نگاه مفهومی به تاریخ ریاضی

آرش رستگار

دانشگاه صنعتی شریف

خلاصه – در این مقاله در نظر داریم با توجه به نقشه مفاهیم ریاضی و تحولات آن و نظریه اطلس مفاهیم که خود آن را پایه گذاری کرده ایم تاریخ ریاضیات را مورد بررسی قرار دهیم. در اینجا به مطالعه انقلاب های مفهومی تا اوایل قرن بیستم بسنده خواهیم کرد. چون انقلابهای مفهومی قرن بیستم و بیست و یکم بسیار پیچیده و درهم تنیده هستند و مجال بررسی آنها در یک مقاله نیست. در کنار این مقاله نگاه مسئله محور و نگاه نظریه محور به تاریخ ریاضیات در مقالات دیگری مطالعه خواهد شد.

مقدمه- نگاه مفهوم محور به ریاضیات نگاه شناخته شده ای است. در واقع دیدگاه سنتی به تاریخ ریاضیات همان دیدگاه مفهوم محور است. اینطور که پیشینه های مفهومی تعیین می کنند که مطالب ریاضی به چه ترتیبی مورد مطالعه قرار گیرند و معمولا هم این پیشینه ها را مطابق تاریخ ریاضیات و مطابق با آنگونه که مفاهیم کشف شده اند مرتب می کنند. بدیل های نگاه مفهوم محور به تاریخ و آموزش ریاضیات ، نگاه مهارت محور و نگاه شناخت محور هستند. در نگاه مهارت محور جریانهای مفهومی و مهارتی ترتیب مطالب را مشخص می کنند و در نگاه شناخت محور رشد شناختی دانش آموزان روش ارائه مطلب را تعیین می کند. نظریه غالب در مطالعه مفاهیم، نظریه نقشه مفهومی است که ارتباطات مفاهیم دریک شاخه ریاضی را در نظر می گیرد. سالها پیش نظریه اطلس مفاهیم را که نظریه توسعه یافته تری است مطرح نمودیم . دراینجا برآن هستیم که تاریخ ریاضیات را از دیدگاه تحول مفاهیم و انقلابهای مفهومی مورد مطالعه قرار دهیم. برای آشنا کردن مخاطب با زبان فکری نگارنده مطالعه تاریخ ریاضیات تا اوایل قرن بیستم کفایت می کند و مطالعه انقلاب های مفهومی قرن بیستم به بعد، مجال بیشتری می طلبد وشاید موضوع مناسبی برای یک کتاب باشد. از آنجا که هنوز درگیر مسائل روش شناختی در تاریخ ریاضیات هستم هنوز تصمیم به نوشتن چنین کتابی نگرفته ام. اما تلاش می کنم روایت تاریخ ریاضیات را به زبان اطلس مفاهیم در اینجا بیان کنم.

۱- مفهوم ریاضیات نزد تالس

تالس اولین کسی بود که تشابه در هندسه و قضایایی ساده مثل اینکه هر مثلث متساوی الساقین دارای دو زاویه برابر است و هر قطر دایره آن را به دو نیمه مساوی تقسیم می کند وخطوط موازی خطوط متقاطع را با نسبتهای برابر قطع می کنند را مطرح کرد. ریاضیات برای تالس در مورد اشیاء زندگی روزمره نبود، بلکه او با نقطه ایده ال ، خط ایده ال ، پاره خط ایده ال و دایره ایده ال کار می کرد. این ایده ال سازی روشی بود که تالس وارد ریاضیات کرد و یا به این طریق علم ریاضیات را بنیان گذاشت و اولین بار قضایایی ثابت کرد که جنبه عملی نداشتند، هرچند هنوز درک پخته ای از مفهوم اثبات نداشت و این پختگی در آثار فیثاغورس و شاگردانش ظهور پیدا کرد. تالس با خط و مثلث و دایره و اشیائی کار می کرد که ساخته ذهن خود او بودند، اما می توانستند برای مدل سازی پدیده های زندگی روزمره نیز به کار بروند. در واقع تالس کسی بود که برای این سوال که شیء ریاضی یعنی چه، استانداردسازی کرد و فیثاغورس این استانداردها را به حوزه اعداد کشاند و نظریه نسبت را در تئوری

موسیقی به کار برد. تالس سفرهای بسیاری کرد و از مصریان و بابلیان و فینیقیان چیزهای زیادی آموخت. در بسیاری از تمدن ها فرمولهای صحیح و غلط مساحت و حجم به کار برده می شدند و اندازه گیری معنی داشت. اما هیچکدام به درکی که تالس از شیء ریاضی ارائه کرد نرسیده بودند. بسیاری به سه تایی های فیثاغورسی علاقه داشتند و لذا لزوما ریاضیات پیش از تالس به کاربرد محدود نبود. اما مفهوم حکم ریاضی که برای اشیاء ریاضی در نظر گرفته شود، پیش از تالس حاضر نبود. در چنین بستری بود که فیثاغورس و فیثاغورسیان قضیه فیثاغورس را اثبات کردند و در واقع نظریه روابط طولی در هندسه را بعد از تالس ادامه دادند. اما نزد فیثاغورسیان مفهوم اثبات ریاضی شکل جدی تری به خود گرفت. مفهوم تساوی مثلثها و اشکال هندسی و تشابه آنها که نوعی رابطه هم ارزی است به تالس نسبت داده شده است. روابط هم ارزی از دیگر جنبه های ایده السازی ریاضی است که توسط تالس ارئه شد. تالس با این کار گفت که حتی در چهارچوب خود ریاضی می توان ایده ال سازی کرد و مفهوم جدید ریاضی ساخت و این ابزار مهمی برای توسعه ریاضیات محسوب می شد. بنابراین ریاضیدانان مجبور نبودند فرایند ایده ال سازی را در طبیعت به کار ببرد، بلکه می توانستند آن را در ذهن ریاضی خود به اجرا بگذارند و مفهوم سازی کنند. مفاهیم تشابه و نسبت به سختی درهم تنیده اند، هرچند که می توانند به طور مستقل مفهوم سازی شوند. پس از تعریف رابطه هم ارزی تشابه روابط مفهومی جدید با مفهوم نسبت مطرح می شود.

۲- اثبات نزد فیثاغورس

ساختار مفهومی ریاضیات پس از فیثاغورس دچار تحول دیگری شد و آن همراه با ظهور مفهوم اثبات بود. فیثاغورس ساختارهای عددی را نیز در کنار ساختارهای هندسی وارد ریاضیات کرد و برای آنها مفهوم اثبات ریاضی را به کار برد. هرچند کشف $\sqrt{2}$ را به شاگردان فیثاغورس نسبت می دهند به نظر می رسد، اثبات گویا نبودن بعضی اعداد نزد فیثاغورسیان هندسی بوده و از روشهای عددی استفاده نشده است. اثباتی در کتب تاریخی به فیثاغورسیان نسبت داده شده که از تشابه درون پنج ضلعی منتظم و اقطار آن استفاده شده می کند و به طور جدی از مفهوم نسبت و از نزول نامتناهی استفاده می کند. این نشان می دهد فیثاغورسیان به اشکال منتظم دست پیدا کرده بودند. ضمن الگویابی های هندسی و عددی و مفاهیم ک.م.م و ب.م.م و قضایای مربوط به آنها نزد فیثاغورسیان دانسته شده بود. در خود قضیه فیثاغورس هم به نوعی مولفه تعجب وجود دارد که شاید بتوان گفت مشخصه جدیدی برای قضایای بود که توسط فیثاغورسیان به اثبات می رسید . مثلا اینکه حاصلضرب دو عدد طبیعی با حاصلضرب ب.م.م و ک.م.م آنها یکی است در آن مولفه تعجب وجود دارد. این مولفه تعجب برای این اصل که ماکسیمم دو عدد بعلاوه مینی موم دو عدد برابر با مجموع دو عدد است استوار است.که حوزه صحت آن فراتر از اعداد طبیعی است . اینجا اولین جایی بود که اثبات ها روی هم سوار می شوند و قضایای قدیمی روی هم قضایای جدیدی را نتیجه می دهند و این آغاز ظهور ماشین اثبات ریاضی است. این آغازگر تفکری است که این دغدغه را در ارسطو بوجود آورد که سروته این تئوری سازی چیست. از کجا شروع می شود و به کجا خاتمه می یابد. احتمال بسیاری از قضایای مثلث قائمه الزاویه هم توسط فیثاغورسیان کشف شده بودند و همینطور سه گانه حادالزاویه ،قائم الزاویه، و منفرجه الزاویه از آن زمان وجود داشته. حدس من این است که بنابر شباهت این سه گانگی به سه گانگی بیضوی سهموی و هذلولوی احتمالا باید قرابت حقیقی بین این سه گانها وجود داشته باشد. تالس و شاگرد او فیثاغورس چنین مفاهیمی را بسته بندی کردند و به افلاطون و شاگرد او ارسطو ارائه کردند تا ایشان مبانی ریاضی و اصل موضوعه سازی را بنیان گذاری کنند. از تالس تا افلاطون و ارسطو راه بسیار است و بسیاری از فلاسفه یونانی در این مسیر فراموش شده اند. اما این طبیعت انقلاب است. انقلاب ها یک روزه اتفاق نمی افتند.

۳- مبانی ریاضی نزد افلاطون

افلاطون اولین مدرسه را برای آموزش علوم ساخت و ریاضیات را در رأس علوم قرار داد چنان که بر سر در مدرسه افلاطون نوشته شد بود: هرکس هندسه نمی داند وارد نشود. این نشان می دهد افلاطون ریاضی را به عنوان یک دیسیپلین می دید و برای این دیسیپلین نتایجی در شناخت یادگیرندگان و تاثیراتی در اجتماعی که ریاضیدانان در آن زندگی می کنند قائل بود. او نگاه روان شناسانه ای به ریاضی قائل بود. او فکر می کرد همانطور که استادش سقراط در بستری کلی تر بیان کرده بود ریاضیات علمی ذاتی بشر است و یادگرفتن ریاضیات تنها به یاد آوردن ریاضیات است. شاید این باور غریب به نظر بیاید ولی چیزی که افلاطون دریافته بود این بود که یادگیری مفاهیم ریاضی با یادگیری مفاهیم دیگر زندگی روزمره فرق اساسی دارد. گویی مفاهیم ریاضی از جنس دیگری هستند و از قوانین دیگری تبعیت می کنند که مفاهیم زندگی روزمره تبعیت نمی کنند. از اولین نتایج مدرسه فکری افلاطون ظهور اشیاء ریاضی بودند که از طبیعت گرفته نشده بودند. احجام افلاطونی و رده بندی آنها یک مثال مهم بودند. بین این اشیاء نیز ساختاری برقرار بود وآن دوگانی مکعب و هشت وجهی و دوگانی بیست وجهی و دوازده وجهی و خود دوگانی هرم منتظم بود. اینجا اولین جایی در ریاضیات است که مفاهیم دوگانی و خود دوگانی ظهور پیدا می کنند. بعدها پس از کشف هندسه مخروطات دوگانی بیضی و هذلولی و خود دوگانی سهمی نیز کشف شدند. قدم بعدی افلاطون تأویل احجام افلاطونی بود. اوبرای احجام افلاطونی معنی قائل شد و با عناصر طبیعت مانند خاک، باد، آب و آتش متناظر کرد و فلسفه ای بر آن سوار کرد. پیش از این ریاضیات با فلسفه ربطی نداشت. اما در اینجا با فلسفه طبیعی گره خورد. به این معنی که شاید با درک بهتر احجام افلاطونی بتوان طبیعت را بهتر شناخت و یا بتوان شبیه به پدیده های ریاضی را در پدیده های طبیعی یافت. این ایده هنوز کشف مدل ریاضی نیست، ولی بررسی این است که آیا ریاضیات می تواند مدلی فلسفی برای درک طبیعت باشد؟ ممکن است به نظر بیاید اندازه گیری سطح و حجم احجام ساده ممکن است به نوعی همان مدل سازی باشد اما به چشم نگارنده این چیزی جز تقریب و ایده السازی نیست. ریاضیات در دستان افلاطون تبدیل به علمی شد که می توانست عاقبت بشریت را در دستان خود بگیرد. چرا که تاثیر ریاضیات بر شناخت وتاثیرات ریاضیات بر جامعه مورد توجه افلاطون قرار گرفت.

۴-اصول موضوعه نزد ارسطو و اقلیدس

ارسطو مبانی فلسفی علم ریاضی را پایه ریزی کرد و فرضیه سازی و نظریه پردازی را پیشه خود ساخت. ارسطو بود که پیشنهاد کرد علم ریاضی از یکسری اصول اولیه و مفاهیم اولیه تعریف نشده، آغاز شود و درباره صورت های مختلف اصل توازی پیشنهادات مهمی داد. در واقع ارسطو پیش از همه به اهمیت اصل توازی پی برده بود و شاید حس می کرد که این اصل نکته عمیقی در خود دارد. غیر از اقلیدس تلاشهای دیگری برای پیاده سازی روش علمی ارسطو انجام شده بود، اما این کتاب اصول بود که ماندگار شد. پس از اینکه ارسطو مبانی منطق را دقیق کرد، اقلیدس توانست چفت و بست تئوریک ریاضی را سامان دهد. اقلیدس یک چیز به نظریه علمی ارسطو اضافه کرد و آن رسم پذیری با خط کش و پرگار بود. هر شکلی که مورد مطالعه قرار می گرفت باید به دقت توسط خط کش و پرگار ساخته می شد تا تکلیف امکان وجود آن شکل هندسی معلوم شود. بنابراین ریاضیات اقلیدس ریاضیات ساختنی بود. اقلیدس طرح ارسطو را پیاده کرد و قسمت مهمی از ریاضیات زمان خود را بر اصول موضوعه استوار کرد به طوری که قضیه بر قضیه سوار می شد و ساختمانی محکم و مستدل بنا شد که بیش از دو هزار سال یکه تازی کرد. و برای دقت در اثبات و دقت در تعریف ریاضی استاندارد سازی کرد. ریاضیات بنایی مستقل شد که بر پای خود استوار بود و برای زنده ماندن نیاز به گرفتن ایده و مسئله از زندگی روزمره نداشت. هرچند این سرچشمه هرگز نخشکید وهمواره درخت ریاضیات را آبیاری کرد، تا این بنا به عظمتی برسد که از چندین شاخه مستقل که همه بر روی پای خود ایستاده اند

تشکیل شود. در زمان اقلیدس هندسه و جبر دو شاخه درخت اصلی ریاضیات بودند و هنوز حیات مستقلی نداشتند. هندسه از طریق روابط طولی به جبر وابسته بود و جبر از طریق حل معادلات خطی و درجه دو توسط خط کش و پرگار به هندسه نیاز داشت . این نیاز متقابل تا پیش از قرن بیستم ادامه داشت تا جایی که زیر شاخه های جبر و هندسه در قرن بیستم اعلام استقلال کردند و بر اساس سولات درون شاخه ای خود به روش و نمو پرداختند وبه تعبیری درختی مستقل شدند. اما این دو شاخه اصلی جبر و هندسه از زمان تالس و فیثاغورس قابل شناسایی بود. انقلاب بعد از آن ارشمیدس بود که مفهوم مجموع های نامتناهی را به کمک مفهوم مساحت وارد ریاضیات کرد و به نوعی پارادوکس زنو را که وجود و امکان جمع های نا متناهی را زیر سوال می برد حل نمود.

۵- سریهای نامتناهی نزد ارشمیدس

محاسبه مساحت دایره با روشهای تقریبی به کمک عدد π که از روی محیط دایره تعریف می شد ممکن شده بود. مساحت قطاع دایره نیز به کمک نسبتها و مثلثات ممکن شده بود. اما مساحت قطاع سهمی و هذلولی تا زمان ارشمیدس محاسبه نشده بود. توجه شما را به این نکته جلب می کنم که هر دو سهمی متشابهند. اما هر دو هذلولی متشابه نیستند. همانطور که هر دو بیضی لزوما متشابه نیستند. ارشمیدس مسئله قطاع را برای سهمی حل کرد و این قدم بزرگی برای محاسبه مساحت شکلهای مسطح دلخواه بود. در واقع در قرن هفدهم محاسبه سطح و حجم دلخواه با کمک همان روش ریاضی ارشمیدس ممکن شد. ریاضیدان هندی بهاسکارا که کمی بعد از ارشمیدس زیست نقش مهمی در مطرح کردن بسیاری از مفاهیم حسابان داشت که در جای خود به آن خواهیم پرداخت. ارشمیدس با کمک حد مجموع های نامتناهی را توانست حساب کند (البته در حالت خاص) و این اولین جایی بود که آنالیز مقدماتی ظهور پیدا کرد. اهمیت این قدم، باز شدن راه بینهایت به ریاضیات بود. مطالعه جمع های نامتناهی بشر را یک قدم به ایده السازی ریاضی فرآیند های طبیعی نزدیکتر کرد و در واقع درکی فراتر از زمان را از مفاهیم ریاضی بوجود آورد. چرا که نزد ذهن انسان جمع کردن دو عدد زمان بر است و جمع چند عدد زمان بیشتری می برد و جمع بی نهایت عدد به زمان نامتناهی احتیاج دارد، پس شاید ممتنع باشد. در واقع به نوعی پارادوکس زنو به همین مفهوم زمان استوار بود. اما ارشمیدس این سد بزرگ را شکست و سریهای نامتناهی را محاسبه نمود و در واقع راه را برای درک بی نهایت های کوچک باز کرد و مقدمه را برای نیوتن و لایبنیتز فراهم نمود. اما چرا ظهور سریهای نامتناهی انقلابی در ساختار مفهومی ریاضیات بود؟ ارشمیدس ایده در نظر گرفتن بی نهایت کوچکها را از کجا آورد؟ مفهوم حد مجموع های متناهی را چگونه در نظر گرفت؟ اینکه یک شکل هندسی می تواند در یک حالت حدی به شکل دیگری تبدیل شود و احکام صادق بر آن شکل در حالت حدی باید صادق باشند و اگر احکام ریاضی برای یک شکل یا خانواده ای از اشکال صحیح باشد باید برای حد آن خانواده هم صحیح باشد ایده ای بود که پیش از ارشمیدس هم وجود داشت. اما ارشمیدس آن را وارد حساب کرد. در واقع ارشمیدس راه را برای حساب مجموع های نامتناهی باز کرد. این اولین ساختار ریاضی بود که اجزاء آن مستقیما از طبیعت الهام گرفته نشده بودند و این جایگاهی به ارشمیدس داد که او یکی از سه ریاضیدان بزرگ همه اعصار دانستند.

۶- روش جبری نزد دکارت

انقلاب دکارت ترجمه همه هندسه و بلکه همه ریاضیات زمان خود به زبان جبر بود. مسلماً خوارزمی پیش از او ایده جبر و حل معادله را به پختگی رسانده بود و بکار بردن خط به عنوان مدلی برای اعداد ایده ای بود که دکارت از خیام گرفته بود اما معرفی اعداد منفی و دستگاه مختصات دکارتی دوبعدی و سه بعدی چندین انقلاب را هم زمان باعث شد. یکی دیگر از جنبه

های فلسفی انقلاب دکارت مفهوم فضای نامتناهی بود. دکارت با ترجمه ریاضیات به زبان جبر این ایده فلسفی را پیش پا گذاشت که تمام مسائل ریاضی را باید بتوان به زبان حل معادلات ترجمه نمود. حل کامل معادلات درجه دوم و سوم به روش هندسی پیشینه ای بود که ایده فلسفی دکارت را حمایت می کرد. معادلات درجه دوم در کتاب اصول اقلیدس جمع بندی شده بود و معادلات درجه سوم توسط خیام به روش هندسی حل شده بود. درقرن هفدهم معلوم شدم که روش خیام برای حل هندسی معادلات درجه چهارم هم کفایت می کرد و در همان قرن معادلات درجه سوم و چهارم به روش جبری حل شدند که تأییدی بر برنامه دکارت بود. دکارت در واقع مقدمه را برای فرمالیسم هیلبرت فراهم کرد و این ایده که تمام ریاضیات بتواند توسط محاسبات فرمال فرمولبندی شود. و این قدم بلندی بود. چرا که در زمان دکارت حجم زیادی از ریاضیات به زبان هندسه اقلیدسی فرمولبندی شده بود. یک قرن طول کشید تا نیوتن توانست فیزیک سماوی را به زبان ریاضی که دکارت فراهم کرده بود فرمولبندی کند و این کار تحت تاثیر تفحصات فلسفی ایزاک بارو استاد نیوتن انجام شد. در واقع این اصل که متحرکی که با سرعت ثابت حرکت می کند اگر نیرویی برآن وارد نشود به حرکت مستقیم الخط خود تا بی نهایت با همان سرعت ادامه می دهد، توسط دکارت مطرح شد و نه نیوتن. و این اصل مقدمه ای بود برای مفهوم ناظر فیزیکی و اینکه قوانین فیزیکی برای ناظرهای متفاوت چگونه به نظر می رسند که خود انقلابی مفهومی و شناختی بود.گالیله و لورنتس و انیشتن و دیگران از این ایده بهره برند و چیزهایی به آن افزودند اما این ایده هرگز وارد ریاضیات نشد. به این معنی که برداشتی از ریاضیات و قوانین ریاضی برای ذهنی که ناظری متفاوت با نظارت ما بر مفاهیم است هرگز مطرح نشد . مثلا اینکه برای یک فرد مبتلا به در خود ماندگی و یا برای یک آدم فضایی مفاهیم ریاضی ما چه شکلی پیدا می کند، هرگز مورد مطالعه قرار نگرفت. مثلا آیا آنچه به نظر ما متناهی است برای هر ناظری متناهی است و آنچه به نظر ما نامتناهی است برای هر ناظری نامتناهی است؟

۷- حسابان نزد نیوتن و لایبنیتز

حسابان لغتی است که به جمع و بر هم نهی حساب دیفرانسیل و انتگرال تعلق می گیرد که این دو با قضیه اساسی حسابان به هم مربوط می شوند. مسائل حل نشده بسیاری برای هزاران سال باقی مانده بود که به این حساب ها و ارتباط آنها در دسترس برای محاسبه و حل قرار گرفته بودند. این دو حساب و کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی جایگاه دومین ریاضیدان همه اعصار را برای نیوتن مکتوب کرد. حسابان اولین روش کلی برای حل مسائل بود که توسط بشر ارائه شد. روش جبری دکارت به طور فلسفی کار می کرد ولی در عمل محاسبات را بسیار پیچیده می کرد. اما روش حسابان نیوتن و لایبنیتز از دیدگاه محاسباتی نیز کوتاه و در دسترس بود. البته نیوتن واضع روش بینهایت کوچکها در هندسه اقلیدسی نیز بود که در کتاب اصول ریاضی فلسفه طبیعی به کار گرفته شد. اما به سرعت حسابان جای این روش را گرفت و فیزیک نیوتن نیز به زبان حسابان نیوتن فرمولبندی شد. تا دویست سال روشهای نیوتن و لایبنیتز به طور شهودی به کار گرفته می شدند تا جایی که در قرن نوزدهم کوشی و وایراشتراس مفاهیم حد و پیوستگی را به زبان ریاضی فرمول بندی کردند و مبانی حسابان بر پایه های محکمی استوار گشت. مفاهیم حد بی نهایت، بی نهایت کوچکها، بی نهایت بزرگها و تابع، پیوستگی، مشتق پذیری، انتگرال پذیری وکمینه و بیشینه و توابع چند متغیره و مشتقات پاره ای، مفهوم مدلسازی ریاضی پدیده های متغیر را دگرگون کردند. تا چند صد سال همه وقت ریاضیدانان به فرمولبندی معادلات دیفرانسیل برای مدلسازی پدیده های طبیعی و حل این معادلات دیفرانسیل به روش های ریاضی گذشت. نظریه حل معادلات دیفرانسیل و رده بندی آنها توسط جمعی از ریاضیدانان قرن هفدهم و هجدهم انجام شد که در رأس آنها اویلر قرار داشت. هامیلتون و لاگرانژ فرمولبندی های جدیدی از مکانیک بدست دادند که نشان داد بسیاری از مفاهیم فیزیکی که توسط نیوتن مطرح شده بودند مفاهیمی طبیعی و خداداد نبودند. برای مثال می توان فیزیک را

بدون مفهوم نیرو فرمولبندی کرد. انقلاب حسابان به سرعت از مرزهای ریاضی بیرون رفت و فیزیک را هم در بر گرفت و در قرن شانزدهم تا نوزدهم به نوعی ریاضیدان بودن و فیزیکدان بودن در هم تنیده شده بود. در قرن بیستم روشهای شهودی در محاسبات فیزیکی دوباره ریاضی و فیزیک را از هم جدا کرد تا باز در اواخر قرن بیستم با عنوان فیزیک ریاضی قسمتهایی از آنها به هم بپیوندند.

۸- مکانیک نزد اویلر،لاگرانژ، لژاند و هامیلتون

مکانیک یکی از قدیمی ترین شاخه های فیزیک است که گستره وسیعی از جهان، از ملکول ها گرفته تا ستارگان و همچنین با تقریب خوبی برای کهکشان ها و همچنین برای اجسام با سرعت پایین نسبت به سرعت نور اعمال می شود. برای مقیاسهای زیرمولکولی مانند اتم ها و الکترونها یا سطح انرژی بسیار پایین از مکانیک کوانتومی و برای سرعت های قابل ملاحظه با سرعت نور از نظریه نسبیت عام انیشتن استفاده می شود. برای مکانیک کلاسیک تا کنون سه فرمولبندی نیوتن، لاگرانژ و هامیلتون ارائه شده است. پیشینه همه اینها توسط فضای دکارتی پایه گذاری شده بود.کپلر و کپرنیک انقلابی نجومی و گالیله انقلاب فیزیکی را برعهده گرفتند. نیوتن و مکانیک او نسبت به یک دستگاه مرجع اتر نوشته شده بود. نزد نیوتن کالبد فضا در حال سکون بود و حرکت مطلق معنی داشت. باور عمومی در زمان نیوتن این بود که فضا از اتر که در حال سکون است پرشده است که همان عنصر پنجم ارسطویی است. همینطور نیوتن اعتقاد داشت که زمان مطلق حقیقی ، ریاضی ، خود به خود و به طور یکنواخت و بدون ارتباط با هیچ چیز خارجی جریان دارد. انیشتن نشان داد که مفهوم اتر مفهومی زائد است و فضا و زمان مطلق وجود ندارد. لذا می توان فرض کرد که هر ناظری زمان خودش را دارد. این انقلاب فلسفی و مفهومی و شناختی بود. هنوز در اذهان مردم کوچه و خیابان نگاه به فضا زمان نیوتنی است و هنوز نگاه نسبیتی انیشتن جای خود را در اذهان عموم بازنکرده است. اینکه ادراک هر مفهومی نیز نسبی باشد، می تواند از نتایج شناختی نسبیت عام انیشتن فرض شود. ولی هنوز ریاضیدانان باور خود به مطلق بودن حقایق ریاضی و اثبات اقلیدسی از دست نداده اند. باید به تلاشهای اویلر در مکانیک سیالات هم اشاره کنیم. اویلر معادله دیفرانسیلی برای سیالات نوشت تا حرکت سیالات را مدلسازی کند و این انقلابی در مطالعات موج و اقیانوسها بوجود آورد. هنوز مسائل حل نشده فراوانی در این رابطه وجود دارد که بسیاری عواقب مفهومی و شناختی دارند. مبانی ریاضی مکانیک کلاسیک بسیار سریع بر حسابان استوار شد و مبانی ریاضی حسابان اما ۲۰۰ دویست سال طول کشید تا محکم شود و این مدیون مفهوم حد که توسط کوشی ارائه شد و مفهوم ε_δ که توسط وایرشتراس پیش پا گذاشته شده بدون این دو قدم در راه دقیق سازی حسابان، ممکن نبود استاندارد های اثبات اقلیدسی در عصر جدید زنده بمانند و ریاضیات به سمت اثباتهای شهودی حرکت می کرد.

۹- حد و پیوستگی نزد کوشی و وایراشتراس

تعریف مشتق با کمک مفهوم حد و تعریف مفهوم حد با کمک مفهوم ε_δ بسیار نجات بخش بود و البته از تلاشهایی نتیجه شد که به هیچ وجه به دنبال ارائه مبانی دقیق برای حسابان نبودند. دستاورد کوشی در یک مقاله غلط ارائه شد که تلاش می کرد ثابت کند هر سری فوریه به یک تابع پیوسته همگراست. و روشε_δ در انبوه مقالاتی در آنالیز توسط وایرشتراس ارائه شدند و به هیچ وجه سعی نداشتند مفهوم حد کوشی را دقیق تر کنند. مفهوم دنباله های کوشی نیز برای فرمولبندی دقیق اعداد حقیقی ارائه شدند که پیش از کوشی به جز روش ددکیند فرمولبندی ریاضی دقیقی از اعداد حقیقی وجود نداشت. چرا حد و پیوستگی یک انقلاب مفهومی بود؟ نه تنها به این خاطر که شاخه جدید آنالیز ریاضی را دقت ریاضی بخشید یا مدلی برای

زمان ارائه داد که بر اعداد طبیعی استوار شده بود. بلکه آنالیز ریاضی نزد کوشی و وایراشتراس به پختگی ای رسید که توانست به عنوان یک شاخه مستقل و وارسته از سرچشمه های آن به حیات خود ادامه دهد. این اتفاق فقط برای آنالیز نیافتاد. بلکه برای بسیاری از شاخه های ریاضی در قرن نوزدهم شروع به شکل گرفتن کرد و در اول قرن بیستم به پختگی رسید. هرشاخه ریاضی با تلاشی به پاسخ دادن به سولات فلسفی درون همان رشته به زندگی و بالندگی خود ادامه می داد. شاخه های جدیدی در آنالیز مانند آنالیز مختلط، آنالیز تابعی، آنالیز فوریه شروع به استقلال و خودمختار شدن کردند و در این روند تقسیم شدن در طی قرن بیستم ادامه پیدا کرد. این اتفاق نه فقط در آنالیز بلکه در هندسه و جبر و نظریه اعداد هم واقع شد. شاخه های نظریه میدانها، نظریه جبری اعداد، نظریه تحلیلی اعداد به عنوان زیر شاخه های نظریه اعداد و جبرجابجایی و جبر ناجابجایی و نظریه گروهها و جبرها به عنوان زیرشاخه های جبر و هندسه جبری و هندسه دیفرانسیل و توپولوژی جبری و توپولوژی دیفرانسیل و مانند آن به عنوان شاخه های هندسه در قرن نوزدهم و قرن بیستم شکل گرفتند و به عنوان شاخه های مستقل شروع به تاثیر گذاری بر یکدیگر کردند. بسیاری از ایده های ریاضی از شاخه های دیگر وارد نظریه اعداد شد و برنامه های تحقیقی بلند مدتی بدین سان شکل گرفت. بسیاری از این زیرشاخه ها هم تحت تاثیر آنالیز ریاضی تشکیل شدند. مثل نظریه تحلیلی اعداد، هندسه جبری مختلط، رویه های ریمانی، نظریه آرکلو، ریاضیات P- نقش و مانند آن. مثال اخیر از اهمیت زیادی برخوردار بود چون مشابه هایی P- نقش برای حلقه اعداد حقیقی به دست می داد که تا حدی $\mathbb{R}$ را از بی مانند بودن در ریاضیات نجات می داد. البته هیچکدام از این میدانهای P- نقش مانند $\mathbb{R}$ یک میدان مرتب نبودند و در این جنبه هنوز $\mathbb{R}$ بی مثال بود.

۱۰- نظریه میدانها نزد گالوا

گالوا قهرمان بیرون کشیدن بسیاری از مفاهیم کلیدی از حلی که برای مسئله حل ناپذیری معادلات درجه پنجم با رادیکالها ارائه داد بود. آبل هم همین مسئله را حل کرد. اما نتوانست مفاهیمی که گالوا بیرون کشیده بود به دست دهد. مفاهیم میدان، توسعه میدان، گروههای تقارنها، میدان متناهی همه از نظریه گالوا بیرون کشیده شدند. حل ناپذیری معادلات درجه پنجم عمومی با کمک نظریه میدان و عدم امکان تثلیث زاویه با کمک خط کش و پرگار از نتایج این نظریه بودند. گالوا از معدود ریاضیدانانی است که می شناسیم که زیر بیست سالگی به نظریه پردازی پرداختند. هرچند بهانه این نظریه پردازی حل یک مسئله بود، اما گالوا پختگی نظریه پردازی درسن بسیار کمی را به دست آورده بود. علاوه بر این دو دستاورد گالوا یک انقلاب مفهومی را با تئوری خود به ارمغان آورد و آن مفهوم عمل گروه بر یک مجموعه بود که در نظریه گالوا جای مهمی را اشغال کرده بود. گروه تقارنهای ریشه های یک چند جمله ای در کنار گروه تقارنهای یک شکل هندسی ساده مقدمات ظهور جبر مدرن را پدید آورد. جردن در اولین کتاب جبر مدرن مفاهیم فضای برداری ، ماتریس و گروههای خطی را مطرح کرد و بسیاری از مثالهای مهم این نظریات را برای اولین بارپیش پا گذاشت. تشکیل شاخه جبر مدرن مدیون استاندارد های شناختی خود که گالوا یک تنه در چند مقاله کوتاه به یادگار گذاشت. مطالعه حلقه اعداد صحیح میدانهای اعداد و مطالعه میدانهای توابع و لغت نامه بین آنها و سرانجام مطالعه جبر جابجایی و جبر نابجایی توسط امیل نوتر و پیروان او و هم هیلبرت و شاگردان او یک امپراطوری بزرگ از ساختارهای ریاضی را ساختند و به آیندگان تحویل دادند. شاید بتوان گفت گالوا کسی بود که مطالعه تقارنهای ساختارهای عددی و شاید هم مطالعه تقارنهای ساختارهای ریاضی به طور کلی را آغاز کرد و این از پیش نیازهای برنامه ارلانگن که توسط کلاین مطرح شد و مفهوم مرکزی روشهای ریاضی در فیزیک بود که در فیزیک خرد نقش تعیین کننده ای ایفا کرد. مطالعه نمایشهای بینهایت بعدی یک گروه تقارن منجر به کشف بسیاری از ذرات بنیادی توسط ریاضیات، پیش از

کشف آنها در آزمایشگاه شد. مفهوم یک هندسه که توسط کلاین پیش پا گذاشته شد به طور مرکزی بر مطالعه گروههای تقارنهای یک هندسه پایه گذاری شد. این همه دستاورد برای گالوای جوان که دریک دوئل در بیست سالگی کشته شد بسیار بیش از طاقت یک نفر می نماید. شاید بتوان گفت گالوا یک تنه کار یک مدرسه فکری را به انجام رساند.

۱۱- هندسه جبری نزد آبل

اینکه خمهای بیضوی ساختار گروهی دارند، توسط آبل کشف شد. از این روی گروههای جابجایی را به افتخار آبل گروههای آبلی می نامند. اما مفهوم گروه در واقع توسط گالوا بیرون کشیده شد. گالوا گروههای ناجابجایی را نیز در نظر گرفت. مطالعه خمهای بیضوی به عنوان واریته های جبری روی $\mathbb{C}$ آغاز بررسی هندسه جبری مدرن بود. فرمولبندی جبر جابجایی توسط هیلبرت، فرمولبندی میدان توابع توسط ویل، فرمولبندی هندسه مختلط توسط سر و فرمولبندی شماها توسط گروتندیک و فرمولبندی هندسه ناجابجایی توسط روزنبرگ یکی پس از دیگری انقلابهایی در فرمولبندیهای مختلف از یک نظریه مشترک بودند. شبیه این چندین فرمولبندی در نظریه فرمهای مدولار نیز دیده می شود. در هندسه جبری پس از پیدا شدن یک فرمول بندی جدید فرمولبندی های قدیمی کم و بیش به فراموشی سپرده می شوند. درفیزیک ریاضی نیز همین طور است. اما در نظریه اعداد همه فرمولبندیهای فرمهای مدولار به طور موازی اهمیت دارند. فرمولبندی نمایش گروه لی ، فرمولبندی ادلیک، فرمولبندی بسط در بینهایت، فرمولبندی فضای مدولی ، فرمولبندی تابع متقارن روی فضای متقارن و چندین فرمولبندی دیگر به طور همزمان در نظریه اعداد برای مطالعه فرمهای مدولار به کار می روند. تلاشی برای یافتن فرمولبندیهای مشابه و موازی ادامه دارد. فرمولبندی نمایشهای گالوایی و فرمولبندی صورت نرمال برای فرمهای مدولار که ویژه فرمهای اپراتورهای هکه هستند، دو نمونه از این فرمولبندی های جدید هستند. سعی براین است که تمام این فرمولبندی ها برای تعمیم فرمهای مدولار از $\mathrm{GL\_2}(\mathbb{Z})$ به گروههای دیگر تعریف شود. پس از این ارائه فرمولبندی های گروتندیک از هندسه جبری ارتباط نظریه اعداد و هندسه جبری نهادینه شد، به طوری که شاخه ای با عنوان هندسه حسابی شکل گرفت که بسیاری از نتایج مهم نظریه اعداد به کمک این شاخه به دست آمده اند. ظهور فرمولبندی های چندگانه از یک تئوری به ظهور مدلهای مختلف برای هندسه هذلولوی مسبوق بود، اما دراین مثال تنوع مدلها اهمیت داشت نه پیدا کردن مدلهای کارآمدتر برای تئوری پردازی و حل مسئله چنان که در هندسه جبری رایج شد. انقلابهای مفهومی در نظریه اعداد را در بخش بعدی مورد مطالعه قرار خواهیم داد. بسیار طول کشید تا این دو شاخه هندسه جبری و نظریه اعداد دوش به دوش در کنار هم به حل مسائل مهم نظریه اعداد و پیشبرد برنامه های تحقیقاتی عمیق آن کمک نمایند. خدمتی که هندسه جبری به نظریه اعداد کرد به هیچ وجه توسط نظریه اعداد جبران نشد.

۱۲- نظریه اعداد نزد گاوس

گاوس سومین از سه بزرگترین ریاضیدانان قرون و اعصار، چندین شاخه ریاضی را بنیان گذاری کرد و از جمله این شاخه ها نظریه اعداد مدرن بود. او حلقه اعداد صحیح مختلط و توسیع های متناهی دیگر اعداد گویا را مطالعه کرد و سوالات نظریه اعدادی را در این توسیع ها فرمولبندی نمود. نزد گاوس نظریه اعداد که مطالعه اعداد صحیح بود به مطالعه حلقه اعداد صحیح میدانهای اعداد و حلقه های مشابه در میدانهای توابع توسعه یافت. البته تلاش های کرونکر و وبر را که در جهت به وجود آمدن یک لغت نامه بین میدان های توابع و میدانهای اعداد بود نباید فراموش کرد. مطالعه اعداد صحیح به مطالعه ساختارهای عددی توسعه یافت و کم کم هر ساختاری که مشابه ساختارهای عددی رفتار می کرد نیز ساختار عددی خوانده می شد و این مفهوم

عدد را تحت تاثیر قرار داد و مفهوم شمارش تا جایی تعمیم پیدا کرد که در دستگاه فکری گروتندیک و در دستان وایلز به سرشماری ساختارهای با خواص داده شده پرداخت. استانداردهای فکری گاوس در نظریه اعداد و هندسه دیفرانسیل در کنار کارهای کوشی و وایرشتراس استاندارد دقت ریاضی را در قرن نوزدهم بالا نگه داشتند . بسیاری از محققان ریاضی- فیزیک بودند که استاندارد های پایین تری در دقت ریاضی داشته و امروزه به آنها فیزیکدان گفته می شود تا ریاضیدان. البته ریاضی- فیزیک در اواخر قرن بیستم، پس از تلاشهای ریاضیدانانی مانند عطیه شکل دقیق تری به خود گرفت و ریاضی-فیزیکدانان توانایی در قرن بیستم بوجود آمدند که همه آنها را به عنوان ریاضیدان قبول داشتند. هنوز مشکل استانداردهای دقت ریاضی بین ریاضیدانان و فیزیکدانان دیده می شود. ریاضیدانان گرایشی دارند که به فهم بهتر ساختارهایی که تا کنون ساخته شده بپردازند و فیزیکدانان گرایش دارند به این که مفهوم سازی کنند و مفاهیم جدیدی برای مطالعه خلق کنند که پدیده های طبیعی را بهتر توضیح بدهد و مدلسازی کند. در کنار این استاندارد های بالا مطالعات گاوس در جبر و هندسه دیفرانسیل ریمان مبانی شهودی هندسه های ابعاد بالاتر را مطرح کرد که تحت تاثیر استاد خود گاوس بود. بعدها توسط پوانکاره و دیگران فرمولبندی دیگری از هندسه هماهنگ با فیزیک ارائه شدند که با بکارگیری از جبر خطی و نظریه فرمهای استاندارد دقت ریاضی را در علم هندسه که علمی شهودی بود بالا بردند. می توان گفت که همانطور که کانت بر همه فلاسفه بعد از خود سایه انداخت، گاوس بر همه ریاضیدانان بعد از خود سایه استانداردهای دقت ریاضی خود را گسترد.

۱۳- هندسه نزد ریمان

هندسه های پیوسته و گسسته توسط ریمان در یک سخنرانی در گوتیگن مورد مطالعه قرار گرفتند. در مقاله ریمان تقریبا هیچ فرمول ریاضی دیده نمی شد و سراسر به فلسفه فضا می پرداخت. هندسه های پیوسته توسط پوانکاره و دیگران توسعه داده شدند، اما هندسه های گسسته هرگز مورد توجه قرار نگرفتند. ریمان در روش فلسفی خود تحت تاثیر کانت و در روشی ریاضی خود تحت تاثیر استاد خود گاوس بود . در واقع ریمان سعی داشت، آنچه گاوس در هندسه دیفرانسیل دو بعدی فرمولبندی کرده بود به ابعاد بالا و مستقل از نشاندن در فضاهای خطی تعمیم دهد. ریمان اولین کسی بود که مفهوم فضای فیزیکی با هندسه ای غیر از فضای دکارتی را تصور کرد و در ادامه راه او پوانکاره حدس پوانکاره را در مورد کره سه بعدی مطرح کرد. ریمان شرط هندسه های با خمیدگی ثابت را برای مدلی از فضای فیزیکی که در آن حرکت اجسام صلب ممکن باشد مطرح نمود که انقلابی در هندسه به وجود آورد.قضیه نگاشت ریمان و قضیه اساسی رویه های ریمانی قدمی در مطرح شدن ریاضیات بیضوی ، سهموی و هذلولوی بود. ریمان مقدمه ای برای برنامه ارلانگن کلاین چید و فضا را برای ظهور آن آماده کرد که پس از این در مورد آن سخن خواهیم گفت. مفهوم فضای فیزیکی از دکارت تا ریمان و از ریمان تا انیشتن دچار تحول شد تا جایی که در فرمولبندی مکانیک کوانتم از مدلسازی فیزیک حذف گردید. حتی فرض وجود اپراتوری برای زمان هم تا حدودی تناقض آمیز می نمود. فیزیک بعد از کوانتوم از مفاهیم فضا و زمان فاصله گرفت که البته تحولات آن، در حوزه تاریخی مورد مطالعه ما قرار ندارد. هندسه ریمان بسیار شهودی و تا حدودی نا دقیق بود و تلاش ریاضیدانان بسیاری از کارهای ریمان را به استانداردهای دقت هندسه دیفرانسیل گاوس بالا بردند. هندسه شهودی ریمان درشاخه دیگری از هندسه نیز ظهور پیدا کرد که توسط پوانکاره فرمولبندی شد و آن شاخه توپولوژی و توپولوژی جبری بود. پوانکاره با کمک بازه واحد در خط حقیقی به عنوان مدلی برای تغییر پیوسته نظریه هموتوپی را دقیق کرد و همچنین نظریه همولوژی را بنیان گذاشت که بعدها در هندسه جبری ، هندسه دیفرانسیل جبر و نظریه اعداد و بسیاری از شاخه های ریاضیات به عنوان دومین روش عمومی برای حل مسئله به کار گرفته شدند.

۱۴- توپولوژی جبری نزد پوانکاره

نظریه هموتوپی یا همشکلی و همسانی و نظریه همولوژی یا همانندی و کوهومولوژی یا پادهمانندی توسط پوانکاره فرمولبندی شدند و پوانکاره با کمک این نظریات به فضای هندسی ناوردهای جبری نسبت داد و این انقلاب در مفهوم ناوردای ریاضی بود. پیش از پوانکاره تاجایی که به نظر راقم این سطور می رسد، همه ناورداها عدد بوند مثل طول، سطح، حجم، خمیدگی، قطر و حتی تعداد اعضای یک مجموعه متناهی از نقاط. اما پوانکاره گروه بنیادی و گروههای همانندی و پاد همانندی با ضرایب در اعداد صحیح و با ضرایب اعداد حقیقی را مطرح کرد. بعدها این ناورداها به نظریه پادهمانندی برای نمایش گروهها، جبرهمانندی و جبر پاد همانندی و نظریه ویل برای پاد همانندی خمینه های جبری و گروههای پادهمانندی گروتندیک و مفهوم فرمال بودن یک اپراد توسعه پیدا کرد. چتر سایه پوانکاره بر سر بسیاری از ریاضیدانان بعد از او حکومت می کند. هنوز هم اکثر ناورداهایی که به فضاهای هندسی نسبت داده می شوند و ساختار ریاضی هستند به پارادایم همانندی و پاد همانندی و یا همشکلی ارجاع دارند. ضمنا نظریه همسانی بستری مناسب به عنوان آزمایشگاهی برای نظریه رسته ها فراهم آورد که در دستان گروتند یک معجزه آفرید. از نقش آیلنبرگ و مک لین در توسعه نظریه رسته ها باید یاد کرد. نظریه رسته ها نگاهی کل نگر به ساختارهای ریاضی را مطرح کرد و روش ریاضی جدیدی را بنیان گذاشت. که همچون جامعه شناسی ریاضی در برابر روانشناسی ریاضی بود. جامعه شناسی ریاضی نگاهی از کل به جزء به اشیاء ریاضی دارد و روان شناسی ریاضی همان نگاه سنتی به اشیاء ریاضی است که از جزء به کل است. توپولوژی جبری پوانکاره در واقع بازگشت به نگاه فلسفی فیثاغورسی است که به شکل همان عدد است و باید مانند عدد با آن برخورد شود. این ایده که به فضاهای هندسی ناوردا نسبت می دهیم که گروه باشد، شبیه نسبت دادن گروه تقارنهای صفرهای یک چندجمله ای است که از گالوا سرچشمه گرفت و بعد از آن ایده که گروه تقارنهای یک شکل هندسی را در نظر بگیریم، چندان دور از دسترس نبود. اما این کلاین بود که گفت گروه تقارنهای یک هندسه چیزی است که یک هندسه را تعیین می کند. مثلا یک هندسه می تواند مختلط ، ریمانی یا خطی باشد. این ایده چیزی شبیه مفهوم ناظر در فیزیک است. در هر تئوری فیزیک باید بدانیم قوانین فیزیک برای چه ناظری صادق هستند.

۱۵- مفهوم مدل ریاضی نزد کلاین

کلاین در برنامه ارلانگن مطالعه هندسه های جدید در بستر تعریف خود از یک هندسه را موضوع کار تحقیقاتی خود قرار داد. بدون شک این ایده تحت تاثیر مفهوم مدل ریاضی برای یک تئوری ریاضی یا مدل ریاضی برای هندسه هذلولوی بود. تنوع مدلها یعنی مدل کلاین در کنار مدل پوانکاره این فکر را بوجود آورد که در واقع هندسه هذلولوی چیست؟ چه چیزی یک هندسه را از هندسه های دیگر جدا می کند؟ چرا بعضی هندسه ها هذلولوی ، سهموی و کروی هستند. این مفهوم از هندسه بعدها نزد ترستون قوام یافت و ترستون هشت هندسه مرجع در سه بعد را معرفی کرد که حدس ترستون را شکل می داد و سرانجام حدس پوانکاره به همین روش توسط پرلمان به اثبات رسید. در واقع بعد از کشف مدل کلاین یک ریاضیات سازگار بدون مدل هم معنی پیدا کرد و آن همان چیزی بود که گاوس، لباچفسکی و بولیایی قبل از کلاین کشف کرده بودند. اینجا بود که مسئله صدق معنی پیدا کرد که انقلابی در منطق ریاضی را به دنبال خود داشت. نظریه مجموعه های کانتور مقدمات فرمالسازی ریاضیات توسط هیلبرت را فراهم کرد و آرزوهای لایبنیتز در فرمولبندی منطق ریاضی به زبان ریاضیات در اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم به واقعیت پیوست. فرگه و سپس براوئر قدمهای بلندی در فرمولبندی منطق ریاضی و ریاضیات سازگار برداشتند که به نظر این بنده همه از کارهای بلند کلاین سرچشمه می گرفت .(به خاطر دارم که در جوانی قهرمانم پوانکاره بود. حدود سی سالگی یک روز از خواب بلند شدم و خودم را در آینه نگاه کردم و دیدم قهرمانم هیلبرت است. امروز که

این سطور را می نوشتم ناگهان دیدم که قهرمانم رقیب دیگر پوانکاره یعنی کلاین است. فکر می کنم این بدان دلیل است که در جوانی خود را یک محقق خوب می دیدم و در سی سالگی یک معلم ریاضی و امروز خود را یک فیلسوف ریاضی می پندارم. شاید روزی برسد که قهرمانم فون نویمان باشد. امروز این پختگی را در خود نمی بینم. دکتر شهشهانی این را شنید و گفتند که فون نویمان کسی بود که این ایده را داد که اگر بمب اتم در نزدیکی زمین منفجر شود، قدرت تخریب آن بیشتر خواهد بود تا اینکه در حین برخورد با زمین منفجر شود و تخریب خود را روی زمین آغاز کند. گمان می کنم این ایده را فون نویمان از شیطان گرفته که برای فساد بر روی زمین ابتدا باید نفس انسانی را فاسد کرد. اینطور فساد سریعتر گسترش می یابد.)

۱۶- فضای هیلبرت نزد فون نویمان

مفهوم فضای هیلبرت مهمترین کاربرد و اهمیتش به خاطر فرمولبندی نظریه کوانتوم بود و این فون نویمان بود که پیشنهاد داد فضای هیلبرت اینطور به کاربرده شود و این فرمولبندی را انجام داد. بدنبال یک تئوری ریاضی که برای فرمولبندی کوانتوم مناسب باشد فون نویمان نظریه هندسه های پیوسته را نیز فرمولبندی کرد که در آن بعد فضا می تواند به طور پیوسته تغییر کنند. مشخصه این هندسه این است که در آن مفهوم نقطه وجود ندارد. یعنی کم بعدترین شیئی هندسی که هیچ زیر شیئی هندسی نداشته باشد که همان نقطه باشد، در این ساختار تعبیه نشده است. و این کار عمداً انجام شده تا ساختار خرد هندسه را پیچیده تر نماید. در واقع همین نکته بود که فضای هیلبرت بی نهایت بعدی را کاندید دیگری برای فرمولبندی مکانیک کوانتوم قرار داد. این مسئله مفهوم فضا و زمان را دگرگون کرد. چرا که مثلا معادله موج هرگونه ارتباطی بین متغیرهای مکان موج با مفهوم فیزیکی مکان تناقض آمیز می نماید. در واقع فون نویمان فضا و زمان هر دو را فنا کرد تا بتواند فیزیک خرد را مدلسازی ریاضی کند. فیلسوفی فرانسوی به اسم باشلار اعتقاد دارد شاید پرادایم نسبیت و پارادایم کوانتوم را هرگز نتوان با هم مرتبط کرد. او را واضع نظریه گسست معرفتی می دانند. فون نویمان کارهای مهم دیگری هم انجام داد که البته در چهارچوب نگاه مفهومی به تاریخ ریاضی نمی گنجد. فون نویمان در موسسه مطالعات عالی پرینستون اولین کامپیوتر را ساخت و تاثیر بسیار عظیمی بر ریاضیات و حتی شناخت بشر در قرن بیست و یکم گذاشت. عصر اطلاعات تحت تاثیر همین اختراع بشر بود که به وقوع پیوست و این حرکتی شناختی در پی داشت که ذهن فرزندان قرن بیست و یکم را شکل می دهد. امروز در آزمایشگاه فون نویمان جایی که اولین کامپیوتر ساخته شده که برای پیش بینی وضع هوای فردا محاسباتش ۲۴ ساعت طول می کشید، مهد کودک موسسه مطالعات عالی قرار دارد که معنایی بسیار استعاره آمیز دارد.