نگاهی مسئله محور به تاریخ ریاضیات

آرش رستگار

دانشگاه صنعتی شریف

خلاصه- نگاه مسئله محور به تایخ ریاضیات در کنار نگاه های نظریه محور، مفهوم محور یا شناخت محور و حقیقت محور نگاهی نو به تاریخ ریاضیات است. مسائل مهم ریاضیات که قرن ها مورد مطالعه بودند و ریاضیدانان را به خود مشغول کردند و صحنه ریاضیات را سیراب کردند مورد مطالعه و بررسی قرار می گیرند. تاریخ ریاضیات را می توان تا قرن بیستم که هر شاخه ای از لحاظ مفهومی مستقل می شود و به حل مسائل درونی خود می پردازد به روش مسئله محور مطالعه کرد.

مقدمه_ بسیاری از مسائل ریاضی از هنگام پیدایش آن وجود داشته اند و بسیاری از مسائل ریاضی پیش از این مرده اند و کسی به آنها نمی پردازد. مسائلی در طول تاریخ ریاضی متولد شده اند و مسائلی هنوز در حال مطالعه شدن هستند. اینکه چگونه یک مسئله متولد می شود باید مورد مطالعه قرار بگیرد و اینکه لیست این مسائل چه مسائلی را تشکیل می دهد و کدامها از آغاز ریاضیات زنده بوده اند و هنوز مورد مطالعه هستند و قلب ریاضات را تشکیل می دهند. نگاه نظریه محور به تاریخ ریاضیات در کنار نگاه مسئله محور باید مورد مطالعه قرار گیرد، چرا که بسیاری نظریات در بستر مسائل متولد می شوند و عده ای مسائل در بستر نظریات ظهور پیدا می کنند. بنابراین برای تولد مسائل باید تاریخ نظریات ریاضی را تاریخ ریاضی را با نگاه نظریه محور را شناخت. می توان گفت نگاه های مفهوم محور پس از نگاه مسئله محور و نظریه محور و نگاه های شناخت محور و حقیقت محوربه ترتیب پس از نگاه مفهوم محور قابل مطالعه هستند. این اشاره دارد به درجات مختلف پختگی درک تاریخ ریاضیات که همه این درجات در حد درک یا مورد توجه یا قابل تشخیص توسط همه ریاضیدانان نیستند. نگاه مسئله محور به تاریخ ریاضیات ابتدایی ترین نگاه به تاریخ ریاضی است که حتی برای دانش آموزان دبیرستانی نیز قابل درک و نقد می باشد.

۱- مسئله عدد وشکل واتحاد آنها

این مسئله که عدد چیست و شکل هندسی چیست و آیا هر عددی یک الگوی هندسی دارد، نزد فیثاغورسیان مطرح بود. ایشان اعداد مثلثی و مربعی، مخمسی و مسدسی را در نظر می گرفتند. حتی نزد اقلیدس عدد طول یک پاره خط بود. اما خیام این نکته را گوشزد کرد که ضرب طولها یک مساحت است. لذا او اعداد را برحسب نسبت تعریف کرد. کشف اعداد مختلط ضربه اصلی را به جدا شدن مفهوم عدد از مفهوم شکل وارد کرد و مفهوم ساختار عددی شکل گرفت. هم زمان مفهوم شکل هندسی مفهوم فضای هندسی را تولید کرد و این دو مفهوم ساختار عددی و فضای هندسی با ظهور توپولوژی جبری و نظریه همانندی به هم پیوستند. اینکه به یک ساختار فضای هندسی یک ناوردای ساختار عددی نسبت دهیم همان نظریه پادهمانندی است. اما اینکه به یک ساختار عددی پادهمانندی یک فضای هندسی نسبت دهیم منجر به ظهور همانی توپولوژیک فضای هندسی شد. جای دیگری که عدد و شکل به هم نزدیک شدند در هندسه مناطق حاره بود که ضرب اعداد حقیقی جای جمع و کمینه ویا بیشینه به جای ضرب به کار می رفتند. این نظریه تعمیمی به اشکال محدب ابعاد بالا داشت که در آن جمع ، مجموع نقطه به نقطه مجموعه های محدب

و بیشینه کوچکترین مجموعه محدب شامل دو زیر مجموعه است. البته در به کار بردن این ساختارها به عنوان ساختار عددی اقبالی نشان داده نشد. اما اینکه به اشکال، عدد نسبت دهیم مانند طول، مساحت، حجم ویا بعد از مسئله عدد و شکل ناشی شد ویا حتی از آن هم قدیمی تر بود. چراکه در مصر باستان و تمدن بابل فرمولهایی برای مساحت و حجم اشکال هندسی به کار می رفت. به تاریخ مسئله مساحت و حجم جداگانه خواهیم پرداخت. اما موفقیت ریاضیات یونان پس از فیثاغورس در این بود که فرمولبندی مشترکی برای دقت ریاضی بوجود آورد که هم برای اعداد کارآمد باشد و هم برای اشکال هندسی و این کار بسیار سخت بود. اما این مشکل توسط روش اصل موضوعه سازی ارسطو آسان شد. اقلیدس در کنار بسیاری دیگر این روش را در آموزش ریاضی به کار گرفت. اما کتاب اقلیدس در تاریخ ریاضی ماندگار شد. همچنین حل معادلات جبری توسط طولهای هندسی جای خود را به حل معادلات جبری توسط روشهای جبری شد و این نیز ضربه دیگری بود که به جدایی مفهوم عدد از شکل کمک کرد که توسط خوارزمی و خیام و دکارت به کمال رسید. در این مورد نیز در بخش دیگری سخن خواهیم گفت.

۲-مسئله فرمولبندی اصل موضوعه ای ریاضیات

فرمولبندی اصل موضوعه ای ریاضیات از زبان ارسطو تحت سایه نظریه علمی ارسطو مطرح شد و در پاسخ به پیدا کردن زبان مشترکی برای صحبت از عدد و شکل اهمیت پیدا کرد. اقلیدس این روش را در آموزش ریاضی به اجرا گذاشت و قرنها کتاب اصول او مرجع اصلی برای آموزش ریاضیات بود و پدر استاندارد دقت ریاضی به شمار می رفت. این تلاش برای مبانی مشترکی برای ریاضیات منجر به ظهور نظریه مجموعه ها توسط کانتور شد.برنامه ریاضی کردن زبان منطق نیز که از آرزوهای لایبنیتز بود توسط فرگه به اجرا گذاشته شد. این تلاشها منجر به شکل گیری شاخه منطق ریاضی شد که از دستاورد های آن بسیار می توان سخن گفت. از مهم ترین نتایج فلسفی آن قضایای گودل بود که به ظهور گزاره های تصمیم ناپذیر منجر شد و اینکه همواره چنین گزاره های قابل یافت شدن است. ضمنا مفهوم صدق پس از کشف مفهوم مدل ریاضی توسط کلاین مطرح شد. کلاین اولین مدل ریاضی را برای هندسه هذلولوی بدست داد که پیش از آن تنها به عنوان یک نظام اصل موضوعه ای سازگار به کار می رفت. تلاشهای کانتور برای کاربرد نظریه مجموعه ها به عنوان مبنایی برای ریاضی باظهور پارادوکس راسل شکست خورد. وئوودسکی سعی کرد بر پایه نظریه همسانی مبنایی برای فرمولبندی ریاضیات به دست دهد به طوری که اثبات ریاضی قابل چک کردن توسط کامپیوتر باشد. این تلاش به دنبال پیدا شدن اشکالی در یکی از قضایای او پس از ده سال برای او اهمیت پیدا کرد. هنوز هم محققانی در پی ادامه دادن راه وئوودسکی هستند. اثبات توسط کامپیوتر پیش از این نیز در سطح هندسه اقلیدسی مطرح شده بود و در هوش مصنوعی به موفقیتهای کوچکی نیز دست پیدا کرده بودند. در رابطه با روش اصل موضوعه ای ریاضیات تلاشهای هیلبرت در فرمالسازی ریاضیات نیز شایان توجه هستند. هیلبرت به اشاعه فلسفه ریاضیات فرمال پرداخت و برنامه اش این بود که همه ریاضیات را به زبان اصل موضوعه ترجمه کند که این تلاش با قضایای گودل به شکست انجامید. قضایای گودل در واقع شکست قطعی نظریه عملی ارسطو را نتیجه می داد که به نوعی پایان اصل موضوعه سازی ریاضیات بود. پس از گودل لازم بود که به دنبال مبانی جدیدی برای فلسفه علم که متفاوت با ارسطو باشد جستجو شود.

۳-احجام افلاطونی و اشکال متقارن و مسئله رده بندی

افلاطون پس از کشف متناهی بودن احجام افلاطونی برای آنها معنای فلسفی قائل شد و روش تاویل ریاضیات را ابداع کرد. اما این دیدگاه به ریاضیات بیشتر در فیزیک زنده ماند تا در ریاضیات و میراث افلاطون در ریاضیات مسئله رده بندی ساختارهای با فرضیات داده شده بود. بسیاری از این رده بندیها هندسی و بسیاری از این رده بندیها جبری بود. رده بندی تقارنهای کاشیکاریها در صفحه از جمله مسائل این دسته بود که زیر سایه احجام افلاطونی اقلیدس شکل گرفت. پس از کشف نظریه پردازی نظریه گروهها

بسیاری از این رده بندیها به صورت رده بندی زیر گروههای متناهی یک گروه ویا رده بندی نمایشهای یک گروه و یا رده بندی گروههایی که در یک اصل موضوعه خاص صدق می کنند ترجمه شدند. رده بندی جبرهای تقسیم متناهی روی $\mathbb{R}$ ، رده بندی میدانهای متناهی ، رده بندی گروههای آبلی ، رده بندی معادلات چند جمله ای حل پذیر با رادیکالها ، رده بندی توسیعهای متناهی روی $\mathbb{Q}$ و بسیاری از مسائل جبر و هندسه در چهارچوب رده بندی افلاطون تاریخ ساز شدند، مسئله ناوردا ها به طور جدی با مسئله رده بندی گروه گره خورد بود. چرا که این ناورداها بودند که یکی از شرایط محدود کننده برای رده بندیها را فراهم می کردند. اولین ناورداهای پیوسته طول ، سطح و حجم بودند و اولین ناورداهای گسسته ، بعد، تعداد رأسها و تعداد یالها و تعداد وجوه چند وجهیها بودند. بین این ناورداها هم قوانینی کشف شد که نتیجه تلاش برای رده بندی بودند. از جمله فرمول اویلر برای یک چند وجهی که نشان می داد برای ساختن اشکال با ناوردهای داده شده محدودیتهایی وجود دارند. مفهوم تقارن به شکل عمل گروه بر مجموعه تعمیم یافت که مبنای نظریه نمایش گروهها و همچنین ریاضیات $G-$ همورد شد. مسئله رده بندی همچنان زنده است وشاید بتوان گفت در کنار مسئله عدد وشکل از مسائلی است که همیشه بوده و همیشه خواهد بود. رده بندی مثلث های متساوی الاضلاع، متساوی الساقین، قائم الزاویه و مختلف الاضلاع و مثلث های حاده الزاویه و مثلث های منفرجه الزاویه از اولین رده بندیهایی بود که توسط تالس مطرح شد و هر دانش آموز دبستانی با این مسئله مواجه می شود. قضیه فیثاغورس از اولین قضایای رده بندی است که برای رده بندی مثلث های قائم الزاویه به کار می رود.

۴- مسئله مساحت و انتگرال

مسئله طول و مساحت و حجم و به طور کلی شمارش پیوسته در کنارشمارش گسسته از آغاز ریاضیات و شکل گیری مفهوم عدد و شکل هندسی مطرح بوده است. در تمدنهای باستانی فرمولهای بسیاری برای محاسبه مساحت و حجم اشکال به کار رفته که بعضاً نادرست هم بوده است.برای محاسبه مساحت دایره و بیضی فرمولهایی به کار می رفته که تا وقتی روش حسابان به کار نرفت اثبات قطعی آنها ممکن نبود.برای مساحت قطاعی از سهمی ارشمیدس روش مجموعهای نامتناهی را به کاربرد که به مسئله بی نهایت کوچکها تبدیل شد که پس از این به آن خواهیم پرداخت. نظریه انتگرال و نظریه اندازه از تعمیمهای نظریه مساحت بودند که سراسر آنالیز و هندسه ونظریه اعداد را تحت الشعاع قرار دادند. در این مسیر شکل گیری مفهوم تابع و ظهور مختصات دکارتی دو قدم بزرگ بودند که راه را تسهیل کردند. قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط ایزاک بارو استاد نیوتن کشف شد و نیوتن و لایبنیتز هر دو برای حالت کلی آن فرمولبندیهای ارائه دادند. در ریاضیات p- نقش نیز صورتی از این قضیه توسط ماهلر مطرح شد. در مورد بسط تیلور و تعمیمهای آن در تاریخ مسئله مماس سخن خواهیم گفت. نظریه اندازه به نظریه احتمالات نیز بسیار بخشید و مسائلی از فلسفه احتمال را به پاسخ رسانید. اندازه ها روی فضاهای مدولی اوج کاربرد نظریه اندازه است که تا امروز نیز به طور موکد مورد نیاز ریاضیدانان است. اشاره به کارهای میرزاخانی در نظریه اندازه روی فضای مدولی بی راه نیست. بنابراین نظریه مساحت به نوعی نظریه مطالعه ناورداهای عددی وابسته به ساختارهای ریاضی است که از آغاز ریاضیات زنده بوده و همواره نیز زنده خواهد ماند و از اصول و مبنای و مسائل محوری ریاضیات در نظر گرفته می شود. رویه ها و خمهای با حجم و مساحت کمینه یا بیشینه نیز نوعی از مسائل مساحت است که به حساب تغییرات و نظریه کنترل منجر شده است که روی این جنبه از نظریه مساحت در قسمت معادلات دیفرانسیل سخن خواهیم گفت. تمام مسائلی که تا کنون مطرح کردیم به نوعی با مفهوم هندسه در ارتباط بودند اما مسئله نمایش جبری و حل معادله اولین مسئله ای است که به صورت کاملا جبری و به زبانی کاملا فرمال و غیر هندسی مطرح شد و بسیار طول کشید تا ریاضیات به این سطح از تجرد برسد.

۵- مسئله نمایش جبری و حل معادله جبری

شاخه جبر تحت تاثیر تلاش های خوارزمی به وجود آمد و نام جبر از کتاب الجبر و المقابله خوارزمی گرفته شده که در عصر او بسیاری از کتابها با این اسم نوشته می شده است. جبر و جبراییل از یک ریشه هستند و جبراییل یعنی جبرالهی. پس بعید نیست ظهور شاخه جبر دلایل متا فیزیکی داشته باشد. حل هندسی معادلات جبری توسط اقلیدس و خیام انجام شد ولی حل جبری معادلات جبری به قرن هفدهم باز می گردد یعنی حتی بعد از دکارت سابقه حل جبری معادلات جبری را می توان در حل معادلات دیوفانتی جست که در یونان باستان رواج داشته است. اینکه مقاطع مخروطی دقیقا معادلات درجه دوم و خط دقیقا معادلات درجه اول را در بر می گیرند انقلابی بود که توسط دکارت انجام شد. دکارت این مسئله را مطرح کرد که هر مسئله ریاضی را باید بتوان به زبان جبر و حل یک معادله ترجمه کرد و سپس با حل جبری معادله مسئله را حل کرد. بنابراین مسئله نمایش جبری از خوارزمی تا دکارت به پختگی رسید. این مسئله هنوز زنده است و بسیاری از زیر مسائل آن در ریاضیات به وجود آمده اند که برخی تا کنون به حیات خود ادامه می دهند. از جمله این مسائل مسئله حل معادلات دیفرانسیل حل چند جمله ای ها با رادیکالها حل معادلات دیوفانتی است که به آنها خواهیم پرداخت. حل چند جمله ایها با رادیکالها در قرن نوزدهم به پایان رسید ولی مسئله حل معادلات دیفرانسیل و حل معادلات دیوفانتی هر دو هنوز زنده هستند. بیجا نیست اگر به تحقیقات استادم اندرو وایلز اشاره کنم که مسئله ۳۵۰ ساله قضیه فرما را حل کردند و نشان دادند معادله دیوفانتی فرما دارای جواب نمی باشد. حل وایلز از معادله دیوفانتی فرما شاخه نظریه اعداد را دوباره زنده کرد و روح جدیدی در آن دمید. در مورد مسئله حدس لنگلندز پس از این بحث خواهیم کرد. حل معادلات دیفرانسیل نیز به عنوان قوی ترین روش برای مدلسازی پدیده های طبیعی هنوز زنده است و سرشار از مسائل حل نشده زیباست. بسیاری از تحقیقات در مکانیک، ریاضیات زیستی، زیست شناسی، پزشکی، زمین شناسی و اقیانوس شناسی و نجوم با حل معادلات دیفرانسیل دست وپنجه نرم می کنند که به نوبه آن به این موضوع خواهیم پرداخت.

۶- مسئله بی نهایت کوچکها و بی نهایت بزرگها

مسئله بی نهایت کوچکها بسیار قبل از مسئله بی نهایت بزرگها در زادگاه آنالیز ریاضی در مسئله محاسبه مساحت قطاع سهمی توسط ارشمیدس ظهور کردند. مسئله بی نهایت بزرگها بعدها در حسابان نیوتن و لابینیتز و مفهوم حد ظهور کردند و بعد در نظریه کانتور کاردینالهای شمارا و ناشمارا مطرح شدند. بی نهایت بزرگها تاریخی متفاوت و جدا از بی نهایت کوچکها داشتند. کاشانی در تقریب عدد پی به مفهوم حد اشاره می کند و نیوتن و لایبنیتز آن را به کارمی برند و کوشی با کمک مفهوم حد تعریف دقیقی از مشتق ارائه می دهد و وایراشتراس با تعریف دقیق حد پایه های حسابان را محکم می کند. دنباله ای همگرا از نقاط، توابع، از شکلهای هندسی و از ساختارهای ریاضی می توانند درحالت حدی مورد مطالعه قرار گیرند.بسط تیلور توابع و وردشها این همگرایی را طبقه به طبقه و مدرج می نماید. اینکه قضایای ریاضی باید در حالت حدی نیز درست باشند به پاسکال بازمی گردد.بی نهایت کوچکها را به طور رسمی لایبنیتز ابداع کرد ولی خیلی طول کشید تا فرمولبندی دقیقی از آن در قرن بیستم ارائه شد. آنالیز بی نهایت کوچکها را آنالیز نااستاندارد می گویند وکتابهای حسابانی هستند که بر مبنای آنالیز نااستاندارد نوشته شده اند. روش آنالیز نااستاندارد ماندگار نبود در حالی که مفهوم بی نهایت کوچک همواره به کار آمد و به خصوص در آموزش حسابان بسیار کارآمد بود. انتظار راقم این سطور این بود که در فرمولبندی مکانیک کوانتوم مسئله بی نهایت کوچکها وارد شوند ولی هرگز چنین فرمولبندی ای از مکانیک کوانتوم داده نشد. مسئله بینهایت کوچکها هیچوقت برحسب فضاهای هیلبرت فرمولبندی نگردید. از همین روتنها دروازه بینهایت کوچکها به ریاضیات مفهوم مشتق است که تاریخ آن را به نوبه خود مورد مطالعه قرار خواهیم داد. نکته دیگر که هرگز فرمولبندی نشد تقارن بی نهایت کوچکها و بی نهایت بزرگها بود. انتظار می رود که معکوس بی نهایت کوچک یک بی نهایت

بزرگ باشد. در معادلات ماکسول اگر متغیرهای مکان را معکوس کنیم و متغیر زمان را هم، تقارنی از معادلات ماکسول به دست می آید. این بدان معنی است که در بعضی مدلهای فضا-زمان اگر از حدی بیشتر فضا-زمان بزرگ شود دقیقا معادل این است که از حدی کوچکتر گردد. این تقارن بین بینهایت کوچکها وبی نهایت بزرگها را تایید می کند. درحالی که چنین تقارنی در ریاضی فرمولبندی نشده است. راقم این سطور مقالاتی در این باب نگاشته است.

۷ – مسئله مماس و مشتق

ارتباط مسئله بیشینه و کمینه تابع یا شیب خط مماس توسط فرما، منجر به مطرح شدن مفهوم مشتق در قرن هفدهم شد. مفهوم مشتق وبسط تیلور عمیقا درهم تنیده شده است. اینکه مشتق گیری و مرزگیری دوگان هم هستند در فرمولبندی دورهام از نظریه همانندی و پاد همانندی بدست آمد. رابطه لابینیتز در مورد مشتق حاصلضرب دو تابع مشابهی دارد که به صورت فرمولی برای مرز حاصلضرب دو خمینه لبه دار یا دو فضای مرزدار فرمولبندی می شود. از طرف دیگر بنابر قضیه اساسی حسابان مشتق و انتگرال به عنوان دو عملگر روی فضای توابع معکوس یکدیگرند و این بنای استواری برای مفهوم مشتق بوجود می آورد. درحسابان مشتقات توابع چند متغییره نیز تعریف می شوند وبسط تیلور معادلی در ابعاد بالا دارد. مفهوم مشتق به صورت اپراتور مشتق گیری وارد جبر همولوژی می شود و جبرهای دیفرانسیلی مدرج نیز در مطالعه فضاهای مدولی کاربرد فراوان پیدا می کنند. پارادایم مشتق به آرامی در بسیاری از تئوریهای ریاضی رسوخ کرد وحتی درجبر وفیزیک نیز اهمیت پیدا کرد. اما مفهوم مماس در سراسر این ظهور مفهوم مشتق در ریاضیات رمقی برای حضور پیدا نکرد. نکته این که مماس مفهومی هندسی و تصویری است و مشتق برای تعمیم پیدا کردن نیاز به فرمال شدن و جبری فرمولبندی شدن داشت. لذا مشتق از مفهوم مماس فاصله گرفت.

یکی از مهمترین مفاهیمی که در توسعه مفهوم مشتق در ریاضیات مطرح شدند مفهوم فرمهای دیفرانسیل بودند وقضیه استوکس که به عنوان تعمیمی از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست آمد دوگانگی بین مرزگیری و مشتق گیری را در نهایت کلیت و زیبایی به نمایش گذاشت. فرمهای دیفرانسیلی به جبر نیز راه پیدا کردند اما تا جایی که این مؤلف به خاطر دارد قضیه استوکس فرمولبندی هندسی خود را حفظ کرد وبه زبان کاملا جبری فرمول بندی نشد. اخیراً گودویل موفق شد بسط تیلور را برای رسته ها فرمولبندی کند که منجر به مفهوم برج تیلور شد. پیش از گودویل، علی بجروانی نیز تلاشهای در جهت تعریف مفهوم مشتق در نظریه رسته ها به انجام رساند. مهمترین کاربرد مفهوم مشتق کاربرد آن در فرمولبندی معادلات دیفرانسیل و مدلسازی پدیده های طبیعی توسط حل -معادلات دیفرانسیل بود که به آن خواهیم پرداخت.

۸- حل مسئله معادلات دیفرانسیل و نظریه سیستم های دینامیکی

دو نظریه حل کمّی معادلات دیفرانسیل و بررسی کیفی معالات دیفرانسیل موجودند که یکی شاخه ای از آنالیز و دیگری شاخه ای از هندسه است وسیستم ها دینامیکی نام گرفته است. قرن هفدهم به بعد به خصوص با تحقیقات اویلر شاخه حل کمی معادلات دیفرانسیل و حل عددی معادلات دیفرانسیل اهمیت پیدا کرد اما بررسی کیفی معادلات دیفرانسیل و مطالعه سیستم های دینامیکی حقیقی و مختلط علمی مدرن است و در نیمه دوم قرن بیستم شکوفا شد. مدرسه اسمیل در برکلی و مدرسه پلیس در ایمپا و مدرسه شهشهانی درشریف و مدرسه میلنور در نیویورک و مدرسه یوکوز در پاریس هر کدام دستاوردهای مهمی در مطالعه سیستم های دینامیکی حقیقی یا مختلط داشتند. هنوز هم هر دوی این شاخه های کمی و کیفی زنده هستند وبه بررسی پدیده های طبیعی کمک می کنند. روشهای آنالیز تابعی در حل معادلات دیفرانسیل کمک کردند وسرانجام به حل معادلات دیفرانسیل تصادفی منجر شدند که کاربردهای فراوانی در اقتصاد ریاضی و ریاضیات مالی داشتند. کاربردهای معادلات دیفرانسیل در فیزیک و

بیولوژی و پزشکی و مهندسی مکانیک و مهندسی برق ومهندسی عمران مرزهای دانش بشری و تکنولوژی را به پیش راندند و به ایفای این نقش ادامه می دهند. شاید بتوان گفت کمتر شاخه ای مانند حل معادلات دیفرانسیل زندگی بشر را دگرگون کرده است و متحول ساخته . عصر کامپیوتر وعصر اطلاعات مدیون خدمات معادلات دیفرانسیل به تکنولوژی است. کامپیوتر به نوبه خود در حل عددی معادلات دیفرانسیل بسیار تاثیر گذار بود. معادلاتی که حل آنها در طاقت محاسبه بشر نبود. این سئوال پیش پاست که به جز حل عددی معادلات و تلاش برای اثبات توسط کامپیوتر ، ظهور کامپیوتر چه تاثیری در روند رشد ریاضی گذاشته است. باید گفت که کامپیوتر دو شاخه از ریاضیات یا دو نگاه به ریاضیات را بسیار مهم کرد. یکی ریاضیات ساختنی چرا که تنها ریاضیات ساختنی قابل ارائه به کامپیوتر بود و دیگری ریاضیات محاسباتی. چرا که فرم افزارهای فراوانی معرفی شدند که می توانستند مانند بشر محاسبات طاقت فرسای ریاضی را انجام دهند. بسیاری از ریاضیدانان عصر جدید اگر به مسئله ای علاقه مند شوند اول آن را برای کامپیوتر فرمولبندی می کنند و اگر کامپیوتر نتوانست آن مسائل را حل کند خود برای حل آن تلاش می کنند.

۹- مسئله رسم توسط خط کش و پرگار و ریاضیات ساختنی

رسم توسط خط کش و پرگار و سایر ابزارهای رسم شکل از ابتدا در ریاضیات یونان معمول بوده است. رسم شکل توسط خط کش و پرگار در کتاب اقلیدس مورد تأکید و اقلیدس به این روش تأکید می کرد که اشکال قضایای این کتاب همه وجود دارند و چون قابل رسم و قابل ساختن هستند. فلسفه ریاضیات ساختنی توسط براوئر در اوایل قرن بیستم پایه ریزی شد . اما باظهور عصر کامپیوتر توجه به ریاضیات ساختنی اعتلا یافت. مسئله رسم توسط خط کش و پرگار با اثبات رسم ناپذیری تثلیث زاویه توسط نظریه گالوا پایان یافت اما ایده ریاضیات ساختنی تا به امروز زنده و پایدار مانده است. دلیل اینکه ریاضیات ساختنی و ریاضیات محاسباتی را یک چیز نمی گیریم این است که ریاضیات ساختنی در چارچوب دقت ریاضی اقلیدسی باقی ماند و از زیر چتر ریاضیات بیرون نرفت. اما ریاضیات محاسباتی از طریق فیزیک مسیرهای را طی کرد که از چارچوب دقت ریاضی خارج شد. بسیاری از تحقیقات فیزیک –ریاضی در اواخر قرن بیستم به بعد با تلاشهای عطیه و پیروانش به ریاضیات دقیق پیوستند، اما هنوز سنت ریاضیات محاسباتی نادقیق در فیزیک و در ریاضیات کاربردی زنده ماند است. این منجر به جدا شدن راه ریاضیات محض و کاربردی از هم شده است. اما این مربوط به ریاضیات محاسباتی است که به آن خواهیم پرداخت. تاجایی که به ریاضیات ساختنی مربوط می شود ریاضیات کاربردی خودرا محدود به ریاضیات ساختنی کرد. چون کامپیوتر ابزاری جایگزین ناپذیر برای محاسبات در ریاضیات کاربردی بود. این اتفاق در فیزیک نیافتاد. فیزیکدانان هنوز تلاش می کنند با محاسبات خلاقانه اما آگاهی نادقیق ویا شهودی پدیده های طبیعی را مدلسازی کنند و مطالعه مبانی دقیق ریاضی این محاسبات را به ریاضیدانان بسپارند. اما این بدان معنی نیست که جنبش ریاضیات محاسباتی را محدود به محاسبات شهودی و نا دقیق فیزیکدانان بدانیم. جنبش ریاضیات محاسباتی جنبشی است که در تلاشهای خوارزمی و در تفکرات الگوریتمی و فرمولبندی علم جبر باز می گردد. اوج تلاشها در ریاضیات محاسباتی تلاش برای حل معادلات جبری توسط رادیکالهاست که شکوفایی آن در قرن هفدهم بوده است.

۱۰- مسئله حل پذیری معادلات توسط رادیکالها و ریاضیات محاسباتی

این ایده که با محاسبات جبری مسائل ریاضی را حل کنیم توسط دکارت پیش رو گذاشته شد ولی پیش از او خوارزمی مقدمات آن را فراهم آورده بود پس از دکارت نزد نیوتن و لایبنیتز این ایدهٔ ریاضیات محاسباتی به حداکثر شکوفایی رسید و در قرن هفدهم حل پذیری معادلات درجه سوم و چهارم توسط رادیکالها نیز کامل شد. توسعه مکانیک و به طور کلی حل معادلات دیفرانسیل در فرن هجدهم مهمترین سرفصلهای ریاضیات محاسباتی را تشکیل می داد و در قرن نوزدهم نظریه جبری اعداد، نظریه رویه های ریمانی ، نظریه هندسه دیفرانسیل، نظریه گالوا، و بسیاری شاخه های دیگر ریاضی مانند آنالیز حقیقی و مختلط ،آنالیز تابعی و

آنالیز فوریه به حوزه ریاضیات محاسباتی افزوده شدند. نمی توان گفت که در قرن بیستم ریاضیات محاسباتی دچار انقلابی شد. اما محور توسعه ریاضیات در قرن بیستم ریاضیات محاسباتی بود. سرانجام مسئله ریاضیات محاسباتی در اواخر قرن بیستم به هوش مصنوعی ارائه شد. بسیاری از محاسبات امروزه توسط نرم افزارهای محاسباتی به انجام می رسند و وجود این نرم افزارها صحنه انجام دادن ریاضی را متحول کرده اند. جای پای کامپیوتر در بسیاری از مقالات ریاضی در اوایل قرن بیست ویکم هویداست وبه زودی فراگیر خواهد شد. از کالنسیویچ ریاضیدان روسی شنیدم که وقتی با مسئله جدیدی روبه رو می شود ابتدا آن را برای محاسبه به کامپیوتر عرضه می کند. اگر کامپیوتر نتوانست آن محاسبات را به انجام برساند آن گاه آن مسئله را برای تحقیق می پسندد ودرگیر حل آن می شود. او مسائلی را که قابل حل توسط کامپیوتر هستند ساده می پندارد وشایسته حمله ذهن ریاضی خود نمی داند. نکته ای که پیش از این به آن اشاره شد محاسبات ریاضی است که توسط فیزیکدانان انجام می شود که از دقت تام ریاضی برخوردار نیستند. این سنت وارد ریاضیات کاربردی هم شده است. اما هنوز ریاضیات محض زیر سایهٔ استاندارد های محکم اقلیدس به حیات خود ادامه می دهد. این ایده که برای مثالی خاص ناورداها را محاسبه کنیم و یا صورت دقیق تر از یک قضیه در حالاتی خاص که قابل محاسبه هستند بدست دهیم و یا یک مسئله را قابل ارائه به کامپیوتر نماییم قسمتی از جریان تحقیقات ریاضی روز است و هسته اصلی ریاضیات محاسباتی را تشکیل می دهد. مسئله ریاضیات محاسباتی اگر چه در زبان خوارزمی متولدشد.اما امروز هم زنده است و به حیات خود ادامه می دهد.

۱۱- مسئله خمهای بیضوی ونقاط صحیح و گویای آنها

معادلات دیوفانتی از زمان دیوفانتوس در یونان باستان مطرح بودند ولی مهمترین مثالهای خمهای بیضوی در معادلات دیوفانتی که توسط فرما مطرح شدند مورد مطالعه قرار گرفتند. در زمان فرما ساختار گروهی خمهای بیضوی کشف نشده بود و تا ۲۰۰ سال بعد رازآمیز باقی ماند. تا اینکه آبل این ساختار گروهی را برای نقاط حقیقی و نقاط مختلط خمهای بیضوی کشف کرد و در واقع آن وقت بود که اهمیت مثالهای فرما روشن شدند.حدس پوانکاره که ادعا می کرد گروه نقاط گویای خم های بیضوی تعریف شده روی میدان اعداد گویا متناهیا تولید شده است چندین دهه ریاضیدانان را مشغول خود کرد و منجر به ظهور نظریه ارتفاع در نظریه اعداد گردید. نظریه خم های بیضوی امروزه شاخه ای مستقل از نظریه جبری اعداد و هندسه حسابی را تشکیل می دهد که با توجه به نظریه ارتفاع و L- تابعهای وابسته به خمهای بیضوی و نظریه فرمهای مدولار شاید بتوان گفت که چهار گوشه عالم ریاضی را در بر می گیرد و یابه آنها سرک می کشند. نظریه خمهای بیضوی در ابعاد بالا به نظریه واریته های آبلی تعمیم می یابد و می توان گفت تمام ابعداد نظریه خمهای بیضوی به ریاضیات ابعاد بالاتر تعمیم می یابند. تولد مسئله خمهای بیضوی را باید قرن شانزدهم و در دستان فرما دانست اما این مسئله هنوز زنده و شکوفاست. بلکه مرزهای رشته نظریه جبری اعداد با این نظریه مرتبط هستند.از مهمترین اتفاقات در این رشته حل معادله دیوفانتی فرما توسط اندرو وایلز و اثبات اینکه هر خم بیضوی روی اعداد گویا از فرمهای پیمانه ای می آید توسط وایلز و شاگردانش است. تعمیم این نظریه به ابعاد بالا هنوز در دستور کار است شاید جای مناسبی باشد که به این نکته اشاره کنیم که خمهای بیضوی به خاطر ساختار گروهی روی آنها جزو ریاضیات سهموی محسوب می شوند. به خصوص که فضای پوششی آنها صفحه اعداد مختلط است. لذا نام خمهای سهموی بسیار مناسب تر از خمهای بیضوی برای این شاخه از ریاضیات می نماید. درباب اینکه کدامیک از شاخه های ریاضی بیضوی، سهموی یا هذلولوی تلقی شوند مقالاتی پیش از این نگاشته ایم. ساختارهای جبری و گروهی همه در ریاضیات سهموی قرار می گیرند. کرات در ریاضیات بیضوی و ساختارهای هذلولوی که خاصیت تناهی از خود نشان می دهند در زمره ریاضیات هذلولوی قرار می گیرند.

۱۲- مسئله تعمیم اعداد مختلط به عنوان تعمیمی برای اعداد حقیقی

اعداد مختلط اولین بار درقرن هفدهم به کار رفتند اما در قرن نوزدهم به خاطر قضیه اساسی جبر و مطالعه نظریه اعداد حلقه اعداد مختلط با ضرایب صحیح رسما اعداد مختلط به عنوان یک میدان در کنار میدان اعداد حقیقی مورد مطالعه قرار گرفتند و مسئله ترجمه و توسعه ریاضیات جبری اعداد حقیقی به اعداد مختلط در دستور کار قرار گرفت. هندسه جبری مختلط توسط آبل و آنالیز مختلط توسط کوشی و ریمان فرمولبندی شدند. فضاهای خطی روی میدان اعداد مختلط و گروههای خطی مختلط توسط جردن در اولین کتاب جبرمدرن در قرن نوزدهم معرفی شدند. فضاهای هیلبرت که در آنالیز تابعی به کار رفتند و هم برای مکانیک کوانتم مفید واقع شدند بسیار در مدلسازی ریاضی پدیده های طبیعی کارآمد بودند.هرگز جواب قانع کننده ای برای این که چرا باید اعداد مختلط به طور طبیعی در مدلهای ریاضی که برای پدیده های طبیعی مطرح می شوند ظاهر شوند به دست این نگارنده نرسید. در قرن بیستم مفهوم میدانهای بسته جبری کامل معرفی شدند نظریه گالوا براساس نظریه میدانهای موضعی و سرتاسری فرمولبندی شد و اعداد مختلط به طور جدی در نظریه جبری اعداد وارد شدند. این کار توسط هادامارد به انجام رسید. هنوز بسیاری از شاخه های ریاضی که در چارچوب اعداد حقیقی مطرح می شوند مشابه مختلط پیدا نکرده اند. برای مثال نظریه همسانی مختلطی تا به حال ندیده ام. قضیه ای در منطق توجه مرا جلب کرده وآن اینکه اگر حکم درجه اولی برای تمام میدانهای متناهی به جز چند میدان برقرار باشد آنگاه این حکم برای اعداد مختلط نیز برقرار خواهد بود. قضیه دیگر که جلب توجه می کند نشاندن های بستار اعداد گویای p- نقش است که در اعداد مختلط می نشینند و نرم این تصویر در حل حدسهای ویل برای یک نظریه همانندی برای واریته های جبری وارد می شوند که بسیار شگفت انگیز است. مسئله ترجمه ریاضیات حقیقی به ریاضیات مختلط هنوز زنده است و مشابه مختلط بسیاری از پدیده های حقیقی هنوز در دست بررسی هستند. اگرچه این مسئله در قرن نوزدهم متولد شده ولی توسعه آن هنوز ادامه دارد. هامیلتون میدان کج اعداد چارگان را درقرن نوزدهم تعریف کرد که اگرچه ناجابه جایی است ولی بسیاری از ابعاد اعداد مختلط را در خود تعمیم می دهد . توسعه ریاضیات مختلط به اعداد چارگان در بسیاری از شاخه های ریاضی با موانع جبری روبه روست.

۱۳- مسئله ارائه مدلی برای فضا

مسئله مدل ریاضی برای فضا از بدو تاریخ ریاضیات در دستور کار بوده و هنوز هم مورد مطالعه است. پیش از بطلمیوس، مدل ائودکسوس که بر کرات سوار برهم استوار شده بود حرکت اجرام سماوی را مورد مطالعه قرار می داد. مدل بطلمیوس و مدل ائودکسوس هر دو مدلهایی برای فضا بودند تا اینکه دکارت اصل حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت را مطرح کرد و فضای آفین حقیقی را به مدلی برای فضا تبدیل کرد. این مدل توسط نیوتن به کار رفت و حتی فضا زمان چهاربعدی توسعه یافت و توسط کانت برای نگرش جدیدی به خورشید و ستارگان توسعه داده شد. تا اینکه انیشتن در نسبیت خاص خود مفاهیم فضا و زمان را در هم تنید. پیش از انیشتن تلاشهایی توسط ریمان و دیگران برای مدلهای یک خمینه که بتواند مدلی برای فیزیک باشد صورت گرفته بود اما انیشتن در نسبیت خاص و نسبیت عام خود مفهوم دگردیسی متریک روی فضا را مطرح کرد که هشتاد سال بعد توسط هامیلتون وارد ریاضیات گردید. مسئله دگردیسی متریک در نهایت منجر به حل حدس پوانکاره و بیشتر از آن حدس ترستون برای ساختار خمینه های سه بعدی شد. مفهوم دگردیسی فضا همچنین منجر به شکل گیری و فرمولبندی فضاهای مدولی شد که البته پیش از مسئله دگردیسی فضا در مثالهای ساده ای فرمولبندی شده بود. مسئله دگردیسی فرمال فضاهای هندسی توسط هندسه های ناجابه جایی و یا ساختارهای ناجابجایی نیز می تواند تلاشی در جهت مسئله مدلی برای فضا تصور شود. اما مکانیک کوانتوم این خط سیر را کاملا دگرگون کرد و به سمت نظریه میدانهای کوانتومی برد که در آن فضا و زمان فرمولبندی کاملا متفاوتی از

فرمولبندیهای کلاسیک فیزیک دارند. بسیار سعی شد که مدلهای انیشتن و کوانتوم در کنار هم جمع شوند، اما یک مشکل فلسفی عمده برای این کار مفهوم نقطه به عنوان زیر شئی کمینه فضای هندسی بود که در فضای دکارتی وجود داشت ولی در مکانیک کوانتوم مشکل ساز بود. فون نویمان تلاش کرد نظریه ای به نام هندسه های پیوسته بوجود آورد که در آن با چنین موجودات کوانتومی به طور هندسی برخورد شود. اما این نظریه با اقبال عمومی روبه رو نشد و پس از جنگ جهانی فون نویمان و دیگران به آن نپرداختند. از وفا شنیدیم که می گفت به خاطر تقارن معادلات ماکسول نسبت به بی نهایت های کوچک و بی نهایت بزرگ فیزیکدانان علاقه مندند مدلهایی از فضا ارائه کنند که در آن انبساط از حدی بیشتر معادل انقباض باشد.

۱۴- مسئله توپولوژی و مفهوم نزدیکی

مسئله فضای توپولوژیک و توپولوژی نقاط یک طرف و تعمیم مفهوم پیوستگی ومسئله نظریه همانندی از طرف دیگر انقلابی مفهومی در شکل هندسی و فضای هندسی به وجود آوردند. البته به سختی می توان گفت این نگاه چندان با فیزیک درآمیخت اما نظریه اندازه به طور جدی با مفهوم توپولوژی درگیر شد. اینکه در هر مسئله توپولوژی و مفهومی از نزدیکی حالتهای سیستم را تعریف کنیم در بسیاری از شاخه های ریاضیات کارآمد شد. ازجمله کاربردهایی که می توان نام برد توپولوژی متمم متناهی روی اعداد صحیح و توپولوژی زاریسکی روی واریته های جبری است. مفهوم توپولوژی توسط گروتندیک به مفهوم سایت تعمیم پیدا کرد که منجر به تعریف گروههای پادهمانندی مانند گروه پادهمانندی تخت شد که رویای آندره ویل را به حقیقت رساند. توپولوژی طبیعی روی فضاهای مدولی نیز کاربرد دیگر مفهوم توپولوژی است. از جمله توپولوژی روی فضای مدولی و مسئله فشرده سازی فضاهای مدولی همه ریشه در توپولوژی دارد.مفهوم فشردگی در حسابان و بسیاری از شاخه های آنالیز به طور جدی وارد شد. قضیه تیخونوف و فشردگی حاصلضرب فضاهای فشرده با توپولوژی حاصلضرب و ارتباط آن با اصل انتخاب از کاربردهای مهم فشردگی در ریاضیات است. مفهوم اعداد p- نقش و نقش آنها در نظریه اعداد آنقدر مهم است که در بخشی جداگانه به آن خواهیم پرداخت. نظریه اندازه و انتگرال روی فضاهای توپولوژیک در نظریه اعداد و در نظریه احتمال انقلابی به پا کرد. نظریه نمایشهای نامتناهی البعد و نظریه فرمهای مدولار ونظریه نمایشهای گالوایی ونظریه گروههای پاد متناهی همه بر پایه توپولوژی و یک مفهوم نزدیکی که لزوماً از اعداد حقیقی نمی آید بنا شده اند. فضاهای نامتنهای البعد بدون مفهوم توپولوژی تقریبا غیر قابل دسترسی هستند. مهم تر از همه آنها مفهوم فضای هیلبرت است که به عنوان مدلی ریاضی برای نظریه کوانتوم نیز بسیار کارآمد بود. کاربردهای فضای هیلبرت در شاخه های مختلف آنالیز فراوانند. با اینکه ایده نزدیکی در فضای هیلبرت از نرم می آید که یک مفهوم مختلط و مرتبط با اعداد حقیقی است با این حال فکر می کنم که کار با فضاهای نامتناهی البعد بدون فرمولبندی توپولوژی نقاط ممکن الوصول نبود.

۱۵- مسئله فضای هیلبرت و ریاضیات بی نهایت بعدی

فضای هیلبرت باتوجه به مفهوم نرم و عمود بودن وکامل بودن سعی دارد تمام مفاهیم فضای اقلیدسی را به فضاهای نامتناهی البعد تعمیم دهد. به خصوص فیزیک و حسابان روی فضای هیلبرت قابل فرمولبندی هستند. معمولا مفهوم فضاهای هیلبرت روی فضاهای تابعی بی نهایت بعدی به کار می روند. کاربردهای دیگر فضای هیلبرت در معادلات دیفرانسیل پاره ای، مکانیک کوانتوم، آنالیز فوریه و نظریه ارگودیک دیده می شوند. آنالیز تابعی با کمک ایده فضای هیلبرت منقلب شد. فضای توابع انتگرالپذیر مربعی ، فضای دنباله ها، همه تحت سایه مفهوم فضای هیلبرت که توسط فون نویمان نامگذاری شد. شهود هندسی نقش مهمی در کار با فضای هیلبرت ایفا می کنند. مشابه قضیه فیثاغورس و قانون متوازی الاضلاع در فضای هیلبرت برقرارند. تصویر کردن متعامد بریک زیر فضا نقش مهمی در نظریه بهینه سازی ایفا می کند. مفهوم مختصات برای یک نقطه ومفهوم محورهای مختصات در فضای

هیلبرت معنی دارند و وقتی چنین پایه ای شماراست می توان فضای هیلبرت را برحسب دنباله هایی که مجموع مربعی دارند بیان کرد. اپراتورهای خطی و مفهوم طیف نیز به طور کارآمدی در فضاهای هیلبرت تعمیم پیدا می کنند. اما کاربرد انجام فیزیک روی فضاهای بی نهایت بعدی چیست؟ همانطور که پیش از این توضیح دادیم فضای هیلبرت بستر را برای مطالعه فضایی که در آن نقطه وجود ندارد فراهم می کند. برای فرمولبندی مکانیک کوانتوم لازم بود ساختارهندسی معرفی شود که بی نهایت زیرساختار تودرتو داشته باشد.یک فضای برداری بی نهایت بعدی چنین ساختاری دارد. اما نمی توان روی آن حسابان انجام داد. اینجاست که مفهوم فضای هیلبرت بسیار کارآمدی خوبی از خود نشان می دهد. مشابه فضای هیلبرت یک فضای افکنشی که بی نهایت زیرفضای تودرتو در خود می پذیرد نیزمی تواند بسیار کارآمد باشد. فون نویمان هندسه های پیوسته را به عنوان چنین مدلی از فضای خرد و فیزیک خرد معرفی کرد. هنوز کسی مدلی نامتناهی بعدی برای فیزیک بی نهایت بزرگها که دوگان فیزیک بی نهایت کوچکها باشد ارائه نداده است. تقارنهای معادلات ماکسول چنین پیشنهادی می کنند که چنین کاری ممکن باشد.

۱۶- مسئله ریاضیات p- نقش

اعداد p- نقش در اواخر قرن نوزدهم توسط هنسل معرفی شدند ولی بیش از آن اشاره هایی به آن توسط کومر صورت گرفته بود. مفهوم نرم p- نقش و تکنیکهای سریهای توانی آن بسیار در نظریه اعداد کارآمد جلوه کردند. کامل بودن فضای اعداد گویایی p- نقش به ما اجازه می دهد که روی آنها حسابان انجام دهیم. نظریه توابع روی فضای p- نقش با مقادیر مختلف جزء مهمی از نظریه گروههای موضعاً فشرده است. اعداد p- نقش نقش مهمی در حل معادلات دیوفانتی و هم نظریه تقریب دیوفانتی ایفا کرده اند. قضیه ماهلر که مشابه قضیه تیلور را در اعداد p- نقش به دست می دهد قدمهای اولیه فرمولبندی حسابان و بعد انجام دادن فیزیک روی فضاهای p- نقش است. اعداد سرتاسری و فرمولبندی سرتاسری نظریه اعداد به خصوص نظریه فرمهای مدولار و نظریه میدانهای رده ای نقش مهمی در توسعه نظریه اعداد داشته اند. نمایشهای p- نقش گروه گالوا ابزارهای محاسباتی قدرتمندی در دستان استادم اندرو وایلز بودند که منجر به حل مسئله ۳۵۰ ساله آخرین قضیه فرما شدند. درک توپولوژی اعداد p- نقش به عنوان مدلی برای تغییر و حرکت پیوسته بسیار پیچیده است. تاکنون کسی نتوانسته اعدادp- نقش را به عنوان مدلی برای زمان به کار ببرد. اصل موضعی – سرتاسری هسه از مهمترین ابزارها برای درک بهتر اعداد p- نقش و هم برای کاربرد آنها است. فرمولبندی حدسهای لنگلندز بدون اعداد p- نقش غیرممکن می نماید. تا کنون هیچ مثالی از اثبات اینکه واریته های جبری مدولار هستند ارائه نشده است که از اعداد p- نقش استفاده نکرده باشد. از آنجا که $\mathbb{R}$ تنها کاملسازی اعداد گویا نیست فیزیکدانان بسیاری اعتقاد داند هر فیزیکی که بتواند توسط $\mathbb{R}$ مدل شود باید توسط اعداد p- نقش نیز مدلسازی شود و بسیاری از نظریات فیزیکی به طور موفقیت آمیزی فرمولبندی p- نقش دارند. مسئله توسعه ریاضیات p- نقش هنوز از مرتبه های ابتدایی خود قرار گرفته است. هرچند که ریچارد تیلور وشاگردانش در حوزه نظریه هاج p- نقش به موفقیتهای شایان توجهی دست پیدا کرده اند.

۱۷- ترکیبیات و ریاضیات کامپیوتر و گسسته سازی ریاضیات

ترکیبیات شاخه ای قدیمی نیست هرچند مفهوم گراف و مشخصه اویلر یک مثلث بندی در قرن هفدهم توسط اویلر مطرح شده بود. مسائل ریاضیات گسسته عموماً در قرن بیستم مطرح شدند و سرانجام ریاضیات گسسته به عنوان یک شاهراه موازی ریاضیات پیوسته مطرح شد به طوری که ریاضیدانان انتظار داشتند هر مسئله که با مدلهای پیوسته قابل حل است با مدلهای گسسته نیز قابل حل باشد و هر تئوری پیوسته مشابه گسسته داشته باشد. مهمترین دلیل برای این توازی روش های آنالیز عددی و بخصوص حالت خاص آن بسط تیلور گسسته و مشتق گسسته که به آن تفاضل متناهی گفته می شود که در قرن هفدهم توسط نیوتن و لایبنیتز ارائه شد. جالب اینجاست که اولین کسی که مشتق گسسته را معرفی کرد لایبنیتز و اولین کسی که بسط تیلور گسسته را

معرفی کرد نیوتن بود. یعنی چنین نبود که لایبنیتز فرمولبندی گسسته حسابان و نیوتن فرمولبندی پیوسته حسابان را شکل داده باشند. تا اواسط قرن بیستم در دانشگاهها فرمولبندی گسسته تدریس می شد چون فکر می کردند این فرمولبندی به کاربرد نزدیکتراست. امروز نیز روشهای آنالیز عددی توسط کامپیوتر استفاده می شوند. هرچند بسیاری ماشین حسابها نیز قادرند ریاضیات فرمال پیوسته را به انجام برسانند. علوم کامپیوتر تبدیل به سرچشمه ای برای مسائل و ایده ها برای ریاضیات گسسته شد و نظربه اهمیت هوش مصنوعی ترکیبیات که شاخه مهمی در ریاضیات پیشرفته محسوب نمی شد تبدیل به یکی از شاخه های مهم ریاضیات گردید. اما هنوز تا پیاده سازی این برنامه که ترکیبیات و ریاضیات گسسته به رود پرخروش موازی ریاضیات پیوسته تبدیل شود راه فراوان است.

۱۸- کلام آخر

مسائل متولد شده در قرن بیستم چنان فراوانند که مجال بررسی آنها در یک مقاله فراهم نمی شود. اما هیمن تاریخ ریاضیات تا قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم که به صورت مسئله محور بیان شد تا حد خود آشکار می کند که از دیدگاه ما نگاه مسئله محور به تاریخ ریاضی چگونه باید باشد. مسئله ها چون جریان های فکری هستند که در طول تاریخ ریاضیات مرتبط با هم را به هم می پیوندند. درکنار نگاه مسئله محور به تاریخ ریاضیات نگاه نظریه محور نیز مطرح می شود که در مقاله دیگری به آن خواهیم پرداخت. رویکردهای مسئله محور، نظریه محور، شناخت محور و حقیقت محور به تاریخ ریاضیات قابل تعمیم به نگاههایی به همین رویکردها به تاریخ تمدن می باشند.