رهیافتی مقدماتی به گروه هیولا•

کریستوفر سیمونز*

ترجمهٔ محمدرضا درفشه

۱. مقدمه

یافتن گروه سادهٔ متناهی هیولای فیشر-گریس $\mathbb{M}$ از مرتبهٔ ۸۰۸۰۱۷۴۲۴۷۹۴۵۱۲۸۷۵۸۸۶۴۵۹۹۰۴۹۶۱۷۱۰۷۵۷۰۰۵۷۵۴۳۶۸۰۰۰۰۰۰۰۰۰ یکی از کشفیات چشمگیر و پررمز و راز پنجاه سال گذشته است. متأسفانه یادگیری رهیافتهای موجود به این موضوع بسیار مشکل است. در این مقاله رهیافتی نسبتاً مقدماتی عرضه می‌شود. ما با تشریح طرز ساخت کوچک‌ترین گروه سادهٔ متناهی ناآبلی (از مرتبهٔ ۶۰)، نشان می‌دهیم که این طرز ساخت خیلی شبیه ساختن گروه $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ است.

در بخش ۲، قبل از اینکه بحث اصلی خود را شروع کنیم، به بحث مختصری دربارهٔ هیولا، هم به عنوان یک گروه سادهٔ متناهی و هم از لحاظ خواص شگفت‌انگیزش می‌پردازیم. حسن انجام چنین کاری این است که خوانندگانی که فقط آشنایی اندکی با هیولا دارند درک بهتری از نقش آن در ریاضیات به‌دست می‌آورند. این بخش، علی‌رغم کوتاه بودنش، قلمرو وسیعی را در بر می‌گیرد؛ بنابراین خواننده را به منابع دیگری برای مطالعات بیشتر ارجاع می‌دهیم (ر.ک. [۱]، [۲]، یا [۶]). در بخش ۳ با گراف چهاروجهی شروع می‌کنیم و از گروههای کاکستر و روابط اضافی معینی استفاده می‌کنیم تا یک نمایش گروهی برای گروه سادهٔ متناهی A_5 به‌دست آوریم. سپس در بخش ۴ می‌بینیم که این روش، وقتی دربارهٔ گرافهای متفاوتی اعمال می‌شود نه تنها ما را به گروه $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ بلکه به گروههای سادهٔ متناهی دیگری نیز، هدایت می‌کند.

۲. نظری اجمالی به هیولا

نخستین اشارات به وجود هیولا ضمن جستجوی فشردهٔ ریاضیدانان برای یافتن گروههای سادهٔ متناهی در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ مطرح شد و این همزمان با تلاشهایی بود که برای رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی صورت می‌گرفت. در واقع، تنها پس از اینکه این رده‌بندی اساساً به انجام رسید، رابرت گریس وجود هیولا را ثابت کرد. طبق این رده‌بندی، هر گروه سادهٔ متناهی متعلق به یکی از پنج خانوادهٔ زیر است:

(۱) گروههای دوری C_p که p یک عدد اول است؛

(۲) گروههای متناوب A_n که $n \geq 5$ (A_n گروه تمام جایگشتهای زوج روی n حرف است؛ A_5 که مرتبه‌اش ۶۰ است، کوچک‌ترین این گروههاست)؛

(۳) گروههای ماتریسی $L_n(q)$، $O_n^{\pm}(q)$، $U_n(q)$ و $Sp_n(q)$ (اینها گروههای ساده‌ای هستند که از گروههای ماتریسی nبعدی خطی، متعامد، یکانی، و همتافته روی میدانهای متناهی مرتبهٔ q حاصل می‌شوند)؛

(۴) گروههای استثنایی نوع لی؛

(۵) بیست‌وشش گروه «پراکنده» (شامل هیولا).

وجود اولین چهار خانوادهٔ نامتناهی بالا با استفاده از نظریهٔ اعداد، نظریهٔ مقدماتی گروههای جایگشتی، جبرخطی، و هندسهٔ لی کاملاً قابل فهم است. خانوادهٔ پنجم شامل ۲۶ گروه سادهٔ متناهی است که به هیچ‌کدام از خانواده‌های دیگر تعلق ندارند. هیولا بزرگ‌ترین گروه در میان این گروههای پراکنده است، و نوزده گروه پراکندهٔ دیگر به عنوان تصویرهای همریخت زیرگروههای هیولا ظاهر می‌شوند. علی‌رغم پژوهشهای بسیارگسترده، گروههای پراکنده هنوز هم اسرارآمیزند، بنابراین، بهتر شناختن هیولا باعث می‌شود شناخت ما از گروههای متناهی در حالت کلی بهتر شود. اثباتی از رده‌بندی گروههای سادهٔ متناهی که حصول آن در اوایل دههٔ ۱۹۸۰ اعلام شد طولانی‌تر از برهانهای سنتی در ریاضیات است. این اثبات شامل هزاران صفحه ریاضیات مشکل و تخصصی است، که همهٔ آن چاپ نشده است. برای رفع این نقصان، ریچارد لیونز[۱] و راِنلد سالومن[۲] رهبری یک برنامهٔ بلندپروازانه و فعال را به‌عهده گرفته‌اند تا برهان تجدیدنظرشده وکاملی از رده‌بندی ارائه دهند. در زمان نوشته شدن این مقاله، مایکل اشباخر[۳] و استیون اسمیت در حالت تجدید نظر در یک پیش‌چاپ ۱۱۹۶ صفحه‌ای دربارهٔ حالت به اصطلاح شبه‌نازک[۴] هستند تا شکافی را که

1. Richard Lyons 2. Ronald Solomon 3. Michael Aschbacher

4. quasi-thin

در اثبات اولیه وجود دارد پرکنند. با وجود آنکه درستیِ رده‌بندی چندان محل تردید نیست، علاقهٔ شدیدی وجود دارد که اثبات جدید و کاراتری به‌دست آید.

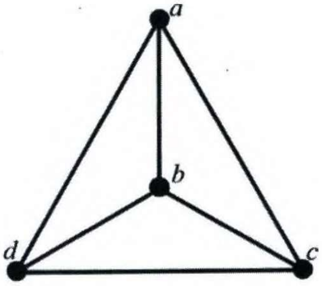
اما، توجه بیش از حد به هیولا به علت نقش آن در نظریهٔ گروهها نیست بلکه بیشتر به خاطر پدیدهٔ معجزه‌آسای «مون‌شاین»[۱] در مورد آن است. در اواخر دههٔ ۱۹۷۰، جان مکای[۲] ارتباط عجیبی بین جدول سرشت هیولا و توابع پیمانه‌ای یافت. جدول سرشت هیولا یک جدول ۱۹۴ × ۱۹۴ متشکل از اعداد مختلط است که اثرهای نمایشهای تحویل‌ناپذیر آن روی رده‌های مزدوجی هیولا هستند. سه عدد اول در اولین ستون (متناظر با ردهٔ مزدوجی همانی) جدول عبارت‌اند از: ۱، ۱۹۶۸۸۳، و ۲۱۲۹۶۸۷۶. مکای این پرسش را مطرح کرد که آیا برابری ۱ + ۱۹۶۸۸۳ = ۱۹۶۸۸۴ ارتباط واقعی بین جدول سرشت هیولا و تابع پیمانه‌ای بیضوی زیر برقرار می‌کند یا نه:

$$j(z) = \frac{۱}{q} + ۱۹۶۸۸۴q + ۲۱۴۹۳۷۶۰q^{۲} + \cdots$$

(که $q = e^{۲\pi i z}$). اگرچه در وهلهٔ اول باورکردنی نبود، جان کانوی[۳]، سایمن نورتن[۴]، و جان تامپسن[۵] نشان دادند که چنین ارتباطی وجود دارد. اصطلاح «مون‌شاین» هم به جنبهٔ رمزآمیز، یا تاریک و روشن این مفهوم، و هم منشأ «قاچاقی» آن در عددشناسی[۶] اشاره دارد.[۷] نه تنها به‌خاطر ارتباط بین اولین ستون جدول سرشت و تابع پیمانه‌ای بیضوی (توجه کنید که داریم ۱ + ۱۹۶۸۸۳ + ۲۱۲۹۶۸۷۶ = ۲۱۴۹۳۷۶۰ و روابط مشابه برای ضرایب مرتبهٔ بالاتر j وجود دارد)، بلکه همچنین با بررسی ستونهای دیگر، ارتباطی فوق‌العاده و قوی بین رده‌های مزدوجی هیولا و رده‌ای جالب از توابع پیمانه‌ای آشکار می‌شود. پدیدهٔ به‌اصطلاح مون‌شاین دو زمینهٔ ریاضی را که ظاهراً ارتباطی با هم ندارند به یکدیگر مربوط می‌کند. در سال ۱۹۹۸، ریچارد بورچردز به‌خاطر تحقیقاتش دربارهٔ اثبات حدسهای مربوط به مون‌شاین موفق به دریافت نشان فیلدز شد. به علاوه، وی ارتباط بین هیولا و توابع پیمانه‌ای را با استفاده از اطلاعاتی دربارهٔ جبرهای عملگرهای رأسی[۸] در مبحث نظریهٔ میدانهای همدیس ثابت کرد. بورچردز به‌جای ساده‌تر کردن موضوع، با نشان دادن پیوندهای مخفی بین سه زمینهٔ جداگانهٔ ریاضیات: گروههای سادهٔ متناهی، توابع پیمانه‌ای، و جبرهای عملگرهای رأسی باعث شد که توجه به هیولا بسیار افزایش یابد.

هیولا هم به‌خاطر نقشی که در گروههای متناهی دارد و هم به دلیل ارتباط آن با حدسهای مربوط به مون‌شاین، امروز جایگاه رفیعی در ریاضیات دارد. در بقیهٔ این مقاله یک راه مقدماتی برای دسترسی به این مفهوم که به هیچ‌وجه مقدماتی نیست، ارائه می‌دهیم. امیدواریم که این راه، یا روشهای سادهٔ دیگر، سرانجام به توصیف رضایت‌بخش‌تری از موضوع مورد بحث ما منجر شود.

1. moonshine 2. John McKay 3. John H. Conway
4. Simon Norton 5. John Thompson
۶. numerology؛ مبحثی مبتنی بر اعتقاد به اسرارآمیز بودن اعداد. ــ م.
۷. کلمهٔ moonshine در زبان انگلیسی هم به‌معنای «مهتاب» و هم به‌معنای «مشروب یا به‌طور کلی جنس قاچاق» است. پدیدهٔ مون‌شاین نخست به‌صورت رابطه‌های اسرارآمیز عددی به‌نظر می‌رسید. ــ م.
8. vertex operator algebras



شکل ۱ نمودار چهار رأسی $K_۴$

۳. از گراف چهاروجهی تا $A_۵$

گروه چهار وجهی کاکستر. بحث خود دربارهٔ گروههای سادهٔ ناآبلی را با مطالعهٔ گراف چهاروجهی $K_۴$ آغاز می‌کنیم. این گراف، گرافی کامل با چهار رأس است که آن را نمودار چهار رأسی می‌نامیم (شکل ۱).

اکنون می‌خواهیم گروهی به نمودار چهار رأسی نسبت دهیم. اگر گروه تقارنی[۱] این گراف را در نظر بگیریم، در می‌یابیم که این گروه با گروه متقارن $S_۴$ مرتبهٔ ۲۴ = !۴ یکریخت است، که البته آنقدر کوچک است که نمی‌تواند هیچ گروه سادهٔ متناهی ناآبلی را در بر بگیرد. برای اینکه چیزی به‌دست آوریم باید روش دیگری برای نسبت دادن یک گروه به نمودار چهار رأسی پیدا کنیم. این عمل را با در نظر گرفتن گروه کاکستر گراف انجام می‌دهیم. ابداع نظریهٔ گروههای کاکستر به اوایل دههٔ ۱۹۳۰ برمی‌گردد (یک مرجع عالی دربارهٔ گروههای کاکستر، [۴] است). گروه کاکستر یک گراف عبارت است از گروهی که با عناصر (نابدیهی) r_i که به رأسهای گراف نسبت داده می‌شود پدید می‌آید و این عناصر در روابط زیر صدق می‌کنند:

(i) $r_i^۲ = ۱$ به‌ازای هر رأس i؛

(ii) $(r_ir_j)^۲ = ۱$ وقتی که رئوس i و j توسط یالی به هم متصل نباشند؛

(iii) $(r_ir_j)^۳ = ۱$ وقتی که رئوس i و j توسط یالی به هم متصل باشند.

می‌توانیم گروه کاکستر یک گراف n رأسی را بزرگ‌ترین گروهی در نظر بگیریم که با n برگردان[۲] (عضو مرتبهٔ ۲) متمایز تولید می‌شود به طوری که حاصلضرب دو برگردان متناظر با دو رأس نامتصل به‌هم از مرتبهٔ ۲ و حاصلضرب دو برگردان متناظر با دو رأس متصل از مرتبهٔ ۳ است.

هر گروه G، مانند یک گروه کاکستر، که طول روابط آن عددی زوج باشد (بنا به تعریف طول یک رابطه عبارت است از تعداد مولدهایی ــ با احتساب تکرارها ــ که در آن رابطه موجود است.) دارای زیرگروهی نرمال با شاخص ۲ می‌باشد که شامل عناصری است که بتوان آنها را به‌صورت حاصلضرب تعداد زوجی از مولدها نوشت. این زیرگروه را زیرگروه زوج G می‌نامیم و با $\frac{۱}{۲}G$ نمایش می‌دهیم.

اکنون فرض کنید G گروه کاکستر متناظر با نمودار ۴ رأسی است، گروهی که به علل روشن به گروه کاکستر چهاروجهی مشهور است. بنابراین، G با چهار برگردان تولید می‌شود، که در آن حاصلضرب هر دو مولد متمایز از مرتبهٔ ۳ است. متأسفانه، G یک گروه نامتناهی است. در واقع، این گروه حتی شامل عناصری از مرتبهٔ نامتناهی است. با یافتن برخی از این عناصر به کار خود ادامه می‌دهیم. برای انجام چنین کاری ابتدا زیرگروههای نامتناهی معین از G را در نظر می‌گیریم.

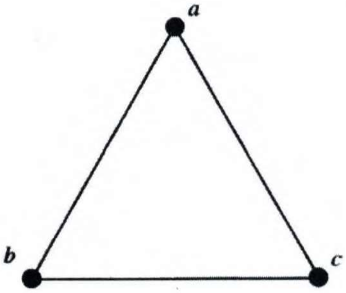
1. symmetry group 2. involution

در گراف Γ، nبَرِ آزاد[1] در Γ را به‌صورت یک دور به طول n تعریف می‌کنیم به‌طوری که هر رأس در این دور فقط یک‌بار ظاهر شود و دقیقاً به دو رأس دیگر در این دور متصل باشد. nبر آزاد ماکسیمال در Γ عبارت است از یک nبر آزاد به‌طوری که Γ شامل mبر آزادی با شرط $m > n$ نباشد.

برای نمودار ۴ رأسی، nبرهای آزاد ماکسیمال عبارت‌اند از وجوه مثلثی چهاروجهی. تذکر می‌دهیم که این ۳برها تحت گروه تقارنی نمودار ۴ رأسی با همدیگر هم‌ارزند. اکنون یک ۳بر دلخواه را انتخاب می‌کنیم، مثلاً وجهی که رئوس آن a، b، و cاند (شکل ۲) وگروه کاکستر H را که توسط برگردانهای r_a، r_b، و r_c، متناظر با رئوس این ۳بر ماکسیمال پدید می‌آید در نظر می‌گیریم. خوشبختانه درک ساختار H مشکل نیست. در واقع در نظریهٔ کاکستر ثابت می‌شود که همهٔ گروههای کاکستر با گروههایی که توسط تقارنهای محوری تولید می‌شوند یکریخت‌اند، بنابراین کافی است ببینیم H به عنوان یک گروه تقارنی محوری چگونه عمل می‌کند. نحوهٔ عمل این گروه در صفحهٔ دوبعدی بسیار زیباست.

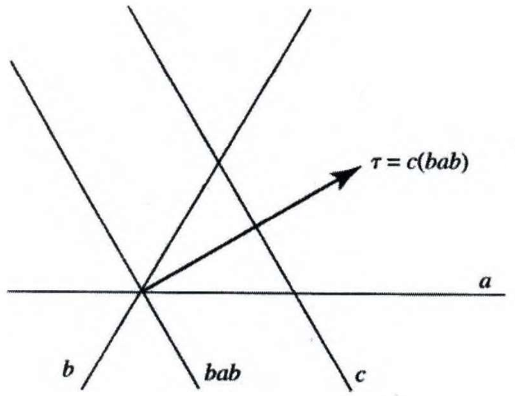
در اینجا برای سهولت در نوشتن، عناصر r_a، r_b، و r_c را به ترتیب با صورتهای اختصاری a، b، و c نمایش می‌دهیم. در این صورت، این عناصر متناظرند با تقارنهای محوری (در یک صفحهٔ ۲بعدی) نسبت به محورهای نشان داده‌شده در شکل ۳. (توجه داشته باشید که ما از یک حرف برای نشان دادن رأس، مولد گروه کاکستر، یک خط در صفحهٔ دوبعدی، و تقارن در صفحه نسبت به آن خط، استفاده می‌کنیم.) می‌دانیم که این تقارنها روابط داده‌شدهٔ کاکستر را برآورده می‌سازند. تقارنها به‌طور طبیعی از مرتبهٔ ۲ هستند، و چون زاویهٔ بین هر دو تا از خطوط a، b، و c مساوی ۶۰ درجه است، حاصلضرب هر دو تقارن محوری دلخواه یک دوران با زاویهٔ ۱۲۰° حول نقطهٔ برخورد محورهای تقارن است، و در نتیجه از مرتبهٔ ۳ می‌باشد.

اکنون با در نظرگرفتن مزدوج تقارن a با b عضو جدیدی از H می‌سازیم. این عنصر عبارت است از bab^{-1}، که می‌توان آن را به صورت bab نوشت زیرا $b = b^{-1}$. اگر تصویر a تحت تقارن b را در نظر بگیریم آنگاه خط جدیدی حاصل می‌شود که آن را در شکل ۳ با bab نمایش می‌دهیم. عنصر bab از گروه به‌عنوان تقارن نسبت به همین محور عمل می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم τ عنصری حاصل از ترکیب تقارنهای bab و c است. یعنی $\tau = c(bab) = cbab$. با آزمایش عمل τ بر صفحه، در می‌یابیم که این عنصر تمام نقاط صفحه را در جهتی که در شکل ۳ نمایش داده‌ایم منتقل می‌کند. از خواننده می‌خواهیم که درستی ادعاهای فوق را با دنبال کردن اثر نقاط تحت تقارنهای یادشده بررسی کند.



شکل ۲ یک ۳بر ماکسیمال در $K_۴$

1. free n-gon



شکل ۳ گروه تقارنی محوری H

انتقالها در صفحه از مرتبهٔ نامتناهی‌اند، پس $o(\tau) = \infty$. چون ما با گروههای متناهی سروکار داریم، باید کاری در مورد τ انجام دهیم. یادآور می‌شویم که تعداد نامتناهی انتقال در H وجود دارد و این انتقالها یک شبکهٔ یکریخت یا $\mathbb{Z}^۲$ تشکیل می‌دهند. انتقال در H انتقال اولیه نامیده می‌شود (نسبت به H) اگر مساوی توانی بزرگ‌تر از ۱ از انتقال دیگری در H نباشد.

یک گروه بسیار متناهی. برای رسیدن به گروهی از مرتبهٔ متناهی، ساده‌ترین راهِ برخورد با عنصر τ که مرتبه‌اش نامتناهی است این است که اصرار ورزیم مرتبهٔ آن مساوی یک است؛ هرچند این موضوع در وهلهٔ اول ممکن است نامعقول به‌نظر برسد، اما چیزی که در ذهن ما وجود دارد این است که یک رابطهٔ جدید یعنی $\tau = ۱$ را به H بیفزاییم. این عمل را تورم‌کاهی[1] انتقال می‌نامیم. چون تمام انتقالهای اولیه در H مزدوج‌اند، با این عمل تمامی انتقالها در H مورد تورم‌کاهی قرار می‌گیرند؛ بنابراین مهم نیست که چه τی خاصی انتخاب کنیم.

ضمناً یادآور می‌شویم که رابطهٔ $\tau = ۱$ معادل $c = bab$ است. بنابراین با افزودن این رابطه به گروه $H = \langle a, b, c\rangle$ که توسط a، b، و c تولید می‌شود گروهی یکریخت با گروه متناهی کاکستر $\langle a, b\rangle$ حاصل می‌شود که توسط a و b تولید می‌گردد. گروه $\langle a, b\rangle$ مرکب از تقارنهای a، b، و bab و دورانهای ۰، ۱۲۰ و ۲۴۰ درجه حول نقطهٔ برخورد خطوطی است که a و b را تعیین می‌کنند. چنین گروهی با گروه دووجهی مرتبهٔ ۶، و در نتیجه با $S_۳$ یکریخت است. در زمینه‌ای وسیع‌تر، چیز بسیار متفاوتی حاصل می‌شود.

می‌توانیم گروه جدید $G_۱$ را گروهی تعریف کنیم که توسط مولدهای گروه کاکستر چهاروجهی G تولید می‌شود، و روابط حاکم بر آن عبارت‌اند از روابط کاکستر همراه با روابط تورم‌کاهی به این مضمون که انتقالهای τ حاصل از همهٔ چهار ۳بر آزاد ماکسیمال در $K_۴$ از مرتبهٔ ۱ هستند. این تورم‌کاهی‌ها قدری شدیدتر از آن هستند که چیز جالبی از آنها به بار آید. گروه $G_۱$ فقط دو عنصر دارد و زیرگروه زوج آن، $\frac{۱}{۲}G_۱$، گروه بدیهی از مرتبهٔ ۱ است. برای ملاحظهٔ این مطلب توجه کنید که حاصل تورم‌کاهی عبارت است از $c = bab$ و $d = bab$ و از این رو $c = d$. همین طور تمام چهار برگردان تولیدکنندهٔ $G_۱$ با هم مساوی‌اند.

1. deflating

کوچک‌ترین گروه سادهٔ ناآبلی. البته در فرایند تورم‌کاهی مجبور نبودیم اصرار کنیم که مرتبهٔ τ مساوی ۱ باشد. می‌توانستیم فقط لازم بدانیم که مرتبه‌اش یک عدد متناهی باشد. به عنوان مثال، می‌توانیم رابطهٔ $\tau^۲ = ۱$ را در نظر بگیریم. این عمل را تورم‌افزایی انتقال می‌نامیم. و باز، به علت اینکه تمام انتقالهای اولیه در H مزدوج‌اند، اثر این عمل این است که تمام انتقالهای H مورد تورم‌افزایی قرار می‌گیرند.

اکنون $G_۲$ را گروهی تعریف می‌کنیم که توسط مولدهای G تولید شود به‌طوری که روابط حاکم بر آن هم روابط کاکستر باشند و هم روابط تورم‌افزایی که ایجاب می‌کنند تمام انتقالهای τ که از ۳برهای آزاد ماکسیمال در $K_۴$ ناشی می‌شوند از مرتبهٔ ۲ باشند. این بار درمی‌یابیم که $G_۲$ دارای مرتبهٔ ۱۲۰ و با گروه متقارن روی ۵ حرف، $S_۵$، یکریخت است. زیرگروه زوج، $\frac{۱}{۲}G_۲$، با گروه متناوب روی ۵ حرف، $A_۵$، یکریخت است. البته $A_۵$ کوچک‌ترین گروه سادهٔ ناآبلی است.

ساختار $G_۲$ را می‌توان چنین دریافت که اگر a را به جایگشت (۱۵)، b را به (۲۵)، c را به (۳۵)، و d را به (۴۵) بنگاریم، آنگاه تصاویر a، b، c، و d گروه $S_۵$ را پدید می‌آورند و در تمام روابط خواسته‌شده در $G_۲$ صدق می‌کنند. به عنوان مثال،

$$\tau = cbab = (۳۵)(۲۵)(۱۵)(۲۵) = (۱۲)(۳۵)$$

در واقع از مرتبهٔ ۲ است. نتیجه می‌گیریم که $S_۵$ تصویر همریخت گروه $G_۲$ است. برای نشان دادن اینکه $G_۲$ با $S_۵$ یکریخت است، کافی است بررسی کنیم که $G_۲$ بزرگ‌تر از $S_۵$ نیست. به بیان دیگر $|G_۲| \leq ۱۲۰ (= ۵! = |S_۵|)$. اثبات این مطلب در بخش بعدی با استفاده از شمارش هم‌مجموعه‌ها انجام می‌شود. خواننده‌ای که علاقه‌ای به این نوع جزئیات فنی ندارد می‌تواند از اینجا به بخش ۴ برود.

شمارش هم‌مجموعه‌ها. بحث را از این مطلب شروع می‌کنیم که زیرگروه $\langle a, b\rangle$ از $G_۲$ مرتبه‌اش حداکثر ۶ است. اکنون زیرگروه $\langle a, b, c\rangle$ را در نظر می‌گیریم. از رابطهٔ $\tau^۲ = (cbab)^۲ = ۱$ نتیجه می‌گیریم

$$cbab = (cbab)^{-۱} = b^{-۱}a^{-۱}b^{-۱}c^{-۱} = babc.$$

با ضرب تساوی فوق از سمت چپ در b به‌دست می‌آوریم $cba = babcb$، و به‌نحو مشابه به‌دست می‌آوریم $cab = abaca$. با استفاده از این تساویها و روابط کاکستر، نتیجه می‌گیریم که هر واژه برحسب a، b، و c را می‌توان طوری بازنویسی کرد که اگر c در واژه ظاهر شود آنگاه فقط در یکی از دو مکان منتهی‌الیه سمت راست واژه قرار گیرد. بنابراین، تعداد هم‌مجموعه‌های راست $\langle a, b\rangle$ در $\langle a, b, c\rangle$ حداکثر چهار است: $\langle a, b\rangle ۱$، $\langle a, b\rangle c$، $\langle a, b\rangle ca$، و $\langle a, b\rangle cb$. پس ثابت می‌شود که $|\langle a, b, c\rangle| \leq ۴|\langle a, b\rangle| \leq ۲۴$.

اکنون گروه $G_۲ = \langle a, b, c, d\rangle$ را در نظر می‌گیریم. با استفاده از روابط مشابه (با شروع از ۳برهای دیگر $K_۴$)، درمی‌یابیم که هر واژه برحسب a، b، c، و d را می‌توان طوری بازنویسی کرد که اگر d در آن ظاهر شود آنگاه فقط در مکان اول یا دوم از سمت راست واژه ظاهر گردد. در نتیجه $\langle a, b, c, d\rangle$ به حداکثر پنج هم‌مجموعهٔ راست $\langle a, b, c\rangle$ تجزیه می‌شود: $\langle a, b, c\rangle ۱$، $\langle a, b, c\rangle d$، $\langle a, b, c\rangle da$، $\langle a, b, c\rangle db$، و $\langle a, b, c\rangle dc$. بنابراین $|G_۲| \leq ۵|\langle a, b, c\rangle| \leq ۱۲۰$ و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

خانوادهٔ گروههای سادهٔ متناوب. در واقع، اگر $n \geq ۴$ و با K_n، یعنی گراف کامل با n رأس $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، شروع کنیم، آنگاه گروه تورم‌فزودهٔ $G_۲^{(n)}$ با $S_{n+۱}$ و زیرگروه زوج $\frac{۱}{۲}G_۲^{(n)}$ با گروه متناوب سادهٔ $A_{n+۱}$ یکریخت است. این مطلب را می‌توان با بسط استدلال پیشین ثابت کرد. با نسبت دادن جایگشتهای $(۱, n+۱)$، $(۲, n+۱)$، ...، $(n, n+۱)$ به رئوس K_n، به‌سادگی در می‌یابیم که $S_{n+۱}$ تصویر همریخت $G_۲^{(n)}$ است. سپس لازم است ثابت کنیم که $|G_۲^{(n)}| \leq (n+۱)! (= |S_{n+۱}|)$. اثبات این مطلب نیز با استقرا روی n انجام می‌شود. قبلاً حالت $n = ۴$ را بررسی کرده‌ایم. با فرض $|G_۲^{(n)}| \leq (n+۱)!$، گراف K_n را با افزودن رأس جدید $a_{n+۱}$ به $K_{n+۱}$ بسط می‌دهیم، وبا استدلالی مشابه استدلال فوق ثابت می‌کنیم که هر واژهٔ برحسب $a_۱$، $a_۲$، ...، $a_{n+۱}$ را که شامل $a_{n+۱}$ باشد می‌توان چنان بازنویسی کرد که $a_{n+۱}$ فقط در یکی از دو مکان اول از سمت راست واژه ظاهر شود، که این‌هم بدان معناست که $G_۲^{(n+۱)}$ به حداکثر $n + ۲$ هم‌مجموعهٔ راست نسبت به $G_۲^{(n)}$ تجزیه می‌شود. بنابراین

$$|G_۲^{(n+۱)}| \leq (n+۲)|G_۲^{(n)}| \leq (n+۲)(n+۱)! = (n+۲)!$$

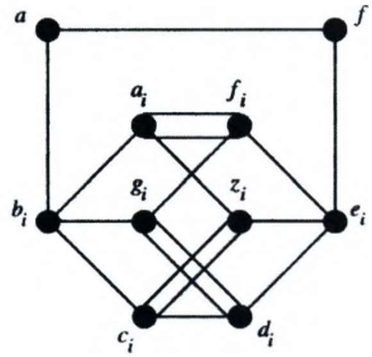
و ادعا ثابت می‌شود.

۴. هیولا

نمودار ۲۶رأسی. به‌جای شروع با نمودار چهاروجهی ۴رأسی اکنون با گرافی شروع می‌کنیم که آن را نمودار ۲۶رأسی نامیده و به عللی که به‌زودی روشن می‌شود با $I_۳$ نمایش می‌دهیم. نمودار ۴رأسی $K_۴$ یک گراف بسیار متقارن با ۴ رأس و درجهٔ سه است (منظور از درجه، تعداد یالهای گذرنده از هر رأس است.). نمودار ۲۶رأسی $I_۳$ یک گراف بسیار متقارن با ۲۶ رأس و درجهٔ چهار است. جزئیات دقیق نمودار ۲۶رأسی تا حدی پیچیده است و در ادامهٔ این بحث به آن نیاز نداریم. ولی به‌خاطر کامل بودن بحث به آن می‌پردازیم.

نمودار ۲۶رأسی عبارت است از گراف وقوع $\mathrm{Inc}(\mathbb{P}_۳)$ از صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}_۳$ مرتبهٔ ۳. صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}_۳$ را می‌توان یک هندسهٔ متناهی متشکل از ۱۳ نقطه و ۱۳ خط تصور کرد که روی هر خط چهار نقطه قرار دارد و از هر نقطه چهار خط می‌گذرد. هر زوج از نقاط، یک خط یکتا را معین می‌سازد و هر دو خط متمایز در یک نقطهٔ یکتا یکدیگر را قطع می‌کنند. گراف وقوع $\mathbb{P}_۳$ دارای ۲۶ رأس است (یک رأس برای هر یک از سیزده نقطه و یکی دیگر برای هر یک از سیزده خط). دو رأس دقیقاً وقتی به‌هم متصل‌اند که یکی از آنها متناظر با یک خط و دیگری متناظر با یک نقطه باشند به‌طوری که این نقطه روی آن خط واقع شود.

نمودار ۲۶رأسی در شکل ۴ نمایش داده شده است. اندیسهای i روی مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳\}$ تغییر می‌کنند. بنابراین، بعضی از رئوسی که در شکل ظاهر می‌شوند متناظرند با ۳ رأس متفاوت در نمودار ۲۶رأسی. رئوس a و f به یکدیگر و همین‌طور به ترتیب به $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$ و $e_۱$، $e_۲$، $e_۳$ متصل‌اند.



شکل ۴ نمایش نمودار ۲۶رأسی

یالهای منفرد بین رئوس نمایانگر این واقعیت‌اند که رئوس متناظر در نمودار ۲۶رأسی تنها وقتی به‌هم متصل‌اند که اندیسهای مساوی داشته باشند. به عنوان مثال، b_1 به g_1 وصل است، b_2 به g_2، و b_3 به g_3. یالهای مضاعف بین رئوس نمایانگر این واقعیت‌اند که رئوس متناظر در نمودار ۲۶رأسی فقط وقتی به‌هم وصل‌اند که اندیسهایشان متفاوت باشند. به عنوان مثال، a_1 به f_2 و f_3 وصل است، a_2 به f_1 و f_3، و a_3 به f_1 و f_2.

اَبَر هیولا. اکنون همان فرایندی راکه در مورد نمودار ۴رأسی به‌کار بردیم دربارهٔ نمودار ۲۶رأسی اعمال می‌کنیم. جزئیات بیشتر را می‌توانید در [۳] ببینید. فرض کنید G گروه کاکستر وابسته به I_3 باشد. این گروه توسط ۲۶ برگردان و تحت روابط مناسب کاکستر تولید می‌شود. بازگروه G نامتناهی است.

nبرهای آزاد ماکسیمال در I_3 عبارت‌اند از: ۱۲برها. این ۱۲برهای آزاد در واقع همگی تحت گروه تقارن نمودار ۲۶رأسی هم‌ارزند. به هر کدام از این ۱۲برها می‌توانیم عناصری نسبت دهیم که به عنوان انتقال روی فضای اقلیدسی ۱۱ بعدی عمل کنند. فرض کنید τ یک انتقال (اولیه) از این نوع است. در این صورت مرتبهٔ τ نامتناهی است، پس با اِعمال رابطهٔ $\tau = 1$ از تورم آن می‌کاهیم.

سپس G_1 را گروهی تعریف می‌کنیم که با مولدهای G تولید می‌شود و روابط آن هم روابط کاکستر هستند و هم روابط تورم‌کاهی که ایجاب می‌کنند همهٔ انتقالهایی که وابسته به ۱۲برهای آزاد ماکسیمال در I_3 هستند از مرتبهٔ ۱ باشند. ثابت می‌شود که G_1 یک گروه متناهی عظیم از مرتبهٔ تقریبی 10^{108} است. این گروه با گروه ابرهیولای $\mathbb{M} \wr 2$ (حاصلضرب حلقوی گروه هیولا با یک گروه مرتبهٔ ۲) یکریخت است. زیرگروه زوج $\frac{1}{2}G_1$ با حاصلضرب مستقیم هیولا در خودش (یعنی $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$) یکریخت است. عناصر ابرهیولای $\mathbb{M}\wr 2$ یا عناصر (x,y) از $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ هستند یا به شکل $(x,y)\sigma$اند، که در آن σ (عضو مرتبهٔ ۲ در حاصلضرب حلقوی) برگردانی است که در روابط $(x,y)\sigma = \sigma(y,x)$ صدق می‌کند. اثبات این امر در مورد این گروه به مراتب مشکل‌تر است تا در مورد نمودار ۴رأسی. اثباتی از این موضوع را می‌توان در [۳] دید. این اثبات مبتنی بر چند نتیجهٔ عمیق از نوشتگان «هیولایی» شامل قضیهٔ ایوانوف‌ـنورتن است. ارتباط بین گروه کاکستر نمودار ۲۶رأسی و ابرهیولا ابتدا توسط سایمن نورتن کشف شد. برابری $\frac{1}{2}G_1$ و $\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ یک راه مقدماتی برای بررسی (مربع) گروه معروف هیولاست.

جدول ۱ از گرافها تا گروههای ساده

≠تعداد رأسها	گراف	nبَر	عمل	زیرگروه زوج
$n(\geq 4)$	K_n	۳بَر	تورم‌افزایی	A_{n+1}
۸	مکعب	۶بَر	تورم‌کاهی	$O_5(3)\cong O_6^-(2)$
۱۰	پیترسون	۶بَر	تورم‌کاهی	$O_6^-(2)\cong O_5(3)$
۱۴	$\mathrm{Inc}(\mathbb{P}_2)$	۸بَر	تورم‌کاهی	$O_8^-(2)$
۲۶	$\mathrm{Inc}(\mathbb{P}_3)$	۱۲بَر	تورم‌کاهی	$\mathbb{M}\times\mathbb{M}$

آینده. البته ممکن است این فرایند را دربارهٔ گرافهای زیبای دیگری نیز به‌کار ببریم (منظورمان از گراف «زیبا» گرافی است که ما را به سمت یک گروه جالب رهنمون شود). به‌خصوص حالت گرافِ وقوع ۱۴رأسی $I_2 = \mathrm{Inc}(\mathbb{P}_2)$ متعلق به صفحهٔ تصویری $\mathbb{P}_2$ از مرتبهٔ ۲ بسیار آموزنده است [۵]. فهرست مختصری از این گونه ساختارها را در جدول۱ می‌آوریم. گروهها با استفاده از نمادهای اطلس گروههای ساده [۲] فهرست شده‌اند.

مراجع

1. R. E. Borcherds, What is the Monster?, *Notices Amer. Math. Soc.* **49** (2002) 1076-1077.
2. J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, and R. A. Wilson, *Atlas of Finite Groups*, Oxford University Press, Eynsham, U. K., 1985.
3. J. H. Conway and C. S. Simons, 26 implies the bimonster, *J. Algebra* **235** (2001) 805-814.
4. H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser, *Generators and Relations for Discrete Groups*, 4th ed., Springer-Verlag, Berlin, 1980.
5. C. S. Simons, Deflating infinite Coxeter groups to finite groups, in *Proceeding on Moonshine and Related Topics*, J. McKay and A. Sebbar, eds., CRM Proc. Lecture Notes, no. 30, American Mathematical Society, Providence, 2001, pp. 223-229.
6. R. Solomon, The Shape of the classification of the finite simple groups, in *Groups and Combinatorics–in Memory of Michio Suzuki*, E. Bannai, H. Suzuki, H. Yamaki and T. Yoshida, eds., Adv. Stud. Pure Math., no. 32, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2001, pp. 379-390.

******

• Christopher S. Simons, "An elementary approach to the monster", *Amer. Math. Monthly*, (4) **112** (2005) 334-341.

* کریستوفر سیمونز، دانشگاه روان، گلاسبورو

simons@rowan.edu