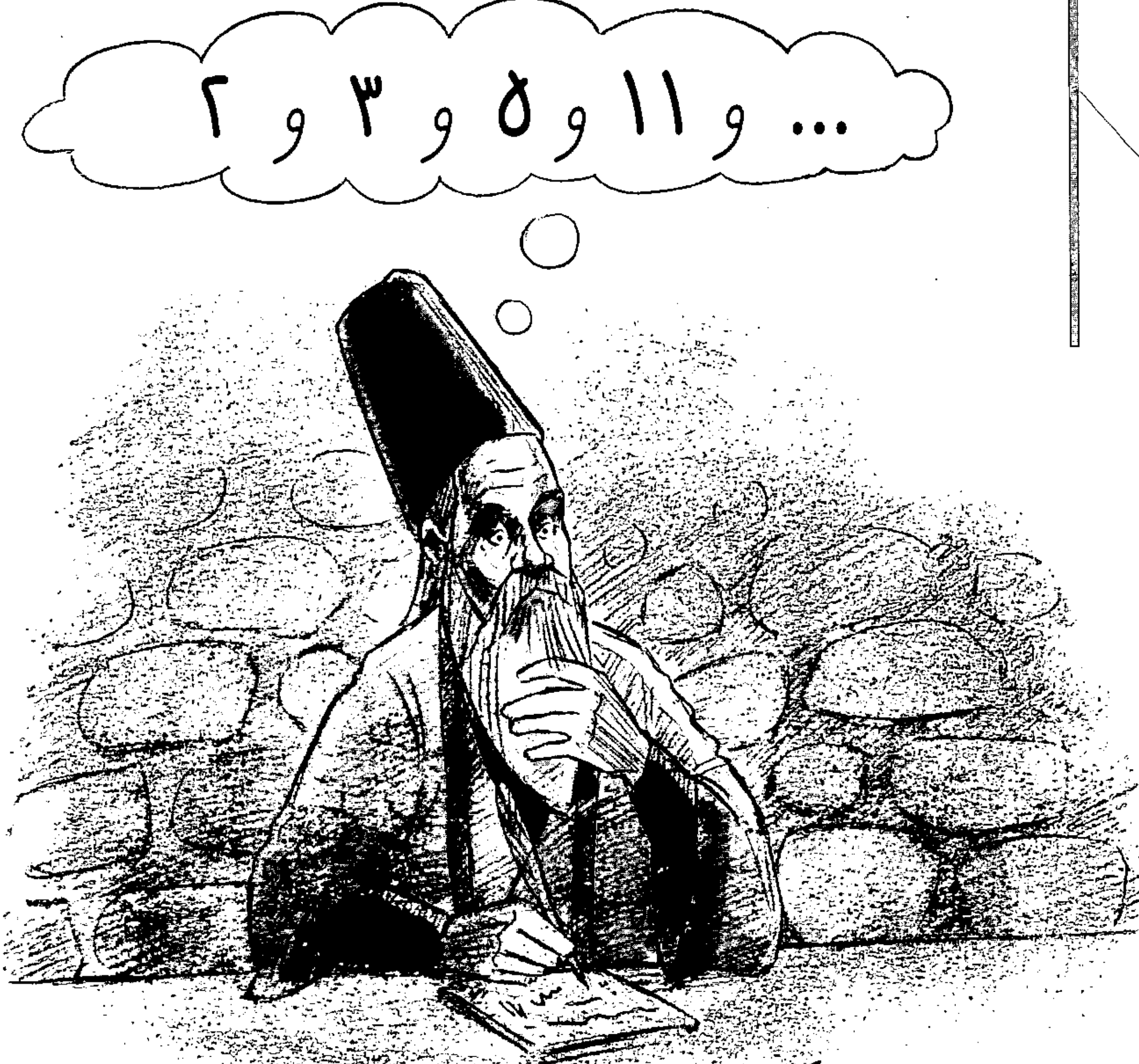
● سید حسین اصولی



چند نکته درباره‌ی اعداد اول

برهان متوسطه
دوره‌ی نوزدهم
شماره‌ی ۳
بهار ۱۳۸۹
۶۲

جایگاه اعداد اول[1]، ساختار، رموز و پراکندگی آن‌ها در میان اعداد طبیعی، از زمان اقلیدس تا کنون، اذهان بسیاری را به خود مشغول داشته است. در این دوره‌ی ۲۵۰۰ ساله، نظرات متفاوتی نیز ارائه شده‌اند و روش‌های جست‌وجو برای به‌دست آوردن اعداد اول، ابداع و تکامل یافته‌اند؛ از غربال‌گیری اعداد در فاصله‌های دل‌خواه از میان اعداد (با حذف اعداد زوج و مضرب‌های ۳) گرفته تا جدول‌های پیشرفته.

یکی از این غربال‌ها، جدولی است که س. پ. سوندار، دانشجوی ریاضی هندی، در سال ۱۹۴۴ به‌دست آورده است[2]:

۴	۷	۱۰	۱۳	۱۶	...
۷	۱۲	۱۷	۲۲	۲۷	...
۱۰	۱۷	۲۴	۳۱	۳۸	...
۱۳	۲۲	۳۱	۴۰	۴۹	...
۱۶	۲۷	۳۸	۴۹	۶۰	...
...	...	...	...	...	...

غربال بالا از بی‌شمار تصاعد حسابی نامحدود تشکیل شده است که جمله‌ی اول آن‌ها، به‌ترتیب جمله‌های تصاعد اولیه است:

۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ...

جایگاه اعداد اول[1]، ساختار، رموز و پراکندگی آن‌ها در میان اعداد طبیعی، از زمان اقلیدس تا کنون، اذهان بسیاری را به خود مشغول داشته است

قدر نسبت این تصاعدها به ترتیب عددهای فرد متوالی‌اند که از ۳ شروع شده باشند:

$$d_1 = 3 \ , \ d_2 = 5 \ , \ d_3 = 7 \ , \ d_4 = 9 \ , \ \cdots$$

اگر عددی مثل N در این جدول وجود داشته باشد، عدد $2N + 1$ غیر اول است و اگر عدد N در این جدول وجود نداشته باشد، $2N + 1$ عددی اول است.

سؤال: چگونه می‌توان اول بودن یا نبودن $2N + 1$ را براساس جدول فوق ثابت کرد؟

جواب: با عنایت به این‌که اعداد فرد مثبت به‌صورت $2a + 1$ نوشته می‌شوند $(a \geq 0)$، در واقع هر کدام از اعداد جدول به‌صورت $[(2a+1)n] + a$ هستند و داریم:

$$a, n \geq 1 \ ; \ a, n \in N$$

حال اگر $[(2a+1)n] + a$ به‌جای N در $2N + 1$ قرار گیرد، حاصل غیراول است و داریم:

$$2[[(2a+1)n] + a] + 1 = 2[2an + n + a] + 1$$
$$= 4an + 2n + 2a + 1 = (2a+1)(2n+1)$$

ساختار واقعی اعداد اول از چیست؟

در میان اعداد طبیعی، مضرب‌های فرد عدد ۳ به‌صورت $6n + 3$ نوشته می‌شوند که حاصل جمع دو مضرب ۳ هستند و داریم:

$$6n + 3 = 3n + (3n + 3) \ ; \ n \in N \ , \ n \geq 0$$

اگر $6n + 3$ را به‌صورت جمع دو عدد متوالی بنویسیم، خواهیم داشت:

$$6n + 3 = 3n + (3n + 3) = (3n + 1) + (3n + 2)$$

ملاحظه می‌شود، هیچ‌یک از دو عدد بالا، به تنهایی مضرب ۳ نیستند. این واقعیت نشان می‌دهد که اعداد اول (به‌جز ۳)، چون مضرب ۳ نیستند، نمی‌توانند به‌صورت $(3n+1) + (3n+2)$ نوشته شوند. بلکه به‌صورت مجموع دو عدد متوالی هستند که حتماً در یکی از آن‌ها مضرب ۳ است. پس خواهیم داشت:

$$P = 3n + (3n \pm 1) = 6n \pm 1$$
$$p \geq 5 \ , \ n \geq 1 \ , \ n \in N$$

به‌عبارت دیگر، هر عدد اولی (به‌جز ۳ و ۲) از مجموع یک مضرب ۳ با اولین عدد کوچک‌تر یا بزرگ‌تر از آن به‌دست می‌آید. n باید چگونه باشد تا حاصل $6n \pm 1$ اول شود؟ جایگاه واقعی اعداد اول کجاست؟

با توجه به این‌که $P = 6n \pm 1$، اگر دو عددی که در n فاصله از p و در دو طرف آن قرار دارند، در $6n \pm 1$ قرار گیرند، حاصل، غیراول و مضربی از p می‌شود.

چگونه تعیین می‌شود که حاصل $6n - 1$ غیر اول است یا حاصل $6n + 1$؟

الف) اگر $P = 6n - 1$ آن‌گاه، حاصل عبارت‌های زیر غیراول و مضربی از p خواهد بود:

$$1) \ [6(P+n)] - 1 = [6(6n - 1 + n)] - 1 = [6(7n - 1)] - 1 = 42n - 7$$
$$2) \ [6(P-n)] + 1 = [6(6n - 1 - n)] + 1 = [6(5n - 1)] + 1 = 30n - 5$$

ب) اگر $P = 6n + 1$ آن‌گاه، حاصل عبارت‌های زیر غیراول و مضربی از p خواهد بود:

$$3) \ [6(P+n)] + 1 = [6(6n + 1 + n)] + 1 = [6(7n + 1)] + 1 = 42n + 7$$
$$4) \ [6(P-n)] - 1 = [6(6n + 1 - n)] - 1 = [6(5n + 1)] - 1 = 30n + 5$$

با توجه به این‌که n برابر است با $\frac{P \pm 1}{6}$، چهار عبارت بالا را می‌توان در قالب عبارت زیر بیان کرد:

$$\left[6(Px \pm \frac{Py \pm 1}{6})\right] \pm 1 \; ; \quad x,y \geq 1 \; ; \quad x,y \in N \quad 2,3 \nmid xy$$

به‌طور کلی، حاصل ۱ − ۶n یا ۱ + ۶n زمانی غیراول می‌شود که عبارت مذکور به چهار حالت زیر باشد:

$$1)\ \left[6(Px + \frac{Py+1}{6})\right] - 1 \qquad 2)\ \left[6(Px - \frac{Py+1}{6})\right] + 1$$

$$3)\ \left[6(Px - \frac{Py-1}{6})\right] - 1 \qquad 4)\ \left[6(Px + \frac{Py-1}{6})\right] + 1$$

مثال ۱. عبارت ۵۵ = ۱ + ۶n، n چه خصوصیتی دارد که حاصل ۱ + ۶n غیراول است؟

حل: عدد ۹ حاصل $(11 - \frac{11+1}{6})$ است و طبق رابطه‌ی ۳ داریم:

$$\left[6(Px - \frac{Py+1}{6})\right] + 1 = \left[6(11 - \frac{11+1}{6})\right] + 1$$

$$= (6 \times 9) + 1 = 5 \times 11$$

مثال ۲. چرا حاصل ۱ + ۶n و ۱ − ۶n به ازای ۲۰ = n، هر دو غیر اول‌اند؟

حل:

الف) ۱۱۹ = ۱ − ۶n . طبق رابطه‌ی ۱ داریم:

$$\left[6(Px + \frac{Py+1}{6})\right] - 1 = \left[6(17 + \frac{17+1}{6})\right] - 1$$

$$= (6 \times 20) - 1 = 7 \times 17$$

ب) ۱۲۱ = ۱ + ۶n . طبق رابطه‌ی ۲ داریم:

$$\left[6(Px - \frac{Py+1}{6})\right] + 1 = \left[6(11 \times 2 - \frac{11+1}{6})\right] + 1$$

$$= \left[6(22 - 2)\right] + 1 = (6 \times 20) + 1 = 11 \times 11$$

ـ در طول چندین قرن، ریاضی‌دانان تصور می‌کردند که اعداد اول باید رابطه‌ی عجیب و دشواری داشته باشند. در حالی‌که آن‌چه ذکر شد، نشان می‌دهد حاصل ۱ − ۶n یا ۱ + ۶n در اصل اول است، مگر این‌که n به‌صورت $(Px \pm \frac{Py \pm 1}{6})$ باشد که ضرایب y و x، یک عدد اول مشترک باشد. اعداد اول، با جایگاه مشخص و ثابت و بر اساس نظم و منطق، در میان اعداد طبیعی واقع‌اند. این جایگاه ناملموس و نامرئی است و تنها با بیان روابط اشاره شده قابل درک و فهم است. سؤال اساسی این است که یافتن nهایی که فقط به تولید اعداد اول منجر شوند، چه‌قدر اهمیت دارد؟

با عنایت به مطالب ارائه شده، می‌توان رابطه‌هایی را برای یافتن اعداد بیان کرد:

رابطه‌ی اول:

$$P = 2n + 1 : n \neq 2an + n + a \quad a, n \geq 1 \quad a, n \in N$$

رابطه‌ی دوم:

$$\begin{cases} P = 6n + 1 : n \neq Px + \frac{Py-1}{6} \ \text{یا}\ \ Px - \frac{Py+1}{6} \\ P = 6n - 1 : n \neq Px + \frac{Py+1}{6} \ \text{یا}\ \ Px - \frac{Py-1}{6} \end{cases}$$

$$x,y \geq 1 \; , \; x,y \in N \; , \; 2,3 \nmid y$$

پی‌نویس ....

۱. جدول را می‌توان به این صورت نیز تنظیم کرد:

(۳×۱)+۱	(۳×۲)+۱	(۳×۳)+۱	(۳×۴)+۱	(۳×۵)+۱	...	(۳×n)+۱
(۵×۱)+۲	(۵×۲)+۲	(۵×۳)+۲	(۵×۴)+۲	(۵×۵)+۲	...	(۵×n)+۲
(۷×۱)+۳	(۷×۲)+۳	(۷×۳)+۳	(۷×۴)+۳	(۷×۵)+۳	...	(۷×n)+۳
(۹×۱)+۴	(۹×۲)+۴	(۹×۳)+۴	(۹×۴)+۴	(۹×۵)+۴	...	(۹×n)+۴
(۱۱×۱)+۵	(۱۱×۲)+۵	(۱۱×۳)+۵	(۱۱×۴)+۵	(۱۱×۵)+۵	...	(۱۱×n)+۵
...	...	...	...	...	...	...

منبع ....

۱. «عددهای اول»، امیل بورل، ترجمه‌ی پرویز شهریاری.