# شکوفا شدن ریاضیات کاربردی در آمریکا•

پیتر لکس*
ترجمهٔ کورس ضیایی

شهرت دارد که ریاضیدانان تاریخنگاران بدی هستند. آنها سیر اندیشه‌ها را چنانکه بایستی منطقاً رخ داده باشد، و نه آن‌گونه که عملا رخ داده‌است، شرح می‌دهند و این کار با کوششی نامنظم و اغلب در فرصتهای نامناسب و تحت فشار عواملی خارج از جهان ریاضیات انجام می‌شود. در این بررسی مختصر، سیر پرپیچ و تاب ودامنهٔ نفوذ ریاضیات کاربردی در آمریکا را شرح می‌دهم.

امروزه ریاضیات کاربردی در آمریکا زنده و شاداب است. اگر نظری به ۱۸ خطابه‌ای که برای تشریح خطوط مقدم جبههٔ تحقیق برگزیده بودند بیفکنیم (این خطابه‌ها در گردهمایی بزرگداشت صدمین سال تأسیس انجمن ریاضی آمریکا عرضه شد) می بینیم که مباحثی چون مدلسازی فیزیولوژیك، جریان سیال و احتراق، علوم کامپیوتر، وشکل گیری اتمها در چارچوب مکانیك آماری را در بر می گیرند. همچنین درمی‌یابیم که موضوع یك مقاله ومبحث آغازین چندین مقالهٔ دیگر را نظریه‌هایی فیزیکی تشکیل می‌دهند که نتایج به‌دست آمده از آنها برای فیزیکدانان و ریاضیدانان به‌یك اندازه جالب توجه است.

البته، وضع همیشه به‌این صورت نبوده است. درطول یکی دو دهه، از اواخر دههٔ ۱۹۳۰ تا اوایل دههٔ ۱۹۵۰، درمحافل ریاضی آمریکا دیدگاه مسلط مانند دیدگاه بوربا کی بود، یعنی این نظر که ریاضیات موضوع انتزاعی خود مختاری است که نیازی به‌هیچ مطلب ورودی ازجهان واقعی ندارد، ملاکهای عمق وزیبایی آن درخودش نهفته‌است و راهنمایی درونی دارد که رشد و تکامل آن را هدایت می کند. کاربردها برحسب تصادف بعدها پیش می‌آیند، یعنی اندیشه‌های ریاضی به‌علوم ومهندسی رخنه می‌کنند.

اکثر پدیدآورندگان ریاضیات نوین ــ مشخصاً گاوس، ریمان، پوانکاره، هیلبرت، آدامار، بیرکاف، وایل، وینر، وفون نویمان ــ این طرز تلقی را مطلقاً انحرافی و گمراه کننده می‌دانسته‌اند. امروز با اطمینان می‌توان گفت که دوران «محض گرایی» سپری شده است. اکثر ریاضیدانان بادقت مواظب‌اند که ریاضیات به‌سطح کاربردها سقوط نکند، اما معتقدند که ریاضیات وعلوم (به‌خصوص فیزیك) یارانی همتراز هستند که اندیشه‌ها، مفاهیم، مسائل، وراه‌حلها را با یکدیگر مبادله می کنند. درحالسی که در گذشته‌ای نه‌چندان دور ریاضیدانی با گفتن اینکه «ریاضیات کاربردی ریاضیات بدی‌است» و یا «بهترین نوع ریاضیات کاربردی همان ریاضیات محض است» ممکن بود از تحسین برخوردار گردد، امروزه شخصی را که چنین حرفی بزند به‌دیدهٔ نادانی خواهند نگریست.

چگونه چنین تغییری رخ داد؟ چندین دلیل قابل قبول می‌توان عرضه کرد، اما اول قدری تاریخچهٔ این موضوع را مرور کنیم.

جنگ جهانی دوم، که تحولاتی اساسی در مؤسسات، مفاهیم، ونحوهٔ تفکر اجتماعی ما پدید آورد، وضع ریاضیات کاربردی را در آمریکا به‌طور دائم تغییرداد. این به‌آن معنی نیست که قبل از سال ۱۹۴۵ در آمریکا هیچ کار ارزشمندی درزمینهٔ ریاضیات کاربردی صورت نگرفته بود. ازهرچه بگذریم، درقرن نوزدهم کارهای گیبس درمکانیك آماری و آنالیز برداری و سریهای فوریه، ومطالعات هیل درمعادلات هیل نام آمریکا را در تاریخ ریاضیات کاربردی ثبت کرده‌بود. از آنالیزدانان پیشتاز آمریکایی در دهه‌های ۱۹۲۰ و ۳۰ بیرکاف بود که به‌خاطر تحقیقاتش در دینامیك شهرت جهانی یافت و وینر بود که درمطالعهٔ فرایندهای فیزیکی تصادفی ازقبیل حرکت براونی و آشوب همگن، پیشرو به‌حساب می‌آید. قضیهٔ ارگودیك که هدفی دشوار و دیریاب بود در دههٔ ۱۹۳۰ با پشتکار زیاد دنبال شد.

در اوایل دههٔ ۴۰ نظریهٔ اطلاعات شانون ونظریهٔ شبکهٔ عصبی پیتس ومك کولو[1] پا به‌عرصهٔ وجود گذاشت. با این همه منصفانه باید گفت که تا قبل از ۱۹۴۵ ریاضیات کاربردی در بخشهای ریاضی دانشگاهها وضع چندان مساعدی نداشت وفعالیتی حاشیه‌ای محسوب می‌شد.

انتقال ازحاشیه به مرکز پس‌ازجنگ آغازشد وریاضیات کاربردی ازقطره‌ای به‌دریا تبدیل یافت. بیرکاف اخیراً مطالعاتی

1. McCollough

درمفاهیم وچشم‌انداز ریاضیات‌کاربردی انجام داده‌است. در این گفتارمجمل فقط امکان آن وجود داردکه پهنهٔ گستردهٔ پیشرفت ریاضیات کاربردی را مشخص وتعدادی ازنمونه‌های برجسته‌آن‌را تاحدی دلخواهانه انتخاب وتشریح کنم. اگرازمن قصوری در بازگوکردن دستاوردهای مطلوب شما درریاضیات‌کاربردی سر زند، فقط ناشی ازفراوانی دستاوردها دراین زمینه خواهد بود.

دینامیك سیالات، تاحدی‌به‌سبب کتاب پرجاذبه‌ای‌که‌کورانت و فریدریکس به‌نام جریان‌فراصوتی و امواج ضربه‌ای نوشتند،یکی ازاولین‌زمینه‌هایی‌بودکه‌تجدید حیات کرد. برز[1] وشیفمان‌دراوایل دههٔ ۵۰ قضیه‌های اساسی وجودی جریان دوبعدی فروصوتی پایا حول اجسام ثابت را ارائه کردند وبه‌دنبال آن تحقیقات بسیار ممتازی راجع به‌جریان باکرانه‌های آزاد انجام شد. مسألهٔ‌جریان فراصوتی پایا وجریان وابسته به‌زمان تك‌بعدی، به‌سبب احتمال تشکیل امواج ضربه‌ای مشکلترازکاردرآمد. دراین باره تنها قضیهٔ وجسودی مشخص را گلیم درسال ۱۹۶۶ ارائه داد. موراوتز[2] جریانهای صوتی هموار وحتی جریانهای ضربه‌ای را مطالعه‌کرده است. نتایجی به‌دست آمده ودرکنارآن مسائل تاگشودهٔ زیادی هم مطرح شده است.

شاید هیجان‌انگیزترین پیشرفت جدید، پیدایش دینامیك سیالات محاسباتی باشد، یعنی ارائهٔ تقریبهایی ازمیدانهای جریان به‌کمك محاسبات‌عددی‌ماهرانه. ازاین کاردومنظوربراورده‌می‌شود، اول اینکه خصوصیات‌کارکرد دقیق دستگاههایی‌که در تماس با سیالهای متحرك هستند ازقبیل سیستمهای لوله‌کشی، شکلهای آئرودینامیکی، توربینها وغیره به‌مهندسان معرفی می‌شود تا در کارطراحی‌وکنترل‌ازآن‌استفاده‌کنند. این‌نحوهٔ نگرش دروضعیتهای پیچیده‌ای چون جریانهای احتراقی، مغناطوهیدرودینامیك وغیرآن به‌کار رفته است. منظوردوم ازانجام این‌گونه محاسبات، دادن سرنخهایی به‌نظریه پردازان در مورد رفتارمحتمل سیالات وبرانگیزاندن تخیل‌نظریه‌پردازان یا به‌عبارت‌دیگر، تجربه‌اندوختن ایشان است. چنین سرنخهایی درمطالعهٔ شکستگی کامل یا جزئی جوابهای معادلات ناویر ـ استوکس واویلروهمچنین دربررسیهای بسیارزیاد دیگری به‌کاررفته است.

پیشرفتهای چشمگیراخیر در دینامیك‌سیالات محاسباتی‌مرهون سرعت افزونترماشین، حافظهٔ قویتروترم افزاربهتر و فراتر ازهمهٔ اینها، اختراع روشها والگوریتمهای عددی جدید هوشمندانه‌ای ازقبیل گردایی گسستهٔ کورین وتبدیل فوریهٔ سریع کولی و توکی است.

البته ریاضیدانان محض‌هم‌دست به‌آزمایشهای عددی‌می‌زنند، کما اینکه گاوس تا جایی پیش رفت‌که قضیهٔ اعداد اول راحدس زد. امروز اگر وی زنده بود به امکانات محاسباتی وسیعی‌که در اختیار دست‌اندرکاران نظریهٔ اعداد، دانشجویان دستگاههای دینامیکی وغیره قراردارد عشق می‌ورزید. امروز اتکابرمحاسبهٔ سهل وسریع پیوند بسیارمحکمی بین ریاضیات محض وکاربردی پدیدآورده است.

درسایرشاخه‌های فیزیك‌ریاضی هم پیشرفتهایی به‌همین‌اندازه پراهمیت حادث شده است. دراوایل دههٔ ۱۹۵۰ کاتوتوفیق اثبات این نکته را یافت‌که عملگرشرودینگر برای اتم هلیوم (وسایر اتمهای‌سنگینتر)خودالحاق‌است. دراواسط‌دههٔ ۱۹۵۰ او وروزنبلوم وجود عملگر پراکندگی را برای زوجی از عملگرها که تفاوتشان با یکدیگر در عملگری هسته‌ای است، اثبات کردند.

کارکلروی پراش امواج هم در دههٔ ۱۹۵۰ شروع شد. کلر وهمکارانش‌توانستند بااستفاده ازنورشناخت هندسی تعداد زیادی ازالگوهای پراش را به‌روش ریاضی استخراج‌کنند، که بعضی‌از این الگوها را ملروز[1] وتیلرسالها بعد بااستفاده ازعملگرهای ریز موضعی‌که طراحی ویژه‌ای داشتند به‌دقت ثابت‌کردند.

موزر در اوایل دههٔ ۱۹۶۰ وجود تعداد نامحدودی خم بسته را که تحت نگاشتهای حافظ سطح نواحی حلقوی، ناوردا هستند نشان داد؛ وبا این‌کار، مبحث کلاسیك دینامیك را تکان داد. این مطلب نشان می‌دهدکه چنین نگاشتهایی ـ که ازاهمیت فیزیکی بسیاری برخوردارند ـ ارگودیك نیستند.

در دههٔ ۱۹۵۰، پیشرفتهای بزرگی درحل برخی از مسایل بنیادین مکانیك آماری ـ وجود حدود ترمودینامیکی، گذار فاز و پایداری‌ماده ـ آغازشد. این کاربیشتر به‌دست‌فیزیکدانانی‌انجام‌شد که بسیاری از ایشان سزاوار عنوان ریاضیدان افتخاری هستند. میچل فایگن باوم[2] یکی ازاین ریاضیدانهای افتخاری بودکه مضاعف شدن دورهٔ تناوب پایدار خود ـ نگاشتهای بازه‌ها را درهنگام تغییرشکل یافتن‌آن نگاشتها کشف‌کرد، و ویژگی عام انتقال پایداری را که نتیجه‌ای بسیار نامنتظر بود مکشوف ساخت.

کارکروسکال درزمینهٔ کشف سولیتونها، اثرمتقابل‌شگفتی‌آور آنها بریکدیگر، وارتباط آنها با موجودیت بینهایت کمیت پایسته، وانتگرالپذیری کامل سیستمهایی باساختار سولیتون مانند ازآن هم نامنتظرتر بود. شگفت‌آوراست‌که تعداد بسیار زیادی سیستم‌کاملا انتگرالپذیر وجود داردکه در دوران کلاسیك مکانیك همیلتنی ازاین لحاظ شناخته نبودند وازآن شگفت‌آورتراینکه‌همهٔ این سیستمها اهمیت فیزیکی دارند. نیزحیرت‌انگیزاست‌که مثلا معادلهٔ کادومتسف ـ پتویاشویلی[3] که‌درحین‌مطالعهٔ امواج آب به‌دست آمد دوبروین[4]، آربارلو و دکونچینی[5] وشیوتا[6] را به‌حل مسألهٔ کلاسیك شوتکی[7] که عبارت بود ازمشخص کردن خصوصیات ماتریسهای ریمانی درنظریهٔ رویه‌های ریمانی، رهنمون شد.

مثال‌دیگری‌ازکمك‌رساندن فیزیك‌ریاضی به‌ریاضیات‌محض، استفادهٔ فادیف و پاولوف ازمفاهیم نظریهٔ پراکندگی برای‌تحقیق در توابع خودریخت است.

یکی ازدستاوردهای بزرگ ۱۵ سال اخیر، برش‌نگاری (توموگرافی) کامپیوتری است، که ترکیب دلپذیری است از وارون‌کردن یك تبدیل انتگرالی، آنالیزهمساز، و ساختن

1. Bers
2. Morawetz

1. Melrose
2. Mitchell Feigenbaum
3. Kadomtsev-Petviashvili
4. Dubrovin
5. DeConcini
6. Shiota
7. Shottky

الگوریتمهایی سریع ومؤثر.

دورهٔ پس‌ازجنگ شاهد اهمیت روزافزون نظریه‌های احتمال ومعادلات دیفرانسیل جزئی بود. هریك ازاین نظریه‌ها بردوپایه استوار است که یکی محکم برکاربردها تکیه دارد ودیگری بر ملاحظات ریاضی محض. قبل‌ازجنگ به‌این مطالب به‌دیدهٔ رشته‌های تخصصی می‌نگریستند، درحالی که امروزه این دومبحث نقش‌محوری را دربخش وسیعی ازریاضیات بازی می‌کنند.

همچنین زمینه‌های کاملا جدیدی برای کاربرد ریاضیات پدید آمد؛ مانند نظریهٔ بازیها، نظریهٔ کنترل، تحقیق در عملیات، برنامه ریزی خطی، برنامه ریزی پویا، برنامه ریزی با عدد صحیح و غیره. هدف عمومی این رشته‌ها بهینه‌کردن است؛ بنابراین ویژگیهای مشترك زیادی با حساب واردشها دارند، اما در ضمن اختلافهای چشمگیری هم باآن دارند: مثلا اینکه نظریات جدید بهینه سازی بیشتر بامدلهای گسسته سروکاردارند تا با مدلهای پیوسته، وکاربردهای موردنظرآنها بدیع است ومعمولا با اقتصاد، کسب‌وکار و امورمالی ارتباط می‌یابد. الگوریتمهایی که برای تیل[1] به بهینه‌های مطلوب درکوتاهترین زمان به‌کار می‌روند هم به‌همان اندازه بدیع هستند. کیرکپاتریك یکی از الگوریتمهای بسیارمؤثر یعنی بازپخت[1] شبیه‌سازی‌شده‌را ازمتالورژی وفیزیك آماری وام گرفته است. بازپختن، فرایندی است که بر مواد بی‌شکل ـ مانند شیشه درگونه‌های مختلفش ـ که درآنها انرژی پیکربندی تعداد زیادی مینیمم دارد اعمال می‌شود. مینیمم مطلق وقتی حادث می‌شود که ماده حالت بسیارمرتبی به‌خود بگیرد وبه‌صورت بلوری درآید. اگرمادهٔ بی‌شکلی با سرعت زیادخنك شود به‌شکل بسیارنامرتبی جامد می‌شود واین وضع، متناظر با مینیممی موضعی است که بامینیمم مطلق‌فاصلهٔ زیادی دارد. اگرماده را به‌آهستگی سردکنند، به‌صورت بلوری درمی‌آید.

تعداد بسیارزیادی مسألهٔ بهینه‌سازی ترکیباتی وجود دارد که نمونهٔ بارزآنها مسألهٔ فروشنده سیار است. این مسأله ازاین لحاظ که تابع هدف تعداد زیادی مینیمم دارد، شبیه مسألهٔ مواد بی‌شکل است. درچنین مواردی، باهرروش نزولی احتمالا می‌توانیم پیکربندی را به‌سوی مینیممی موضعی که ازمینیمم مطلق دوراست برانیم. بازپخت شبیه سازی شده با سلسله‌ای ازدماهای $T$ که کوچك وکوچکتر می‌شوند، انجام می‌گردد. برای هردما، توزیع گیبس متناظری وجود دارد که درآن، احتمال $j$ امین حالت عبارت است از

$$\frac{e^{-E_j/T}}{Z}$$

که $E_j$ انرژی $j$امین حالت و $Z$ کمیتی است که با رابطه زیر تعریف می‌شود

$$Z=\sum e^{-E_j/T}.$$

از الگوریتم متروپولیس برای بناکردن سلسله‌ای از حالات که با توزیع گیبس در تعادل‌اند، به‌صورت زیراستفاده می‌شود.

پیکربندی را مطابق با دستورالعملی انتخابی تغییر می‌دهند. اگر پیکربندی جدید سطح انرژی پایینتری داشت تغییرحالت قبول می‌شود. اگرتغییر انرژی $\Delta E$ مثبت باشد، تغییر حالت راباحتمال $e^{-\Delta E/T}$ می‌پذیرند. این بخش ازالگوریتم را به‌روش مونت‌کارلو بااستفاده ازیك توالی تصادفی اجرا می‌کنند. وقتی‌این‌الگوریتم‌را درطول زمان مشخصی به‌کاربردند، دماپایین‌آورده می‌شودومراحل الگوریتم تکرارمی‌گردد.

این‌روش درپیداکردن تقریبهای عالی برای مینیممها، در تعدادی ازمسائل بهینه‌سازی ترکیباتی، فوق‌العاده مؤثربوده‌است.

علم‌کامپیوتر منبع تعدادزیادی از مباحث ریاضی تازه بوده است. این علم توجه خود را به‌الگوریتمها معطوف کرده وتعداد زیادی الگوریتم بسیار مؤثر ازقبیل تبدیل سریع فوریه، ضرب ماتریسی سریع، روش سادکی، وبسیاری الگوریتمهای دیگر را که دراثر بزرگ‌کنوت تشریح شده‌اند در دسترس آورده است. الگوریتم کارمارکار وروش گرین‌گارد و روخلین[1] دربراوردسریع پتانسیلها جزء مثالهای جدیدتراست. گاه مشکل می‌توان کارایی یك الگوریتم را تخمین‌زد، به‌خصوص اگردرحالات نمونه‌وار بهتراز بدترین حالت‌عمل کند (به‌تحقیق مهمی که اسمیل در روش سادکی کرده مراجعه‌کنید).

یکی ازمسائل مهم، طرح‌کردن شبکه‌ای است که گروه‌بندی، پردازش موازی وسایر اموری از این قبیل را به‌طورمؤثر انجام دهد. در چنین گرافهایی که بسط‌دهنده و متمرکزکننده خوانده می‌شوند، تعداد یکسانی یال از هر رأس منشعب می‌شوند وگرافها از خواص همبندی خوبی برخوردارند. کاری‌که باید انجام شود، ساختن گرافهای متمرکزکننده‌ای است که کمترین تعداد یال ممکن را داشته باشند. سارناك وهمکارانش لوبوتسکی وفیلیپس، خانواده‌ای از گرافهای بسط دهنده ساخته‌اند که تقریباً از کمترین‌تعداد یال برخوردارند، وچون اثبات این نکته که گرافها خواص مطلوب را دارند اساساً وابسته به‌حدس راماتوجان‌دربارهٔ نمایش اعداد به‌صورت ترکیباتی خطی ازچهار عدد مربع است‌و درضمن به‌آنالیزهمسازدقیقی ازگروهها بستگی دارد، نام آنهارا گرافهای راماتوجان گذاشته‌اند.

پیچیدگی محاسبه با میزان خوبی الگوریتم سروکار دارد و سؤالهایی از این قبیل را مورد بحث قرار می‌دهدکه سریعترین الگوریتمهای ممکن برای براورد رده‌ای‌ازتوابع کدام‌اند. تازمان حاضرهنوز پاسخهای اندکی به‌چنین پرسشهای عمیقی داده شده است (برای نمونه، به‌تحقیق وینوگراد در زمینهٔ ضرب‌نگاه‌کنید).

شاید جذابترین زمینهٔ علم‌کامپیوتر هوش مصنوعی باشدکه با این تهدید تلویحی همراه است که چه بسا ریاضیدانانی اعم از محض یاکاربردی راکه ازتبار بشر باشند روزی ازصحنه خارج خواهدکرد. امامن ازرفتار شایع‌بین بعضی ازاعضای‌انجمن‌هوش مصنوعی رنج می‌برم که اهداف خود را به‌نحو نامعقولی بالا می‌گیرند واز دستاوردهای گذشته بسیار با مبالغه سخن می‌رانند. مثلا هربرت سایمون درسخنرانی‌گیبس خود در سال ۱۹۸۲ به تشریح برنامه‌ای کامپیوتری به‌نام BACON پرداخت که‌طوری‌طراحی

1. annealing

1. Rokhlin

شده بود که بدون کمک هیچ گونه نظریه‌ای قواعد علمی را به‌وسیلهٔ نوعی برازش خم از داده‌های تجربی استخراج کند. او ادعا کرد که BACON سه موفقیت به‌دست آورده است؛ اولین آنها استخراج قانون سوم حرکت سیاره‌ای کپلر بود که سایمون آن‌را به‌شکل زیر نشان می‌داد

$$P = KD^{3/2}$$

که در آن $P$ دورهٔ گردش سیاره به دور خورشید، $D$ فاصله‌اش از خورشید و $K$ مقدار ثابتی است که برای همه سیارات مقدار یکسانی دارد. این فرمول فقط برای سیاراتی معنی دارد که فاصلهٔ ثابتی تا خورشید دارند، یعنی مدارشان دایره است. اما قانون کپلر به‌مدارهای بیضوی ناظر است. بنابراین $D$ را میانگین حسابی کمترین و بیشترین فاصلهٔ سیاره از خورشید اختیار می‌کند

$$P = K\left(\frac{D_1 + D_2}{2}\right)^{3/2}$$

یعنی کپلر فرمولی برای دورهٔ گردش هر سیاره یافته است که آن‌را به‌صورت تابعی از دو پارامتر مشخص کنندهٔ مدار بیضوی سیاره به‌دست می‌دهد. این مطلب یك دنیا از یافتن دورهٔ گردش سیاره‌ای با مدار دایره شکل فاصله دارد. اگر ریاضیدانی قضیه‌ای را برای حالت تقارن کروی ثابت کرد، نمی‌تواند روبای ادعای حالت کلی آن را درسر بپروراند. دانشمندان علم کامپیوتر هم باید چنین حدی از دقت را مراعات کنند. مطمئناً ایرادهای ژرفتری به‌کار سایمون درهوش مصنوعی گرفته شده است، به‌عنوان مثال ایرادهایی که گرابینر و ادلمان از آن گرفتند.

یکی از بکرترین شاخه‌های کاربردی جدید، نظریهٔ کاتاستروفهاست که از ذهن رنه توم ریاضیدان بزرگ تراوش کرده است و مبنای نظری آن، نظریهٔ تکینی است. اکلند[1] در کتاب عامه فهم و جذاب خود ریاضیات و امور غیرمنتظره به‌معرفی جانبدارانه‌ای از معرفت‌شناسی نظریهٔ کاتاستروفها می‌پردازد. در تکنگاشت پوستن[2] واستیوارت مثالهایی از کاربرد موفقیت‌آمیز این نظریه عرضه شده است.

اگر زمان را به‌صورت پارامتر تغییر شکل دهنده در نظر بگیریم، نظریهٔ کاتاستروفها نظریه‌ای واقعاً دینامیکی نیست. با این حال، می‌توان کاربردهای مهمی در دستگاههای دینامیکی برایش یافت. به‌گفتهٔ گولوبیتسکی «آشکارسازی موضعی یك تکینی تبهگون می‌تواند به‌توصیف کلی پدیده‌های غیرخطی منجر شود. نظریهٔ تکینی و نظریهٔ دستگاههای دینامیکی با مفهوم خمینهٔ مرکزی و تکنیکهای تحویل لیاپونوف ـ اشمیت همراه شده‌اند و نشان داده‌اند که می‌توان معادلات غیر خطی را به‌کمك میانگینهای گویا مطالعه کرد و برخی از پدیده‌های غیرخطی را می‌توان برحسب احتمال ظهور آنها رده‌بندی کرد. از آنجا که هریك از این گونه‌های تکینی به‌تصویری عمومی منتهی می‌شود که، خواه با آزمایشهای عملی وخواه با آزمایشهای عددی، قابل تشخیص است، به‌دست آوردن ادراکی یکنواخت از کاربردهای متفاوتی که بر ساختار ریاضی غیرخطی مبتنی‌اند، امکان‌پذیر است».

نظریهٔ کاتاستروفها منتقدان و بدگویانی دارد. آرنولد، گوکن‌هایمر، وسوسمان نظرهای عنادآمیزی دربارهٔ آن داده‌اند. دشمنی با این نظریه واکنشی علیه تلاش کسانی است که آن را چون داروی روغن مار برای هر دردی تجویز می‌کنند. کاربردهایی که مروجین این نظریه برایشان جارمی‌زدند اغلب پرزرق و برق جلوه داده می‌شدند و در تازگی و اصالت آنها مبالغه می‌شد. مثلا زیمان درسال ۱۹۷۶ درمقاله‌ای در مجلهٔ ساینتیفیك آمریکن نوشت:

> در طول ۳۰۰ سال بهترین وسیله برای ساختن چنین مدلهایی حساب دیفرانسیل بوده که نیوتن ولایب نیتس آن را ابداع کرده‌اند. ولی معادلات دیفرانسیل به‌مثابهٔ ابزار توصیفی محدودیتی ذاتی دارند. آنها فقط پدیده‌هایی را می‌توانند توصیف کنند که تغییرات در آنها هموار و پیوسته رخ می‌دهد. در اصطلاح ریاضی، پاسخهای معادلات دیفرانسیل باید توابعی مشتقپذیر باشند. روشی ریاضی که با پدیده‌های ناپیوسته و واگرا سروکار داشته باشد فقط به‌تازگی اختراع شده است.

این گفته در عهد نظریهٔ توزیعها گفتهٔ غریبی است! به‌علاوه نظریهٔ جوابهای ناپیوسته بسیار قدیمیتر از انجمن ریاضی آمریکا (AMS) است. قوانین بنیادین امواج ضربه‌ای را ـ که جوابهای ناپیوستهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی هستند ـ ریمان ۱۳۵ سال پیش روی کاغذ آورد.

اکنون که برخی از دستاوردهای ریاضیات کاربردی را شرح داده‌ام، میل‌دارم مختصری راجع به‌روشهای آن توضیح دهم. بعضی از این روشها اجزای اصلی ریاضیات محض هستند، یعنی برهانهای محکم قضایایی که با دقت بیان شده‌اند. اما در بیشتر موارد ریاضیدانان کاربردی باید سلاحهای دیگری را به‌کار گیرند، مانند راه‌حلهای خاص، توصیفهای مجانب‌وار، معادلات ساده شده، و انجام آزمایش، چه در آزمایشگاه وچه درروی کامپیوتر. گذشته ازهمه اینها نوعی شهود فیزیکی واردکار می‌شود که به‌هدایت فرددر تحقیقاتش می‌پردازد. از آنجا که افراد مختلف انواع گوناگونی ازشهود دارند، بحث ومجادلهٔ زیادی بین ریاضیدانان کاربردی درمی‌گیرد. جای تأسف است که این منازعات اغلب به‌گفتگوهای تلخ می‌انجامد و بیش از آنکه نورافشانی کند از خود حرارت می‌پراکند.

حال به‌پرسش نخستین بازمی‌گردیم. چه‌چیزی باعث شد که ریاضیات کاربردی در آمریکا پس‌ازجنگ دوم جهانی شکوفا شود؟ شاید مهمترین عامل خود جنگ بود که اهمیت اساسی علم و تکنولوژی را درطرحهایی‌ازقبیل رادار، ماسورهٔ مجاورتی، کشف رمز، انهدام زیردریاییها وبمب اتمی به‌همه نشان داد. ریاضیدانان به‌همراه فیزیکدانان، شیمیدانان ومهندسان به‌کار پرداختند، و سهم چشمگیر و گاه تعیین کننده‌ای را ادا کردند که بدون آن ایالات متحده ممکن بود درجنگ شکست بخورد. کسانی که مسؤولیت سیاستگذاری علمی پس‌ازجنگ را برعهده داشتند این درس را به‌خوبی فراگرفتند و آن‌را با دوراندیشی به‌کار بستند. دریافتند که علوم کاربردی جزء بنیادینی ازتکنولوژی و ریاضیات کاربردی مؤلفه‌ای اساسی ازعلوم کاربردی است وهمهٔ اجزای ریاضیات، چه

1. Ekeland 2. Poston

محض و چه کاربردی ارگانیسم واحدی را تشکیل می‌دهند. در نتیجه حکومت آمریکا برنامه‌ای جدی را برای پشتیبانی از ریاضیات آغاز کرد که شامل حمایت از کارهای پروژه‌ای در آزمایشگاههای دولتی و تحقیق در دانشگاهها می‌شد. به‌دلایل بسیار متنوعی، موضوعهای بسیار متنوعی مورد مطالعه قرار گرفت. بعضی موضوعها از قبیل جبر خطی عددی یا انتشار امواج الکترو مغناطیسی به‌خاطر کاربردهای مستقیمی که داشتند، و سایر موضوعها مانند نظریهٔ معادلات دیفرانسیل جزئی و آمار به‌سبب آنکه نسبت به‌اهمیتشان رشد نیافته بودند، و موضوعهای دیگری فقط به‌این دلیل ساده که اجزایی از نسوج ریاضیات بودند، تحت حمایت قرار گرفتند. اولین مرکزی که علوم و ریاضیات را تحت حمایت سازمان یافته قرارداد، ادارهٔ تحقیقات نیروی دریایی بود. چندی بعد مراکز مشابهی در نیروی هوایی و ارتش و ادارهٔ انرژی که خاستگاهش کمیسیون انرژی اتمی بود کار آن مرکز را دنبال کردند. این مراکز در کنار حمایت از انبوهی از ریاضیدانان، در تأسیس مدرسهٔ احتمال در کورنل، مدرسهٔ آنالیز و آمار کاربردی در استانفورد و مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در دانشگاه نیویورك سودمند واقع شدند. بنیاد ملی علوم (NSF)، که قدری دیرتر پا گرفت، دیدگاههای زیادی را از اسلاف خود تحویل گرفت و به‌همراه آن فلسفه و دیدگاه خود را نیز بنا کرد. پشتیبانی ادارهٔ دفاع (DOD) از ریاضیات تا به امروز ادامه یافته است، و حمایت NSF و مراکز دیگر را تکمیل کرده است.

جای کمال تعجب است که با این سابقهٔ درخشان و موفقیت کنونی این برنامهٔ تحقیقاتی، گروهی در انجمن ریاضی آمریکا پیدا شدند که پیشنهاد کاهش حمایتهای DOD را از ریاضیدانان عرضه کردند. بسیاری از افرادی که تحت حمایت DOD بودند عمیقاً از این اظهارنظر که گویا از منبعی آلوده پول می‌گرفته‌اند و این حمایت می‌بایست به‌افراد لایقتری اختصاص می‌یافت، آزرده‌خاطر شدند.

برنامهٔ اعتلای ریاضیات به‌طورعام و ریاضیات کاربردی به طورخاص، اگر از رهبری شایسته‌ای در درون جامعهٔ ریاضی برخوردار نبود نمی‌توانست موفقیتی کسب کند. رهبری ریاضیات کاربردی را عمدتاً گروهی برجسته از مهاجرین، که اکثر آنها پناهندگان سیاسی اروپایی از قبیل کورانت، فلر، فریدریکس، جان، کاك، کاتز، فون کارمان، فون میزس، فون نویمان، نیمان، پراگر، شیفر، سینگ، اولام، والد، وایل، و دیگران بودند به‌عهده گرفتند. این گروه به سواحل این طرف چشم‌اندازها و روشهایی را آوردکه با دیدگاه محضی که تا آن زمان در آمریکا غالب بود، فرق اساسی داشت، و به‌خصوص تمایل بیشتری داشت که ریاضیات را در قلمرو فیزیك و مهندسی به‌کاربندد. بسیاری از تازه واردان در اوج درخشش خود بودند و می‌توانستند اندیشه‌های خود را با قدرت و اطمینان پیش ببرند.

مهمترین شخص درمیان این جمع برجسته، فون نویمان بود. به‌زحمت می‌توان زمینه‌ای کاربردی پیدا کرد که نام او بر آن حك نشده باشد. وی در سخنرانی پیشگویانه‌ای در سال ۱۹۴۵ در مونترآل، در زمانی که کامپیوترهای الکترونیك تنها اختراع ذهن خیال‌پرداز او به‌حساب می‌آمدند گفت که «بسیاری از شاخه‌های ریاضیات چه محض و چه کاربردی در حطش وسایل محاسباتی به‌سر می‌برند تا از بن‌بست فعلی که از ناتوانی رهیافت نظری محض به مسائل غیرخطی ناشی شده خارج شوند». فون نویمان در انجمن ریاضی آمریکا شخصیتی کلیدی بود. مرگ حزن‌آور و زودرس او در ریاضیات کاربردی و علوم کامپیوتر را از پیشوایی طبیعی، و سخنگو و پلی بین ریاضیات و دیگر علوم، محروم ساخت.

هر چه از سهم کامپیوترهای سریع با حافظهٔ قوی در شکل‌دادن و سوخت رساندن به‌ریاضیات کاربردی بگوییم، کم گفته‌ایم. تکانی که کامپیوتر به‌ریاضیات، اعم از محض و کاربردی داده است با نقش تلسکوپ در نجوم و میکروسکوپ در زیست شناسی قابل مقایسه است. بررسی این موضوع درخور مقالهٔ دیگری است. در اینجا فقط مجال آن هست که چند نکته را ذکر کنم.

در آن دوران سیاه گذشته که محاسبات عددی به چندصد یا چندهزار عمل حسابی محدود می‌شد، ریاضیدانان کاربردی مجبور بودند مسائل خود را بسیار ساده کنند و یا حتی در مواردی قسمتهای اصلی آنها را حذف کنند تا پرداختن به آنها در حد توانایی‌های عملیاتی موجود باشد. باید هر گوشه‌ای را می‌بریدند و از هر تقارن تصادفی بهره‌برداری می‌کردند. این امر چنگی به‌دل ذهنهای ریاضی نمی‌زد و احتمالا یکی از دلایل عدم محبوبیت ریاضیات کاربردی در دوران قبل از ظهور کامپیوتر همین بود. امروز می‌توانیم کاری را که به‌کامپیوتر تعلق دارد به‌کامپیوتر بسپریم و کاری را که به‌قلم و تجزیه و تحلیل متعلق است به این قلمرو حواله دهیم. می‌توانیم به اصول کلی بیندیشیم و روشها را برحسب چگونگی عملکرد مجانبی آنها به ازای اعداد بزرگ $n$، و نه مثلا $n = 8, 9, 10$، ارزیابی کنیم.

امروزه انواع زیادی محاسبه برای مقاصد گوناگونی انجام می‌پذیرد و میزان اطمینانی که می‌توانیم به آنها داشته باشیم از موردی به مورد دیگر فرق می‌کند. بعضی از انواع بسیار جالب محاسبات، پدیده‌هایی واقعاً آشوبناك از قبیل جریان چند فازه، احتراق متلاطم، ناپایداری فصل مشترکها و غیره را به خوبی مدلسازی می‌کنند. چنین محاسباتی معادلهای گسستهٔ فرایندهای فیزیکی را به‌کار می‌گیرند و در اغلب قریب به‌اتفاق موارد با دقت تنظیم می‌شوند تا با نتایج تجربی تطبیق کنند. ولی هنگامی که می‌بینم طرحی محاسباتی جای نظریه‌ای را گرفته که می‌باید مستقل از پارامترهایی باشد که در فرایند گسسته سازی وارد می‌شوند، احساس نارضایی می‌کنم.

دیدگاه کاربردی برای اصلاحات بسیار ضروری در برنامهٔ درسی دورهٔ کارشناسی، به‌خصوص در اسفبارترین مادهٔ آن، یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال، لازم است. از زمانی که ریاضیدانان پژوهشگر مسؤولیت دروس دورهٔ کارشناسی را از سرخود باز کردند آموزش این حساب در وضع نامطلوبی قرار گرفته است. [در سایر درسهای این دوره] می‌توان استثناهای قابل توجه چندی از قبیل جبرنویس بیرکاف و مك‌لین و ریاضیات متناهی کمنی، اشل و تامسون را برشمرد ولی حساب دیفرانسیل و انتگرال علی‌رغم تلاشهای خوب چندی که به‌نتیجه نرسید چون زمین بایری برجای مانده است. در نتیجه، درس حساب دیفرانسیل و انتگرال متعارفی که امروز تدریس می‌شود با شیوه‌ای که ریاضیدانان به‌این حساب می‌نگرند و آن را به‌کار می‌گیرند، انطباق ندارد. خوشبختانه نارضایی از درس حساب دیفرانسیل و انتگرال مرسوم تقریباً در همه‌جای دنیا

دیده می‌شود. توماسهای شکاك خیلی کم پیدا می‌شوند. این بحران خوشایند از آن‌جا برمی‌خیزد که ماشینهای محاسب جیبی پرتوان همه جا به‌فراوانی دردسترس افرادقرار گرفته‌اند و این ماشینها از توابع انتگرال مـی گیرند، نقاط مـاکسیمم و مینیمم و صفر آنهارا پیدا می‌کنند ومعادلات دیفرانسیل را با سهولت بسیار حل مـی‌کنند و نشان می‌دهند که اختصاص کل درس حساب‌دیفرانسیل وانتگرال به ترفندهای کهنه‌ای که این عملیات را بـا دقت بسیار کمتری انجام می‌دهد یا اصلا انجام نمی‌دهد چقدر احمقانه است. اکنون ایـن فرصت را داریم که تمام تارعنکبوتها ومواد مـرده‌ای راکه چهرهٔ این حساب را مغشوش کرده است، بزداییم. باید هشیارانه بیندیشیم که چه چیزی را به‌جای آن بنشانیم. من بـراین عقیده پـافشاری می‌کنم که حساب دیفرانسیل وانتگرال‌وسیلهٔ طبیعی معرفی‌کاربردها است، واین‌کاربردها هستندکه شکل صحیح را بـه‌آن مـی‌دهند و محدودهٔ آن را مشخص می‌سازند.

شکی نیست که‌کامپیوترنقش‌سترگی درآموزش دورهٔ‌کارشناسی ایفا خواهدکرد. اما اینکه این نقش دقیقاً چه خـواهد بود تا حد زیادی درعمل معلوم خواهد شد. درخشانترین نویدی که‌محاسبات کامپیوتری می‌دهد این است که دانشجویان را قـادر می‌سازد در آموزش خود شرکت فعالتری، نسبت به‌گذشته، داشته باشند.

من به‌هواخواهان پـرشوروشوق ریـاضیات گسسته نصیحتی می‌کنم. این رشته، رشتهٔ بسیارزیبا وعمیقی‌است که به‌سبب‌دسترسی ما به‌کامپیوتر، اهمیت بـزایی درکاربردها پیداکرده است. اما اگر گمان‌کنیم کـه ریاضیات گسسته در برنـامهٔ درسی سالهـای اول کارشناسی باریاضیات کاربردیِ مبتنی برحساب‌دیفرانسیل‌وانتگرال رقابت می‌کند یا حتی جای آن را می‌گیرد، به‌خطا رفته‌ایـم. این طرزفکر باعث می‌شودکه افزایش فوق‌العادهٔ توانایـی خود را در استفادهٔ‌کاربردی ازریاضیاتِ مبتنی براین حساب ــ که‌به‌یمن‌کامپیوتر حاصل شده است ــ نادیده بگیریم.

چگونه می‌توانیم براین وسوسه که حدس بزنیم‌مسیر تحقیقات فردا چه خواهد بود فایق آئیم؟ با اطمینان‌خاطرحدس می‌زنم که درقرن آینده محاسبات‌کامپیوتری نقشی حتی بزرگتراز امروزبازی خواهدکرد. مدلسازان‌ریاضی‌موضوعهای‌خودرا به‌شیوهٔ‌تجربه‌گران کاوش خواهندکرد. امکانات گرافیك‌کامپیوتری کـه امروز چشم‌ما را خیره می‌کند، بسیارعادی ودردسترس خواهدبود. یاد خواهیم گرفت که ازمحاسبات به‌مثابـهٔ بخشی ازبـرهان دقیق‌استفاده کنیم، راهی که قبلا فقرمان ولانفورد پیموده‌اند. من مطمئنم کـه دینامیك سیالات رشتهٔ بسیارمهمی به‌حساب خواهد آمد، و هـدف دشوار و ذیرباب درك‌مفهوم تلاطم شدیداً دنبال خواهد شد. ما بی‌شك سعی خواهیم کرد با استخراج اطلاعات مربوط بـه‌رفتار متوسط‌طالب زیادی دربارهٔ‌پدیده‌های آشوبناکی که‌اخیراً مشاهده‌شده‌کشف کنیم. این‌کاررا گاه درمواردکاملا انتگرالپذیر می‌توان انجام‌داد. نظریهٔ کام (کولموگوروف ـ آرنولد ـ موزر) به‌ما حق مـی‌دهدکه قبول کنیم چنین نتایجی در سیستمهایی کـه ازسیستمهای انتگرالپذیـر چندان دورنیستند مطرح‌اند.

مشاهدات اولیهٔ‌مندلبرات درباره ویژگی برخالی (فرکتالی) اشکال طبیعت‌وطبقه‌بندی‌اوازاین اشکال‌برمبنای ابعادهاوسدورف آنها، تشنهٔ توضیحی برحسب قوانین طبیعت است. برای پیشرفت دراین برنامه نیاز به‌استعداد ریاضی دربالاترین حد است.

من‌قلباً توصیه می‌کنم که همه ریاضیدانان جوان‌مهارت خوددرا در رشته‌ای از ریاضیات کاربردی بیازمایند. اینجا معدن طلایی از مسائل عمیقی است که حل آنها در گرو تحولات عمیق مفهومی و تکنیکی است. تنوع این مسائل باعث می‌شود که متناسب باهرسبك وروشی، مسأله‌ای موجودباشد. ریاضیات کاربردی به ریاضیدانان امکان می‌دهدکه عضوجامعهٔ بزرگترِعلمی و تکنولوژیك بـاشند. موفق باشید!

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

• Peter D. Lax, "The flowering of applied mathematics in America," *Siam Review* (4) **31** (1989) 533-541.

★ پترلکس، مؤسسهٔ علوم ریاضی کورانت در نیویورك، امریکا