گراف
(قسمت اول)

قابل استفاده دانش‌آموزان رشته ریاضی، دوره پیش‌دانشگاهی، ریاضیات گسسته

منبع مورد استفاده: ریاضیات گسسته و ترکیباتی

رالف ـ پ ـ گریمالدی (جلد دوم)

● ترجمه و گردآوری: سیمین اکبری‌زاده (دبیر ریاضی ـ اراک)

نظریهٔ گراف یکی از مفیدترین و پرکاربردترین شاخه‌های ریاضیات گسسته است. این نظریه بسیار وسیع و پیشرفته‌تر از آن است که بتوان همهٔ مطالب آن را در یک مقاله جمع‌آوری نمود و در این مقاله سعی شده در حد نیاز دانش‌آموزان دوره پیش‌دانشگاهی به‌آن پرداخته شود. لازم به‌تذکر است که با توجه به‌تنوع اصطلاحات نظریه گراف، عبارات به‌کار رفته در این مقاله استاندارد نمی‌باشند.

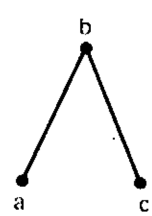
◀ تعریف: گراف (Graph)

گراف بی‌جهت G زوجی مرتب مانند (E و V) است که در آن V مجموعهٔ متناهی و ناتهی و E زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های متشکل از دو عضو متمایز V باشد.* اعضای V را رئوس یا گره‌ها (vertices) ی G و اعضای E را یالها یا خطها (edges) ی G می‌نامیم.

قرارداد: می‌نویسیم «$\{a,b\}\in E$» یا «$ab\in E$»، هرگاه یال ab دو رأس متمایز a و b را بهم وصل کرده باشد، در این صورت گوییم رئوس a و b مجاورند.

توجه: در بعضی گرافها، مجاز به‌داشتن طوقه (loop) یا یالهایی به‌صورت $\{a,a\}$ هستیم، ولی گرافهایی که در کتاب درسی و این مقاله موردنظر می‌باشد بدون طوقه (a) می‌باشند.

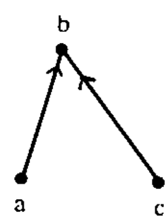
مثال ۱: در گراف شکل (۱): $E=\{\{a,b\},\{b,c\}\}$، $V=\{a,b,c\}$ و با توجه به‌اینکه تعداد اعضای V (تعداد رئوس گراف) ۳ می‌باشد، گوییم مرتبهٔ گراف ۴ است و می‌نویسیم: $|V|=۳$ یا $P=۳$. و نیز با توجه به‌اینکه تعداد اعضای E (تعداد یالهای گراف) ۲ می‌باشد، گوییم اندازهٔ گراف ۲ است و می‌نویسیم: $|E|=۲$ یا $q=۲$.



شکل (۱)

تذکر: گرافی را که برای یالهای آن جهت در نظر گرفته شود، گراف جهتدار می‌نامند، در این صورت هرگاه از a به b یک یال جهتدار موجود باشد، می‌نویسیم: $(a,b)\in E$. البته در کتب دبیرستانی موضوع مورد بحث معمولاً گراف بی‌جهت است.

مثال ۲: گراف شکل (۲)، گراف جهتداری است که در آن $E=\{(a,b),(c,b)\}$.



شکل (۲)

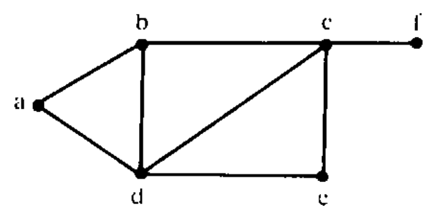
◀ تعریف: گردش (Walk)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت و x,y دو رأس آن

باشند یک گردش از x به y در G، دنبالهٔ متناهی از رئوس و یالهای G مانند $x,e_1,x_1,e_2,...,e_n,y$ می‌باشد که از رأس x شروع و به‌رأس y ختم می‌شود و دارای n یال $1 \leq i \leq n$ ، $e_i=\{x_{i-1},x_i\}$ می‌باشد. عدد n را طول گردش می‌نامیم.

توجه: در گردش ممکن است برخی از رئوس و یالها بیش از یک‌بار ظاهر شوند و نیز معمولاً از نوشتن یالها در دنباله صرف‌نظر می‌شود.

مثال ۳: در گراف شکل (۳): ۱) دنبالهٔ رئوس b,c,d,e,c,f یک b-f گردش به‌طول ۵ می‌باشد که رأس c تکرار شده ولی هیچ یالی بیش از یک بار ظاهر نشده است.



شکل (۳)

۲) دنبالهٔ رئوس f,c,e,d,a یک f-a گردش به‌طول ۴ می‌باشد که هیچ رأس و یال تکراری در آن وجود ندارد.

تعریف: خط سیر و مدار trail and circxit
مسیر و دور path and cycle

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد و $x-y$ گردشی در آن:

الف: اگر در گردش $x-y$ هیچ یالی تکراری نباشد، این گردش را یک $x-y$ خط سیر نامیم. خط سیر بستهٔ $x-x$ را یک مدار گوییم.

ب: اگر در گردش $x-y$ هیچ رأسی بیش از یک بار ظاهر نشود، این گردش را یک $x-y$ سیر نامیم. مسیر بستهٔ $x-x$ را یک دور یا دایره گوییم.

مثال ۴: الف: $b-f$ گردش لیست‌شده در مثال ۳ یک $b-f$ خط سیر می‌باشد. ولی $b-f$ مسیر نیست چون رأس C در آن تکرار شده است.

ب: $f-a$ گردش لیست شده در مثال ۳ هم $f-a$ خط سیر و هم $f-a$ سیر است.

پ: در شکل (۳): a,b,d,c,e,c,d,a یک $a-a$ مدار هست ولی باتوجه به‌این که رأس d تکرار شده دور نیست.

قضیه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد، با $a,b \in V$ ، $a \neq b$. اگر یک خط سیر از a به b (در G) موجود باشد، آنگاه یک مسیر از a به b (در G) موجود است.

اثبات: چون یک خط سیر از a به b موجود است، یکی از کم‌طولترین آنها مثلاً $\{a,x_1\}, \{x_1,x_2\}, ..., \{x_n,b\}$ را انتخاب می‌کنیم. اگر این خط سیر یک مسیر نباشد (رأس تکراری مانند x_k در آن وجود دارد و) خواهیم داشت:

$\{a,x_1\}$ و $\{x_1,x_2\}$ و ... و $\{x_{k-1},x_k\}$ و $\{x_k,x_{k+1}\}$

و ... و $\{x_{m-1},x_m\}$ و $\{x_m,x_{m+1}\}$ و...و $\{x_n,b\}(x_k=x_m)$

و به‌این ترتیب:

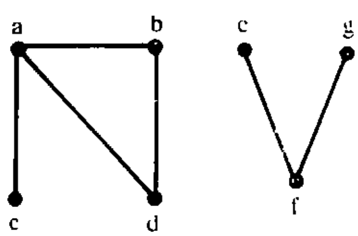
$\{a,x_1\}$ و $\{x_1,x_2\}$ و ... و $\{x_{k-1},x_k\}$ و $\{x_m,x_{m+1}\}$ و ... و $\{x_n,b\}$

خط سیری از a به b می‌باشد که خط سیری کوتاهتر است. (لذا مطمئناً کم‌طولترین خط سیر از a به b همان سیر موجود از a به b می‌باشد).

◀ تعریف: گراف همبند (connected graph)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد، هرگاه بین هر دو رأس متمایز G یک مسیر موجود باشد، G را همبند (یا مرتبط) نامیم. گرافی را که همبند نیست، ناهمبند یا نامرتبط گوییم.

مثال ۵: گراف شکل (۴) همبند نیست، چون به‌عنوان مثال هیچ مسیری از a به e موجود نیست. منتهی این گراف از دو قسمت تشکیل شده که هر یک از آنها همبند هستند و آنها رامؤلفه‌های گراف می‌نامیم. بنابراین یک گراف همبند است، اگر و تنها اگر فقط یک مؤلفه داشته باشد.



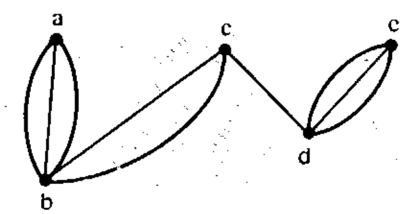
شکل (۴)

تعریف: تعداد مؤلفه‌های گراف G را با $k(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ٦: گراف شکل (۳) همبند است لذا $k(G)=1$. ولی در گراف شکل (۴) داریم: $k(G)=2$.

◄ تعریف: گراف چندگانه (multigraph)

گراف $G=(V,E)$ را گراف چندگانه گوییم، هرگاه رئوسی مانند $a,b\in V$، $a\neq b$ موجود باشند چنانکه بیش از یک یال بین a و b موجود باشد. برای $n\in z^{+}$، گراف چندگانهٔ G را یک n نمودار گوییم هرگاه هیچ یالی بیش از n بار در آن تکرار نشده باشد. (و حداقل یک یال در آن n بار تکرار شده باشد)



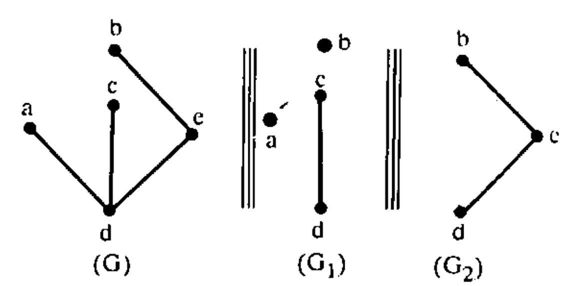
شکل (۵)

مثال ۷: گراف شکل (۵) یک گراف ۳ گانه است.

◄ تعریف. زیرگراف (subgraph)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف باشد، $G_۱=(V_۱,E_۱)$ را زیرگراف G می‌نامیم هرگاه $\phi\neq V_۱\subseteq V$ و $E_۱\subseteq E$، که هر یال در $E_۱$ بر رأسهای موجود در $V_۱$ واقع است.

مثال ۸: در شکل (۶) $G_۱$ و $G_۲$ زیرگرافهای G هستند.



شکل (۶)

◄ تعریف: درجهٔ رأس (degree of vertex)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد، برای هر رأس G مانند v، درجهٔ v تعداد یالهایی از G است که از رأس v می‌گذرد و آن را با $deg(v)$ نمایش می‌دهیم.

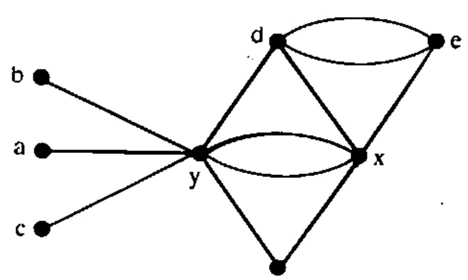
مثلاً در گراف $G_۱$ شکل (۶) داریم: $deg(c)=deg(d)=۱$ و $deg(a)=deg(b)=۰$، رئوس a و b را ایزوله یا تنها گوییم.

مسئله ۱: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت باشد که همبند است و $|V|\geq ۲$. ثابت کنید G شامل دو رأس مانند a و b هست که $deg(a)=deg(b)$.

اثبات: (حل مسئله با استفاده از اصل لانه کبوتری انجام می‌گیرد). فرض می‌کنیم $|V|=n\geq ۲$. باتوجه به‌تعریف گراف، چون یالها دو رأس متمایز را به‌هم وصل می‌کنند، یالی که وصل کنندهٔ یک رأس به‌خودش باشد وجود ندارد، لذا حداکثر تعداد یالهای گذرنده از هر رأس دلخواه G مانند x، $n-۱$ می‌باشد، بنابراین طبق تعریف درجه $deg(x)\leq n-۱$. از طرفی چون گراف G همبند است و در گراف همبند رأسی با درجهٔ صفر (ایزوله) موجود نیست، بنابراین حداقل تعداد یالهای گذرنده از هر رأس دلخواه مانند x، یک می‌باشد لذا $deg(x)\geq ۱$. به‌این ترتیب برای هر رأس دلخواه مانند x داریم: $۱\leq deg(x)\leq n-۱$ و $deg(x)\in\{۱،۲،...،n-۱\}$. حال اگر n رأس را به‌عنوان کبوتر و $n-۱$ درجهٔ ممکن هر رأس را به‌عنوان لانهٔ کبوتر درنظر بگیریم، چون $n>n-۱$، حداقل ۲ رأس مانند a و b در G موجود است که هم درجه‌اند و $deg(a)=deg(b)$.

مسئله ۲: الف) چرا رسم گراف بی‌جهت همبند با ۸ رأس طوری که دنبالهٔ درجات رئوس آن ۷ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ باشد غیرممکن است؟ ب) یک گراف چندگانهٔ بی‌جهت همبند با ۸ رأس ارائه‌دهید که درجات‌رئوس آن ۷ و ۵و۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۱ و ۱ باشد.

حل: الف) فرض می‌کنیم $a,b,c,x,y\in V$ و $deg(y)=۷$ و $deg(x)=۵$ و $deg(a)=deg(b)=deg(c)=۱$ چون $deg(y)=۷$ پس y با هر ۷ رأس دیگر V مجاور است، لذا رأس x با هیچ یک از رئوس a و b و c مجاور نیست. از طرفی طبق تعریف گراف رأس x با خودش مجاور نیست بنابراین رأس x حداکثر می‌تواند با ۴ رأس باقیمانده مجاور باشد و چون گراف ساده است $deg(x)\leq ۴$ و این با $deg(x)=۵$ در تناقض است. لذا چنین گرافی قابل رسم نیست، مگر با شرط چندگانه بودن یا طوقه داشتن.



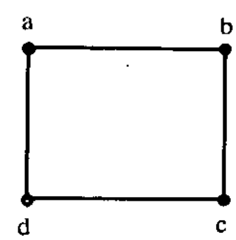
شکل (۷)

ب) شکل (۷) یک گراف دوگانه و همبند است و $deg(a)=deg(b)=deg(c)=1$، $deg(f)=2$، $deg(e)=3$، $deg(d)=4$، $deg(x)=5$ و $deg(y)=7$.

◄ تعریف: گراف کامل (complete graph)

فرض کنید V مجموعه‌ای با n رأس باشد. گراف کامل روی V با k_n نمایش داده می‌شود و گراف بی‌جهتی است که برای هر دو رأس متمایز آن مانند a و b **یک یال** $\{a,b\}$ موجود باشد.

• مثال ۹: شکل (۸) گراف کامل نیست. چون به‌عنوان مثال $\{a,c\}\notin E$.



شکل (۸)

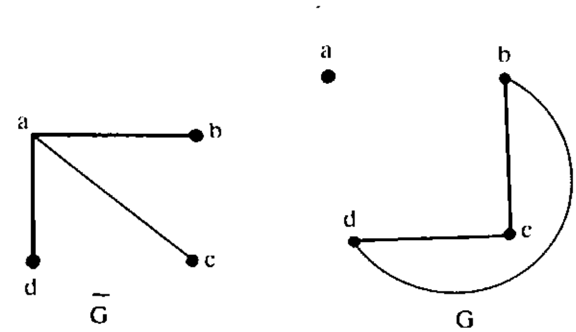
مثال ۱۰: تعداد یالهای گراف کامل k_n، $\binom{n}{2}$ و درجه هر رأس آن $n-1$ است.

◄ تعریف: مکمل گراف (complement of graph)

فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس باشد. مکمل G با $\overline{G}$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از زیرگرافی از k_n که شامل n رأس G می‌باشد ولی یالهای آن همهٔ یالهایی است که در G نیست پس $|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2}$.

تذکر: k_n در نمودارها همان نقشی را دارد که مجموعهٔ مرجع در مجموعه‌ها دارد.

مثال ۱۱: در شکل ۹، متمم گراف G رسم شده است.



شکل (۹)

مسئله ۳: هرگاه G یک گراف بی‌جهت با v رأس و e یال باشد، تعداد یالهای $\overline{G}$ چند تا است.

حل:

$$|E(G)|=e \text{ و } |V(G)|=v \Rightarrow |E(k_v)|=\binom{v}{2}.$$

$$|E(G)|+|E(\overline{G})|=|E(k_v)| \Rightarrow |E(\overline{G})|=\binom{v}{2}-e$$

تست ۱: فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس باشد. اگر G، ۵۶ یال و $\overline{G}$، ۸۰ یال داشته باشد، مقدار n کدام است؟

الف) ۱۶ ب) ۱۷ پ) ۱۸ ت) ۱۹

حل: گزینهٔ (ب) صحیح است.

$$|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2} \Rightarrow 56+80$$

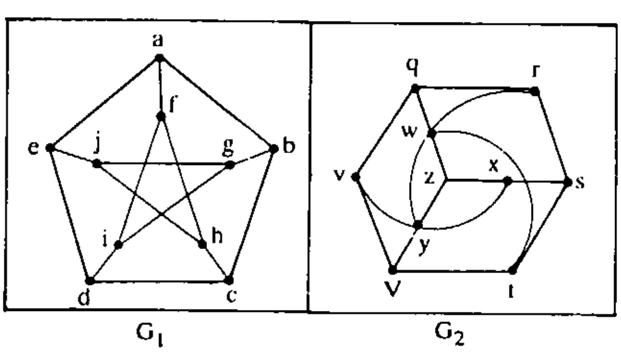
$$\binom{n}{2} \Rightarrow n^2-n-272=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{n=17} \\ n=-16 \text{ غیرقابل قبول} \end{cases}$$

◄ تعریف: گرافهای یکریخت (Isomorphic graphs)

فرض کنید $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ دو گراف بی‌جهت باشند. تابعی مانند $f:V_1\to V_2$ یکریختی گرافها نامیده می‌شود هرگاه: اولاً) f یک به‌یک و پوشا باشد. و ثانیاً) برای هر دو رأس دلخواه G_1 مانند a و b، $\{a,b\}\in E_1$ اگر و فقط اگر $\{f(a),f(b)\}\in E_2$. هرگاه چنین تابعی وجود داشته باشد، G_1 و G_2 را گرافهای یکریخت می‌نامیم.

توجه: اگر ۲ نمودار دارای تعداد رئوس مختلف یا تعداد یال مختلف باشند، یکریخت نیستند.

مثال ۱۲: گرافهای شکل (۱۰)، دو گراف با ۱۰ رأس هستند. با پیدا کردن تناظر زیر مجاورت‌ها حفظ می‌شوند.



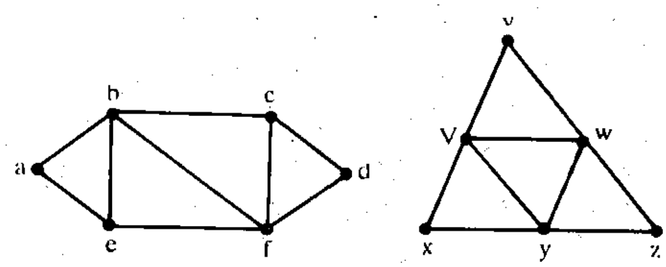
شکل (۱۰)

$a\to q$ $c\to u$ $e\to r$ $g\to x$ $i\to z$

$b\to v$ $d\to y$ $f\to w$ $h\to t$ $j\to s$

برای مثال $\{f,h\}$ یالی در گراف G_1 است و یال متناظر آن $\{w,t\}$ در گراف G_2 وجود دارد. اما ببینیم این تناظر چطور پیش آمده؟ توجه داریم برای اینکه یک ایزومورفیسم مجاورتها را حفظ کند، آن ایزومورفیسم زیرگرافهایی مثل مسیرها و دورها را حفظ می‌کند. در گراف G_1 یالهای af,fi,id,de,ea دوری به‌طول ۵ می‌سازند. بنابراین هنگامی که سعی می‌کنیم ایزومورفیسم را پیدا کنیم باید این را حفظ کنیم. یالهای متناظر در گراف G_2 ،qw,wz,zy,yr,rq می‌باشند که آنها نیز دوری به‌طول ۵ تشکیل داده‌اند. به‌علاوه در گراف G_1 با شروع از a ، مسیر a,f,h,c,b,g,j,e,d,i را می‌یابیم که از هر رأس فقط یک بار می‌گذرد، مسیر متناظر آن در گراف G_2 ،q,w,t,u,v,x,s,r,y,z می‌باشد که همان خصوصیت را دارد (دو گراف یکریخت هستند).

مسئله ۴: آیا گرافهای G_1 و G_2 در شکل (۱۱) یکریخت هستند؟

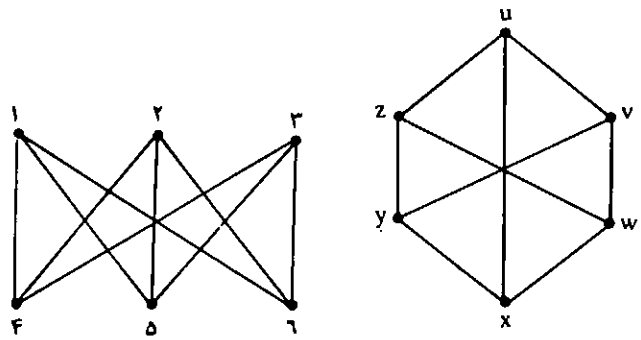


(G_1) (G_2)

شکل (۱۱)

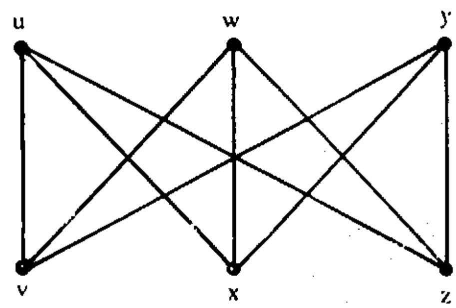
حل: علی‌رغم اینکه هر دو ۶ رأس و ۹ یال دارند ولی یکریخت نیستند. در گراف G_1، دو رأس a و d درجه ۲ هستند و در گراف G_2، ۳ رأس z و x و u درجه ۲ می‌باشند، بنابراین اگر مثلاً رأس a را به‌رأس x و رأس d را به‌رأس z نظیر کنیم، هیچ رأسی از گراف G_1 باقی نخواهد ماند که آن را به u نظیر کنیم و نمی‌توان ساختن تناظر یک به‌یک بین رئوس ۲ گراف را ادامه داد. لذا دو گراف یکریخت نیستند. به‌علاوه در گراف G_2 می‌توانیم از هر رأس شروع کنیم و مداری شامل تمام یالهای گراف و هر یال یک بار بیابیم. مثلاً، اگر از رأس u شروع کنیم مدار u,w,v,y,w,z,y,x,v,u واجد چنین خاصیتی است. (چنین گرافی را گراف **اویلری** می‌نامند) ولی G_1 چنین نیست.

مسئله ۵: الف) نشان دهید G_1 و G_2 در شکل (۱۲) یکریخت هستند. ب) امکان وجود چند ایزومورفیسم $f:G_1\rightarrow G_2$ وجود دارد؟



(G_1) (G_2) شکل (۱۲)

حل: الف) گراف G_2 را می‌توانیم به‌صورت گراف شکل (۱۳) رسم کنیم. لذا دو گراف یکریخت هستند. ب) ۷۲ ایزومورفیسم.



شکل (۱۳)

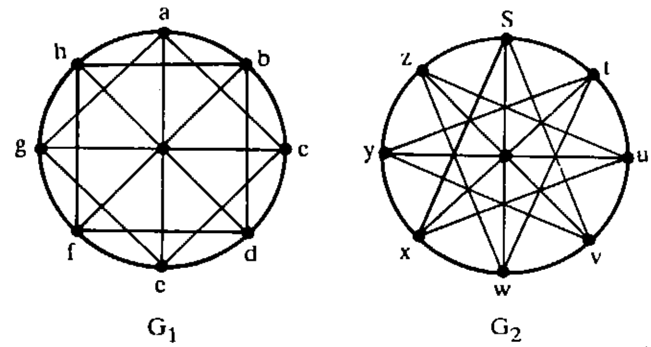
مسئله ۶: الف) اگر G_1 و G_2 دو گراف بی‌جهت باشند، ثابت کنید G_1 و G_2 یکریخت هستند اگر و تنها اگر $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ یکریخت باشند. ب) آیا گرافهای شکل (۱۴) یکریخت هستند؟

حل: الف) فرض می‌کنیم $G_1=(V_1,E_1)$ و $G_2=(V_2,E_2)$ یکریخت باشند و ثابت می‌کنیم $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ یکریخت هستند. با توجه به‌فرض تابعی مانند $f:V_1\rightarrow V_2$ وجود دارد که اولاً f یک به‌یک و پوشاست و ثانیاً f مجاورت‌ها را حفظ می‌کند یعنی: برای هر $x,y\in V_1$، $\{x,y\}\in E_1 \Leftrightarrow \{f(x),f(y)\}\in E_2$. *

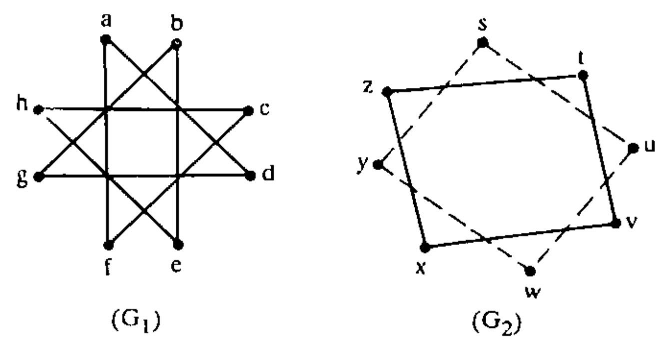
برای اثبات حکم فرض می‌کنیم $x,y\in V_1$ و $\{x,y\}\in \overline{E}_1$ پس $\{x,y\}\notin E_1$، لذا طبق رابطهٔ * $\{f(x),f(y)\}\notin E_2$ بنابراین $\{f(x),f(y)\}\in \overline{E}_2$. لذا همین تابع f مجاورتها را برای $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ نیز حفظ می‌کند و می‌تواند برای تعریف یک یکریختی بین $\overline{G}_1$ و $\overline{G}_2$ مورد استفاده قرار گیرد. اثبات برعکس نیز به‌روش مشابه انجام می‌شود.

ب) دو گراف شکل (۱۴) یکریخت نیستند. چون مکمل گراف G_1 دوری به‌طول ۸ (f,a,d,g,b,e,h,c,f) می‌باشد ولی مکمل گراف G_2

اجتماع دو دور به‌طول ۴ (z,t,u,x,z) و (s,u,w,y,s) می‌باشد. (طبق شکل ۱۵).



شکل (۱۴)



شکل (۱۵)

تست ۲: کدامیک از گرافهای شکل (۱۶) یکریخت هستند؟

الف) گرافهای شکل (a) — ب) گرافهای شکل (b)

پ) گرافهای شکل (c) — ت) گرافهای هر سه شکل.

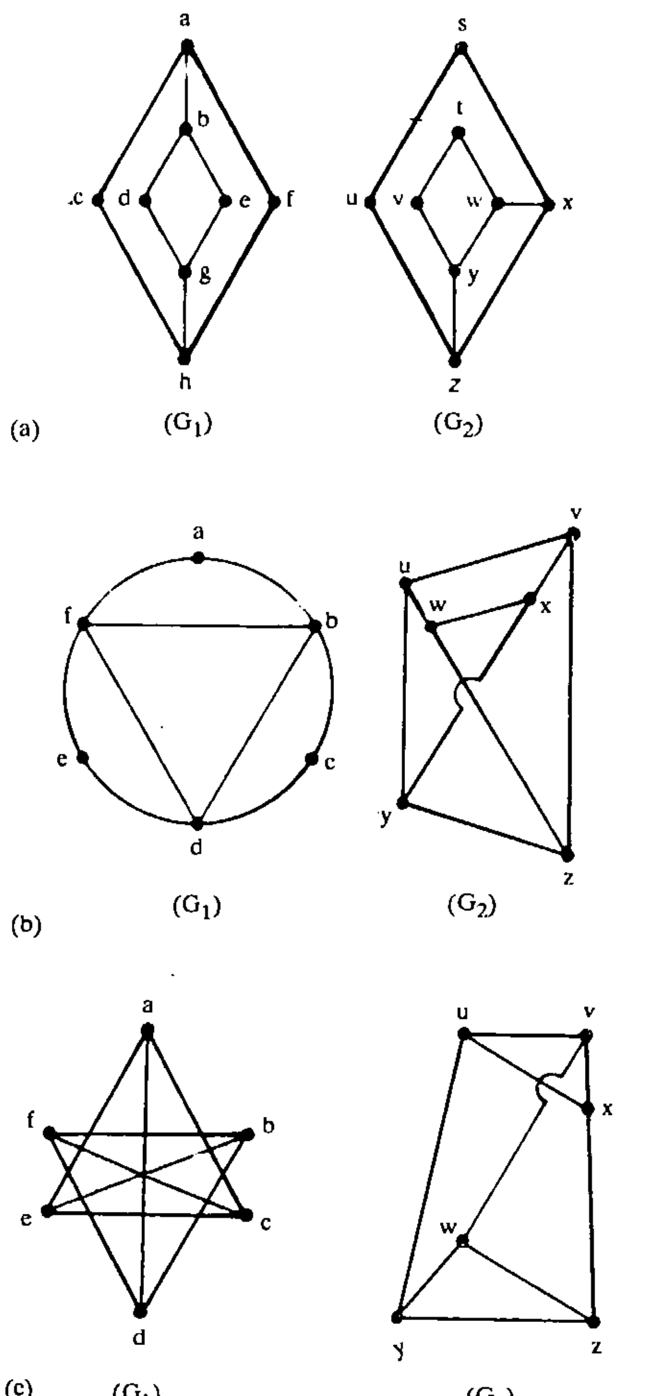
حل: گرافهای شکل (a) یکریخت نیستند. چون G_2 شامل دوری به‌طول ۸ (x,s,u,z,y,v,t,w,x) می‌باشد ولی G_1 شامل هیچ دوری به‌طول ۸ نیست. گرافهای شکل (b) نیز یکریخت نیستند. چون G_2 شامل دوری به‌طول ۴ (u,v,x,w,u) هست ولی G_1 شامل هیچ دوری به‌طول ۴ نیست.

و اما در مورد گرافهای شکل (c) درجه تمام رئوس در هر ۲ گراف ۳ است. به‌طور دلخواه a را به u نظیر می‌کنیم. چون $\{a,b\}\notin E_1$ و $f(a)=u$، b را باید به‌رأسی از G_2 نظیر کرد که مجاور با u نباشد پس نمی‌توان آن را به v و y و x نظیر کرد و باید به‌یکی از ۲ رأس w یا z نظیر شود. به‌این ترتیب b را به w نظیر می‌کنیم. اکنون نوبت به‌رأس c رسیده. چون $\underset{\substack{\downarrow\\ u}}{\{a,c\}}\in E_1$ و $\underset{\substack{\downarrow\\ w}}{\{b,c\}}\notin E_1$، لذا c را باید به‌رأسی نظیر کرد که مجاور u باشد ولی با w مجاور نباشد بنابراین نمی‌توان c را به v و y و z نظیر کرد پس $c\to x$ و با ادامهٔ این روند تناظر زیر را به‌دست خواهیم آورد.

$a\to u$ و $b\to w$ و $c\to x$

$d\to y$ و $e\to v$ و $f\to z$

(البته یکتا نیست) که در هر ۲ شرط تعریف صدق می‌کند. لذا دو گراف یکریختند. و گزینهٔ (پ) صحیح است.



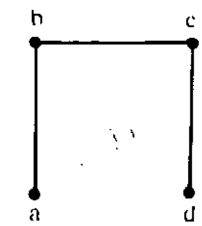
شکل (۱۶)

▶ تعریف: گراف خود مکمل:

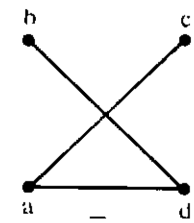
(self-complementary graph)

هرگاه G یک گراف بی‌جهت باشد، اگر G و $\overline{G}$ یکریخت باشند آنگاه G را یک گراف خود مکمل (خود متمم گویند).

مثال ۱۳: گراف شکل (۱۷) یک گراف خود مکمل است. چون باتوجه به‌شکل (۱۸) G و $\overline{G}$ هر دو مسیری به‌طول ۳ هستند و مسیرهای هم طول یکریخت می‌باشند.



(G)
شکل (۱۷)



($\overline{G}$)
شکل (۱۸)

تست ۳: هرگاه G یک گراف خود مکمل با n رأس باشد، تعداد یالهای گراف G با کدام گزینه برابر است.

الف) n ب) $\binom{n}{2}$ پ) $2\times\binom{n}{2}$ ت) $\frac{\binom{n}{2}}{2}$

حل: چون G و $\overline{G}$ یکریخت هستند پس $E(\overline{G})=E(G)$. از طرفی می‌دانیم $|E(G)|+|E(\overline{G})|=\binom{n}{2}$. (چون G، n رأس دارد). لذا $2|E(G)|=\binom{n}{2}$ و $|E(G)|=\frac{\binom{n}{2}}{2}$ و گزینهٔ (ت) درست است.

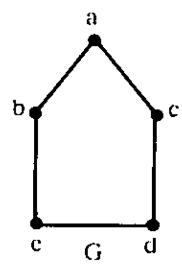
مسئله ۷: فرض کنید G دوری با n رأس باشد. ثابت کنید G خود متمم است اگر و فقط اگر $n=5$.

اثبات: **قسمت لزوم)** فرض می‌کنیم G دوری با n رأس و خود متمم باشد. ثابت می‌کنیم $n=5$. چون G گرافی خود مکمل با n رأس است طبق تست بالا، تعداد یالهای گراف G، $\frac{\binom{n}{2}}{2}$ است. از طرفی چون G دوری با n رأس است پس تعداد یالهای G نیز n می‌باشد. لذا $n=\frac{\binom{n}{2}}{2}$

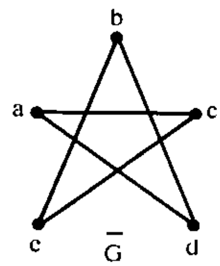
$$n=\frac{1}{2}\binom{n}{2}\Rightarrow n=\frac{1}{4}n(n-1)\Rightarrow$$

$$n^2-5n=0\Rightarrow\begin{cases} n=0 & \text{غیرممکن}\\ \boxed{n=5} \end{cases}$$

اثبات کفایت: فرض می‌کنیم G دوری با ۵ رأس باشد، ثابت می‌کنیم خود متمم است. هرگاه G دوری با یالهای ab,bc,cd,de,ea مطابق شکل (۱۹) باشد، آنگاه $\overline{G}$ نیز مطابق شکل (۲۰) دوری با ۵ یال ac,ce,eb,bd,da می‌باشد. لذا G و $\overline{G}$ هر دو دورهایی هم طول و درنتیجه یکریخت هستند و G خود متمم است.



شکل (۱۹)



شکل (۲۰)

قضیه: هرگاه $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد، آنگاه $\sum_{v\in V}\deg(v)=2|E|$.

اثبات این قضیه در کتاب جبر و احتمال نظام جدید آمده است.

▶ تعریف: گراف منظم (regular graph)

گراف بی‌جهت یا چندگانه‌ای را که درجهٔ تمام رئوس آن مساوی باشد گراف منظم می‌نامیم. مثلاً گرافهای شکلهای (۱۹) و (۲۰) را یک گراف ۲ ـ منتظم می‌نامیم. چون درجهٔ تمام رئوس آنها ۲ است. به‌طور کلی هر گراف همبند و ۲ منتظم را یک دور می‌نامیم.

مسئلهٔ ۸: الف) آیا گراف منظمی وجود دارد که درجه تمام رئوس آن ۴ باشد و ۱۰ یال داشته باشد؟

ب) در سؤال بالا به‌جای عدد ۱۰، ۱۵ قرار داده و پاسخ دهید.

حل: الف) فرض می‌کنیم چنین گرافی موجود و n رأس داشته باشد. برای هر رأس دلخواه مانند x: $\deg(x)=4$، پس طبق تعریف گراف منظم داریم: $\sum_{x\in V}\deg(x)=4n$.

از طرفی طبق قضیه بالا $\sum_{x\in V}\deg(x)=2|E|=20$ بنابراین $4n=20$ و $n=5$. چنین گرافی موجود و ۵ رأس دارد.

ب) فرض می‌کنیم تعداد رئوس این گراف n باشد لذا:

$$\left.\begin{array}{l}\sum_{x\in V} \deg(x)=4n \\ \text{از طرفی } \sum_{x\in V} \deg(x)=2|E|=30\end{array}\right\} \Rightarrow 4n=30 \Rightarrow n=\frac{30}{4}$$

n به‌دست آمده عدد طبیعی نیست پس چنین گرافی موجود نیست.

تست ۴: هرگاه $G=(V,E)$ دارای ۱۰ یال و ۲ رأس از درجه ۴ و بقیه رئوس از درجه ۳ باشد، تعداد رئوس این گراف با کدامیک از گزینه‌های زیر برابر است.

الف) ۴ ب) ۵ پ) ۶ ت) ۷

حل: فرض می‌کنیم تعداد رئوس درجه ۳، n تا باشد پس

$$20=2|E|=\sum_{x\in V} \deg x=2\times 4+3\times n=8+3n$$

$$\Rightarrow 8+3n=20 \Rightarrow n=4 \Rightarrow \text{تعداد رئوس گراف}=4+2=6 \Rightarrow$$

گزینه (پ) درست است.

تست ۵: اگر $G=(V,E)$ یک گراف همبند باشد که $|E|=17$ و برای هر $a\in V$، $\deg a\geq 3$ حداکثر مقدار $|V|$ کدام است.

الف) ۱۰ ب) ۱۱ پ) ۱۲ ت) نمی‌توان تعیین کرد.

حل: فرض می‌کنیم تعداد رئوس G، n باشد.

$$\forall a\in V,\ \deg(a)\geq 3 \Rightarrow \sum_{a\in V} \deg(a)\geq 3n \Rightarrow 2|E|\geq 3n$$

$$\Rightarrow 34\geq 3n \Rightarrow n\leq \frac{34}{3}=11/\ldots \Rightarrow$$

لذا حداکثر مقدار $|V|$، ۱۱ می‌باشد و گزینه (ب) درست است.

مسئله ۹: فرض کنید G یک گراف بی‌جهت با n رأس و e لبه (یال) باشد و $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ به‌ترتیب بزرگترین و کوچکترین درجه در بین درجه‌های رئوس گراف g باشند. ثابت کنید $\delta\leq 2\left(\frac{e}{n}\right)\leq\Delta$

حل: طبق تعریف مذکور برای هر رأس دلخواه G مانند a داریم: $\delta\leq \deg(a)\leq\Delta$ لذا:

$$\sum_{a\in V}\delta\leq \sum_{a\in V}\deg(a)\leq \sum_{a\in V}\Delta \Rightarrow \delta|V|\leq 2|E|\leq \Delta|V| \div |V| \Longrightarrow$$

$$\delta\leq \frac{2|E|}{|V|\leq\Delta\Rightarrow\delta}\leq \frac{2e}{n}\leq\Delta.$$

$$\underbrace{\delta+\delta+\delta+\ldots+\delta}_{|V|\ \text{بار}}=\delta|V|$$

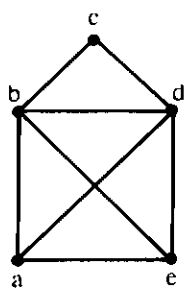
◀ تعریف: مدار اویلری و خط سیر اویلری

(Euler circuit and Euler trail)

فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد. هرگاه مداری در G موجود باشد که از هر رأس G بگذرد و از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، گوییم G مدار اویلری دارد (یا به‌اختصار G گراف اویلری است).

هرگاه خط سیری در G موجود باشد چنانکه از هر رأس G بگذرد و از هر یال دقیقاً یک بار بگذرد، آن را خط سیر اویلری می‌نامیم.

مسئله ۱۰: در گراف شکل (۲۱)، الف) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به‌همان رأس اول رسید (به‌عبارت دیگر آیا گراف اویلری است؟)



شکل (۲۱)

ب) آیا می‌توان از یک رأس شروع کرد و از هر یال دقیقاً یک بار گذشت و به‌رأس دیگری به‌جز رأس اول بازگشت (به‌عبارت دیگر آیا گراف خط سیر اویلری دارد)؟

حل: الف) خیر. ب) بله مثلاً با طی کردن دنبالهٔ رئوس a,b,c,d,e,b,d,a,e خط سیر اویلری از a به e خواهیم داشت.

قضیه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت یا چندگانه باشد. G مدار اویلری دارد (G گراف اویلری است)، اگر و تنها اگر G همبند باشد و تمام رئوس آن درجه زوج داشته باشند.

اثبات قسمت لزوم در کتاب درسی ذکر شده و اثبات کفایت با کمک استقراء روی تعداد یالهای G انجام می‌گیرد و از نوشتن آن صرف‌نظر می‌شود.

نتیجه: فرض کنید $G=(V,E)$ یک نمودار بی‌جهت یا چندگانه باشد. G خط سیر اویلری دارد اگر و تنها اگر همبند باشد و فقط ۲ رأس با درجه فرد داشته باشد.

اثبات: قسمت لزوم) فرض می‌کنیم G همبند و a و b دو رأس G با درجه فرد باشند. یال $\{a,b\}$ را به‌گراف G اضافه می‌کنیم. اکنون

گراف حاصل (G_1) همبند است و تمام رئوس آن زوج هستند. بنابراین طبق قضیه بالا، G_1 مدار اویلری دارد. حال با حذف یال $\{a,b\}$ از این مدار، خط سیر اویلری برای G به‌دست خواهیم آورد. (بنابراین رأس شروع و پایان خط سیر اویلری دارای درجه فرد هستند.)

اثبات: قسمت کفایت) فرض می‌کنیم $G=(V,E)$ یک خط سیر اویلری از a به b داشته باشد. با اضافه کردن یال $\{a,b\}$ به گراف G گراف بزرگتر $G_1=(V_1,E_1)$ تشکیل می‌شود که G_1 مدار اویلری دارد. بنابراین طبق قضیه بالا، G_1 همبند و تمام رئوس آن زوجند. با حذف یال $\{a,b\}$ از G_1 تمام رئوس G دارای درجه‌های زوج خواهند بود به‌جز a و b

$\deg_G(a)=\deg_{G_1}(a)-1$ و $\deg_G(b)=\deg_{G_1}(b)-1$.

بنابراین رئوس a و b در G درجه فرد دارند و نیز چون یالها در G خط سیر اویلری تشکیل داده‌اند بنابراین G همبند است.

گراف شکل (۲۱) همبند است و نیز ۲ رأس با درجه فرد دارد. لذا با استفاده از این نتیجه فوراً می‌توان ادعا کرد خط سیر اویلری دارد.

مسئله ۱۱ الف) اگر گراف کامل k_n مدار اویلری داشته باشد، مقدار n را مشخص کنید.

ب) اگر گراف کامل k_n خط سیر اویلری داشته باشد ولی مدار اویلری نداشته باشد، مقدار n را مشخص کنید.

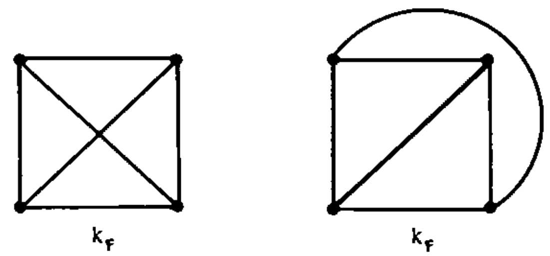
حل: الف) طبق تعریف گراف کامل، درجهٔ هر رأس k_n، $n-1$ می‌باشد. لذا طبق قضیه شرط اویلری بودن k_n آن است که $n-1$ زوج و درنتیجه n باید فرد باشد.

ب) $n=2$ k_2 خط سیر اویلری دارد ولی گراف اویلری نیست.

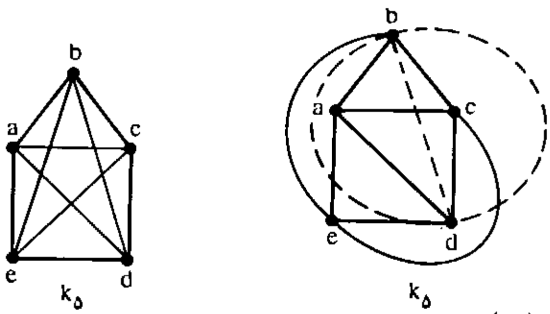
◀ تعریف: گراف مسطح (planar graph)

گراف G رامسطح گوییم، هرگاه بتوان G را در صفحه چنان رسم کرد که یالهای آن فقط یکدیگر را در رئوس قطع کنند.

مثال ۱۴: k_4 گراف مسطح می‌باشد، چون می‌توان آن را مطابق شکل (۲۲) چنان رسم کرد که یالها فقط در رئوس یکدیگر را قطع کنند. گراف k_5 چطور؟ آیا مسطح است؟ باید ببینیم آیا می‌توان یالهای آن را چنان رسم کرد که فقط در رئوس همدیگر را قطع کنند؟ این کار را مطابق شکل (۲۳) تا ۹ مرحله انجام می‌دهیم (خطوط پر). اینک نوبت به‌آخرین یال یعنی $\{b,d\}$ رسیده. آیا آن را هم می‌توان طوری رسم کرد که یالهای دیگر را فقط در رئوس قطع کند؟



شکل (۲۲)



شکل (۲۳)

آزمایش می‌کنیم. ۳ راه مختلف برای رسم $\{b,d\}$ موجود است که با خط‌چین نشان داده شده، می‌بینیم در هر ۳ مورد یال $\{b,d\}$ یالهای دیگر را در نقطه‌ای به‌جز رأس قطع خواهد کرد. لذا k_5 مسطح نیست. باتوجه به‌مراحل بالا، بدیهی است که اگر از k_5 یک یال (مثلاً $\{b,d\}$) را برداریم، گراف حاصل مسطح خواهند بود.

○ یادداشت:

* در تعریفی که برای گراف در کتاب گریمالدی ارائه شده، هر رأس می‌تواند به‌وسیلهٔ یک حلقه با خودش نیز مجاور باشد، به‌همین علت در برخی تمرینات مخصوصاً به‌بی‌طوقه بودن گراف اشاره شده، ولی در این مقاله به‌علت هماهنگی با تعریف ارائه‌شده برای گراف در کتاب پیش‌دانشگاهی، بر تمایز رئوس مجاور تأکید شده و لذا در تمرینات مورد استفاده نیز بی‌طوقه بودن گراف حذف شده. چون در تعریف نهفته است.