گراف‌ها و کاربردهای آن

قسمت دوم

برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش دانشگاهی رشتهٔ ریاضی

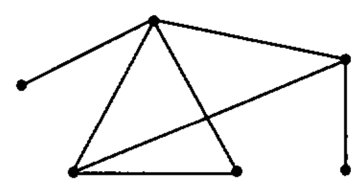
سهراب شریف‌زاده

دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف

در گراف G با p رأس که $\deg v_i = d_i$، دنبالهٔ ناصعودی (نزولی) «$d_1, d_2, d_3, \ldots, d_p$» را دنبالهٔ درجات رئوس گراف G یا دنباله گرافی G می‌نامیم که:

$$p-1 \ge d_1 \ge d_2 \ge \cdots \ge d_p \ge 0$$

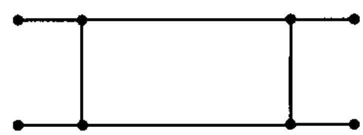
مثال: گراف G به صورت زیر است، دنبالهٔ گرافی G را بنویسید.



حل: چون دنبالهٔ گرافی، یک دنبالهٔ ناصعودی (نزولی) بر حسب درجات رأس‌هاست، پس دنباله گراف G به صورت زیر است: «۱ , ۱ , ۲ , ۳ , ۳ , ۴»

مثال: به دنبالهٔ درجات «۱ , ۱ , ۱ , ۱ , ۳ , ۳ , ۳ , ۳» یک گراف نسبت دهید.

حل:



نکتهٔ ۱: مجموع جملات دنباله، عددی زوج (دو برابر تعداد یال‌های گراف) است.

نکتهٔ ۲: تعداد درجات رأس‌های فرد (جملات فرد) در هر دنبالهٔ گرافی زوج است.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۵ , ۶ , ۶ , ۶ , ۷» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، تعداد رأس‌های با درجهٔ فرد، عددی فرد است.

نکتهٔ ۳: در گراف p رأسی، حداقل دو رأس با درجهٔ یکسان وجود دارد ($p \ge 2$).

نکتهٔ ۴: دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف، همگی نمی‌توانند متمایز باشند.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶ , ۷» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر. زیرا دنبالهٔ درجات همگی متمایزند و حداقل دارای دو درجهٔ یکسان نیستند، پس نمی‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌ها باشد.

سؤال: اگر در گرافی $\Delta = 4$ و $\delta = 1$، آیا در این گراف دنبالهٔ درجات رأس‌ها می‌توانند متمایز باشند؟

پاسخ: خیر، زیرا از آن‌جایی که $\Delta = ۴$، یعنی حداقل ۵ رأس داریم، و درجهٔ هر رأس فقط یکی از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ می‌تواند باشد و چون تعداد رأس‌ها از تعداد درجات بیش‌تر است، پس بنابر اصل «لانهٔ کبوتری» یقیناً چنین گرافی حداقل دو رأس از درجهٔ یکسان خواهد داشت.

آزمون ۱۳: دنبالهٔ «$\alpha+۱, \alpha+۲, \alpha+۳, \alpha+۴, \alpha+۵$» به ازای چه مقداری از α دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف است؟

۱) صفر　　۲) هیچ مقدار

۳) ۲　　۴) هر مقدار طبیعی α

حل: گزینهٔ (۲). چون درجات رأس‌ها نمی‌توانند متمایز باشند، پس هیچ مقداری برای α وجود ندارد که دنبالهٔ مزبور، دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد.

نکتهٔ ۵: گرافی که دو رأس از درجهٔ $(p-۱)$ دارد، رأس درجهٔ یک ندارد.

نکتهٔ ۶: گرافی که یک رأس از درجهٔ $(p-۱)$ دارد، رأس درجهٔ صفر ندارد.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۰، ۲، ۳، ۳، ۳، ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، اگر گراف از مرتبهٔ ۶ دارای رأس از درجهٔ ۵ باشد، رأس درجهٔ صفر نخواهد داشت؛ زیرا رأس درجهٔ ۵ با بقیهٔ رأس‌ها مجاور است.

نکتهٔ ۷: در گراف از مرتبه p، رأس درجهٔ p وجود ندارد.

آزمون ۱۴: دنبالهٔ درجه‌های رأس‌های یک گراف به صورت «a,a,a,a,a,a» است. a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

۱) ۰　　۲) ۱

۳) ۵　　۴) ۶

حل: گزینهٔ (۴). زیرا گراف از مرتبهٔ ۶ دارای رأس از درجه ۶ نیست.

سؤال: آیا دنبالهٔ «۱، ۲، ۴، ۴، ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، زیرا تعداد جملات دنباله برابر ۵ است و هر گراف از مرتبهٔ ۵ دارای رأس درجهٔ ۵ نیست.

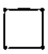
نکتهٔ ۸: در گراف با p رأس، ماکزیمم درجه در صورت وجود برابر $p-۱$ است.

نکتهٔ ۹: در گراف با p رأس که k رأس درجهٔ $(p-۱)$ دارد، آن‌گاه $\delta \geq k$ $(k < p-۱)$

سؤال: آیا دنبالهٔ «۳، ۳، ۵، ۵، ۵، ۵، ۵» می‌تواند دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف باشد؟

پاسخ: خیر، چون دنبالهٔ مزبور ۴ رأس درجهٔ ۵ دارد. پس باید $\delta \geq ۴$، که داریم: $\delta = ۳$.

نکتهٔ ۱۰: تعداد رأس‌های زوج در هر گراف ممکن است عددی زوج یا عددی فرد باشد.

مثال: در گراف  تعداد رأس‌های زوج، عددی زوج و در گراف  تعداد رئوس زوج، عددی فرد است.

آزمون ۱۵: کدام دنباله، دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف ساده نیست؟

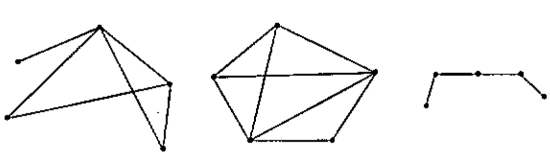
۱) «۱، ۲، ۲، ۳، ۴»

۲) «۰، ۱، ۲، ۳، ۴»

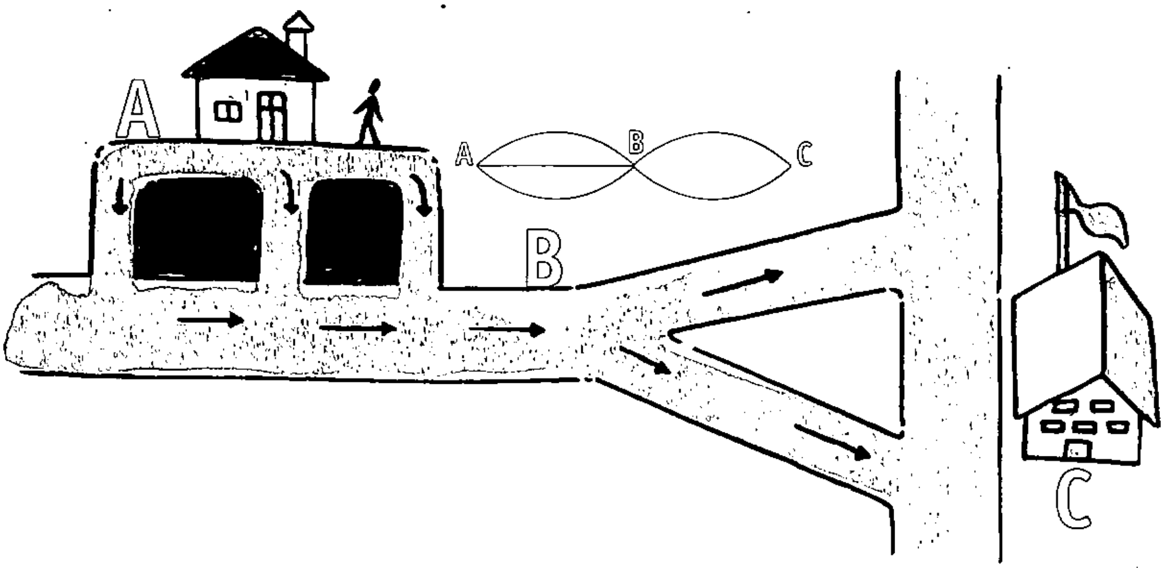
۳) «۲، ۳، ۳، ۴، ۴»

۴) «۱، ۱، ۲، ۲، ۲»

حل: گزینهٔ (۲). اگر گراف مرتبهٔ ۵ دارای رأس درجهٔ ۴ باشد، رأس درجهٔ صفر نباید داشته باشد. گراف‌های بقیهٔ دنباله‌ها به صورت زیر هستند.



(۱)　　(۳)　　(۴)



آزمون ۱۶ : کدامیک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف فرد است.

۲) تعداد رأس‌های فرد در هر گراف زوج است.

۳) تعداد رأس‌های زوج در هر گراف زوج است.

۴) تعداد رأس‌های فرد در هر گراف فرد است.

حل: گزینهٔ (۲)

آزمون ۱۷ : گراف G دارای ۳۰ یال است. این گراف سه رأس از درجهٔ ۲ و سه رأس از درجهٔ ۶ دارد و بقیهٔ رئوس از درجهٔ ۳ هستند. تعداد رأس‌های G کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۵

۳) ۱۶ ۴) ۱۸

حل: گزینهٔ (۴). فرض کنیم G دارای x رأس درجهٔ ۳ است، پس:

$$\sum \deg v_i = 2q \to (3\times 2)+(3\times 6)+(x\times 3)=2\times 30 \to$$
$$6+18+3x=60 \to 3x=36 \Rightarrow x=12$$

پس: $P=3+3+x=18$

آزمون ۱۸ : اگر a و b و c رأس‌هایی از گراف ساده $G=(V,E)$ از مرتبهٔ ۷ باشند و $\deg a=\deg b=\deg c=0$، آن‌گاه E حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۴ ۲) ۶

۳) ۸ ۴) ۵

حل: گزینهٔ (۲). چهار رأس باقی‌مانده، باعث به‌وجود آمدن یال می‌شوند. پس حداکثر تعداد یال‌های این گراف برابر است با: $\binom{4}{2}=6$.

سؤال: آیا در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات می‌توانند تصاعد حسابی تشکیل دهند؟ چرا؟

پاسخ: خیر، چون در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات رأس‌ها نمی‌توانند متمایز باشند.

تذکر ۱ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف زمانی می‌توانند، تشکیل یک تصاعد حسابی بدهند که تمام جملات دنباله با هم برابر باشند. پس قدر نسبت این تصاعد برابر صفر است.

تذکر ۲ : در گراف‌های ساده، دنبالهٔ درجات رأس‌ها نمی‌توانند تصاعد هندسی تشکیل دهند.

تذکر ۳ : دنبالهٔ درجات رأس‌های یک گراف، زمانی می‌تواند تصاعد هندسی تشکیل دهند که جملات دنباله با هم برابر باشند. پس قدر نسبت این تصاعد برابر یک است.

مسأله : اگر در گراف G از مرتبهٔ p و اندازهٔ q، میانگین درجات رأس‌ها بزرگ‌تر از ۲ باشد، ثابت کنید: $q > p$

حل: اگر $d_1, d_2, d_3, \dots, d_p$ درجه‌های رأس‌های گراف G باشند، آن‌گاه از فرض داریم:

$$\frac{d_1+d_2+\dots+d_p}{p} > 2 \to \frac{2q}{p} > 2 \to 2q > 2p \to q > p$$

گراف منتظم

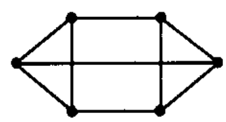
گرافی را که درجهٔ همهٔ رأس‌های آن یکسان باشد، گراف منتظم می‌نامند.

تعریف: گراف G از مرتبه p را r- منتظم می‌نامیم، هرگاه درجهٔ هر رأس G برابر با r باشد (توجه کنید، r عدد صحیح نامنفی است).

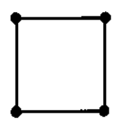
مثال ۱ :

(۱ . منتظم مرتبهٔ ۲)

(۰ . منتظم مرتبهٔ ۱)

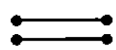


(۳. منتظم مرتبهٔ ۶)

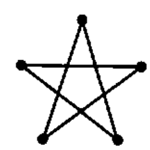


(۲ . منتظم مرتبهٔ ۴)

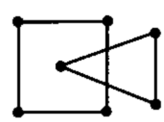
(۲ . منتظم مرتبهٔ ۳)



(۱ . منتظم مرتبهٔ ۴)



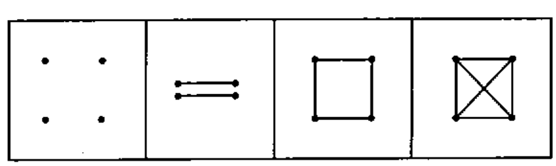
(۲ . منتظم مرتبهٔ ۵)



(۲ . منتظم مرتبهٔ ۷)

مثال ۲ : همهٔ گراف‌های منتظم مرتبهٔ ۴ را رسم کنید.

حل: گراف‌های منتظم با ۴ رأس عبارتند از :



توجه کنید :

در هر گراف r- منتظم از مرتبه p و اندازهٔ q: $rp = 2q$

تذکر : طبق رابطهٔ $rp = 2q$ در گراف r- منتظم مرتبهٔ p، حداقل یکی از دو مقدار r یا p باید عددی زوج باشد.

نکتهٔ ۱ : دنبالهٔ درجات رأس‌های گراف r- منتظم به صورت «$\underbrace{r,r,r,\dots,r}_{p\ \text{تا}}$» است.

نکتهٔ ۲ : در هر گراف r- منتظم: $\Delta = \delta = r$ (عکس مطلب برقرار است.)

نکته ۳ : گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد وجود ندارد.

مثال ۱ : گراف ۳- منتظم مرتبهٔ ۷ وجود ندارد، زیرا برای $q = \frac{1}{2} \times 7 \times 3$ ، عدد صحیح نامنفی به دست نمی‌آید.

مثال ۲ : تعداد یال‌های گراف ۷ منتظم مرتبهٔ ۱۲ را بیابید.

حل: $q = \frac{1}{2} rp = \frac{1}{2} \times 7 \times 12 = 42$

گراف آشنایی

سؤال: آیا ممکن است در یک گروه ۱۳ نفری، هر شخص به تنهایی ۳ دوست داشته باشد؟ دلیل بیاورید.

پاسخ: خیر. اگر هریک از ۱۳ نفر را با یک نقطه (رأس) نمایش دهیم، دو نقطه را توسط یک یال به هم وصل می‌کنیم، اگر و فقط اگر افرادی که نقطه‌ها را نمایش می‌دهند، دوست باشند، بنابراین درجهٔ هریک از ۱۳ رأس برابر ۳ می‌شود و مجموع درجات رأس‌های گراف ۳۹ خواهد شد. این موضوع با این قضیه که مجموع درجات رئوس هر گراف زوج است، تناقض دارد. بنابراین جواب منفی است.

پاسخ دیگر: گراف این آشنایی یک گراف فرد منتظم از مرتبهٔ فرد خواهد بود که امکان ندارد. (۳ـ منتظم مرتبهٔ ۱۳)

مسأله: فرض کنید G یک گراف ساده از مرتبه p و اندازه $q = 13$ باشد، اگر G یک گراف r- منتظم باشد و داشته باشیم: $2r - p = 2$ ، مقادیر p و r را بیابید؟ (امتحان هماهنگ کشوری ـ ۸۰)

حل:

$$\left\{\begin{array}{l} rp = ۲q \to rp = ۲\times ۱۲ \to rp = ۲۴ \\ ۲r - p = ۲ \xrightarrow[p\neq ۰]{\text{ضرب طرفین در}} ۲rp - p^۲ = ۲p \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$$۲\times ۲۴ - p^۲ = ۲p \to p^۲ + ۲p - ۴۸ = ۰$$

$$\to (p+۸)(p-۶) = ۰ \to \begin{cases} p = -۸ & (\text{غ ق ق}) \\ p = ۶ \end{cases}$$

بنابراین: $۶r = ۲۴ \to r = ۴$

آزمون ۱۹ : دنبالهٔ درجات رأس های یک گراف ۳- منتظم به صورت « $\alpha-۲, \alpha-۲, \beta, \beta, \delta-۱, \delta-۱$ » است. حاصل $\alpha + ۲\beta + \delta$ کدام است؟

۱) ۱۷   ۲) ۱۸

۳) ۱۶   ۴) ۱۵

حل : گزینهٔ (۴). چون گراف ۳- منتظم است، پس باید تمام جملات دنباله برابر ۳ باشند. بنابراین:

$$\begin{array}{lcl} \alpha-۲=۳ & & \alpha=۵ \\ \beta=۳ & \to & \beta=۳ \to \alpha+۲\beta+\delta=۵+۶+۴=۱۵ \\ \delta-۱=۳ & & \delta=۴ \end{array}$$

آزمون ۲۰ : گراف G یک گراف ۵- منتظم مرتبهٔ p است و $q = ۴p - ۲۷$ ، تعداد یال های این گراف کدام است؟

۱) ۴۵   ۲) ۵۷

۳) ۴۹   ۴) ۴۱

حل : گزینهٔ (۱) $۵p = ۲q$

$$q = ۴p - ۲۷ \to ۲q = ۸p - ۵۴ \to ۵p - ۸p = -۵۴ \to ۳p = ۵۴ \to p = ۱۸$$

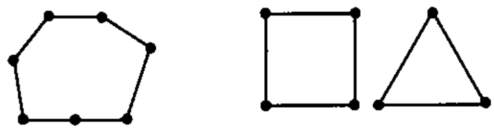
پس: $q = \frac{۵\times ۱۸}{۲} = ۴۵$

آزمون ۲۱ : تعداد گراف های ۲- منتظم مرتبهٔ ۷ کدام است؟

۱) ۱   ۲) ۲

۳) ۳   ۴) هیچ

حل : گزینهٔ (۲). گراف های ۲- منتظم از مرتبهٔ ۷ عبارتند از:



نکته : در هر گراف ۲- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q همواره داریم: $p = q$

آزمون ۲۲ : گراف G ، ۲- منتظم است که با افزودن ۳ یال به آن به گراف ۳- منتظم تبدیل می شود. مرتبه G کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۶

۳) ۷   ۴) ۸

حل : گزینه (۲)

$$\left.\begin{array}{ll} p = q & \text{: در گراف ۲- منتظم} \\ ۳p = ۲(q+۳) & \text{در گراف ۳ - منتظم} \end{array}\right\} \to p = ۶$$

نکته : در گراف r- منتظم از مرتبهٔ p و اندازهٔ q :

$$p > r, p^۲ > ۲q$$

آزمون ۲۳ : کدام گراف وجود ندارد؟

۱) ۰ - منتظم از مرتبهٔ ۵

۲) ۴- منتظم از مرتبهٔ ۷

۳) ۷ - منتظم ا زمرتبهٔ ۸

۴) ۵ - منتظم از مرتبهٔ ۴

حل : گزینهٔ (۴). درگراف ۵ - منتظم مرتبهٔ ۴ ، درجهٔ هر رأس از تعداد رأس ها بیش تر است که امکان ندارد.

سؤال : آیا گراف منتظم با ۱۵ یال وجود دارد که درجهٔ تمام رأس های آن ۴ باشد؟

پاسخ : فرض می کنیم مرتبهٔ این گراف p باشد. بنابراین:

$$۴p = ۲q \to p = \frac{۲\times ۱۵}{۴} = \frac{۳۰}{۴}$$

p عدد طبیعی نیست، بنابراین چنین گرافی

وجود ندارد.

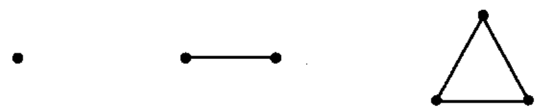
گراف کامل

گرافی را که تمام رأس‌های آن دو به دو با هم مجاور باشند، گراف کامل می‌نامند.

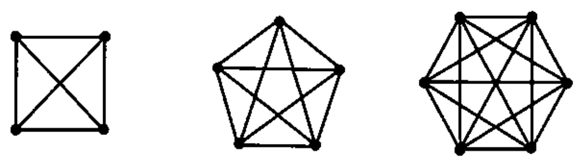
به عبارت دیگر: «گرافی که هر دو رأس متمایز آن با یک یال به هم وصل باشند، گراف کامل است.»

هر گراف کامل مرتبهٔ p را به k_p نمایش می‌دهند.

مثال:



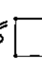
k_1 k_2 k_3



k_4 k_5 k_6

تذکر ۱: گراف k_p، یک گراف $(p-1)$ منتظم است.

تذکر ۲: هر گراف کامل منتظم است ولی عکس آن درست نیست.

مثال: گراف  گراف منتظم است، ولی کامل نیست.

توجه کنید:

قضیه: در هر گراف کامل k_p با اندازهٔ q:

$$q=\frac{1}{2}p(p-1)$$

اثبات: چون گراف کامل است، درجات کلیهٔ رأس‌های آن برابر $(p-1)$ است. پس:

$$\underbrace{(p-1)+(p-1)+\cdots+(p-1)}_{p}=2q \rightarrow p(p-1)=2q \rightarrow$$

$$q=\frac{1}{2}p(p-1)$$

آزمون ۲۴: گراف کامل k_p دارای ۲۸ یال است. p کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷

۳) ۸ ۴) ۹

حل: گزینهٔ (۳)

$$q=\frac{1}{2}p(p-1) \Rightarrow p(p-1)=28\times 2=56=8\times 7 \rightarrow p=8$$

آزمون ۲۵: (سراسری، ریاضی، ۷۵): در گراف سادهٔ $G=(V,E)$, $V=\{a,b,c,d,e,f\}$ و $E(G)$ پانزده عضو دارد. از هر عضو V حداقل چند یال می‌گذرد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

حل: گزینهٔ (۴). با توجه به این که گراف کامل k_6 دارای ۱۵ یال است، پس گراف G همان گراف k_6 است که درجهٔ هر رأس آن $p-1=6-1=5$ است. بنابراین از هر عضو V حداقل ۵ ریال می‌گذرد.

نکته: در هر گراف کامل با مرتبهٔ p و اندازهٔ q:

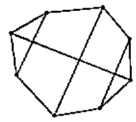
$$p+q=\frac{1}{2}p(p+1)=\binom{p+1}{2}$$

آزمون ۲۶: اگر G یک گراف کامل باشد، کدام عدد می‌تواند برابر مجموع مرتبه و اندازهٔ G باشد؟

۱) ۲ ۲) ۲۰

۳) ۱۸ ۴) ۲۴

حل: گزینهٔ (۱). با توجه به نکتهٔ بالا، دو برابر مجموع مرتبه و اندازهٔ یک گراف کامل به صورت حاصل ضرب دو عدد متوالی است که این قاعده بین گزینه‌ها فقط در مورد عدد ۲۱ صادق است؛ زیرا $2\times 21=42=7\times 6$

آزمون۲۷ : به گراف  چند یال اضافه کنیم تا کامل شود؟

۱) ۱۲   ۲) ۱۴

۳) ۱۶   ۴) ۱۸

حل : گزینهٔ (۳) . می‌دانیم که تعداد یال‌های گراف k_8 برابر $28 = 7 \times 8 \times \frac{1}{2}$ است و گراف فوق ۱۲ یال دارد . پس باید تعداد ۱۶ = ۱۲ − ۲۸ یال به گراف مزبور افزود تا کامل شود .

نکته : در هر گراف کامل با q یال ، مقدار $8q + 1$ عددی مربع کامل است .

نکته : در گراف کامل مرتبهٔ p مقدار $\delta + \Delta$ ماکزیمم است .

آزمون ۲۸ : اندازهٔ گراف‌ها داده شده‌اند . با کدام اندازه حاصل $\delta + \Delta$ ماکزیمم است؟

۱) ۱۸   ۲) ۱۹

۳) ۲۰   ۴) ۲۱

حل : گزینهٔ (۴) . همگی اعداد می‌توانند برابر تعداد یال‌های یک گراف مرتبه ۷ باشند ، ولی چون گراف مرتبهٔ ۷ با ۲۱ یال یک گراف کامل است ، حاصل $\delta + \Delta$ به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد .

آزمون ۲۹ : در گرافی از مرتبهٔ ۹ و اندازهٔ ۳۵ ، چند رأس درجهٔ ۸ وجود دارد؟

۱) ۵   ۲) ۶

۳) ۷   ۴) ۸

حل : گزینهٔ (۳) . می‌دانیم گراف کامل k_9 دارای ۳۶ یال است و گراف مزبور یک یال از گراف k_9 کم دارد . بنابراین گراف دارای ۲ رأس از درجهٔ ۷ و ۷ رأس از درجهٔ ۸ است .

تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ... تفریح اندیشه ...

۱ . دستگاه زیر را حل کنید :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 208 \\ xy = 96 \end{cases}$$

❁ ❁ ❁

۲ . مجموع پنج زاویه از زاویه‌های یک هشت ضلعی ، °۸۴۵ است . از سه زاویهٔ باقیمانده ، دو زاویه ، متمم یکدیگر و دو زاویه ، مکمل یکدیگرند . اندازهٔ این سه زاویه را بیابید .

۳ . دستگاه زیر را که در آن $x > y$ ، حل کنید :

$$\begin{cases} x + y + xy = 19 \\ xy(x + y) = 84 \end{cases}$$

۴ . مجموع دو عدد ۴۵ است . مجموع خارج قسمت‌های آن‌ها و معکوس آن ۲/۰۵ است . حاصل ضرب این دو عدد را بیابید .

پاسخ تفریح اندیشه در صفحه‌های ۱۳ ، ۵۴ و ۶۴ آمده است .