اثبات حدس تانیاما و استنتاج قضیهٔ فرما*

کنت ریبت*

ترجمهٔ رحیم زارع نهندی

فرض کنید که p، u، v، و w اعدادی صحیح‌اند و $p > 1$. اگر $u^p+v^p+w^p=0$ آنگاه $uvw = 0$.

پروفسور اندروواپلز از دانشگاه پرینستن در انتهای سه سخنرانی که در ژوئن ۱۹۹۳ در کارگاه «نظریهٔ ایواساوا، صورتهای خود ریخت، و نمایشهای p-یی» در محل مؤسسهٔ علوم ریاضی آیزک‌نیوتن کیمبریج در انگلستان ایراد کرد، شکل بالا از قضیهٔ فرما را استنتاج کرد. عنوان سخنرانیهای وایلز «خمهای بیضوی، صورتهای پیمانه‌ای، و نمایشهای گالوایی» اعلام شده بود که در عین حال که چیزهایی را به ذهن القا می‌کرد، مبهم بود. و در نتیجه، شنوندگان به روشنی نمی‌دانستند که سخنرانیها به چه نتیجه‌ای خواهد انجامید. ولی شایعاتی بر سر زبانها افتاده بود و همراه با جریان سخنرانیها، موج هیجان بالا می‌گرفت. در سومین سخنرانی، بیش از شصت ریاضیدان شرکت داشتند و خیلی از آنها دوربین عکاسی با خود آورده بودند تا این واقعهٔ مهم را ثبت کنند.

وایلز در سومین سخنرانی خود اعلام کرد که حدس تانیاما را که حدسی فوق‌العاده مهم در هندسهٔ جبری حسابی است برای ردهٔ بزرگی از خمهای بیضوی روی Q ثابت کرده است. این خمها عبارت‌اند از خمهای بیضوی «نیمه‌پایدار» یعنی خمهایی بیضوی که (عدد) هادی آنها خالی از مربع است. بیشتر حاضران می‌دانستند که قضیهٔ آخر فرما یکی از نتایج این حدس است. هرچند قضیهٔ آخر فرما جاذبهٔ خاصی برای ریاضیدانان حرفه‌ای و غیر حرفه‌ای دارد، حدس تانیاما نهایتاً از اهمیت بیشتری برای ریاضیات معاصر برخوردار است.

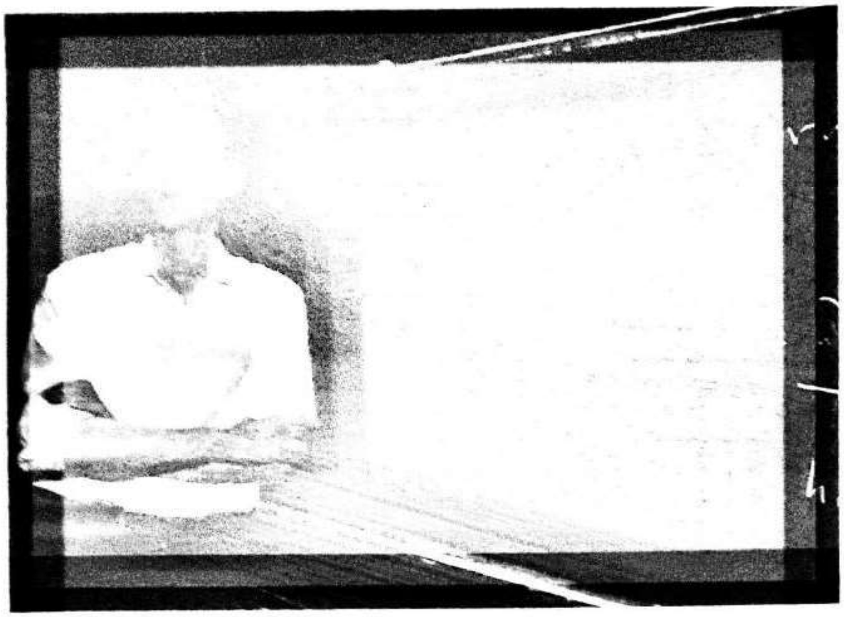
حدس یوتاکا تانیاما، به این مضمون که هر خم بیضوی روی Q پیمانه‌ای است، ابتدا به شکلی موقت و آزمایشی در کنفرانس توکیو-نیکو در اواسط دههٔ ۱۹۵۰ مطرح شد و بعداً با کارهای شیمورا و ویل به شکل شسته‌رفته‌تر فعلی درآمد. این حدس را به نامهای مختلفی مانند حدس ویل، حدس شیمورا-تانیاما، و غیره، خوانده‌اند. در صورتبندی معمولی این حدس، اشیایی از نظریهٔ نمایش (صورتهای پیمانه‌ای) به اشیایی از هندسهٔ جبری (خمهای بیضوی) نسبت داده می‌شوند. حدس می‌گوید که L-سری یک خم بیضوی روی Q را که شاخص رفتار خمِ به پیمانهٔ p برای همهٔ اعداد اول p است می‌توان با یک تبدیل انتگرالیِ سری فوریهٔ حاصل از یک صورت پیمانه‌ای یکی گرفت. حدس تانیاما حالت خاصی است از «فلسفهٔ لنگ‌لندز» که شامل تعدادی حدس مرتبط با هم است که لنگ‌لندز و همکارانش آنها را مطرح کرده‌اند.

هرچند فهم حدسهای لنگ‌لندز مستلزم آشنایی زیاد با نظریهٔ صورتهای خودریخت است، شکلی از حدس تانیاما را می‌توان تنها به کارگیری نگاشتهای تحلیلی مختلط بیان کرد [۷]. به این منظور، خمهای بیضوی روی Q را با تقریب $\bar{\mathbf{Q}}$- یکریختی درنظر می‌گیرند؛ اینها رویه‌های ریمانی فشرده‌ای از گونهٔ یک هستند که به وسیلهٔ معادله‌های چند جمله‌ای با ضرایب گویا قابل تعریف‌اند. حدس تانیاما حاکی است که برای هر رویهٔ S با این خصوصیات، یک زیرگروه همنهشتی Γ از $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ و یک نگاشت تحلیلی غیر ثابت $\Gamma\backslash\mathcal{H} \to S$ وجود دارد که در آن، $\mathcal{H}$ نیمصفحهٔ بالایی مختلط است.[۱]

این موضوع که قضیهٔ فرما از حدس تانیاما نتیجه می‌شود، اولین بار در سال ۱۹۸۵ در سخنرانی گ. فرای در اوبر وولفاخ مطرح شد. وی توضیح داد که جوابی نابدیهی برای $a^p + b^p = c^p$ (که p عددی اول و فرد است) ما را به خم بیضوی نیمه پایداری هدایت می‌کند که ظاهراً در حدس تانیاما صادق نیست[۲، ۳]. خم فرای، خم بیضوی E است که به‌وسیلهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم $y^2 = x(x-a^p)(x+b^p)$ معین می‌شود که سادگیِ گول‌زننده‌ای دارد. (ممکن است لازم باشد قبل از نوشتن معادلهٔ خم، فرضیات اولیه‌ای روی (a,b,c) اعمال کنیم.) فرای در نوشته‌ای که در اوبروولفاخ توزیع کرد، اثبات ناقصی از این حکم را که خم او پیمانه‌ای نیست، عرضه کرد. معنیِ این

---

۱. $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ گروه ماتریسهای 2×2 با دترمینان ۱ و درایه‌های صحیح است و $\Gamma\backslash H$ مجموعهٔ مدارهای کنش گروه Γ روی $\mathcal{H}$ است که آن را با حوزه‌ای از صفحهٔ مختلط که حوزهٔ اساسی Γ نامیده می‌شود، یکی می‌گیرند. -م.



اندرو وایلز هفت سال برای اثبات قضیهٔ فرما تلاش کرد.

حکم، استلزام «تانیاما ⟸ فرما»ست. وی امیدوار بود که اثباتش را متخصصان خمهای پیمانه‌ای تکمیل کنند.

فرای بااین نکته شروع می‌کند که اگر E پیمانه‌ای باشد آنگاه $E[p]$، گروه نقاط p بخشی E نیز پیمانه‌ای خواهد بود. این بدان معنی است که $E[p]$ اگر به صورت یک گروه جبری روی $\mathbf{Q}$ درنظر گرفته شود، می‌تواند در ژاکوبین یک خم جبری روی $\mathbf{Q}$ که به شکلی متعارف با یک خارج قسمت مناسب $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ متناظر می‌شود، نشانده شود. آنگاه از دو حدسی که سِر پس از آگاهی از ساختار فرای مطرح کرد، نتیجه می‌شود که $E[p]$ بایک گروه $\Gamma_{\circ}(2)$ که زیرگروه همنهشتی مشخصی از $\mathbf{SL}(2,\mathbf{Z})$ است متناظر می‌شود. این یک تناقض است، زیرا ژاکوبین $\Gamma_{\circ}(2)\backslash\mathcal{H}$ صفر است.

من دریافتم که حدسهای سِر تعمیم مسأله‌ای هستند که من در هنگام مطالعهٔ مقالهٔ میزر [۵] آن را فرمولبندی کرده بودم. در ژوئیهٔ ۱۹۸۶، تقریباً یک سال پس از مطرح شدن حدسهای سِر، موفق به اثبات آنها شدم [۸، ۹]. وقتی اعلام کردم که استلزام «تانیاما ⟸ فرما» را ثابت کرده‌ام، جامعهٔ ریاضی متقاعد شد که قضیهٔ آخر فرما باید صحیح باشد. همه انتظار داشتیم حدس تانیاما روزی به قضیه تبدیل شود، ولی تصور عمومی این بود که اثبات حدس تانیاما به این زودیها قابل حصول نیست.

وایلز به محض اینکه متوجه شد قضیهٔ فرما از این حدس نتیجه می‌شود، علی‌رغم این نظر که اثبات حدس تانیاما به‌راحتی قابل حصول نیست، دست به کار شد تا آن را ثابت کند. وی در اثبات خویش از نتایج و روشهای کارهای قبلی خود (ازجمله، مقالات مشترک با کوتس و میزر) و از آثار افراد متعددی از جمله فالتینگز، گرینبرگ، هیدا، کولیواگین، میزر، ریبت، روبین، تیلوبین استفاده کرده است. یک مانع اصلی در سر راه وایلز، پس از آنکه پیش چاپ مقاله‌ای از فلک [۱] به دستش رسید، رفع شد.

در پاراگرافهای زیر خلاصه‌ای از اثبات وایلز در سخنرانیهای کیمبریج می‌آید. مقالهٔ ۲۰۰ صفحه‌ای وایلز که وی قصد دارد آن را به زودی انتشار دهد جزئیات اثبات را دربر خواهد داشت.

برای اثبات اینکه یک خم بیضوی نیمه پایدار E روی $\mathbf{Q}$ پیمانه‌ای است، وایلز عدد اول و فرد l را در نظر می‌گیرد، که در عمل ۳ یا ۵ فرض می‌شود. یک نمایش lای به صورت $\rho_l = \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}(2,\mathbf{Z}_l)$ به E نظیر می‌شود که ازکنش $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ روی نقاط بخشی l توانی E حاصل می‌گردد (برای کسب اطلاعات مقدماتی لازم می‌توانید به یکی از کتابهای جدید در زمینهٔ خمهای بیضوی از قبیل [۱۲] مراجعه کنید). خم بیضوی E در حدس تانیاما صدق می‌کند اگر و تنها اگر ρ_l «پیمانه‌ای» باشد به این معنی که به یک صورت ویژهٔ تیزه‌ای باوزن ۲ به طور معمول نظیر شود. نمایش ρ_l پیمانه‌ای «به‌نظر می‌آید» زیرا دارای دترمینان مناسب بوده و در شرایط موضعی مناسب صدق می‌کند.

به زبان غیر دقیق می‌توان گفت که وایلز اثبات می‌کند نمایشی مانند ρ_l پیمانه‌ای است اگر پیمانه‌ای «به‌نظر آید» و تحویل آن به پیمانهٔ l یعنی نمایش $\bar{\rho}_l : \mathrm{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \to \mathbf{GL}(2,\mathbf{F}_l)$ در شرایط زیر صدق کند. (۱) پوشا باشد و (۲) خودش پیمانه‌ای باشد. شرط (۲) به این معنی است که $\bar{\rho}_l$ به یک نمایش که پیمانه‌ای است ارتقا می‌یابد؛ به‌عبارت دیگر، می‌خواهیم ρ_l با یک نمایش پیمانه‌ای همنهشت باشد. (در بسیاری از حالات، در مطالعهٔ $\bar{\rho}_l$ می‌توانیم به جای لغت «پوشا» لغت «تحویل ناپذیر» را بگذاریم.)

استدلال وایلز به زبان نظریهٔ دگردیسی میزر [۶] بیان می‌شود. وایلز دگردیسهایی نمایشی چون $\bar{\rho}$ را که در (۱) و (۲) صدق کنند در نظر می‌گیرد و توجه خود را به دگردیسهایی معطوف می‌کند که ارتباط دادن آنها به صورتهای تیزه‌ای با وزن ۲ موجه باشد. (وی لازم می‌داند که دترمینان دگردیسی، سرشتنمای سیکلوتومیک باشد و شرطی موضعی بر عدد اول l اعمال می‌کند. مثلاً اگر $\bar{\rho}$ فوق تکین باشد، لازم می‌داند که دگردیسی به طور موضعی در l به یک گروه بارسوتی-تیت وابسته شود.) وایلز نشان می‌دهد که صورت «جامع» (universal) چنین دگردیسی، پیمانه‌ای است و به این ترتیب، یک حدس میزر را ثابت می‌کند. برای انجام این کار وی باید نشان بدهد که یک نگاشت طبیعی φ بین حلقه‌های موضعی، که پیشایش پوشاست، درواقع یک یکریختی است. در اینجاست که وایلز ایده‌هایی متعلق به میزر، هیدا، تیلوبین، فلک، کولیواگین و دیگران را به کار می‌گیرد. برای اثبات یک به یک بودن φ، وایلز به مطالعهٔ جایگزین گروه سلمر کلاسیک برای مربع متقارن ارتقای $\bar{\rho}$ به نمایش پیمانه‌ای ρ، کشانده می‌شود و آن را با روشهایی برگرفته

از روشهای کولیواگین و فلک محدود می‌سازد. (وی در اغلب حالات، مرتبهٔ گروه سلمر را دقیقاً محاسبه می‌کند).

وایلز پس از اثبات این قضیهٔ رهگشا، نشان می‌دهد که E پیمانه‌ای است. وی نخست حالت $l = ۳$ را بررسی می‌کند. قضیه‌ای متعلق به تانل [۱۳]، که در آن از کارهای سایتو، شینتانی و لنگ‌لندز استفاده شده است، نشان می‌دهد که $\bar{\rho}_3$ در (۲) صدق می‌کند اگر در (۱) صدق کند و در نتیجه E پیمانه‌ای است هرگاه $\bar{\rho}_3$ پوشا باشد.

یک مسألهٔ وسوسه‌انگیز که وایلز آن را در انتهای سخنرانی دوم خود مطرح کرد این بود که اگر $\bar{\rho}_3$ پوشا *نباشد* چه باید کرد. مثلاً فرض کنید $\bar{\rho}_3$ تحویلپذیر باشد. در این صورت، آیا می‌توان در بازی نهایی برنده شد؟ وایلز راه حل شگفت‌انگیز خود را برای این مسأله در سخنرانی سومش عرضه کرد. وی با به کار بردن قضیهٔ تحویل ناپذیری هیلبرت و قضیهٔ چگالی چبوتارو (Cebotarev) یک خم بیضوی نیمه پایدار کمکی چون E' می‌سازد که نمایش آن به پیمانهٔ ۳ در شرط (۱) صدق می‌کند و نمایش آن به پیمانهٔ ۵ با $\bar{\rho}_5$ یکریخت است. علت امکان‌پذیری این ساختار این است که خم پیمانه‌ای $X(5)$ از گونهٔ صفر است. وایلز با بهکارگیری مجدد قضیهٔ رهگشای خود نشان می‌دهد E' پیمانه‌ای است. بنابراین $\bar{\rho}_5$ پیمانه‌ای است زیرا می‌توان آن را حاصل از E' درنظر گرفت. پس از کاربرد مجدد قضیهٔ رهگشا، این بار برای ρ_5، نتیجه می‌شود که E پیمانه‌ای است.

اثبات حدس تانیاما واقعهٔ بسیار مهمی برای ریاضیات معاصر است زیرا از یک طرف توان «ابزارهای» مجردی را که برای حل مسائل ملموس دیوفانتوسی روی هم انباشته‌ایم، به روشنی نشان می‌دهد و از طرف دیگر ما را به میزان قابل توجهی به هدفِ پیوند دادن نمایشهای خودریخت با واریته‌های جبری نزدیک می‌سازد.

مراجع

1. M. Flach, *A finiteness theorem for the symmertic square of an elliptic curve*, Invent. Malth. **109** (1992), 307-327.
2. G. Frey, *Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations*, Ann. Univ. Sarav. **1** (1986), 1-40.
3. ———, *Links between solutions of A-B=C and elliptic curves*, Lecture Notes in Math. **1380** (1989), 31-62.
4. R. P. Langlands, *Base change for* **GL(2)** , Ann. of Math. Stud., vol. 96, Princeton Univ. Press , Princeton, NJ, 1980.
5. B. Mazur, *Modular curves and the Eisenstein ideal*, Publ. Math. IHES **47** (1977), 33-186.
6. ———, *Deforming Galois representations*, Galois Groups over **Q**, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 16, Springer-Verlag Berlin and New York , 1989, pp. 385-437.
7. ———, *Number theory as gadfly*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), 593-610.
8. K. A. Ribet, *On modular representations of* Gal ($\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$) *arising from modular forms*, Invent. Math. **100** (1990), 431-476.
9. ———, *From the Taniyama-Shimura Conjecture to Fermat's Last Theorem*, Ann . Fac. Sci. Toulouse Math. **11** (1990), 116-139.
10. J- P. Serre, *Lettre àJ-F. Mestre*, 13 août 1985, Contemp. Math. **67** (1987), 263-268.
11. ———, *Sur les représentations modulaires de degré 2 de* Gal ($\bar{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$), Duke Math. J. **54** (1987), 179-230.
12. J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves*, Graduate Texts in Math., vol 106, Springer, New York, 1986.
13. J. Tunnell, *Artin's conjecture for representations of octahedral type*, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **5** (1981), 173-175.

* * * * **

• Kenneth A. Ribet, "Wiles proves Taniyama's conjecture; Fermat's last theorem follows", *Notices Amer. Math. Soc.*, (6) **40** (1993) 575-576.

*کنت ریبت، دانشگاه کالیفرنیا در برکلی آمریکا