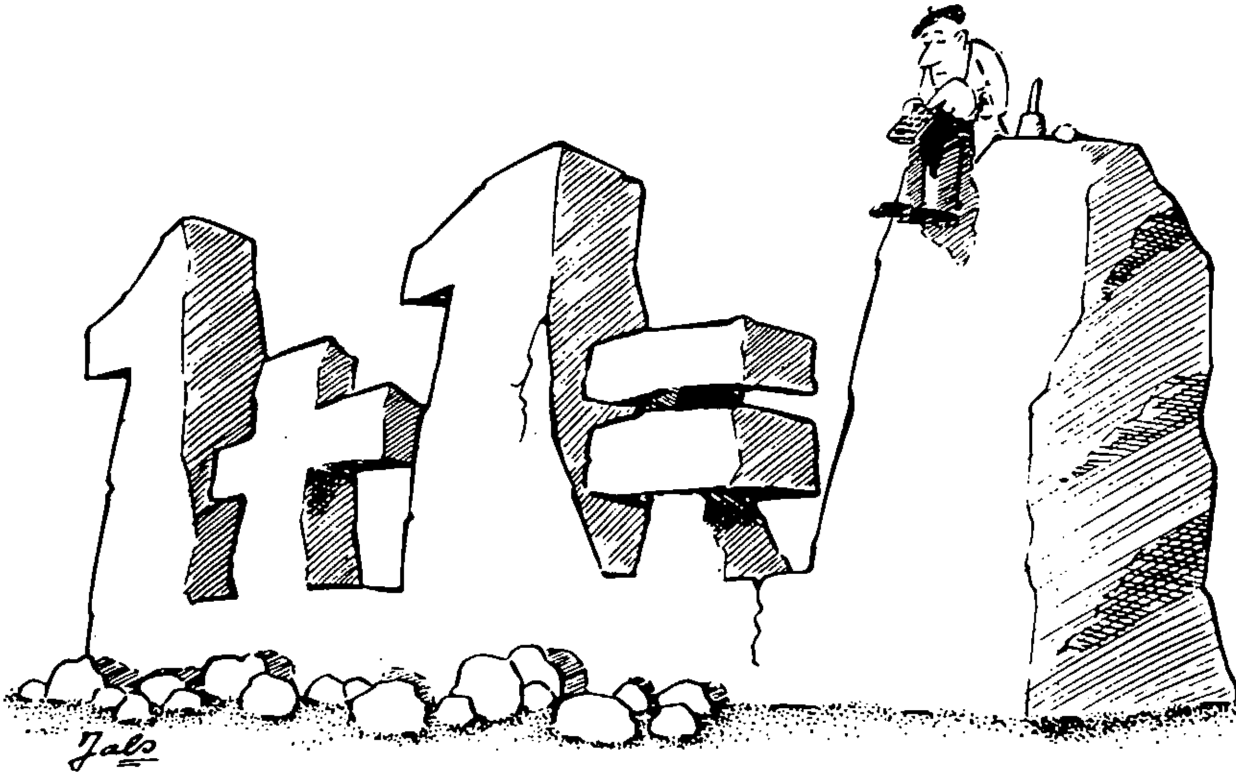

چند کلمه دربارهٔ مبانی ریاضی

● ترجمهٔ دکتر منوچهر وصال/ویراستهٔ سیامک کاظمی

اقتباس از کتاب مبانی ریاضیات «کارول شوماخر»[1]

استدلال ریاضی

در استدلال ریاضی، برای استنباط نتایج (**قضایا**) از فرضهای اساسی (**اصول موضوع**)، استدلالهای منطقی را به کار می‌بندند. تقریباً همهٔ ریاضیات بر پایهٔ مجموعه‌ها بنا شده است؛ بنابراین فرضهای اساسی اصول موضوع، نظریهٔ مجموعه‌ها هستند. اما در عمل بندرت به طور مستقیم به این اصول موضوع استناد می‌شود. ریاضیدان، بیشتر اوقات، از فرضهای فرعی و بیش از همه از تعریفها، که طبق اصول با استفاده از نظریهٔ مجموعه‌ها قابل توجیه‌اند، استفاده می‌کند. فرضها، خواه اصول موضوع واقعاً بنیادی باشند، خواه اصول موضوع فرعی و تعریفها، نقطهٔ آغازین زنجیره‌های استدلال منطقی دقیقی هستند که به قضیه‌ها می‌انجامند. در این کار، از گونهٔ خاصی از زبان طبیعی استفاده می‌شود. این «زبان ریاضی» برای بیان دقیق و بدون ابهام مفهومهای ریاضی، طرّاحی شده است.

تصمیم گیری دربارهٔ فرضها

کمی از موضوع خارج می‌شویم. اغلب ما با پنج اصل موضوع هندسه مسطحهٔ اقلیدس که سیصد سال پیش از میلاد وضع شده، آشنا هستیم. این اصول موضوع، به زبان امروز، به صورت زیر بیان می‌شوند:

۱ ـ خط با دو نقطه مشخص می‌شود.
۲ ـ پاره‌خط را می‌توان به طور نامحدود ادامه داد.
۳ ـ دایره با یک نقطه و یک شعاع مشخص می‌شود.
۴ ـ دو زاویهٔ قائمه برابرند.
۵ ـ به ازای هر خط و هر نقطهٔ مفروضی که روی این خط نباشد، یک و تنها یک خط از این نقطه به موازات خط اوّل می‌گذرد. (این در واقع روایت «جان پلی‌فر» (۱۸۱۹-۱۷۴۸) از اصل موضوع پنجم است. بیان اصلی اقلیدس، کمی پیچیده‌تر است.)

اقلیدس توانست از این پنج حکم همهٔ هندسهٔ زمان خودش را به طور دقیق نتیجه بگیرد. روش اصل موضوعی، آن قدر موفق بود که الگوی تفکّر ریاضی شد. «**اصول اقلیدس**» بیش از ۲۰ قرن کتاب درسی هندسه بود و حتی امروز، اکثر شاگردان هندسه، با روش کلی اصول اقلیدس هندسه می‌آموزند.

پس اقلیدس، کار بسیار بزرگی انجام داده است. او در وهلهٔ اوّل، نقطهٔ آغاز کار خود را چگونه انتخاب کرد؟ اقلیدس و همهٔ هندسه‌دانان، تا قرنها بعد از او، بر این باور بودند که اصول موضوع او نوعی حقیقت مطلق را دربارهٔ صفحه دربر دارد. او مفهومهایی شهودی از صفحه، خط و جز اینها، در نظر داشت و اصول موضوعی را که فکر می‌کرد آنها را توصیف می‌کنند وضع کرد. هندسه‌دانان، چهار اصل موضوع اول او را پسندیدند؛ اما بحثهای زیادی دربارهٔ اصل موضوع پنجم درگرفت. (هیچ‌کس در درستی آن شک نداشت؛ اما بسیاری تصور می‌کردند به عنوان فرض اصلی لازم نیست. فکر می‌کردند که می‌توان آن را از چهار اصل موضوع اوّل نتیجه گرفت.) این حکایت طولانی را کوتاه می‌کنیم، در نیمهٔ اوّل قرن نوزدهم، هندسه‌های نااقلیدسی اختراع شدند؛ یعنی دستگاه‌هایی هندسی که هر یک در درون خود کاملاً سازگار بودند، بر پایهٔ اصول موضوع یک تا چهارم و یک اصل موضوع جدید دربارهٔ خطوط موازی که اصل پنجم اقلیدس را نقض می‌کند، ابداع شدند. مثلاً اصل موضوع جدید ممکن است این باشد:

۵ ـ به ازای هر خط و هر نقطهٔ مفروضی که روی این خط نباشد، **بیش از یک خط** موازی با خط مفروض می‌گذرد.

هندسه‌ای که از این مجموعهٔ اصول موضوع جدید حاصل می‌شود، هندسهٔ «نااقلیدسی» نامیده می‌شود؛ این هندسه را می‌توان هندسهٔ «رویهٔ خمیده» تعبیر کرد که در آن خمهایی در رویه، نقش خطها را بازی می‌کنند. سرانجام «صفحه»، «خط» و «نقطه» به‌رغم تعبیری که اقلیدس از آنها کرده است، اصطلاحهای **تعریف نشده** هستند. بنابراین آیا این که فکر می‌کردند اصول اقلیدس، حقیقت مطلق است، درست است.

آری و نه. در واقع این سؤال نادرست است. درست پس از کشف هندسهٔ نااقلیدسی، ریاضیدانان به این نتیجه رسیدند که انتخاب‌اصول موضوع ریاضی **کاملاً دلخواه است**؛ به شرط این که اصول موضوع انتخاب شده، باهم سازگار باشند (یعنی تناقضی به وجود نیاورند).

کاملاً می‌توان جهانی راتصور کرد که از قوانین هندسهٔ نااقلیدسی پیروی می‌کند[۲]. بنابراین، مجموعه‌های مختلف اصول موضوع، ممکن است به یک اندازه معتبر باشند ولی برابری اعتبار، به این معنا نیست که هر مجموعهٔ اصول موضوع باهم سازگار، به خوبی هر مجموعهٔ دیگری است. وقتی مجموعهٔ خاصی از اصول موضوع را می‌پذیریم، معمولاً منظوری در ذهن داریم. اقلیدس، اصول موضوعش را برای بیان دقیق درک شهودی خود از صفحهٔ هندسه انتخاب کرد. اصول موضوع نظریهٔ مجموعه‌ها، تصور معمولی ما را از مجموعه بیان می‌کند. همچنین اصول موضوع اعداد حقیقی، اعداد حقیقی را توصیف می‌کنند. در هر یک از این حالتها، با اصول موضوع، ایدهٔ مجردی به صورتی دقیق بیان می‌شود و به این ترتیب، تحلیل ریاضی دقیق آن ممکن می‌شود.

آنچه گفتیم، برای تعریفها هم درست است. تعریفها اختیاری هستند؛ اما با دقت انتخاب می‌شوند. مثلاً در هندسهٔ مسطحه، می‌توانیم دایره و سه نقطه را که روی دایره نباشند، تعریف یک شیء اختیار کنیم. اما این شیء جدید، احتمال دارد خیلی مفید نباشد. همچنین اگر از بی‌توجهی، مربع را یک چهار ضلعی با اضلاع مساوی تعریف کنیم، بزودی می‌بینیم که ممکن است زاویه‌های آن قائمه نباشند و سپس می‌توانیم تعریف را اصلاح کرده، مربع را چهارضلعی با اضلاع مساوی و زاویه‌های قائمه تعریف کنیم. وانگهی، لغت «مربع» معنای معمولی و شایع خود را دارد. برای حفظ ارتباطات و سهولت (و احترام به دیگران)، صلاح در این است که هر وقت ممکن است، از قراردادهای ریشه‌دار ریاضی پیروی کنیم. تعریفها، مانند اصول موضوع، برای بیان دقیق مفهومهای مفید، به نحوی که منطبق با عرف باشد ابداع شده‌اند.

برای کارکردن در ریاضیات چه چیز لازم داریم؟

اصول موضوع و تعریفها، نقطهٔ آغاز هستند. همین که در مورد فرضهای اساسی تصمیم گرفتیم، می‌توانیم کار را ادامه دهیم و اثبات قضیه‌ها را شروع کنیم. «برهان»، زنجیره‌ای از استدلالهای منطقی (و گاه بسیار طولانی) است که توسط آن، یک قضیهٔ ریاضی را از فرضهای اساسی نتیجه می‌گیریم. زنجیرهٔ استدلال، از اصول موضوع شروع و به گزاره‌ای که سعی در اثبات آن داریم، ختم می‌شود؛ اما در عمل، بندرت همهٔ حلقه‌های زنجیرهٔ استدلال را عرضه می‌کنیم. کافی است نشان دهیم که این گزاره، از قضیه‌هایی که پیش از این ثابت شده است، نتیجه می‌شود. وقتی قضیه‌ای را ثابت کردیم، درستی آن به اندازهٔ خود اصول موضوع، محرز شده است.

در مسأله‌ای که زنجیره‌های استدلال آن طویلند، یک حلقهٔ بد در یک زنجیره، آن‌را خراب می‌کند. اگر برهانی، یک مرحلهٔ نادرست داشته باشد، دیگر به هیچ وجه برهان نیست (اگرچه ممکن است بتوان اشتباه را رفع کرد و از آن یک برهان ساخت). بنابراین

اجتناب از خطا در هر مرحله بسیار مهم است.

کار اصلی برای اجتناب از برهانهای غلط، پیروی دقیق از قواعد منطق قیاسی است. در هر مرحلهٔ استدلال، برای ثابت کردن یک گزارهٔ جدید بر پایهٔ گزاره‌های قبلی، ازاین قواعد استفاده می‌شود. مرحله‌ای از استدلال که طبق قواعد منطق نباشد، بی‌اعتبار است؛ *حتی اگر به‌طوراتفاقی، گزارهٔ جدید راست باشد.* استدلال، متشکل از گزاره‌های راست معتبر نیست؛ اگر منطق به استنتاجهایی که گزاره‌ها را به هم مربوط می‌کنند، صحّه نگذاشته باشد. بنابراین لازم است که هر ریاضیدان، قواعد منطق قیاسی را بداند و با دقت زیاد، آنها رابه کار برد.

این کار، مشکلتر از آن است که به نظر می‌رسد. حکم ریاضی، ممکن است خیلی پیچیده باشد، در این صورت، تجزیه کردن آن به چند قسمت و فهمیدن این که چگونه با هم ترکیب می‌شوند، تا حدّی نیاز به مهارت دارد. مثلاً حتی نقیض گزاره ـ یعنی بیان گزارهٔ مخالف ـ که به نظر ساده می‌رسد، اگر گزاره پیچیده باشد، ممکن است چندان ساده نباشد. کوشش کنید نقیض گزارهٔ زیر را بیان کنید: «اگر هر وقت به فروشگاه می‌روید، مردم شما را بشناسند، آن‌گاه یا شما در شهر کوچکی زندگانی می‌کنید یا شخص خیلی مشهوری هستید.»

اگر زبانی که از آن استفاده می‌شود، نادقیق و مبهم باشد، حتی پیروی دقیق از منطق، کافی نیست. به همین دلیل است که ریاضیدانان، قراردادهای خاصی در مورد اصطلاحها و دستور زبان به وجود آورده‌اند که به مراتب، دقیقتر از زبان محاوره‌ای است. بنابراین، ریاضیدانان باید «زبان ریاضی» را بفهمند و بتوانند آن را به کار بندند.

دربارهٔ زبان ریاضی، نکته‌های زیادی وجود دارد. روشنترین نکته این است که زبان ریاضی، متضمّن تعداد خیلی زیادی اصطلاح است که با اصطلاحهایی که در زندگانی روزانه به کار می‌روند، متفاوت است و دربین آنها، نمادهای مجرّد فراوان است. از نمادها صرفاً برای راحتی کار استفاده می‌شود: نوشتن «x^2» از نوشتن «مربع x» راحت‌تر است، و «$x \in A$» جمع‌وجورتر از «x عضو مجموعهٔ A است» می‌باشد. در هرحالت، عبارت نمادی و عبارت غیرنمادی یک معنا دارند.

اما زبان ریاضی، خیلی بیش از اصطلاحهای غریب و عجیب و نمادهای رازآمیز، زبانی است بسیار صوری، دقیق و قاعده‌مند. اداتی مانند «اگر و تنها اگر»، «به ازای هر»، «وجود دارد» و جز اینها، بارها و بارها تکرار می‌شوند. این عبارتها، برای بیان رابطه‌های منطقی، با کمترین ابهام، با دقت انتخاب شده‌اند. نه تنها عبارتها، بلکه ترتیب آنها نیز بسیار اهمیت دارد. به تفاوت بین این دو گزاره بیندیشید: «برای هر زهری، داروی پادزهر وجود دارد.»، «دارویی وجود دارد که پادزهر هر زهری است.» دقت زبان معمولی، به قدری کم است که با این که زبان ریاضیات گونه‌ای از زبان طبیعی است، شاگرد مبتدی در ریاضیات مجرّد، ممکن است احساس کند که با یک زبان خارجی مواجه شده است.

با زبانی دقیق و منطقی دقیق، می‌توان استدلالهای ریاضی معتبر ساخت. اما مشارکت در کارهای گسترده‌تر ریاضی به معلومات عمومی در ریاضیات نیاز دارد. این معلومات عمومی، شامل ایده‌ها، قضایا و تکنیکهایی است که تقریباً در همهٔ شاخه‌های ریاضیات وجود دارد. کتابی در ریاضیات مجرّد را باز کنید، درآن به مجموعه‌ها، رابطه‌ها، تابعها، برهان مبتنی برعکس نقیض، استقرای ریاضی، رابطهٔ نزدیک بین رابطه‌های هم‌ارزی و افرازها برمی‌خورید. به طور خلاصه، مجموعه‌ای از ایده‌هایی است که هر ریاضیدان می‌داند و به کار می‌بندد.

یادداشتها

۱ـ C. Schumācher– Chapter Zero : Fundamental Notions of Abstract Mathematics. Addison weseley, 1996.

۲ـ در واقع، در نظریهٔ نسبیت عام، فرض می‌شود که هندسهٔ جهان فیزیکی ناااقلیدسی است.