرح شدند درصد نقش شهود هندسی در توپولوژی جبری بیش از سایر شاخه‌های ریاضی بود. نظریه توپولوژیک خمینه‌های سه‌بعدی و چهاربعدی بر تارک ریاضیات تصویری برای همیشه خواهد درخشید. باید به نظریه‌های توپولوژی دیفرانسیل در ابعاد بالا که به رده‌بندی ساختارهای دیفرانسیل روی خمینه‌های چهاربعدی و کرات هشت‌بعدی پرداختند نیز اشاره کرد که گرچه بر تکنیک‌های جزء به کل بنا شده اند اما از جواهرهای تفکر تصویری حساب می‌شود. قضیه ایزوتوپی خارجی اسمیل و پشت و رو کردن کره توسط نشاندن‌های موضعی توسط اسمیل نیز از مهم‌ترین تحقیقات در ریاضیات تصویری محسوب می‌شود. ممکن است این دستاوردها به نظر گسسته و بی‌ربط به هم و مستقل از هم تصور شوند اما ایده‌های آغازین در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات کلامی از ریاضیات تصویری الهام گرفته شده‌اند.

۷ فضای هیلبرت و خمینه هیلبرت

هر چند فضای هیلبرت زمینه را برای کاربرد جبر خطی در ایده‌های هندسی در ابعاد بی‌نهایت فراهم می‌کند اما این نظریه یک نظریه کاملاً کلامی است. با این حال نظریه خمینه‌هایی که موضعاً از فضای هیلبرت ساختار می‌گیرند فرمول‌بندی شده و حتی روی چنین خمینه‌هایی مکانیک کلاسیک بنا شده است. فضای هیلبرت ساختار لازم روی فضاهای خطی نامتناهی‌البعد را روی آن قرار می‌دهد تا بتواند حسابان روی چنین فضاهای خطی فرمول‌بندی شود. ممکن

است کسی بگوید که چنین نظریه‌ای کاملاً کلامی است و ربطی به شهود تصویری ندارد. اما برعکس تنها نظریه‌ای است که می‌شناسیم که شهود تصویری در بی‌نهایت بعد را ممکن می‌کند. قضیه فیثاغورس نیز دارای صورتی نامتناهی‌البعد در فضای هیلبرت است و این گونه می‌توان هندسه را از مبانی آن در فضای هیلبرت فرمول‌بندی کرد. مثلاً از کره نامتناهی بعدی یا از سهمی و هذلولی نامتناهی بعدی سخن گفت. علاقه‌مندم بدانم آیا کسی نظریه نسبیت روی فضاهای هیلبرت را فرمول‌بندی کرده است یا خیر؟ فضای هیلبرت حتی برای فرمول‌بندی مکانیک کوانتوم نیز مدل ریاضی مناسبی فراهم کرد اما این به شهود هندسی کوانتوم کمکی نکرد چرا که زمان را نمی‌توان به عنوان یک عمل‌گر روی فضای هیلبرت در نظر گرفت. باید بتوان مفهوم خودالحاقی بودن عمل‌گرها روی فضای هیلبرت را در مورد خمینه‌های هیلبرتی خاص نیز فرمول‌بندی کرد. برای مثال روی کره نامتناهی‌البعد با کمک تصویر کنج‌نگاشتی شاید بتوان یک خودریختی موضعاً خودالحاقی تعریف کرد و بعضی مفاهیم مکانیک کوانتوم را روی کره نامتناهی‌البعد فرمول‌بندی کرد. شاید بتوان حدس پوانکاره را نیز که در ابعاد بالا ثابت شده است برای کره نامتناهی‌البعد فرمول‌بندی کرد. صورتی از حدس پوانکاره نیز توسط این‌جانب به زبان هندسه جبری فرمول‌بندی شده است که از مفهوم گروه‌های هم‌سانی در توپولوژی جبری بهره می‌گیرد. خمینه‌های هیلبرت راه را برای مطالعه خمینه‌های بی‌نهایت بعدی مانند خمینه حلقه‌های روی یک فضا باز کرد. بسیاری از نظریات هندسه روی چنین خمینه‌هایی فرمول‌بندی شدند از جمله نظریه هندسه دیفرانسیل روی این خمینه‌ها که به آن اشاره شد. شهود بی‌نهایت بعدی در شکل‌گیری مفهومی مجرد از این که شهود هندسی یعنی چه نقش مهمی داشت. چون پیش از آن تفکر تصویری باید لزوماً به زبان دید سه‌بعدی بشر فرمول‌بندی می‌شد که مفهومی بسیار دست و پاگیر بود. مفهوم خمینه آبلی بی‌نهایت‌بعدی نیز به راحتی با کمک فضای هیلبرت قابل فرمول‌بندی است.

۸ هندسه جبری ایتالیایی.

مکتب هندسه جبری ایتالیایی محصول اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم است که حتی امروز نیز بسیاری از هندسه جبری دانان ایتالیایی به نوع هندسه شهودی اشتغال دارند. جناب آقای دکتر علی بجروانی از دانش جویان بنده بودند که در این سبک از ریاضیات شهودی به تحقیق پرداختند و نتایج جالبی نیز اثبات کردند. در اواخر قرن بیستم نظریه شمارش در فضاهای مدولی مطرح شد که به نوعی به همان سبک شهودی هندسه جبری ایتالیایی برمی‌گشت. البته هندسه جبری ایتالیایی که حدود ۱۸۸۵–۱۹۳۵ شکوفا گشت بیش‌تر حول هندسه دوگویا و به خصوص هندسه جبری رویه‌های دوبعدی مختلط توجه داشت. کاتسلنوو، انریکوئس و سوری از سردمداران این سبک ریاضیات بودند که به نتایج عمیقی دست پیدا کردند. سعی این مدرسه این بود که هندسه رویه‌های ریمانی فشرده را به بعد دوم توسعه دهند و در هسته این توسعه قضیه ریمان–رخ قرار داشت. برای مثال مفموم گونه که به بعد دوم توسعه داده شد تبدیل به ناوردای مهمی برای توسعه تئوری رویه‌های دوبعدی شد. رویه‌های دوبعدی توسط انریکوئس به پنج دسته بزرگ تقسیم شدند که سه تا به دسته‌های هذلولوی، سهموی و بیضوی در بعد یک مربوط

می‌شوند و دو دسته دیگر رویه‌های $K3$ و تارهای بیضوی و نظریه واریته‌های آبلی دوبعدی به نوعی در دستور کار ریاضیات سهموی قرار می گرفتند. این نظریه در فرمول‌بندی جدید کودایرا نیز خود را نشان داد و نظریه به پیمانه متناهی زاریسکی و مدرسه شافارویچ نیز این ریاضیات را ادامه دادند. چندین فرمول‌بندی موازی دوباره از شاخصه‌های ریاضیات تصویری بود. بسیاری از ریاضی‌دانان دقت هندسه جبری ایتالیایی را زیر سوال بردند و مشکلات مبانی ریاضی را درباره این شاخه پیش کشیدند. تئوری میدان‌های توابع در بعد سه تنها وقتی به یک مدل ناتکین منجر می‌شد که می‌توانستیم یک نشاندن در یک فضای افکنشی بعد بالا به دست دهیم. برای حل این مشکل نظریه کلاف‌های خطی و نظریه سیستم‌های خطی از مقسم‌ها فرمول‌بندی شد. بعضی سگره و بعضی کرمونا را پدر هندسه جبری ایتالیایی می‌دانند. همه این کارها منجر به مدرسه زاریسکی در ایالات متحده گردید بسیاری ظهور توپولوژی جبری توسط پوانکاره را نتیجه تحقیقات شهودی هندسه جبری‌دانان ایتالیایی می‌دانند. ضعیف شدن استاندارد دقت ریاضی تحت مدیریت انریکوئس و بعد سوری منجر به بسته شدن هندسه جبری ایتالیایی شد.

۹ هندسه ناجابه‌جایی

هندسه ناجابه‌جایی نیز توسط دو فرمول‌بندی مستقل یکی توسط الن کون و دیگری توسط روزنبرگ و کانسویچ معرفی شدند که بین چندین فرمول‌بندی دیگر که توسط ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان ارائه شده بود قبول عام یافتند. بعد از هندسه بی‌نهایت بعدی خمینه‌های هیلبرتی در نیمه دوم قرن بیستم این نگاه که شهود هندسه لزوماً به قوه بصر ارتباط ندارد توسط این فرمول‌بندی‌های هندسه ناجابه‌جایی قوت گرفت. از جمله تحقیقاتی که توجهم را جلب کرد مقاله دکتر شیخ‌جباری و هم‌کارانش بود که یک نظریه ریسمان‌ها را در چارچوب هندسه ناجابه‌جایی فرمول‌بندی کردند که از پررفرنس‌ترین مقالات ریاضی–فیزیک در ایران است. فرمول‌بندی فضا–زمان ناجابه‌جایی به چندین زبان در ریاضی–فیزیک انجام شده است که همه آن‌ها سعی دارند به یک فرمول‌بندی قابل قبول از شهود ریاضی در چارچوب هندسه ناجابه‌جایی دست پیدا کنند. می‌توان گفت که هندسه ناجابه‌جایی نگاهی هندسی به جبرهای ناجابه‌جایی نیز هست. تلاش مرکزی هندسه ناجابه‌جایی توسعه دوگانی بین فضاها و توابع به فرمول‌بندی ناجابه‌جایی است. این بر مبنای نظریه‌ای است که به نظریه جبرهای C^* نزدیک است. سر آخر روزنبرگ از ایده رسته‌های بافه‌ها کمک جست و در این زمینه موفقیت‌هایی حاصل کرد. کاربردهایی از هندسه ناجابه‌جایی زیر سرفصل‌های مدل استاندارد ناجابه‌جایی و نظریه میدان‌های کوانتومی ناجابه‌جایی ظاهر شدند. مدل‌های هندسه جبری ناجابه‌جایی برای نظریه M که توسط ویتن فرمول‌بندی شده بود توجه عموم را در آغاز قرن بیست و یکم به هندسه ناجابه‌جایی جلب کرد. جبرهای فون‌نویمان، خمینه‌های دیفرانسیلی ناجابه‌جایی، شماهای آفین و افکنشی ناجابه‌جایی مثال‌های مختلفی از فرمول‌بندی‌های بی‌شمار هندسه ناجابه‌جایی بودند. نظریه همانندی دوری که توسط الن کون بیان شد و نظریه کون از کلاس‌های مشخصه و شاخص چرن قدم‌های بلندی در توسعه هندسه ناجابه‌جایی محسوب می‌شدند. در چارچوب نظریه دگردیسی نیز کانتسویچ با دگردیسی کوانتیزه فضاهای جابه‌جایی به فضاهای ناجابه‌جایی

جالبی دست پیدا کرد که روش او در کنار روش‌های دیگر دگردیسی بسیار جالب توجه بود. در بخش بعد به ایده دگردیسی در ریاضیات و فیزیک خواهیم پرداخت.

۱۰ دگردیسی فضای هندسه

ایده دگردیسی فضاهای هندسی در هندسه اقلیدسی سابقه داشت. حتی پاسکال اصل پیوستگی را مطرح کرد که اگر قضیه‌ای در هندسه (یا در کل ریاضیات) صادق باشد می‌توان آن را در حالت‌های حدی هم اثبات کرد. هر چند این ایده در هندسه جبری ایتالیایی منجر به اثبات نادرست قضایایی شد که توسط روش‌های دیگر که دقیق‌تر بودند رد گردید اما دگردیسی متریک فضاهای فیزیکی اولین بار توسط انیشتین فرمول‌بندی شد و سپس در ربع آخر قرن بیستم توسط هامیلتون وارد ریاضی گردید. شار خمیدگی میانگین و شار ریچی روش‌هایی محاسباتی بود که مدرسه هامیلتون و در نهایت پرلمان از آن‌ها کمک گرفت تا در مورد دگردیسی ساختار توپولوژیک خمینه سه‌بعدی سخن بگوید. دگردیسی فضاهای هندسی نیز به زبان جبری فرمول‌بندی شد و گروتندیک با کمک وردش‌های نمایش‌پذیر فرمول‌بندی جدیدی از فضاهای مدولی در فضای جهانی سوار بر فضاهای مدولی ارائه داد. تلاش‌های بسیاری در جهت فشرده‌سازی طبیعی فضاهای مدولی توسط جبرهای دیفرانسیلی مدرج و دگردیسی آن‌ها انجام گرفت که منجر به دگردیسی جبرهای روی اپرادها شد. دگردیسی نمایش‌های گالوایی ایده‌ای بود که توسط میزور مطرح شد و نهایتا توسط وایلز برای اثبات آخرین قضیه فرما به کار گرفته شد که از قله‌های کاربرد ایده‌های هندسی در نظریه اعداد به شمار می‌رود.

۱۱ کلام آخر

پدیده احراز چندین فرمول‌بندی غیر معادل از ریاضیات غیر تصویری نیز مشاهده می‌شود. مهم‌ترین مثالی که می‌شناسم چندین فرمول‌بندی معادل از نظریه فرم‌های پیمانه‌ای است. در نهایت حدس زمین‌شکافنده بلکه آسمان شکافنده لنگلندز می‌گوید که هر فرم مدولار از یک شیء هندسی می‌آید که می‌گوید حتی نظریه فرم‌های مدولار نیز با تفکر هندسی ممزوج شده است. از لنگ‌لندز پرسیدم آیا شما اولین کسی بودید که از این حدس سخن گفت و او پاسخ داد من گروتندیک را نمی‌فهمیدم اما هریش چاندرا را می‌فهمیدم و با این وصف حدس من حالت کلی حدس شیمورا و تانیاما بود که البته حدس ایشان از نظر من بدیهی به نظر می‌رسید. حدس شیمورا و تانیاما توسط وایلز و شاگردانش در آستانه قرن بیست و یکم به اثبات رسید.