صدق و اثبات:
تصمیم‌ناپذیری در نظام پرینکیپیا ماتماتیکا*

کورت گودل
ترجمهٔ شاپور اعتماد

همان‌طور که می‌دانیم، با تحول ریاضیات به‌سوی دقت بیشتر، بخشهای بزرگی از آن صوری شده است به طوری که اکنون می‌توان هرقضیه‌ای را با کاربرد چند قاعدهٔ مکانیکی اثبات کرد. جامعترین نظامهای صوری که تاکنون تأسیس شده‌اند، عبارت‌اند از نظام [راسل و وایتهد موسوم به] پرینکیپیا ماتماتیکا [۱]، و نظام اصل موضوعی تسرملو-فرانکل در زمینهٔ نظریهٔ مجموعه‌ها (که بعداً توسط فون نویمان گسترش بیشتری یافت) [۲]. این دونظام به‌اندازه‌ای جامع هستند که همهٔ روشهای متداول اثبات در ریاضیات، در آنها صوری شده‌اند، یعنی آنکه [این اثباتها] به‌تعداد کمی اصل موضوع و قاعدهٔ استنتاج تقلیل پذیرند. بنابراین می‌توان گمان زد*

←

* **توضیح مترجم:** چنین گمانی مبتنی برسوابق و تحقیقات قبلی بوده است. دراین مورد بد نیست به‌اولین پاراگراف از مقاله‌ای که گودل دربارهٔ تمامیت حساب محمولات درسال ۱۹۳۰ نوشت، نظری بیفکنیم.

همان‌طورکه می‌دانیم، وایتهد و راسل منطق و ریاضیات را ازاین طریق بنا کردند که نخست تعدادی گزارهٔ بدیهی را به‌عنوان اصل موضوع درنظرگرفتند وسپس [کلیهٔ] قضایای منطق و ریاضیات را به‌کمك اصول استنتاجی دقیقاً صورتبندی شده‌ای به‌نحوی صرفاً صوری (یعنی، بدون هیچگونه توسلی به معنای نمادهای به‌کار برده شده) ازآنها استنتاج کردند. البته، وقتی چنین روشی پیش گرفته می‌شود بلافاصله این پرسش مطرح می‌شود که آیا نظام اصول موضوع و اصول استنتاجی که درآغاز فرض‌گرفته شده است از تمامیت برخوردار است‌یا خیر، یعنی، آیا برای استنتاج هرگزارهٔ صادق‌منطقی-ریاضی کفایت‌می‌کند یا نه، یا، [به‌سخن دیگر] آیا اصلاً گزاره‌های صادقی قابل تصور هستند (که شاید حتی به‌کمك اصول دیگری قابل اثبات باشند) که درنظام مورد بررسی قابل‌استنتاج نباشند؛ درمورد فرمولهای حساب

که این اصول موضوع و قواعد استنتاج برای تصمیم‌گیری درمورد پاسخ به هر پرسش ریاضی قابل‌بیان در این نظامها کفایت می‌کند. در زیر نشان خواهیم داد چنین نیست و برعکس، در هر دو نظام مذکور مسائل نسبتاً ساده‌ای در ارتباط با نظریهٔ اعداد وجود دارد که برمبنای اصول موضوع آنها قابل تصمیم‌گیری نیستند [۳]. این امر به‌هیچ‌وجه به‌ماهیت خاص این نظامهای تأسیس شده مربوط نمی‌شود، بلکه درمورد ردهٔ وسیعی ازنظامهای صوری صادق است؛ ازجمله، و به‌خصوص، همهٔ نظامهایی که از طریق افزودن تعدادی متناهی اصل موضوع به‌نظامهای مذکور حاصل می‌شوند [۴]، البته به‌شرط آنکه هیچ‌گونه گزارهٔ کاذبی از نوعی که دریادداشت [۳] مشخص کردیم، در اثر افزودن این اصول موضوع اثبات‌پذیر نشود.

پیش از پرداختن به جزئیات مطلب، نخست طرح اصلی اثبات را به اجمال، و بدون رعایت دقت کامل، ارائه می‌دهیم. شکل ظاهری فرمولهای یك نظام صوری (در اینجا بحث را به نظام پرینکیپیا ماتماتیکا [به‌اختصار، پرینکیپیا] محدود می‌کنیم) عبارت است از دنباله‌هایی متناهی که ازعلایم اولیه (متغیرها، ثابتهای منطقی، و پرانتزها یا علایم نقطه‌گذاری) تشکیل یافته‌اند، ومی‌توان به‌آسانی وبا دقت‌کامل بیان کرد که کدام دنبالهٔ مرکب‌ازعلایم اولیه، فرمولی بامعنی است وکدام، فرمولی بی‌معنی است [۵]. به‌طور مشابهی، اثباتها هم ازنظر صوری چیزی جز دنباله‌هایی متناهی از این فرمولها (با خواصی معین و قابل مشخص‌کردن) نیستند. البته، ازنظر ملاحظات فراریاضیاتی اهمیتی ندارد که کدام اشیاء را به‌عنوان علایم اولیه انتخاب کنیم، و ما برای مقصود خودمان‌اعداد طبیعی را به‌کار خواهیم برد [۶]. در نتیجه، هر فرمولی عبارت خواهد بود از یك دنبالهٔ متناهی از اعداد طبیعی [۷]، وهرزنجیرهٔ اثبات، دنباله‌ای متناهی مرکب از دنباله‌های متناهی اعداد طبیعی است. به‌این ترتیب، مفاهیم (گزاره‌های) فراریاضیاتی به‌مفاهیمی (گزاره‌هایی) در بارهٔ اعداد طبیعی یا دنباله‌هایی متناهی‌از آنها تبدیل‌می‌شوند [۸]؛ درنتیجه آنهاهم‌می‌توانند (لااقل بعضاً) به‌کمك تبدیل نمادهای خود نظام پرینکیپیا بیان‌شوند. به‌خصوص، می‌توان نشان دادکه مفاهیم "فرمول"،"زنجیرهٔ اثبات"،و "فرمول‌اثبات‌پذیر" در نظام پرینکیپیا قابل تعریف هستند؛ یعنی آنکه، برای مثال، می‌توانیم فرمولی مانند $F(v)$ دراین نظام با یك متغیر آزاد v (از نوع دنباله‌ای از اعداد) بیابیم [۹] به‌طوری‌که $F(v)$ وقتی برطبق معنی مفاهیم پرینکیپیا تعبیر شود، حاکی از این باشدکه: v فرمولی اثبات‌پذیر است. اکنون به‌شیوه‌ای که در زیر دیده می‌شود، گزاره‌ای تصمیم‌ناپذیر در نظام پرینکیپیا می‌سازیم یعنی گزاره‌ای چون A که نه A اثبات‌پذیر باشد و نه نقیض A.

هر فرمول پرینکیپیا راکه فقط یك‌متغیر آزاد داشته‌باشد، واین‌متغیر ازنوع اعداد طبیعی (یعنی ردهٔ رده‌ها) باشد، یك علامت رده‌ای می‌خوانیم. فرض می‌کنیم که این علایم رده‌ای به نحوی ازانحا به‌صورت یك دنباله مرتب شده باشند [۱۰]؛ آنگاه nامین علامت را با $R(n)$ نشان می‌دهیم و یادآور می‌شویم که مفهوم "علامت رده‌ای"، و نیز رابطهٔ مرتب‌کنندهٔ R، هر دو درنظام پرینکیپیا قابل تعریف هستند. حال فرض‌می‌کنیم α علامت رده‌ای دلخواهی باشد؛ دراین صورت، $[\alpha; n]$ برفرمولی دلالت می‌کند که از این طریق حاصل می‌شودکه علامتی راکه مدلولش عدد طبیعی n است به‌جای متغیر آزاد علامت رده‌ای α می‌گذاریم. رابطهٔ سه‌تایی $x = [y; z]$ هم در نظام پرینکیپیا قابل تعریف است. اکنون ردهٔ K راکه‌مرکب از اعداد طبیعی است به‌گونهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

$$n \varepsilon K = \overline{Bew\omega}\,[R(n); n] \qquad (۱)$$

(که درآن، معنای $Bew\omega\, x$ این است که: x فرمولی اثبات‌پذیر است) [۱۰ الف]. از آنجا که همهٔ مفاهیم جملهٔ تعریف‌کننده در پرینکیپیا قابل تعریف هستند، مفهوم K هم که به‌کمك آنها ساخته شده است در این نظام قابل‌تعریف است؛ یعنی، یك علامت رده‌ای چون S وجود دارد به‌طوری‌که فرمول $[S; n]$، وقتی برمبنای معنی مفاهیم پرینکیپیا تعبیر شود،این امر را بیان‌کندکه عدد طبیعی n به K تعلق دارد [۱۱]. از آنجا که S علامتی رده‌ای است، S با $R(q)$ی معینی یکی است؛ یعنی به ازای عدد طبیعی معینی چون q داریم

$$S = R(q)$$

اکنون‌نشان می‌دهیم‌که‌گزارهٔ $[R(q); q]$ دراین نظام تصمیم‌ناپذیر است [۱۲]. فرض کنیدکه گزارهٔ $[R(q); q]$ اثبات‌پذیر باشد؛ آنگاه صادق هم هست. اما دراین صورت، برمبنای تعاریفی‌که در بالا ارائه شد، q به K تعلق خواهد داشت، یعنی، بنا به (۱)، $\overline{Bew\omega}\,[R(q); q]$ برقرارخواهدبود، درحالی‌که این خلاف فرض ماست. از سوی دیگر، اگر نقیض $[R(q); q]$ اثبات‌پذیر باشد، آنگاه $\overline{q\varepsilon K}$ [۱۲ الف] یعنی، $Bew\omega\,[R(q); q]$ برقرار خواهد بود. ولی در آن صورت $[R(q); q]$، و نیز نقیض آن، هر دو اثبات‌پذیر خواهند بود، که این هم باز امری محال است.

شباهت این استدلال با تناقض ریچارد کاملاً واضح است. همچنین خویشاوندی نزدیکی هم با "تناقض دروغگو" دارد [۱۳]؛ زیرا گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر $[R(q); q]$ بیان می‌کندکه q به K تعلق دارد؛ یعنی، بنابر (۱)، $[R(q); q]$ اثبات‌پذیر نیست. بنابراین ما گزاره‌ای را در برابر خود می‌بینیم که دربارهٔ خود می‌گوید که [در پرینکیپیا] اثبات‌پذیر نیست [۱۴]. روش اثباتی راکه توضیح داده شد می‌توان به‌روشنی درموردهرنظام صوری به‌کار بست، البته به‌شرط آنکه آن نظام اولاً وقتی به‌عنوان نمایش‌دهندهٔ نظامی از مفاهیم وگزاره‌ها تعبیر شد از قدرت بیان کافی برای تعریف

→

گزاره‌ها، این پرسش با پاسخی مثبت حل وفصل شده است؛ یعنی آنکه نشان داده شده است که هرفرمول صادق حساب گزاره‌ها در واقع امر از اصول موضوع ارائه شده در پرینکیپیا ماتماتیکا نتیجه می‌شود. دراینجا همین‌کار را در مورد قلمرو وسیعتری ازفرمولها، یعنی، فرمولهای "حساب محمولات با سور مقید" انجام می‌دهیم؛ یعنی، ثابت می‌کنیم که... [هر فرمول معتبر حساب محمولات با سور مقید اثبات‌پذیر است.]

مفاهیمی که در استدلال بالا به‌کار برده شده است برخوردار باشد (بـه‌خصوص، مفهوم "فرمول اثبات‌پذیر")، و ثـانیاً هر فرمول اثبات‌پذیری در تعبیر مورد بررسی صادق باشد. در ذیل، یکی از هدفهای مـا از ارائهٔ اثبات مـذکور بـا دقت کامل، ایـن است کـه شرطی کاملاً صوری و بسیار ضعیفتر را جانشین شرط دوم کنیم.

از اینکه $[R(q); q]$ در بارهٔ خود می‌گوید کـه اثبات‌پذیر نیست، بلافاصله نتیجه می‌شود کـه $[R(q); q]$ صادق است، زیرا $[R(q); q]$ (به‌خاطر تصمیم‌نـاپذیر بودنش) واقعاً اثبات‌نـاپذیر است. پس، گزاره‌ای کـه در نظام پرینکیپیا تصمیم‌ناپذیر بود، در عین‌حال برمبنای ملاحظات فراریاضیاتی درموردش تصمیم گرفته شد. تحلیل دقیق این‌موقعیت خلاف انتظار به‌نتایج شگفت‌انگیزی در مورد اثباتهای سازگاری برای نظامهای صوری منجر می‌شود، نتایجی که با تفصیل بیشتری در بخش ۴ (قضیهٔ XI) مورد بحث قرار خواهد گرفت.

یادداشتها

۱. عنوان کتاب وایتهد و راسل به‌تاریخ ۱۹۲۵. ما به اصول موضوع نظام پرینکیپیا ماتماتیکا اصل‌موضوع بینهایت (به‌این بیان: فقط تعدادی شمارا موجود وجود دارد)، اصل موضوع تحویل‌پذیری، و اصل موضوع انتخاب را (برای همه انواع) اضافه می‌کنیم.

۲. یادآور می‌شویم که برای آنکه این نظام را کاملاً صوری کنیم باید اصول موضوع و قواعد استنتاج حساب محمولات و اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها را هم که در منابع مربوط آمده‌اند به‌آن اضافه کنیم. ملاحظاتی کـه دراین مقاله ارائه می‌کنیم همچنین در مورد نظامهای صوری (موجودی) که در سالهای اخیر توسط هیلبرت و همکاران او ساخته شده‌اند، صدق می‌کند.

۳. یعنی آنکه چنانچه دقیقتر سخن‌گوییم، گزاره‌های تصمیم‌ناپذیری وجود دارند کـه درآنها، به‌غیر از ثـابتهای منطقی ـ (نقیض)، $\vee$(یای منطقی)، (x) (بـه ازای هر)، و $=$ (اینهمانی)، هیچ مفهوم دیگری جز $+$ (جمع) و $\cdot$ (ضرب) مورد استفاده قـرار نمی‌گیرد (دوعمل اخیر هر دو برای اعداد طبیعی تعریف شده‌اند وپیشوندهای (x) هم فقط درمورد اعداد طبیعی به‌کار برده می‌شوند).

۴. در نظام پرینکیپیا فقط اصول موضوعی کـه به‌صرف تغییر نوع از یکدیگر نتیجه نمی‌شوند، اصولی متمایز به‌شمار می‌آیند.

۵. دراینجا و درادامهٔ مقاله، مقصود ما از "فرمول پرینکیپیا" فرمولی است که بدون هرگونه کوتاه‌نویسی (یعنی، بـدون کاربرد تعریف) نوشته شده باشد. همه می‌دانند که تعریفها [درنظام پرینکیپیا] فقط در امر کوتاه‌نویسی نشانه‌هـا نقش دارند و درنتیجه ازنظر اصولی قابل حذف هستند.

۶. یعنی، علایم اولیه را بـه‌گونهٔ یك‌به‌یك بـه‌بعضـی اعـداد طبیعـی می‌نگاریم.

۷. یعنی، تابعی ازنظریهٔ اعداد که به‌ازای دنباله‌ای محدود به بخش نخستین اعداد طبیعی تعریف شده‌است. (البته، اعداد را نمی‌توان به‌ترتیبی فضایی مرتب کرد.)

۸. به‌سخن دیگر، روشی که در بالاتوصیف شده‌است، تصویر یکریختی از نظام پـرینکیپیا در حوزهٔ حساب بـه‌دست می‌دهد، و کلیهٔ استدلالهای فراریـاضیاتی را هم طبعاً می‌توان در همین تصویر یکریخت ارائه کرد. این درست همان کاری است که ما در ادامهٔ مقاله درارتباط بـا ارائهٔ طرح اثبات خود انجام می‌دهیم؛ یعنی آنکه منظور مـا از "فرمول"، "گـزاره"، "متغیر"، و غیره، همواره عبارت خواهد بود از اشیاء نظیر آنها در تصویر یکریخت.

۹. در واقع می‌توان این فرمول را بـه‌آسانی نوشت (گرچه کاری نسبتاً وقتگیر است).

۱۰. برای مثال، برمبنای افزایش حاصلجمع دنبالهٔ متناهی اعـداد صحیح یعنی "علامت رده‌ای"، و درصورت وجود حـاصلجمعهای مساوی به‌ترتیب الفبای نظام.

۱۰ـ الف. خط روی Bew علامت نقیض است.

۱۱. دراین مورد هم نوشتن فرمول S درعمل هیچگونه دشواری ایجاد نمی‌کند.

۱۲. دقت کنید که "$[R(q); q]$" (یا، "$[S, q]$")، که همین معنی را دارد) صرفاً توصیف فراریاضیاتی گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر [مورد نظر] است. اما، به‌مجردی که فرمول S به‌دست آید، ما البته می‌توانیم عدد q را هم تعیین کنیم و، همراه با آن، خودگزارهٔ تصمیم‌ناپذیر را هم عملاً بنویسیم. (ازنظر اصولی این امر به‌هیچ‌وجه مشکلی ایجاد نمی‌کند. لیکن، برای آنکه با فرمولهـای مطول مواجه نشویم و از دشواریهای عملی محاسبهٔ عدد q پرهیز کنیم، [روش] ساختن گزارهٔ تصمیم‌ناپذیر را باید اندکی تغییر دهیم، مگرآنکه به‌روش کوتاه‌نویسی ازطریق تعریف که درسراسر کتاب پرینکیپیا مورد استفاده قرارگرفته است متوسل شویم.)

۱۲ـ الف. [درمتن آلمانی این عبارت $\overline{n \varepsilon K}$ چـاپ شده است، کـه اشتباهی‌چاپی است.]

۱۳. [برای ایـن منظور] ازهر تناقض معرفت شناختی دیگـری هم می‌توان برای‌اثبات مشابهی درمورد وجودگزاره‌های‌تصمیم‌ناپذیر استفاده کرد.

۱۴. علیرغم‌ظواهر امر، چنین‌گزاره‌ای شامل هیچ دور باطلی نیست، زیرا درابتدا [فقط] حکم می‌کند بـه اینکه فرمول خوشتعریف معینی (یعنی، فرمولی کـه از qامین فـرمول، برحسب ترتیب الفبایی‌نظام، توسط جایگزینی‌معینی حاصل می‌شود) اثبات‌پذیر است. تنها پس از وقوع امر (و درنتیجه، به‌سخنی، به‌حکم بخت) معلوم می‌شود که این فرمول درست همان فرمولی است که به‌کمك آن، خودگزاره بیان شده است.

♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦♦

● بخش اول مقاله‌ای از گودل با مشخصات زیر:

Kurt Gödel, "On formally undecidable propositions of principia mathematica and related systems," *From Frege to Gödel*, A source book in mathematical logic, 1879-1931; edited by Jean Van Heijenoort, Harvard University Press (1977), 596-599.

صدق نیرومندتر از اثبات است.

یوری منین