# کاربردهایی از تابع همنگار (هموگرافیک) در هندسه

● دکتر احمد شرف‌الدین

**خلاصه .** در سطور آینده تابع همنگار و تابع جبری را تعریف می‌کنیم و بیان خواهیم کرد که تابع همنگار، تابع جبری یک‌به‌یک است و این خاصیت را در محاسبه طول نیمساز مثلث و اثبات رابطه‌های نیوتن و دکارت به کار خواهیم برد.

**۱ . تعریف تابع همنگار.** تابع $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ که در آن a، b، c، و d اعداد حقیقی و x متغیری است با شرط $x \neq -\frac{d}{c}$ تابع همنگار نامیده می‌شود.

**۲ . تعریف تابع جبری**

**۲ . ۱ . تعریف تابع همانی.** تابع $y = x$ تابع همانی نامیده می‌شود.

**۲ . ۲ . تابع ثابت.** تابع $y = c$ که در آن c مقدار ثابتی است تابع ثابت نامیده می‌شود.

**۲ . ۳ . تعریف تابع جبری .** تابع جبری تابعی است که با اجرای اعمال جبری (یعنی جمع، ضرب، تقسیم، توان، و ریشه‌یابی) روی تابع همانی و تابع ثابت حاصل می‌شود به شرط آن‌که تعداد اعمال جبری متناهی باشد.

**مثال .** تابعهای زیر تابعهای جبری‌اند :

$y = ۲x$ و $y = ۲x + ۷$ و $y = ۵x^{۲} + ۶x - ۴$

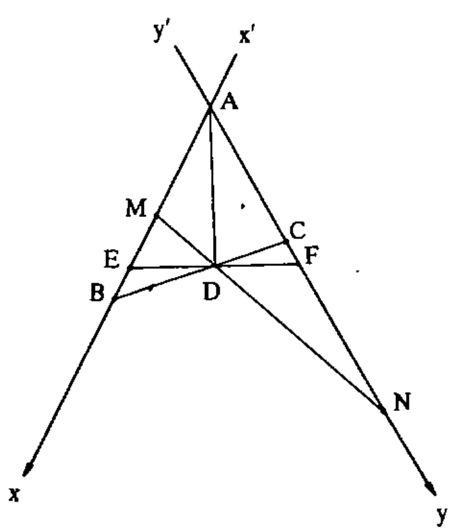
و $y = \sqrt[۳]{x^{۲} + ۱}$ و $y = \frac{۴x + ۱}{x^{۲} + ۷}$

**۳ . تابع جبری یک‌به‌یک.** اگر یک تابع جبری یک‌به‌یک باشد آنگاه آن تابع همنگار است.

**۴ . محاسبه طول نیمساز مثلث .** در مثلث ABC ، طولهای دو ضلع AB و AC را به ترتیب c و b و اندازه زاویه A را $\alpha$ می‌نامیم. اگر طول نیمساز AD را l بنامیم ثابت کنید رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l}$$

**حل .** دو محور x'x و y'y را با مبدأ مشترک A ، به ترتیب منطبق بر دو خط AB و AC اختیار می‌کنیم. نقطه دلخواه M را روی خط AB اختیار می‌کنیم و آن را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم و محل برخورد خط MD را با خط AC ، نقطه N می‌نامیم.



اندازه‌های جبری دو بردار $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AN}$ را به ترتیب روی دو محور $x'x$ و $y'y$ با $x$ و $y$ نشان می‌دهیم. چون به ازای هر نقطه M از خط AB یک نقطه N از خط AC حاصل می‌شود و برعکس به ازای هر نقطهٔ N از خط AC یک نقطه M از خط AB حاصل می‌شود پس یک رابطه یک‌به‌یک بین $x$ و $y$ وجود دارد. اما این رابطه جبری است زیرا با اجرای اعمال جبری روی $x$ و مقادیر ثابت (به تعداد متناهی)، عبارت $y$ حاصل می‌شود (برای اثبات این مطلب می‌گوییم در مثلث AMD با معلوم بودن طولهای $\overline{AM}$ و $\overline{AD}$ و اندازه زاویه MAD، اندازه زاویه ADM حساب می‌شود. سپس در مثلث ADN با معلوم بودن طولهای AD و اندازه‌های دو زاویه DAN و ADN طول ضلع AN حساب می‌شود. تمام اعمالی که بکار می‌بریم جبری هستند و تعداد آنها متناهی است. باید توجه داشت که ما محاسبه نکرده‌ایم که طولانی باشد بلکه فقط با استدلال ثابت کرده‌ایم که مقدار $\overline{AN}$ بر حسب مقدار AM بوسیله یک تابع جبری به دست می‌آید).

با توجه به مطالب مذکور تابع $y$ بر حسب $x$ یک تابع همنگار است که آن را با رابطه زیر بیان می‌کنیم:

$$y = \frac{mx + n}{px + q} \qquad (۱)$$

اگر در شکل مقدار $\overline{AM}$ را برابر $y$ اختیار کنیم آنگاه مقدار $\overline{AN}$ برابر $x$ می‌شود پس می‌توان در رابطه (۱) جای $x$ و $y$ را عوض نمود و چنین نوشت:

$$x = \frac{my + n}{py + q} \qquad (۲)$$

از مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $m = -q$. با توجه به این مطلب رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \qquad (۳)$$

حال توجه می‌کنیم که اگر نقطه M روی محور $x'x$ به سوی نقطه A میل کند آنگاه نقطه N روی محور $y'y$ به سوی همان نقطه A میل می‌کند. پس اگر در رابطه (۳)، مقدار $x$ به سوی صفر میل کند مقدار $y$ به سوی صفر میل خواهد کرد. از این مطلب نتیجه می‌شود که $n = ۰$. لذا رابطه (۳) به صورت زیر است:

$$y = \frac{mx}{px - m} \qquad (۴)$$

رابطه (۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۵)$$

پس هنگامی که نقطه M روی خط AC حرکت می‌کند بین دو مقدار متغیر $\overline{AM}$ و $\overline{AN}$ رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{۱}{\overline{AM}} + \frac{۱}{\overline{AN}} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۶)$$

برای تعیین مقدار ثابت $\frac{p}{m}$ یک حالت خاص در نظر می‌گیریم: حالتی که $\overline{AM} = \overline{AN}$ باشد. از نقطه D عمودی بر خط AD رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن عمود را با دو خط AC و AB به ترتیب E و F می‌نامیم. با توجه به رابطه (۵) چنین می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} = \frac{۱}{AE} + \frac{۱}{AF} = \frac{p}{m} \qquad (۷)$$

از طرفی چنین داریم:

$$l = \overline{AD} = \overline{AE}\cos\frac{\alpha}{۲} \qquad (۸)$$

از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود:

$$\frac{p}{m} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۹)$$

رابطه (۵) با توجه به رابطه (۹) چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۱۰)$$

اگر نقطه M بر روی نقطه B جای گیرد آنگاه نقطه N بر روی نقطه C جای خواهد گرفت پس می‌توان در رابطه (۱۰) به جای $x$ و $y$ به ترتیب $c$ و $b$ گذاشت و رابطه زیر را به دست آورد:

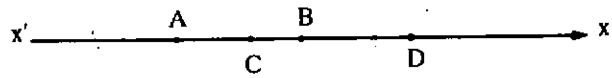
$$\frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{l} \qquad (۱۱)$$

که همان رابطه مطلوب است. از این رابطه طول نیمساز مثلث (یعنی $l$) بر حسب $b$ و $c$ (یعنی طولهای دو ضلع AC و AB) و اندازه زاویه $\hat{A}$ حساب می‌شود.

## ۵. تقسیم توافقی

**۱.۵ تعریف تقسیم توافقی.** بر محور $x'x$ چهار نقطه A، B، C و D در نظر می‌گیریم. می‌گوییم این چهار نقطه تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند اگر رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۱۲)$$




**۵ . ۲ . کاربرد تابع همنگار در تقسیم توافقی**

سه نقطه A ، B و C را بر محور x'ox در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم نقطه D را بر محور x'ox طوری تعیین کنیم که چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند یعنی رابطه زیر مسلم باشد:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \qquad (۱۳)$$

برای این منظور دو خط موازی AP و BQ رسم می‌کنیم و بر خط AP نقطه دلخواه $M \neq A$ را اختیار می‌کنیم و محل برخورد خط ML با خط BQ را نقطه N می‌نامیم. بر خط BQ نقطه L را طوری انتخاب می‌کنیم که $\overline{NB} = \overline{BL}$ باشد. نقطه D محل برخورد خط ML با خط AB نقطه مطلوب است یعنی چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. برای اثبات می‌گوییم از تشابه دو مثلث CAM و CBN رابطه زیر حاصل می‌شود :

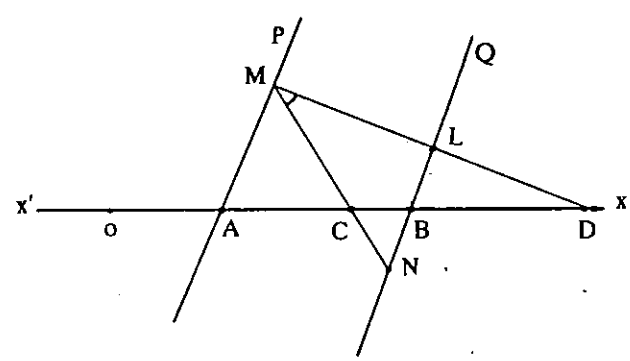
$$\frac{CA}{CB} = \frac{AM}{BN} \qquad (۱۴)$$

همچنین از تشابه دو مثلث DAM و DBL رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AM}{BL} \qquad (۱۵)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۴) و (۱۵) با رعایت آنکه $NB = BL$ ، حاصل می‌شود :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$




که چون علامتهای جبری در نظر گرفته شود رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

حال اگر دو نقطه A و B را ثابت نگاه داریم و نقطه C را روی محور x'x حرکت دهیم نقطه D روی این محور حرکت می‌کند. اما از ترسیم پیشگفته نتیجه می‌شود که به ازای هر نقطه C فقط یک نقطه D حاصل می‌شود و برعکس.

اگر قرار دهیم $\overline{OC} = x$ و $\overline{OD} = y$ ، از مطالب بالا نتیجه می‌شود یک رابطه یک‌به‌یک بین x و y وجود دارد. این رابطه جبری است زیرا ترسیم پیشگفته نشان می‌دهد که مقدار y بر حسب x با اجرای اعمال جبری روی x و مقادیر ثابت (به تعداد متناهی) حاصل می‌شود زیرا رابطه تشابه دو مثلث یک رابطه جبری است.

پس تابع y بر حسب x یک تابع جبری یک‌به‌یک است یعنی یک تابع همنگار به صورت زیر :

$$y = \frac{mx + n}{px + q} \qquad (۱۶)$$

اکنون می‌گوییم اگر نقطه C بر نقطه D جای گیرد آنگاه نقطه D بر نقطه C جای خواهد گرفت پس می‌توان جای x و y را در رابطه (۱۶) عوض کرد یعنی می‌توان نوشت :

$$x = \frac{my + n}{py + q} \qquad (۱۷)$$

از مقایسه دو رابطه (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌شود که $m = -q$ . با توجه به این مطلب تابع (۱۶) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$y = \frac{mx + n}{px - m} \qquad (۱۸)$$

**۵ . ۳ . رابطه نیوتن .** اگر چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند و نقطه O وسط پاره خط AB باشد آنگاه رابطه زیر که به نام رابطه نیوتن مشهور است برقرار است :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \overline{OC}\,.\,\overline{OD} \qquad (۱۹)$$

**برهان.** محور x'x را منطبق بر خط AB با مبدأ O اختیار می‌کنیم. دو نقطه A و B را ثابت نگاه می‌داریم. اگر نقطه C را روی خط AB حرکت می‌دهیم آنگاه نقطه D روی خط AB حرکت می‌کند. اگر قرار دهیم $OC = x$ و $OD = y$ رابطه زیر برقرار است (بنابر مطلب

شماره ۵ . ۲) :

$$y = \frac{mx+n}{px-m} \qquad (۲۰)$$

اگر نقطه C روی خط AB حرکت کند و به سوی نقطه O میل کند نقطه D به سوی بی‌نهایت می‌رود پس اگر در رابطه (۲۰) مقدار x به سوی صفر میل کند مقدار y به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. از این مطلب نتیجه می‌شود که $m = 0$ پس رابطه (۲۰) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$y = \frac{n}{px} \qquad (۲۱)$$

پس

$$xy = \frac{n}{p} = \text{ثابت} \qquad (۲۲)$$

پس هنگامی که نقطه C و D حرکت می‌کنند حاصل‌ضرب $\overline{OC}\,.\,\overline{OD}$ ثابت می‌ماند.

$$\overline{OC}\,.\,\overline{OD} = \frac{n}{p} \qquad (۲۳)$$

برای تعیین این مقدار ثابت یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. حالتی که نقطه C به سوی نقطه A (یا B) میل کند در این صورت نقطه D به سوی نقطه A (یا B) میل می‌کند و نتیجه می‌گیریم که :

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = \frac{n}{p} \qquad (۲۴)$$

رابطه (۲۳) با توجه به رابطه (۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\overline{OC}\,.\,\overline{OD} = \overline{OA}^2 = \overline{OB}^2$$

**۵ . ۴ . رابطه دکارت.** اگر چهار نقطه A ، B ، C و D تشکیل تقسیم توافقی بدهند آنگاه رابطه زیر که به نام رابطه دکارت مشهور است برقرار است :

$$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

**برهان.** دو نقطه A و B را ثابت نگاه می‌داریم و نقطه C را روی خط AB را حرکت می‌دهیم. نقطه D روی خط AB حرکت می‌کند. محور x'x را منطبق بر خط AB با مبدأ A اختیار می‌کنیم و قرار می‌دهیم :

$\overline{AC} = x$ و $\overline{AO} = y$ . بنابر مطلب شماره (۵ . ۲) ، بین x و y یک رابطه همنگار به صورت زیر برقرار است :

$$y = \frac{mx+n}{px-m} \qquad (۲۵)$$

اگر نقطه C حرکت کرده و به سوی نقطه A میل کند نقطه D حرکت کرده و به سوی نقطه A میل می‌کند پس اگر در رابطه (۲۵) مقدار x بسوی صفر میل کند مقدار y نیز به سوی صفر میل خواهد کرد. از این مطلب نتیجه می‌شود که $n = 0$ یعنی رابطه (۲۵) به صورت زیر است :

$$y = \frac{mx}{px-m} \qquad (۲۶)$$

از رابطه (۲۶) نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۲۷)$$

یعنی وقتی دو نقطه C و D حرکت می‌کنند. رابطه زیر مسلم است :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{p}{m} = \text{ثابت} \qquad (۲۸)$$

برای تعیین این مقدار ثابت، یک حالت خاص در نظر می‌گیریم. حالتی که نقطه C به سوی نقطه B میل کند. در این صورت نقطه D نیز به سوی نقطه B میل می‌کند. با توجه به این مطلب از رابطه (۲۸) نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AB} = \frac{p}{m} \qquad (۲۹)$$

و یا

$$\frac{2}{AB} = \frac{p}{m} \qquad (۳۰)$$

رابطه (۲۸) با رعایت رابطه (۳۰) به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AB}$$

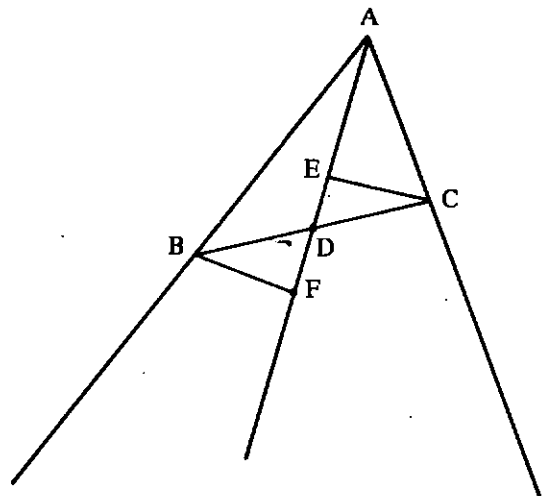
**۵ . ۵ . محاسبه طول نیمساز مثلث.** در مثلث ABC نیمساز AD را رسم می‌کنیم و اندازه زاویه A را $\alpha$ می‌نامیم. می‌خواهیم رابطه زیر را ثابت کنیم :

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{AD}$$

**برهان.** از دو نقطه B و C عمودهای BF و CE را بر خط AD فرود می‌آوریم. می‌گوییم چهار نقطه A ، D ، E و F تشکیل تقسیم

توافقی می‌دهند. برای اثبات این مطلب می‌گوییم از تشابه دو مثلث DBF و DEC رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{CE}{BF} \qquad (۳۱)$$




از تشابه دو مثلث ABF و ACE رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{CE}{BF} \qquad (۳۰)$$

از مقایسه دو رابطه (۲۹) و (۳۰) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{AE}{AF} \qquad (۳۱)$$

رابطه (۳۱) با رعایت علامتهای جبری، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = -\frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}$$

پس چهار نقطه A ، D ، E و F تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. لذا می‌توانیم رابطه دکارت را به صورت زیر بنویسیم (بنابر ۵ . ۴):

$$\frac{۲}{\overline{AD}} = \frac{۱}{\overline{AE}} + \frac{۱}{\overline{AF}} \qquad (۳۲)$$

اما در دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و AFB دو رابطه زیر برقرار است.

$$\overline{AE} = \overline{AC}\cos\frac{\alpha}{۲} \quad , \quad \overline{AF} = \overline{AB}\cos\frac{\alpha}{۲} \qquad (۳۳)$$

رابطه (۳۲) با رعایت دو رابطه (۳۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{AB} + \frac{۱}{AC} = \frac{۲\cos\frac{\alpha}{۲}}{AD}$$

این مسئله را در شماره (۴) حل کرده‌ایم.

## تفریح اندیشه ۱

ضخامت لایهٔ نرم آلبالو با ضخامت هستهٔ آن یکی است. می‌پذیریم که شکل آلبالو و هسته گرد است. آیا شما می‌توانید در ذهنتان برآورد کنید که حجم قسمت نرم آلبالو از حجم هسته، چند بار بیشتر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸