کاربردهایی لاگرانژ (۱)

• ابراهیم دارابی

اشاره

مشتق و مطالب مربوط به آن، نقش مهمی در ریاضیات، دوره‌ی متوسطه ایفا می‌کند، اما کاربرد قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن در حل مسائل ریاضیات مقدماتی، تقریباً نادیده انگاشته شده است. اثبات اتحادها، نامساوی‌ها و فرمول‌های مثلثاتی، هم‌چنین تبدیل عبارت‌های جبری به حاصل‌ضرب، حل معادله، حل نامعادله، حل دستگاه معادله‌ها، معادله‌های پارامتری و... با استفاده از این قضیه امکان‌پذیر است.

برای این منظور، روش کلی قابل قبولی درباره‌ی حل بعضی مسائل ارائه می‌شود که می‌توان آن‌ها را چه با این روش و چه با روش‌های دیگر حل کرد. در این‌جا با این گونه مسائل آشنا خواهید شد. ابتدا با قضیه‌ی لاگرانژ و نتایج آن آشنا می‌شویم:

قضیه‌ی لاگرانژ (میانگین)

اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و در تمام نقاط بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

نتیجه۱. (شرط ثابت بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و مشتق آن در داخل این بازه صفر باشد، آن‌گاه تابع در بازه‌ی $[a,b]$ ثابت است.

نتیجه۲. اگر دو تابع f و g در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشند و در داخل این بازه مشتق‌های مساوی داشته باشند، اختلاف آن‌ها تنها در مقادیر ثابت خواهد بود.

نتیجه۳. (شرط یکنوا بودن تابع) اگر تابع f در بازه‌ای مانند I پیوسته و مشتق آن در آن بازه مثبت (منفی) باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه صعودی (نزولی) است. با این مقدمه به حل مسائل می‌پردازیم.

همان‌طور که گفته شد، قضیه‌ی لاگرانژ در حل معادله‌ها، نامعادله‌ها، تعیین تعداد ریشه‌ها و... کاربرد دارد. برای این منظور، در روند حل مسائل، تابعی مانند f درنظر گرفته می‌شود که قضیه‌ی لاگرانژ در بازه‌ای مانند $[a,b]$ در آن صدق کند. پس با استفاده از فرمول لاگرانژ: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

که در آن $c\in(a,b)$ مقدار $f'(c)$ محاسبه می‌شود.

مثال۱. ثابت کنید اگر $x\geq 1$، آن‌گاه $e^x\geq ex$

اثبات: نامساوی به ازای $x=1$ برقرار است. تابع f را به صورت زیر درنظر می‌گیریم:

$$f(x)=e^x-ex$$

به ازای هر $b>1$ در بازه‌ی $[1,b]$، شرایط قضیه‌ی لاگرانژ در این تابع صدق می‌کند. پس در این بازه نقطه‌ای به طول c وجود دارد؛ طوری که

$$\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=f'(c)$$

$$\Rightarrow \frac{e^b-eb}{b-1}=e^c-e$$

چون $c>1$ پس $e^c>e$ و بنابراین $e^c-e>0$ و از آن‌جا:

$$\frac{e^b-eb}{b-1}>0\Rightarrow e^b-eb>0$$

یعنی به ازای $b>1$ داریم:

$$e^b > eb$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود که به ازای $x \ge 1$ داریم:

$$e^x \ge ex$$

در حالت خاص، به ازای $x = c+1$ داریم:

$$e^{c+1} \ge e(c+1) \Rightarrow e^c \ge c+1$$

که در آن c می‌تواند هر عدد دلخواه حقیقی باشد.

مثال۲. ثابت کنید به ازای $x \ge 0$ داریم:

$$e^x \ge 1+x+\frac{x^2}{2}$$

اثبات: فرض کنیم b عددی دلخواه و مثبت باشد: در بازه‌ی $[0,b]$ تابع زیر را درنظر می‌گیریم:

$$f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$$

بنابر قضیه‌ی لاگرانژ داریم:

$$\frac{f(b)-f(0)}{b-0} = f'(c)$$

$$0<c<b \Rightarrow \frac{e^b-\frac{b^2}{2}-1}{b} = e^c - c$$

چون به ازای هر c داریم: $e^c \ge c+1$ (مثال ۱ را نگاه کنید)، پس:

$$e^c - c \ge c+1-c \Rightarrow e^c - c \ge 1$$

$$\Rightarrow \frac{e^b-\frac{b^2}{2}-1}{b} \ge 1 \Rightarrow e^b - \frac{b^2}{2} - 1 \ge b$$

یعنی به ازای هر $b>0$ داریم:

$$e^b \ge 1+b+\frac{b^2}{2}$$

پس به ازای هر $x>0$ خواهیم داشت:

$$e^x \ge 1+x+\frac{x^2}{2}$$

مثال۳. ثابت کنید:

$$\frac{1}{4} < \mathrm{Arcsin}\,0/8 - \mathrm{Arcsin}\,0/6 < \frac{1}{3}$$

اثبات: تابع $f(x) = \mathrm{Arcsin}\,x$ را در بازه‌ی $[0/6, 0/8]$ درنظر می‌گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق‌پذیر است. پس قضیه‌ی لاگرانژ در آن صدق می‌کند:

$$\frac{f(0/8)-f(0/6)}{0/8-0/6} = f'(c)\ ,\ \ 0/6<c<0/8$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Arcsin}\,0/8 - \mathrm{Arcsin}\,0/6}{0/2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$$

مقدار $\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}$ را در بازه‌ی $0/6 < c < 0/8$ تعیین می‌کنیم:

$$0/36 < 1-c^2 < 0/64$$

$$0/6 < \sqrt{1-c^2} < 0/8$$

$$\frac{5}{4} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} < \frac{5}{3}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\frac{1}{4} < \mathrm{Arcsin}\,0/8 - \mathrm{Arcsin}\,0/6 < \frac{1}{3}$$

مثال ۴. ثابت کنید به ازای هر x_1 و x_2 حقیقی، نامساوی زیر برقرار است:

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2|$$

اثبات: به ازای $x_1 = x_2$ نامساوی بالا برقرار است. فرض کنیم $x_1 \ne x_2$ تابع $f(x) = \cos x$ را به ازای $x_1 < x_2$ در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ و به ازای $x_1 > x_2$ در بازه‌ی $[x_2, x_1]$ درنظر می‌گیریم. شرایط قضیه‌ی لاگرانژ در این تابع صدق می‌کند؛ بنابراین نقطه‌ای به طول c در این بازه وجود دارد، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = f'(c)$$

$$\frac{\cos x_1 - \cos x_2}{x_1 - x_2} = -\sin c$$

$$\Rightarrow |\cos x_1 - \cos x_2| = |x_1 - x_2|.|-\sin c|$$

چون $|-\sin c| \le 1$، پس:

$$|\cos x_1 - \cos x_2| \le |x_1 - x_2|$$

مثال ۵. ثابت کنید معادله‌ی $\cos^2\frac{x}{2} + 2^{\cos x} = 2$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بیش از دو ریشه‌ی حقیقی ندارد.

اثبات: فرض کنیم معادله در این بازه حداقل سه ریشه‌ی x_1 و x_2 و x_3 داشته باشد، طوری که $x_1 < x_2 < x_3$

بنابراین، x_1 و x_2 و x_3 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x) = 2 - \cos^2\frac{x}{2} - 2^{\cos x}$$

یعنی:

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$$

در هر یک از بازه‌های $[x_1, x_2]$ و $[x_2, x_3]$، شرایط لاگرانژ درباره‌ی تابع صدق می‌کند. پس c_1 و c_2 هایی به ترتیب از بازه‌های (x_1, x_2) و (x_2, x_3) وجود دارند؛ به طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} = f'(c_2)$$

چون: $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ پس $f'(c_1) = 0$ و $f'(c_2) = 0$

مشتق تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f'(x) = 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}.\frac{1}{2} + 2^{\cos x}.\sin x.\text{Ln}2$$

$$= \frac{1}{2}\sin x + \sin x.2^{\cos x}\text{Ln}2 = \sin x(\frac{1}{2} + 2^{\cos x}\text{Ln}2)$$

چون $\frac{1}{2} + 2^{\cos x}\text{Ln}2 > 0$، پس از معادله‌ی $f'(x) = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi$$

یعنی در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ تنها یک ریشه‌ی منحصر به فرد وجود دارد و این تناقض است، زیرا c_1 و c_2، $(c_1 \neq c_2)$ باید ریشه‌های $f'(x) = 0$ باشند.

از آن‌جا نتیجه می‌شود معادله $\cos^2\frac{x}{2} + 2^{\cos x} = 2$ در بازه‌ی $(0, 2\pi)$ بیش از دو ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال ۶. معادله‌ی $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0$ را حل کنید.

حل: به آسانی می‌توان دید که $x_1 = 1$ ریشه‌ی معادله است. فرض کنیم معادله یک ریشه‌ی حقیقی دیگر مانند x_2 داشته باشد. در این صورت x_1 و x_2 صفرهای تابع زیر خواهند بود:

$$f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

قضیه‌ی لاگرانژ به ازای $x_1 < x_2$ در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ و به ازای $x_2 < x_1$ در بازه‌ی $[x_2, x_1]$ صدق می‌کند. پس در این بازه‌ها عددی مانند c موجود است، به طوری که:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

چون $f(x_1) = f(x_2) = 0$ پس: $f'(c) = 0$. یعنی c ریشه‌ی معادله‌ی $f'(x) = 0$ است. اما داریم:

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 50$$

دیده می‌شود که مشتق به ازای هر x، مثبت است (مبین $f'(x) = 0$ نسبت به x^2 منفی و ضریب x^4 مثبت است $5 > 0$ و $(x^2 = y \Rightarrow 5y^2 - 30y + 50 = 0 \quad \text{و} \quad \Delta = (30)^2 - 1000 < 0$)

یعنی $f'(x) = 0$ جواب ندارد و این یک تناقض است. بنابراین $x_1 = 1$ ریشه‌ی منحصر به فرد معادله‌ی مفروض است.

مثال ۷. تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه‌ی زیر را پیدا کنید.

$$y = (x^3 - x)(x - 8)(x - 9)$$

حل: چون تابع از درجه‌ی پنجم است، پس مشتق آن کثیرالجمله‌ای از درجه‌ی چهارم خواهد بود و بنابراین بیش از چهار ریشه‌ی حقیقی نخواهد داشت.

قضیه‌ی لاگرانژ را برای تابع:

$$f(x) = (x+1)(x)(x-1)(x-8)(x-9)$$

در بازه‌های $[-1, 0]$ و $[0, 1]$ و $[1, 8]$ و $[8, 9]$ به کار می‌بریم. داریم:

$$f(-1) = f(0) = f(8) = f(9) = 0$$

در داخل هریک از این فواصل، به ترتیب x_1، x_2، x_3 و x_4 یافت می‌شوند، طوری که داشته باشیم:

$$\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0} = f'(x_1) \quad \text{و} \quad \frac{f(0)-f(1)}{0-1} = f'(x_2)$$

$$\frac{f(1)-f(8)}{1-8} = f'(x_3) \quad \text{و} \quad \frac{f(8)-f(9)}{8-9} = f'(x_4)$$

دیده می‌شود:

$$f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0, \quad f'(x_3) = 0, \quad f'(x_4) = 0$$

چون x_1، x_2، x_3 و x_4 ریشه‌های کثیرالجمله‌ی $f'(x) = 0$ هستند که از درجه‌ی چهارم است، پس برای $f'(x)$ ریشه‌های متمایز دیگری وجود ندارد. بنابراین، تابع با ضابطه‌ی

$$y = (x^3 - x)(x - 8)(x - 9)$$

چهار نقطه‌ی بحرانی دارد.

اکنون نتایج ۱ و ۲ قضیه‌ی لاگرانژ را در اثبات این مطالب به کار می‌بریم:

۱. اثبات اتحادها و در حالت خاص استنتاج فرمول‌های ریاضی مقدماتی؛

۲. ساده کردن عبارت‌های جبری؛

۳. تبدیل عبارت‌های جبری به صورت حاصل ضرب عوامل.

برای این منظور، بازه‌های تابع f را طوری انتخاب می‌کنیم که مشتق تابع در آن بازه‌ها صفر باشد و درنتیجه از تساوی $f'(x)=0$، ثابت بودن تابع را نتیجه می‌گیریم: $f(x)=c$

یا به جای یک تابع، دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $f'(x)=g'(x)$

و از آن‌جا: $f(x)=g(x)+c$

که در آن c مقدار ثابتی است و برای تعیین آن به جای x، مقدار معینی مانند x_1 قرار می‌دهیم و c را به‌دست می‌آوریم (تساوی بالا به‌ازای هر x حقیقی برقرار است).

مثال ۸. بدون استفاده از اتحادهای مثلثاتی ثابت کنید:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\cos 2x - 2\cos^2 x$ را در نظر می‌گیریم. این تابع به ازای همه‌ی مقادیر x پیوسته و مشتق‌پذیر است. داریم:

$$f'(x) = -2\sin 2x + 4\cos x \sin x$$
$$-2\sin 2x + 4\cos x \sin x = -2\sin 2x + 2\sin 2x = 0$$
$$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow f(x)=c$$

برای تعیین c در تابع $f(x)$، به جای x قرار می‌دهیم $x=0$. از آن‌جا داریم:

$$f(0)=c=\cos 0 - 2\cos^2 0 \Rightarrow c=-1$$
$$\Rightarrow f(x)=-1 \Rightarrow \cos 2x - 2\cos^2 x = -1$$
$$\Rightarrow \cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

مثال ۹. اگر $-1 \le x \le 1$، آن‌گاه ثابت کنید:

$$\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$$

اثبات: تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\operatorname{Arccos}(-x)+\operatorname{Arccos} x$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ درنظر می‌گیریم. تابع در این بازه پیوسته و مشتق آن صفر است:

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$$

پس به ازای هر x از این بازه داریم: $f(x)=c$

به ازای $x=0$ داریم:

$$f(0)=c=\operatorname{Arccos} 0+\operatorname{Arccos} 0$$
$$c=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$
$$\Rightarrow f(x)=\operatorname{Arccos}(-x)+\operatorname{Arccos} x=\pi$$

پس به ازای $-1 \le x \le 1$ داریم:

$$\operatorname{Arccos}(-x)=\pi-\operatorname{Arccos} x$$

مثال ۱۰. ثابت کنید به ازای $x<0$ تساوی زیر برقرار است:

$$\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\pi}{2}$$

اثبات: دو تابع با ضابطه‌ی زیر را در بازه‌ی $[-\infty,0]$ درنظر می‌گیریم.

$$f(x)=\operatorname{Arctg} x \quad \text{و} \quad g(x)=\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

هر دو تابع در بازه‌ی $[b,0]$ پیوسته هستند. مشتق آن‌ها را تعیین می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad \text{و}$$

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}}\cdot\frac{-x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{-x}{|x|(1+x^2)}$$

چون به فرض $x<0$، پس:

$$|x|=-x\ ,\ \ g'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

یعنی در بازه‌ی $[b,0]$ مشتق این دو تابع مساوی‌اند:

$$f'(x)=g'(x)\Rightarrow f(x)=g(x)+c$$

برای تعیین c قرار می‌دهیم $x=-1$:

$$\operatorname{Arctg}(-1)=\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{2}}+c\Rightarrow c=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}$$

پس به ازای $x<0$ داریم:

$$\operatorname{Arctg} x=\operatorname{Arcsin}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{\pi}{2}$$

ادامه دارد...