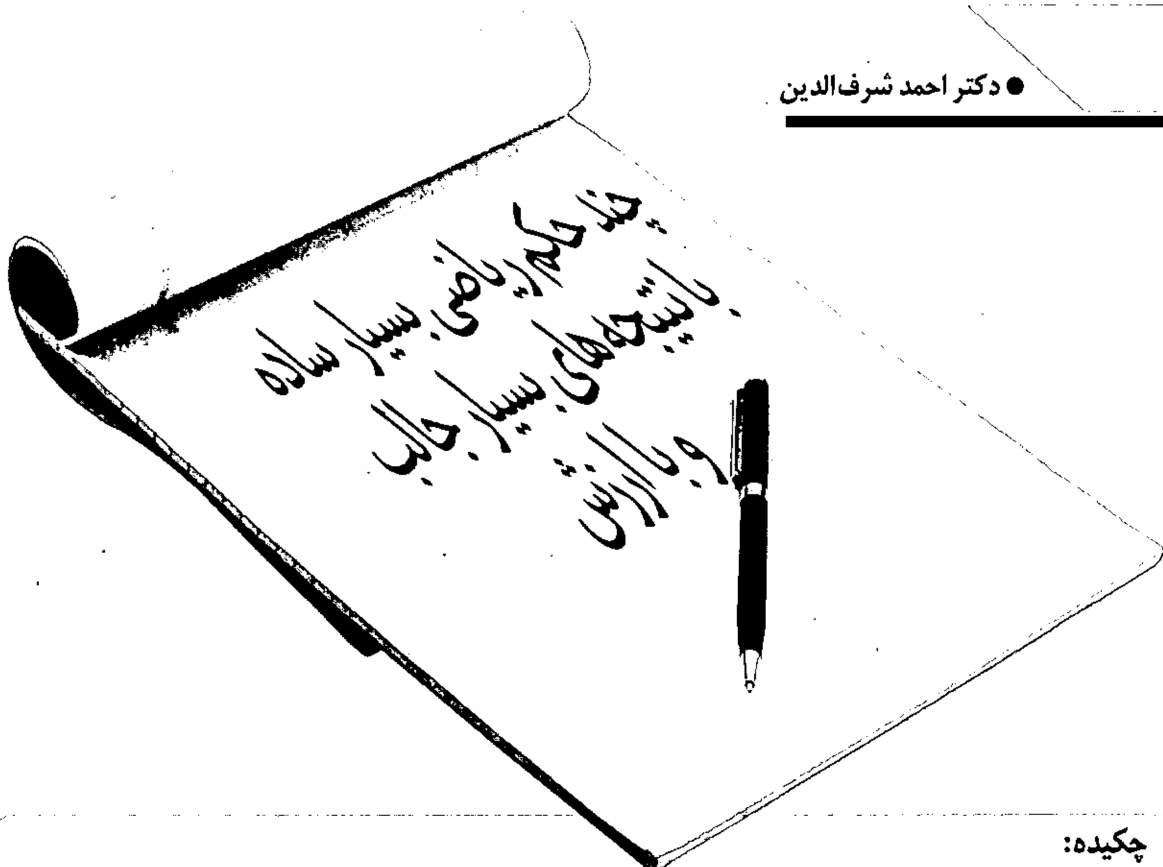
● دکتر احمد شرف‌الدین



چند حکم ریاضی بسیار ساده با نتیجه‌های بسیار جالب و با ارزش

چکیده:

در مقاله‌ی حاضر به کمک مثال‌هایی، چند حکم ریاضی را شرح می‌دهیم که بسیار آسان‌اند، ولی نتیجه‌های مهمی از آن‌ها حاصل شده است:

۱. در چند دهه‌ی اخیر، در بعضی رسانه‌های ایران چنین اظهار شده است: تنها ساختمانی از کره‌ی زمین که از کره‌ی ماه قابل مشاهده است، دیوار چین است. این نظر نادرست است. در این باره توضیح می‌دهیم.

۲. آیا شکلی هامنی (مسطح) وجود دارد که محیط آن بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحت آن بی‌نهایت کوچک؟ به این سؤال جواب مثبت می‌دهیم.

۳. آیا شکلی هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی، ولی سطح آن نامتناهی باشد؟ به این سؤال نیز جواب مثبت می‌دهیم.

۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس، به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده، بسیار بزرگ است.

۵. از یک تابع از جبر «بول» یاد می‌کنیم که بسیار ساده است، ولی در دستگاه‌های رایانه‌ای، کاربرد بسیار مهمی دارد.

۶. یک حکم بسیار ساده از هندسه یاد می‌کنیم که با به‌کارگیری آن ثابت شده است، هم‌زمان نسبی است و این نتیجه فوق‌العاده ارزشمند است.

۱. دیوار بزرگ چین

در «دایرة‌المعارف فارسی» درباره‌ی دیوار چین چنین آمده است: «دیوار بزرگ چین، دیوار دفاعی مستحکم معروفی به ارتفاع ۶ متر تا ۱۵ متر است و به ضخامت ۴/۵ تا ۷/۵ متر که به طول در حدود ۲۰۰۰ کیلومتر، بین مغولستان و چین به معنی اخص ممتد است و در فواصل معین برج‌ها دارد. در [نیمه‌ی دوم] قرن سوم پیش از میلاد، در عهد امپراطوری شی هوانگ تی از سلسله‌ی چین، توسط ۳۰۰,۰۰۰ تن (اغلب از مجرمان) ساخته شد و در سال ۲۰۴ پیش از میلاد به اتمام رسید. طول آن با تمام انشعابات و پیچ‌وخم‌ها، ۳,۲۰۰ کیلومتر است...»

در دایرة‌المعارف بین‌المللی وبستر (WEBSTER)، چاپ پنجم سال ۱۹۹۹، میانگین ارتفاع دیوار ۷/۶ متر و پهنای آن حدود ۳/۶ متر یاد شده است.

❁❁❁

هرم بزرگ مصر

هرم بزرگ مصر قاعده‌ای مربع‌شکل دارد که طول ضلع آن ۲۲۷ متر است. ارتفاع هرم ۱۳۸ متر و طول

هر یالش ۲۱۷ متر است.

***

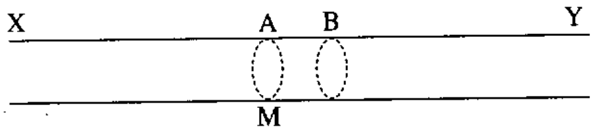
ساختمانی مرتفع در نیویورک

در سال‌های ۳۱-۱۹۳۰ در نیویورک، ساختمانی بزرگ به نام امپایر استیت (EMPIRE STATE) و به ارتفاع ۳۸۱ متر ساخته شد که هنوز پابرجاست.

***

مشاهده‌ی طناب از فاصله‌ی دور

طناب XY را که کاملاً کشیده شده است، از فاصله‌ی دور نگاه می‌کنیم (شکل ۱). قطعه‌ی AB از این طناب را که طول آن برابر قطر مقطع است، درنظر می‌گیریم.



شکل ۱

$\overline{AM} = \overline{AB}$. این طناب را به تدریج به فاصله‌ی دور می‌بریم. تا موقعی که قطعه‌ی AB از طناب دیده می‌شود، کل طناب هم دیده می‌شود. در فاصله‌ای که قطعه‌ی AB دیگر دیده نشود، طناب هم دیده نمی‌شود. یعنی امکان دیده شدن طناب، به طول آن بستگی ندارد، بلکه به قطعه‌ای از طناب بستگی دارد که طول آن برابر ارتفاع مقطع باشد.

اکنون با بهره‌گیری از آن‌چه گفتیم، توضیح می‌دهیم نظر کسانی که می‌گویند «تنها ساختمانی از زمین که از کره‌ی ماه قابل رؤیت است، دیوار چین است»، کاملاً نادرست است.

قطعه‌ای از دیوار چین را درنظر می‌گیریم که بزرگ‌ترین ارتفاع آن ۱۵ متر و طول آن نیز همین اندازه باشد. (در دایرةالمعارف فارسی بزرگ‌ترین ارتفاع دیوار چین ۱۵ متر نوشته شده است). ابعاد چنین قطعه‌ای از دیوار چین، از ابعاد هرم بزرگ مصر کوچک‌تر است بنابراین اگر این قطعه از دیوار چین از ماه دیده شود، به طریق اولی، هرم بزرگ مصر هم از کره ماه دیده خواهد شد. یعنی این نظر نادرست است که دیوار چین تنها ساختمانی از زمین است که از کره ماه دیده می‌شود.

تبصره: می‌توان استدلال‌های دقیق دیگری برای رد نظر دیده شدن دیوار چین از کره‌ی ماه ارائه کرد. یا حتی می‌توان به عکس‌هایی که در کره‌ی ماه از زمین گرفته شده‌اند، استناد کرد. ولی به‌نظر نگارنده‌ی این مقاله، استدلال فوق مبتنی بر ساده‌ترین اطلاعات هندسی است.

***

۲. آیا یک شکل هامنی (مسطح) وجود دارد که محیطش بی‌نهایت بزرگ باشد و مساحتش مقداری محدود؟

آری. به دو مثال زیر توجه فرمایید:

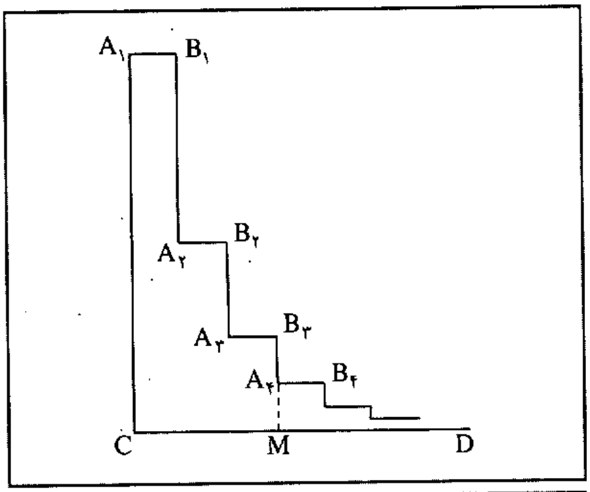
الف) مستطیلی را در نظر می‌گیریم با طول و عرض a و b. اندازه‌ی محیط این مستطیل برابر $2(a+b)$ است و اندازه‌ی سطح آن ab. اگر b را مساوی $\frac{1}{a}$ اختیار کنیم، مساحت مستطیل مورد نظر برابر ۱ می‌شود (عدد ۱، واحد طول است و نیز واحد اندازه‌ی سطح). اگر a را به سوی صفر میل دهیم، مقدار $\frac{1}{a}$ به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. در این صورت محیط مستطیل مورد نظر به‌سوی بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن همواره مساوی با ۱ خواهد بود.

می‌توان طول و عرض مستطیل را طوری درنظر گرفت که محیط مستطیل به سوی بی‌نهایت میل کند و مساحت آن به‌سوی صفر. در مستطیلی به طول و عرض a و b، چنین اختیار می‌کنیم: $b = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

اگر مقدار a به‌سوی صفر میل کند، محیط آن به‌سوی بی‌نهایت و مساحت آن به‌سوی صفر میل می‌کند.

***

ب) شکل هامنی $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ را در نظر می‌گیریم. در این شکلِ پلکانی، خط B_3M موازی A_1C است.



شکل ۲

فرض می‌کنیم:

$$(1)\quad \overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3} = \cdots = \overline{A_mB_m} = \cdots$$

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{A_1C} = a,\ \ \overline{B_1A_2} = \frac{1}{2}a,\ \ \overline{A_2B_3} = \frac{1}{4}a, \\ \overline{B_3A_4} = \frac{1}{8}a,\ \cdots \end{cases}$$

یعنی ارتفاع هر پله نصف ارتفاع پله‌ی پیشین است. به عبارت دیگر، ارتفاع‌های پله‌ها یک تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند که جمله‌ی اول آن طول $\overline{A_1C}$ و قدر مطلق آن $\frac{1}{2}$ است.

مساحت شکل $A_1B_1A_2B_2A_3B_3MCA_1$ چنین است:

$$S = a(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4})$$

مساحت این شکل پلکانی وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، چنین است:

$$a \times \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n})$$

حد عبارت داخل کمانک‌ها، وقتی n به سوی بی‌نهایت میل کند برابر $2a$ است. پس مساحت شکل پلکانی مورد نظر، وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، برابر $2a$ می‌شود. پس اندازه‌ی محیط شکل پلکانی مورد نظر وقتی تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، به بی‌نهایت میل می‌کند و مساحت آن به سوی عدد ۲، یعنی محیط شکل، بی‌نهایت بزرگ است و مساحت آن محدود.

* * *

۳. آیا شکل هندسی وجود دارد که حجم آن متناهی ولی سطح کل آن نامتناهی باشد؟

آری. به دو مثال زیر توجه کنید:

الف) مکعب مستطیلی با ابعاد a، $\frac{1}{a}$ و ۱ در نظر می‌گیریم. حجم این مکعب مستطیل برابر ۱ است. وجهی از این مکعب مستطیل با ابعاد ۱ و $\frac{1}{a}$ را در نظر می‌گیریم. مساحت این وجه، برابر $\frac{1}{a}$ است. اگر a به سوی صفر میل کند، آن‌گاه مساحت وجه یاد شده به سوی بی‌نهایت میل می‌کند. پس اگر مقدار a به سوی صفر میل کند، حجم مکعب مستطیل مقدار متناهی باقی می‌ماند، ولی سطح کل آن به سوی بی‌نهایت میل می‌کند.

* * *

ب) منشوری قائم در نظر می‌گیریم که قاعده‌ی آن شکل پلکانی یاد شده در مسئله‌ی پیشین باشد و طول ارتفاع آن برابر یک. حد حجم این منشور هنگامی که تعداد پله‌ها به سوی بی‌نهایت میل کند، برابر ۲ است، ولی سطح کل این منشور به سوی بی‌نهایت میل می‌کند..

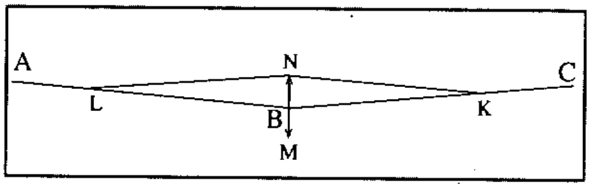
* * *

۴. در مثلث متساوی‌الساقین، اگر زاویه‌ی رأس به ۱۸۰ درجه بسیار نزدیک باشد، نسبت طول هر ساق به طول میانه‌ی مربوط به قاعده‌ها بسیار بزرگ است.

این حکم هندسی فوق‌العاده ساده است، به‌طوری که در کتاب‌های هندسه آن را یاد نمی‌کنند. این حکم هندسی با وجود سادگی، کاربردهای بسیار مهم دارد. به مثال زیر توجه کنید:

در سیستم حمل و نقل به وسیله‌ی تله‌کابین، کابل تله‌کابین نباید خیلی کشیده باشد. اگر کابل خیلی کشیده باشد، هنگامی که تله‌کابین به وسط دو پایه می‌رسد، کابل گسیخته می‌شود.

کابلی را در نظر می‌گیریم که دو انتهای آن در دو نقطه‌ی A و C ثابت شده‌اند (شکل ۳).



شکل ۳

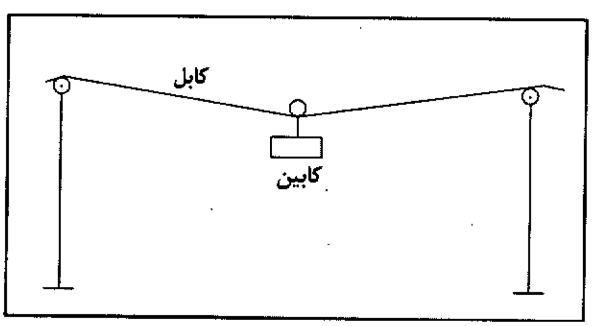
وزنه‌ای در نقطه‌ی B که وسط کابل است، به آن آویزان می‌کنیم. این وزنه، کابل را به صورت خط شکسته ABC درمی‌آورد. اگر کابل از ابتدا خیلی کشیده باشد، زاویه‌ی ABC خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک می‌شود.

نیرویی را که وزنه، در نقطه‌ی B به کابل وارد می‌کند، با بردار $\overrightarrow{BM}$ نشان می‌دهیم. بردار $\overrightarrow{BN}$ را مساوی $-\overrightarrow{BM}$ در نظر می‌گیریم و متوازی‌الاضلاع BLNK را می‌سازیم. نیروی BN به دو نیروی BA و BC تجزیه می‌شود:

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$$

چون زاویه‌ی $\angle ABC$ خیلی به ۱۸۰ درجه نزدیک است، اندازه‌ی هریک از دو نیروی BA و BC خیلی بیشتر از اندازه‌ی نیروی BN است. همین موضوع سبب گسیخته شدن کابل می‌شود.

در شکل ۴ شمای یک تله‌کابین رسم شده است. اگر امتداد



شکل ۴ شمای یک تله کابین

کابل در دو طرف غلتک نزدیک به ۱۸۰ درجه باشد، کشش کابل در دو طرف غلتک کابین مقدار بزرگی خواهد شد و به بریده‌شدن کابل می‌انجامد.

***

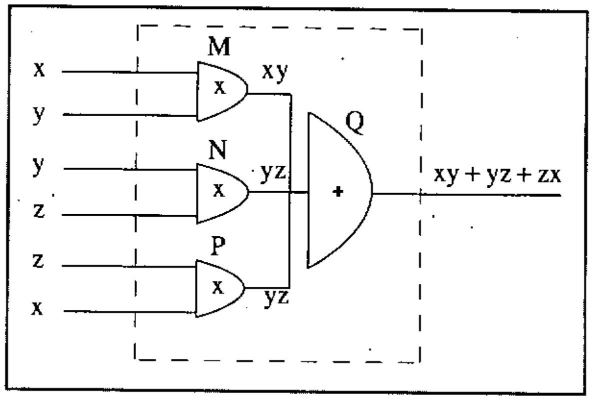
۵. تابع اکثریت و مدار آن

در جبر بول، تابع سه متغیری $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ را تابع اکثریت می‌نامند. دلیل این نام‌گذاری آن است که اگر اکثریت متغیرها، یعنی دو متغیر یا سه متغیر از این تابع، مقداری بگیرند، تابع همان مقدار را می‌گیرد. بیان ریاضی این خاصیت چنین است:

$$f(x,a,a)=f(a,y,a)=f(a,a,z)=f(a,a,a)=a$$

تابع اکثریت با وجود آن‌که بسیار ساده و آسان است، در دستگاه‌های رایانه‌ای نقش مهمی ایفا می‌کند.

مدار الکتریکی مربوط به تابع اکثریت، «مدار اکثریت» نامیده می‌شود. شکل ۵ مدار اکثریت را نشان می‌دهد. در این شکل، دریچه‌های M، N و P، دریچه‌های «و» هستند که به‌طور موازی قرار گرفته‌اند. خروجی‌های این سه دریچه، به دریچه‌ی Q که دریچه‌ی «یا» محسوب می‌شود، متصل‌اند. مدار حاصل از دریچه‌های «و» و دریچه‌ی «یا» را مدار اکثریت می‌نامند.



شکل ۵ مدار اکثریت

فرض کنیم بخواهیم مسئله‌ای را با رایانه حل کنیم و از درستی جواب کاملاً مطمئن باشیم. به این منظور سه رایانه و یک مدار اکثریت را به‌کار می‌گیریم. برنامه را به‌طور هم‌زمان به سه رایانه‌ی A، B و C می‌دهیم. (این سه رایانه ممکن است حتی در سه شهر بسیار دور از یکدیگر باشند. در این محور با استفاده از آنتن‌ها، ولتاژهای لازم را انتقال می‌دهیم.

ولتاژهای خروجی سه رایانه‌ی یاد شده را به ترتیب x، y و z می‌نامیم (این ولتاژها جواب مسئله‌ی موردنظراند). اگر هر سه رایانه مسئله را درست حل کنند، آن‌گاه چنین داریم: $x=y=z$.

خروجی دو رایانه‌ی A و B که x و y‌اند، به دریچه‌ی M واردمی‌شوند و خروجی دریچه‌ی M حاصل‌ضرب xy را به‌دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی B و C که y و z‌اند، به دریچه‌ی N وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی N، حاصل‌ضرب yz را به‌دست می‌دهد.

خروجی دو رایانه‌ی C و A که z و x‌اند، به دریچه‌ی P وارد می‌شوند و خروجی دریچه‌ی P، حاصل‌ضرب zx را به‌دست می‌دهد.

ولتاژهای xy، yz و zx به دریچه‌ی Q وارد می‌شوند و خروجی Q، ولتاژ $xy+yz+zx$ را به‌دست می‌دهد. ولتاژ اخیر، جواب اکثریت سه رایانه است. پس اگر فقط یک رایانه از این سه رایانه، جواب درست به‌دست ندهد، جوابی که در خروجی مدار اکثریت به‌دست می‌آید، جواب درست است. با به‌کارگیری دستگاه اکثریت، اطمینان بیشتری از درستی جواب داریم.

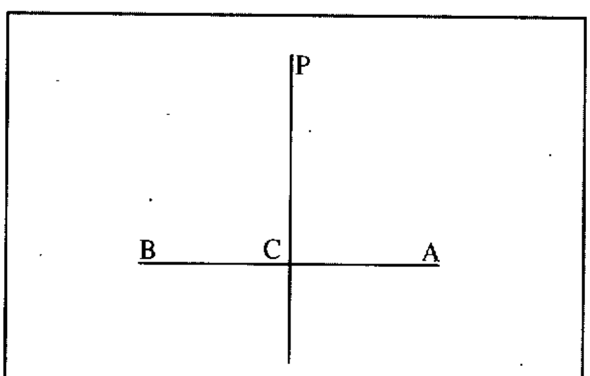
***

۶. نسبی بودن هم‌زمانی

دو نقطه‌ی A و B و صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. این صفحه را با P نشان می‌دهیم.

قضیه: هر نقطه‌ی واقع بر صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس، هر نقطه که از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره‌خط AB قرار دارد.

بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه‌ی A می‌شود، بخش ۱ و بخشی از فضا را که در یک طرف صفحه‌ی P واقع است و شامل نقطه B می‌شود، بخش ۲ می‌نامیم.



شکل ۶

برای هر نقطه‌ی M، از بخش ۱ داریم: $\overline{MA} < \overline{MB}$ و برای هر نقطه‌ی N از بخش ۲ داریم: $\overline{NA} < \overline{NB}$.

برای آن‌که واقعه‌ای دیده شود، لازم است که از آن نقطه، نور به چشم برسد. چنین به‌نظر می‌آید که اگر برای ناظری، دو امر هم‌زمان باشند، این دو امر برای همه‌ی ناظرانی که آن‌ها را ملاحظه می‌کنند، هم‌زمان هستند. در سطرهای آینده نشان می‌دهیم که این تصور صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که هم‌زمانی نسبی است.

هم‌چنین به‌نظر می‌آید که اگر ناظری امر A را مقدم بر امر B مشاهده کند، همه‌ی ناظرانی که این دو امر ملاحظه می‌کنند، امر A را مقدم بر امر B مشاهده می‌کنند. در ادامه نشان می‌دهیم که این تصور هم صحیح نیست و نتیجه می‌گیریم که تقدم و تأخر نسبی است.

در دو نقطه‌ی A و B، دو منبع نور الکتریکی در نظر می‌گیریم. کلید مدار الکتریکی را در نقطه‌ی C قرار می‌دهیم. با این کلید می‌توان دو لامپ الکتریکی A و B را روشن و خاموش کرد. اگر کلید را وصل کنیم، برای ناظری که روی صفحه‌ی P است، دو چراغ در یک لحظه روشن می‌شوند؛ زیرا مدت رسیدن الکتریسیته از A و B به C برابر است. اگر D نقطه‌ای از صفحه‌ی P باشر، مدتی که نور دو مسافت AD و BD را می‌پیماید، برابر است. اگر کلید را قطع کنیم، برای ناظری که روی عمود منصف است، دو چراغ A و B در یک لحظه خاموش می‌شوند.

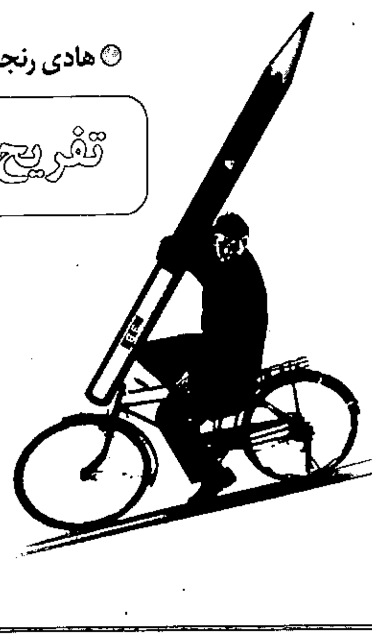
در همین آزمایش، اگر ناظری در نقطه‌ی M از بخش (۱) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ A را مقدم بر روشن شدن چراغ B می‌بیند. زیرا نور، مسافت AM را در مدتی کوتاه‌تر از مسافت BM می‌پیماید. اگر ناظری در نقطه‌ی N از بخش (۲) قرار داشته باشد، روشن شدن چراغ B را مقدم بر روشن شدن چراغ A می‌بیند؛ زیرا: $\overline{NB} < \overline{NA}$.

نتیجه‌گیری نسبیت هم‌زمانی و نسبیت تقدم و تأخر، از خاصیت‌های بسیار ساده‌ی عمود منصف و از شاهکارهای بسیار مهم تفکر علمی است.

سرعت نور ۳۰۰/۰۰۰ کیلومتر بر ثانیه است. لذا آن‌چه یاد شد در ابعاد کیهانی به‌کار می‌آید، نه در ابعاد کوچک. برای توضیح، دو نقطه‌ی A و B را به فاصله‌ی ۱۰۰ کیلومتر از هم در نظر می‌گیریم. نقطه‌ی وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. فرض کنیم دو پدیده‌ی A و B طوری باشند که برای ناظری که در نقطه‌ی M است، به‌طور هم‌زمان دیده شوند. اگر نقطه‌ی P از نقطه‌ی A و B به ترتیب به فاصله‌ی ۱۳۰ و ۱۴۰ کیلومتر باشد، آن‌گاه ناظری که در نقطه‌ی P قرار دارد، دو پدیده‌ی A و B را هم‌زمان می‌بیند؛ به‌دلیل اختلاف زمانی فوق‌العاده اندک دو پدیده‌ی A و B برای ناظر.

تفریح اندیشه

هادی رنجبران



با قرار دادن علایم و عملیات مناسب ریاضی بین عددها، کاری کنید که تساوی‌های زیر برقرار باشند.

۱	۱	۱=۶
۲	۲	۲=۶
۳	۳	۳=۶
۴	۴	۴=۶
۵	۵	۵=۶
۶	۶	۶=۶
۷	۷	۷=۶
۸	۸	۸=۶
۹	۹	۹=۶

برای نمونه: $\sqrt{۴} + \sqrt{۴} + \sqrt{۴} = ۶$