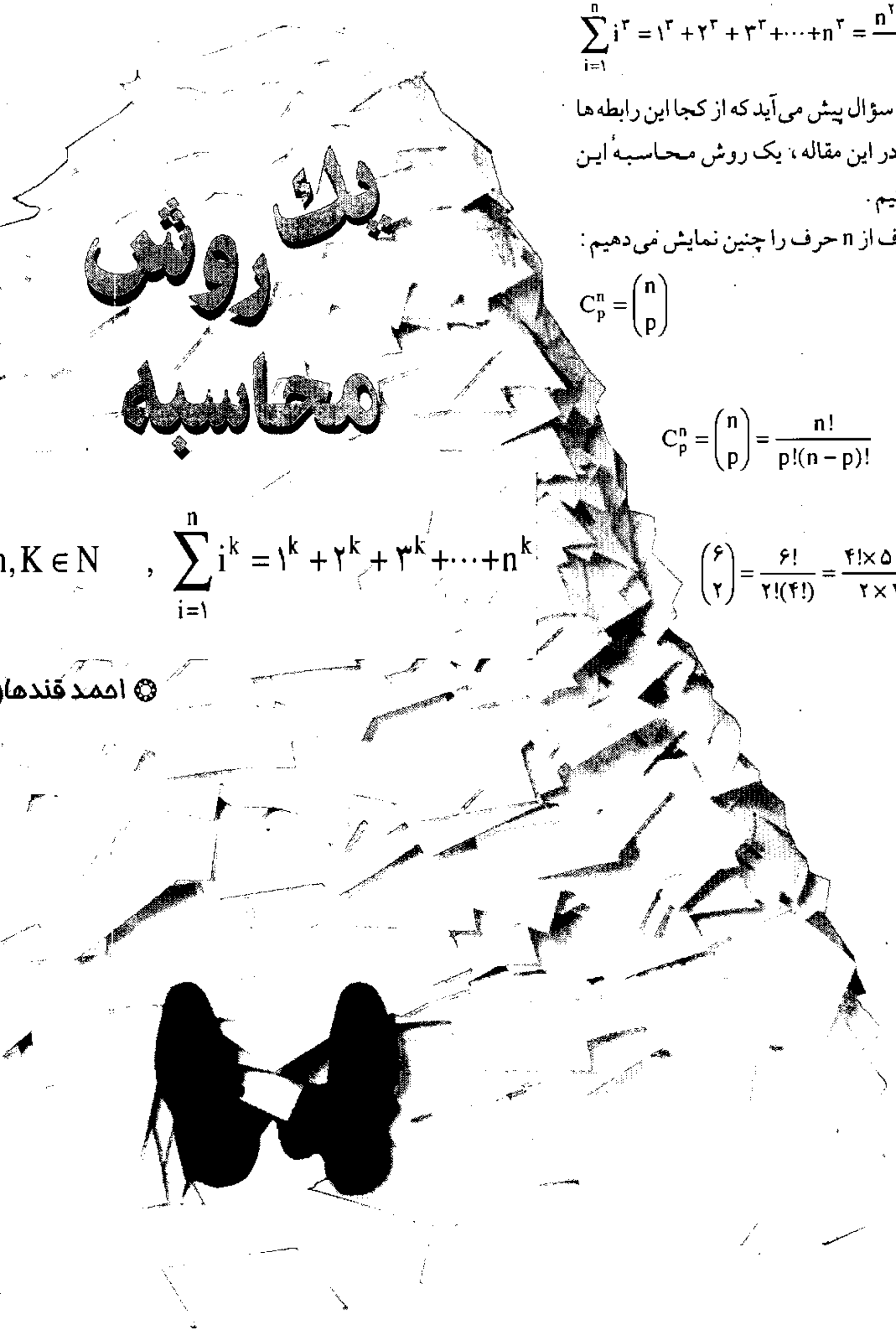
یک روش محاسبه

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k \quad , \quad n, K \in N$$

احمد قندها



در بسیاری از کتاب‌ها دیده می‌شود که می‌گویند: ثابت کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

که معمولاً به کمک استقرا ثابت می‌شود. همچنین می‌گویند: ثابت کنید

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

به طور مسلّم این سؤال پیش می‌آید که از کجا این رابطه‌ها به‌دست آمده است؟ در این مقاله، یک روش محاسبهٔ این رابطه‌ها را بیان می‌کنیم.

۱. ترکیب p حرف از n حرف را چنین نمایش می‌دهیم:

$$C_p^n = \binom{n}{p}$$

و داریم:

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

مثال:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(4!)} = \frac{4! \times 5 \times 6}{2 \times 4!} = \frac{30}{2} = 15$$

۲. به کمک اتحادها می‌توان، بسط $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ را به‌دست آورد.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ولی برای محاسبهٔ بسط $(a+b)^4$، $(a+b)^5$، $(a+b)^6$ از رابطه‌ای به‌نام بسط دو جمله‌ای نیوتن استفاده می‌کنیم.

۳. بسط دو جمله‌ای نیوتن: $(n \in N)$

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

مثال ۱.

$$(a+b)^4 = a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

مثال ۲.

$$(a+b)^5 = a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

می‌دانیم: $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

حال بسط دو جمله‌ای نیوتن را برای $(x+1)^k$ می‌نویسیم.

$n = k \in N \; , \; a = x \; , \; b = 1$

$$(x+1)^k = x^k + \binom{k}{1}x^{n-1} + \binom{k}{2}x^{k-2} + \binom{k}{3}x^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}x + 1$$

اگر در این رابطه به جای x، به طور مرتّب، اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ... و n را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$x=1: \; 2^k = 1^k + \binom{k}{1}1^{k-1} + \binom{k}{2}1^{k-2} + \binom{k}{3}1^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}1 + 1$$

$$x=2: \; 3^k = 2^k + \binom{k}{1}2^{k-1} + \binom{k}{2}2^{k-2} + \binom{k}{3}2^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}1 + 1$$

$$x=3: \; 4^k = 3^k + \binom{k}{1}3^{k-1} + \binom{k}{2}3^{k-2} + \binom{k}{3}3^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}3 + 1$$

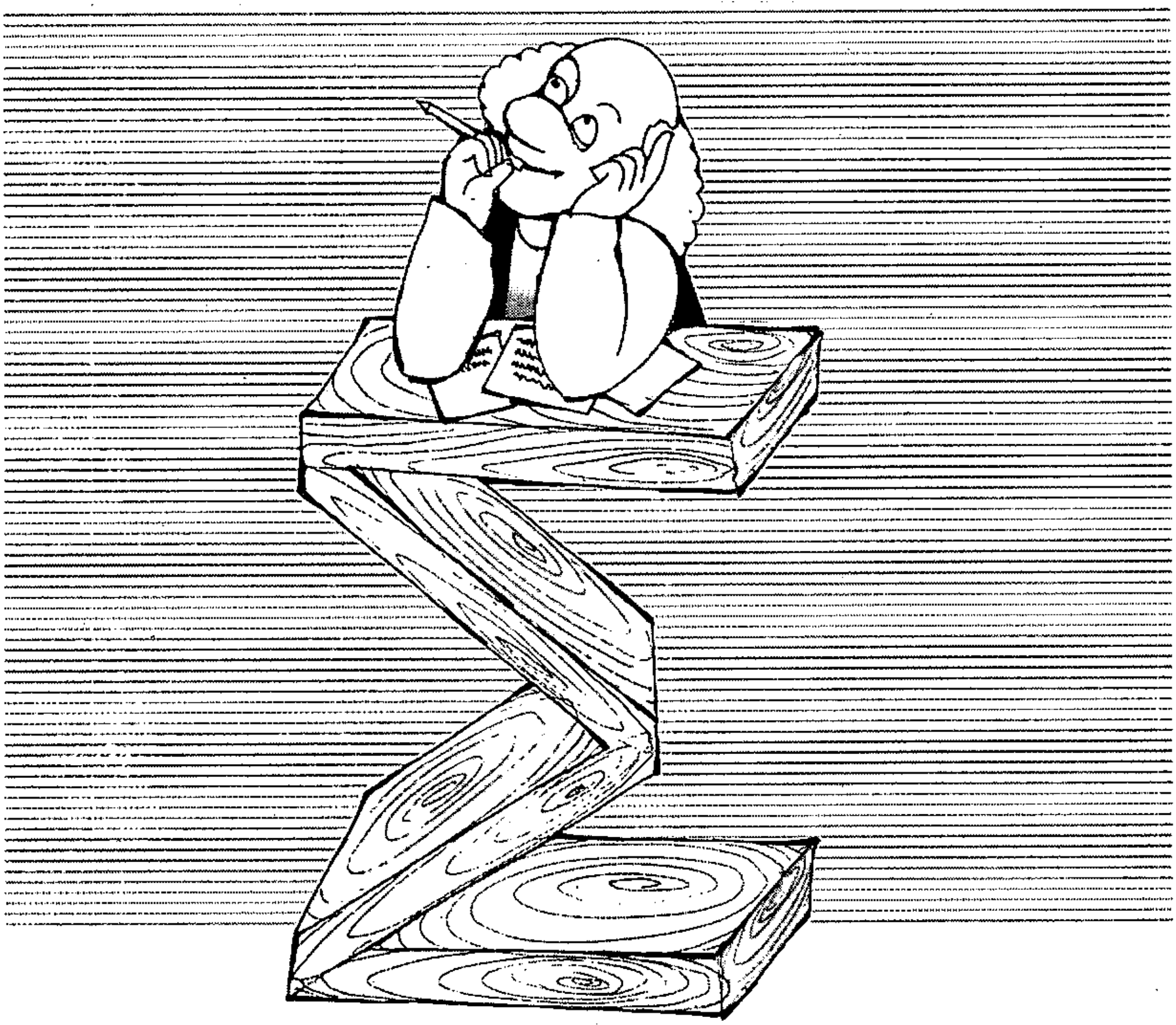
$$x=4: \; 5^k = 4^k + \binom{k}{1}4^{k-1} + \binom{k}{2}4^{k-2} + \binom{k}{3}4^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1}4 + 1$$

....

....

$$x=n: \; (n+1)^k = n^k + \binom{k}{1}n^{k-1} + \binom{k}{2}n^{k-2} + \binom{k}{3}n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-1}n + 1$$

حال این رابطه‌ها را نظیر به نظیر با هم جمع می‌کنیم و عوامل مساوی را از دو طرف حذف می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:



$$(n+1)^k = \binom{k}{1}\left(1^{k-1}+2^{k-1}+3^{k-1}+\cdots+n^{k-1}\right)$$
$$+\binom{k}{2}\left(1^{k-2}+2^{k-2}+3^{k-2}+\cdots+n^{k-2}\right)$$
$$+\binom{k}{3}\left(1^{k-3}+2^{k-3}+3^{k-3}+\cdots+n^{k-3}\right)$$
$$+\cdots+\binom{k}{k-1}(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)$$

در نتیجه:

$$(n+1)^k = \binom{k}{1}\sum_{i=1}^{n} i^{k-1} + \binom{k}{2}\sum_{i=1}^{n} i^{k-2} + \binom{k}{3}\sum_{i=1}^{n} i^{k-3}$$
$$+\cdots+\binom{k}{k-1}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \qquad \text{رابطهٔ (۱)}$$

حال به کمک رابطهٔ (۱) $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^3$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^4$ را محاسبه می‌کنیم.

الف) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k، عدد ۳ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^3 = \binom{3}{1}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{3}{2}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^3 = 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - 3\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \Rightarrow$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1)$$

$$= (n+1)(n^2 + 2n + 1 - \frac{3}{2}n - 1)$$

$$\Rightarrow 3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n+1}{2}(2n^2 + n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

ب) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k، عدد ۴ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^4 = \binom{4}{1}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \binom{4}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{4}{3}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^4 = 4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\sum_{i=1}^{n} i^2 + 4\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - 6\sum_{i=1}^{n} i^2 - 4\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \Rightarrow$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)$$

$$\Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n} i^3 = (n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)$$

$$= (n+1)(n^3 + n^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2 \Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}$$

ج) محاسبهٔ $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4$

اگر در رابطهٔ (۱) به جای k عدد ۵ را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(n+1)^5 = \binom{5}{1}\sum_{i=1}^{n} i^4 + \binom{5}{2}\sum_{i=1}^{n} i^3 + \binom{5}{3}\sum_{i=1}^{n} i^2 + \binom{5}{4}\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$

$$(n+1)^5 = 5\sum_{i=1}^{n} i^4 + 10\sum_{i=1}^{n} i^3 + 10\sum_{i=1}^{n} i^2 + 5\sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \Rightarrow$$

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)^5 - 10\sum_{i=1}^{n} i^3 - 10\sum_{i=1}^{n} i^2 - 5\sum_{i=1}^{n} i - (n+1) \Rightarrow$$

$$5\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)^5 - \frac{5}{2}n^2(n+1)^2 - \frac{5}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{5}{2}n(n+1) - (n+1) \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = 6(n+1)^5 - 15n^2(n+1)^2 - 10n(n+1)(2n+1) - 15n(n+1) - 6(n+1) \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\left[6(n+1)^4 - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\times \left[6(n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) - 15n^2(n+1) - 10n(2n+1) - 15n - 6\right] \Rightarrow$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\times \left[6n^4 + 24n^3 + 36n^2 + 24n + 6 - 15n^3 - 15n^2 - 20n^2 - 10n - 15n - 6\right]$$

$$30\sum_{i=1}^{n} i^4 = (n+1)\left[6n^4 + 9n^3 + n^2 - n\right]$$

$$= n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1) \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}}$$

به همین روش می‌توان $\sum_{i=1}^{n} i^5$ و $\sum_{i=1}^{n} i^6$ و ... را محاسبه کرد.