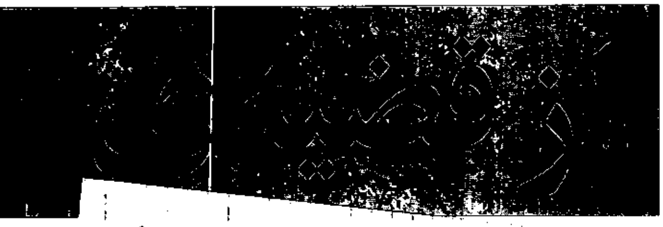
• ابراهیم دارابی

کاربردهایی لاگرانژ (۲)



در شماره‌ی قبل قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج حاصل از آن را مطرح کردیم. همچنین کاربرد این قضیه و نتایج آن را در اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی در قالب چند مثال دیدید. اینک در پی بقیه‌ی آن مثال‌ها را می‌آوریم.

مثال ۱۱. این اتحاد را ثابت کنید:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}=\begin{cases}\pi-\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1).\\ \pi+\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[-1,0)\\ -\operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[0,1)\\ \operatorname{Arc}\sin\dfrac{x^2-1}{x^2+1}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

اثبات: دیده می‌شود:

$$\left|\frac{2x}{x^2+1}\right|\le 1\ ,\ \left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\le 1$$

و به ازای هر x حقیقی، توابع:

$$f(x)=\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}\ ,\ g(x)=\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

روی محور اعداد پیوسته هستند و داریم:

$$f'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{x^2+1})^2}}\times(\frac{2x}{x^2+1})'$$

$$=\frac{-(x^2+1)}{\sqrt{(x^2-1)^2}}\times\frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x^2-1}{x^2+1})^2}}\times(\frac{x^2-1}{x^2+1})'=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x^2}}\times\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اکنون به این ترتیب عمل می‌کنیم:

۱. در بازه‌ی $(-\infty,-1)\cup(0,1)$، تابع $F(x)=f(x)+g(x)$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$F'(x)=f'(x)+g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}+\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x\in(-\infty,-1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=x^2-1\ ,\ |x|=-x\Rightarrow F'(x)=0$$

اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=-(x^2-1)\ ,\ |x|=x\Rightarrow F'(x)=0$$

$$\Rightarrow F(x)=c$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}=c$$

در هر یک از بازه‌های بالا، برای پیدا کردن c قرار می‌دهیم $x=-\sqrt{3}$ و $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. از آن‌جا داریم:

$$F(-\sqrt{3})=\operatorname{Arc}\cos(-\frac{\sqrt{3}}{2})+\operatorname{Arc}\sin(\frac{1}{2})=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi$$

$$\Rightarrow c=\pi$$

$$F(\frac{1}{\sqrt{3}})=\operatorname{Arc}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}+\operatorname{Arc}\sin(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

پس اگر $x\in(-\infty,-1)$. آن‌گاه:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}=\pi$$

و اگر $x\in(0,1)$، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arc}\cos\frac{2x}{x^2+1}+\operatorname{Arc}\sin\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

۲. تابع $G(x)=f(x)-g(x)$ را درنظر می‌گیریم که در آن $x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$

$$G(x)=\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$G'(x)=f'(x)-g'(x)=\frac{2(x^2-1)}{|x^2-1|(x^2+1)}-\frac{2x}{|x|(x^2+1)}$$

اگر $x\in(-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=-(x^2-1)\ ,\ |x|=-x\Rightarrow G'(x)=0$$

اگر $x\in(1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$|x^2-1|=x^2-1\ ,\ |x|=x\Rightarrow G'(x)=0$$

پس در بازه‌ی مفروض، تابع $G(x)$ ثابت است. یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=c$$

قرار می‌دهیم $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ و $x=\sqrt{3}$. نتیجه می‌شود:

$$G(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\operatorname{Arccos}(-\frac{\sqrt{3}}{2})-\operatorname{Arcsin}(-\frac{1}{2})=\pi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\pi$$

$$\Rightarrow c=\pi$$

$$G(\sqrt{3})=\operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}}{2}-\operatorname{Arcsin}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=0$$

پس اگر $x\in(-1,0)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\pi$$

و اگر $x\in(1,+\infty)$ ، آن‌گاه:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}=0$$

۳. به ازای $x=\pm1$ و $x=0$ مقادیر $f(x)$ و $g(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(-1)=\operatorname{Arccos}(-1)=\pi\ ,\ g(-1)=\operatorname{Arcsin}0=0$$

پس به ازای $x=-1$ داریم: $f(x)=\pi+g(x)$ ، یعنی:

$$\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=\pi+\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$g(0)=\operatorname{Arcsin}(-1)=-\frac{\pi}{2}\ ,\ f(0)=\operatorname{Arccos}0=\frac{\pi}{2}$$

بنابراین به ازای $x=0$ داریم:

$$f(x)=-g(x)\Rightarrow \operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=-\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$f(1)=\operatorname{Arccos}1=0\ ,\ g(1)=\operatorname{Arcsin}0=0$$

بنابراین به ازای $x=1$ داریم:

$$f(x)=g(x)=\operatorname{Arccos}\frac{2x}{x^2+1}=\operatorname{Arcsin}\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

بنابراین، اتحاد مفروض به ازای هر مقدار حقیقی x برقرار است.

مثال ۱۲ . عبارت زیر را به صورت حاصل‌ضرب بنویسید:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$

حل: عبارت بالا را به عنوان تابعی از متغیر x در نظر می‌گیریم (y و z را مقادیر ثابت درنظر می‌گیریم):

$$f(x)=x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$

مشتق تابع را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f'(x)&=y^2-z^2-2xy+2xz=(y^2-z^2)-2x(y-z)\\&=(y-z)(y+z)-2x(y-z)\\&=(y-z)(y+z-2x)\end{aligned}$$

فرض کنیم $(y-z)(y+z-2x)$ مشتق تابع دیگری مانند $g(x)$ باشد:

$$g'(x)=(y-z)((y+z)-2x)$$

$$\Rightarrow g(x)=(y-z)((y+z)x-x^2)$$

چون $f(x)$ و $g(x)$ در مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر هستند، و داریم:

$$f'(x)=g'(x)$$

پس بنابر نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) داریم:

$$f(x)=g(x)+c$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. داریم:

$$x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)+z(x^2-y^2)$$
$$=(y-z)((y+z)x-x^2)+c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x=0$. از آن‌جا:

$$c=yz^2-zy^2$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}&f(x)=g(x)+yz^2-zy^2\\&\Rightarrow f(x)=(y-z)((y+z)x-x^2)+yz^2-zy^2\\&\qquad=(y-z)(xy+xz-x^2)-yz(y-z)\\&\qquad=(y-z)(xy-x^2+xz-yz)\end{aligned}$$

$$= (y - z)(x(y - x) - z(y - x))$$
$$= (y - z)(y - x)(x - z)$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$$
$$= (y - z)(y - x)(x - z)$$

مثال ۱۳. این عبارت را ساده کنید:

$$(x - y - z)^3 + (x + y + z)^3 + (z - x - y)^3 + (y - x - z)^3$$

حل: x را به عنوان متغیر درنظر می‌گیریم و تابع $f(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = (x - y - z)^3 + (x + y + z)^3 + (z - x - y)^3 + (y - x - z)^3$$

این تابع به ازای هر x حقیقی پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x) = 3(x - y - z)^2 + 3(x + y + z)^2 - 3(z - x - y)^2 - 3(y - x - z)^2$$
$$= 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6xy - 6xz + 6yz + 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$$
$$+6xy + 6xz + 6yz - 3z^2 - 3x^2 - 3y^2 + 6xz$$
$$+6yz - 6xy - 3y^2 - 3x^2 - 3z^2 + 6xy + 6yz - 6xz = 24yz$$

فرض کنیم $24yz$ مشتق تابعی مانند $g(x)$ باشد:

$$g'(x) = 24yz$$
$$\Rightarrow g(x) = 24yzx$$

چون $f(x)$ و $g(x)$ در شرایط نتیجه‌ی (۲) لاگرانژ (مقاله‌ی شماره‌ی قبل) صدق می‌کنند، پس داریم:

$$f(x) = q(x) + c \qquad (1)$$

که در آن c به x بستگی ندارد، اما می‌تواند به y و z بستگی داشته باشد. از تساوی (۱) داریم:

$$(x - y - z)^3 + (x + y + z)^3 + (z - x - y)^3 + (y - x - z)^3$$
$$= 24xyz + c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم: $x = 0$. نتیجه می‌شود:

$$c = -(y + z)^3 + (y + z)^3 - (y - z)^3 + (y - z)^3 = 0$$
$$\Rightarrow f(x) = g(x)$$
$$\Rightarrow (x - y - z)^3 + (x + y + z)^3 + (z - x - y)^3 + (y - x - z)^3$$
$$= 24xyz$$

استفاده از یکنوا بودن تابع

یکنوا بودن تابع در این موارد کاربرد دارد:

۱. حل نامعادله‌ها
۲. اثبات نامساوی‌های شامل متغیر
۳. اثبات نامساوی‌های عددی
۴. تعیین تعداد ریشه‌های معادله

اگر تابع در فاصله‌ای یکنوا باشد، در آن فاصله صعودی و یا نزولی است و مشتق در آن فاصله علامت ثابتی دارد. (اگر مشتق مثبت باشد، تابع در آن فاصله صعودی و اگر منفی باشد، تابع نزولی است.)

مثال ۱۴. این نامعادله را حل کنید:

$$2\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + e^x - e^{-x} < 0$$

حل: تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = 2\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + e^x - e^{-x}$$

تابع به ازای همه‌ی مقادیر حقیقی x تعریف شده، پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم:

$$f'(x) = \frac{2}{x + \sqrt{1 + x^2}}.(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}}) + e^x + e^{-x}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}} + e^x + e^{-x}$$

این مشتق به ازای هر x حقیقی مثبت است. بنابراین تابع در بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ صعودی است و نمودار آن در بیش از یک نقطه نمی‌تواند محور طول‌ها را قطع کند.

چون $f(0) = 0$ پس به ازای هر $x < 0$ داریم:

$$f(x) < f(0) \Rightarrow 2\ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + e^x - e^{-x} < 0$$

پس ریشه‌های نامعادله عبارت‌اند از همه‌ی اعداد فاصله‌ی $(-\infty, 0)$.

مثال ۱۵. اگر $0 < x < \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$tgx > 3x - 2\sin x$$

اثبات: تابع $f(x) = tgx - 3x + 2\sin x$ را در بازه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ درنظر می‌گیریم و مشتق آن را حساب می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 3 + 2\cos x = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{2(\cos x - 1)^2(\cos x + \frac{1}{2})}{\cos^2 x}$$

به ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ مقدار مشتق مثبت است. بنابراین، تابع در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ صعودی است و از آن‌جا داریم:

$$tgx - 3x + 2\sin x > 0$$
$$\Rightarrow tgx > 3x - 2\sin x$$

مثال ۱۶. اگر $0 < x_1 < x_2 \le e$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}} \ , \ x_1^{x_2} \ge x_2^{x_1}$$

و اگر $e \le x_1 < x_2$، آن‌گاه: $x_1^{x_2} \ge x_2^{x_1}$

اثبات: تابع $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ را در بازه‌ی $(0,+\infty)$ درنظر می‌گیریم که در آن پیوسته و مشتق‌پذیر است:

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

چون مشتق به ازای $x = e$ صفر می‌شود و به ازای $0 < x < e$، $f'(x) > 0$ و به ازای $x > e$، داریم: $f'(x) < 0$، پس تابع $f(x)$ در بازه‌ی $(0,e]$ صعودی و در بازه‌ی $[e,+\infty)$ نزولی است. بنابراین، به ازای هر x_1 و x_2 دلخواه که در آن $0 < x_1 < x_2 \le e$ نامساوی $f(x_1) < f(x_2)$ برقرار است، یعنی:

$$\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1}\ln x_1 < \frac{1}{x_2}\ln x_2$$

$$\Rightarrow \ln x_1^{\frac{1}{x_1}} < \ln x_x^{\frac{1}{x_2}}$$

چون $\ln t$ تابع صعودی است، پس:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

اگر دو طرف نامساوی $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$ را در $x_1x_2 > 0$ ضرب کنیم، نتیجه می‌شود:

$$x_2 \ln x_1 < x_1 \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1^{x_2} < \ln x_2^{x_1}$$
$$\Rightarrow x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$$

هم‌چنین، اگر $e \le x_1 < x_2$، آن‌گاه:

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \frac{\ln x_1}{x_1} > \frac{\ln x_2}{x_2}$$

$$\Rightarrow x_1^{\frac{1}{x_1}} > x_2^{\frac{1}{x_2}} \text{ و } x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$$

مثال ۱۷. $(tg50°)^{cotg50°}$ و $(tg48°)^{cotg48°}$ را با یکدیگر مقایسه کنید.

حل: دیده می‌شود:

$$tg48° = tg\frac{4\pi}{15} \quad \text{و} \quad cotg48° = \frac{1}{tg\frac{4\pi}{15}}$$

$$tg50° = tg\frac{5\pi}{18} \quad \text{و} \quad cotg50° = \frac{1}{tg\frac{5\pi}{18}}$$

$$0 < tg\frac{4\pi}{15} < tg\frac{5\pi}{18} < e$$

اگر قرار دهیم $x_1 = tg\frac{4\pi}{15}$ و $x_2 = tg\frac{5\pi}{18}$، آن‌گاه بنابر مثال قبلی، چون $0 < x_1 < x_2 < e$، پس:

$$x_1^{\frac{1}{x_1}} < x_2^{\frac{1}{x_2}}$$

و از آن‌جا داریم:

$$(tg\frac{4\pi}{15})^{\frac{1}{tg\frac{4\pi}{15}}} < (tg\frac{5\pi}{18})^{\frac{1}{tg\frac{5\pi}{18}}}$$

$$\Rightarrow (tg48°)^{cotg48°} < (tg50°)^{cotg50°}$$

مثال ۱۸. ثابت کنید:

$$(1999)^{2000} > (2000)^{1999}$$

اثبات: به ازای $e \le x_1 < x_2$ از نامساوی $x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$ استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$x_1 = 1999 \ , \ x_2 = 2000$$

داریم:

$$e < 1999 < 2000 \Rightarrow (1999)^{2000} > (2000)^{1999}$$

منبع:

مجله‌ی «ریاضیات در مدرسه» شماره‌ی ۹، سال ۲۰۰۱، چاپ مسکو.