ماتریس تصادفی چیست؟•

پرسی دایاکونیس*
ترجمهٔ حمیده داریوش‌همدانی

از آنجایی که ماتریس تصادفی یک متغیر تصادفی است که مقادیرش را در فضای ماتریسها اتخاذ می‌کند، شاید بهتر باشد که بحث را با متغیرهای تصادفی شروع کنیم.

وقتی استاد دانشگاه هاروارد شدم، دیوید کژدان[1] سمینار «مفاهیم پایه‌ای» را برگزار می‌کرد، سمیناری دربارهٔ چیزهایی که هر دانشجوی تحصیلات تکمیلی (و شاید هر عضو هیأت علمی نیز) باید بداند. او از من خواست یک سخنرانی با موضوع «متغیر تصادفی چیست؟» ارائه کنم.

من از درخواست کژدان متعجب شده بودم، چون «هر کسی می‌داند» که متغیر تصادفی فقط یک تابع اندازه‌پذیر

$$X(\omega) \text{ از } \Omega \text{ به } \mathcal{X}$$

است. وی در پاسخ گفت که «بله، ولی منظور کسانی که در احتمال کار می‌کنند از این اصطلاح این نیست» و البته حق با او بود. عبارت زیر را در نظر بگیرید:

> یک ماتریس تصادفی با اندازهٔ هار[2] بر گروه متعامد O_n انتخاب کنید،

که در آن O_n گروه ماتریسهای حقیقی $n \times n$ای مانند X است که $XX^T = id$. اکثر ما یاد می‌گیریم که O_n یک اندازهٔ احتمال ناوردای μ دارد، یعنی اندازه‌ای بر مجموعه‌های بورل A از O_n به‌طوری که برای هر مجموعهٔ A و ماتریس M داریم

$$\mu(A) = \mu(MA), \qquad \mu(O_n) = 1.$$

بگذارید بگویم که چگونه باید «X را از μ انتخاب کرد». برای شروع، یک نمونهٔ انتخابی Y_{ij} با چگالی نرمال استاندارد (خم زنگوله‌ای‌شکل) لازم داریم. این یک اندازه روی خط حقیقی با چگالی $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ است. حتی اگر ندانید که «انتخاب Y_{ij} با چگالی نرمال» یعنی چه، رایانهٔ شما می‌داند. می‌توانید تنها با فشار دادن یک دگمه دنباله‌ای از انتخابهای نرمال مستقل به‌دست آورید.

حالا کار آسان شده است. یک آرایهٔ $n \times n$ خالی را با Y_{ij}ها که $1 \leq i, j \leq n$، پر کنید. با استفاده از روش گرام‌ـاشمیت[3] آن را به یک ماتریس متعامد تبدیل کنید، به این ترتیب که سطر اول را طوری تغییر دهید که نرم واحد داشته باشد. سپس سطر اول را از سطر دوم بیرون کشیده و نرم آن را به یک تبدیل کنید و الی آخر. ماتریس حاصل، تصادفی است (زیرا از Y_{ij}های تصادفی به‌دست می‌آید) و متعامد می‌باشد (چون ما آن را طوری تغییر دادیم تا متعامد گردد). با استفاده از ناوردایی توزیع نرمال تحت تعامد، به‌راحتی ثابت می‌شود که X دارای اندازهٔ هارِ ناوردای

$$\Pr(X \in A) = \mu(A)$$

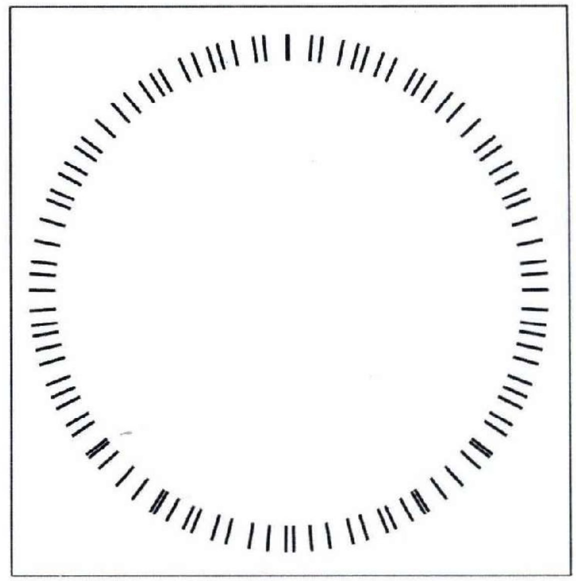
است.

اکنون توصیف الگوریتمی ماتریس تصادفی متعامد را به زبان متغیرهای تصادفی ترجمه می‌کنیم. فرض کنید $\Omega = \mathbb{R}^{n^2}$، و $\mathcal{X}$ گروه متعامد باشد. الگوریتم گرام‌ـاشمیت یک نگاشت $X(\omega)$ به‌دست می‌دهد که تقریباً از همهٔ Ω به روی $\mathcal{X}$ است. این $X(\omega)$ متغیر تصادفی ماست. برای بیان توزیع احتمال آن، اندازهٔ حاصلضربی $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$ را روی $\mathbb{R}^{n^2}$ قرار دهید. تصویر این اندازه تحت نگاشت X توزیع هار μ است.

معمولاً علاقه‌مندیم ویژه‌مقدارهای این ماتریس را بدانیم. برای ماتریسهای متعامد، اینها n نقطه روی دایرهٔ واحد هستند. شکل ۱ (الف) ویژه‌مقدارهای یک ماتریس تصادفی متعامد ۱۰۰ × ۱۰۰ را نشان می‌دهد. گرچه کمی تغییرات موضعی وجود دارد، ولی ویژه‌مقدارها خیلی منظم پخش شده‌اند. در مقابل، شکل ۱ (ب)، ۱۰۰ نقطهٔ تصادفی را نشان می‌دهد که مستقلاً به‌طور تصادفی روی دایره واحد انتخاب شده‌اند. حفره‌ها و تجمعهایی وجود دارند که در شکل ۱ (الف) ظاهر نمی‌شوند. برای جزئیات، کاربردها و بسیاری از قضایای مکمل این مشاهدات، مرجع [۱] را ببینید.

تا اینجا به این سؤال پاسخ داده‌ام که «ماتریس تصادفی متعامد چیست؟» برای به‌دست آوردن ماتریس تصادفی یکانی، توزیع نرمال روی $\mathbb{R}$ را با توزیع نرمال روی C عوض کنید. چگالی آن $\frac{e^{-|z|^2}}{\pi}$ است. برای انتخاب یک متغیر تصادفی نرمال مختلط Z در رایانه، دو متغیر تصادفی نرمال حقیقی و مستقل Y_1 و Y_2 را انتخاب کرده قرار می‌دهیم $Z = \frac{1}{2}Y_1 + i\frac{1}{2}Y_2$.

1. David Kazhdan 2. Haar measure 3. Gram-Schmidt



شکل ۱ (الف) ویژه‌مقدارهای یک ماتریس تصادفی متعامد

شکل ۱ (ب) نقاط تصادفی بر دایرهٔ واحد

برای ماتریس تصادفی همتافته[1] از کواترنیونها استفاده کرده قرار می‌دهیم $Z = \frac{1}{4}(Y_1 + iY_2 + jY_3 + kY_4)$. ماتریسهای تصادفی در گروههای متعامد، یکانی، و همتافته در متون فیزیکی، خانواده‌های مستدیر کلاسیک نامیده می‌شوند.

همچنین مجموعه‌های غیرفشرده‌ای هم هستند؛ برای انتخاب یک ماتریس تصادفی ارمیتی، یک ماتریس $n \times n$ را طوری پر کنید که عناصر بالای قطرْ انتخابهایی از نرمال استاندارد مختلط و عناصر روی قطرْ انتخابهایی از نرمال استاندارد حقیقی باشد و سرانجام پایین قطر را با مزدوج مختلط عناصر بالای قطر پر کنید. این مجموعه در فیزیک GUE (خانوادهٔ یکانی گاوسی) نامیده می‌شود، زیرا ماتریسهای تصادفی دارای توزیعی هستند که تحت ضرب در گروه یکانی ناورداست. خانواده‌های مفید دیگری هستند که در کتاب کلاسیک[۳] آورده شده است. یکی از ادعاهای جالبی که در آنجا بحث شده این است که کافی است سه خانوادهٔ کلی (متعامد، یکانی، و همتافته) در نظر گرفته شود، بسیاری از مسائل با n بزرگ جوابهایی دارند که مانند جواب برای این خانواده‌هاست و اهمیتی ندارد که چه توزیع احتمالی بر این ماتریسها حاکم باشد.

از نظر تاریخی، نظریهٔ ماتریسهای تصادفی را آمارادانانی بنیان نهادند که همبستگی بین ویژگیهای مختلف یک جامعه (مانند قد، وزن، درآمد،...) را مطالعه می‌کردند. این روند به ماتریسهای همبستگی منجر شد که درایهٔ (i, j)ام آنها همبستگی بین ویژگیهای iام و jام بود. اگر داده‌ها بر مبنای یک نمونهٔ تصادفی از جامعه‌ای بزرگ‌تر به‌دست آمده بود، این ماتریسهای همبستگی تصادفی می‌شدند؛ مطالعهٔ چگونگی تغییرات ویژه‌مقدارهای چنین نمونه‌هایی، یکی از نخستین دستاوردهای بزرگ نظریهٔ ماتریسهای تصادفی بود. این مقادیر و ویژه‌بردارهای متناظر آنها مبنای اصلی بحثی به نام «تحلیل مؤلفه‌های اصلی» می‌باشند. این مبحث به دنبال یافتن توصیفاتی با بعد پایین از داده‌هایی با بعد بالاست؛ موارد استفادهٔ فراوانی در زمینه‌های کاربردی از روانشناسی گرفته تا اقیانوس‌شناسی دارد و جزء بسیار مهمی از موتورهای جستجوگر نظیر گوگل است. برای تفصیل بیشتر به [۱] مراجعه کنید.

1. symplectic

فیزیکدانان نظریهٔ ماتریسهای تصادفی را توصیف مفیدی از اختلاف انرژی در پدیده‌هایی مانند پخش تدریجی نوترون یافتند و بررسی آن را از دههٔ ۱۹۵۰ شروع کردند. این نظریه در سیر رشد خود به مجموعهٔ گسترده‌ای از متون تبدیل شد که برای مطالعهٔ مباحث جدید (مانند نقطه‌های کوانتومی) و بخشهایی از نظریه ریمان پرورانده شده است. همچنین کاربردهای شگفت‌آوری از نظریه ماتریسهای تصادفی در ترکیبیات و نظریهٔ اعداد به‌دست آمده‌اند. نوشتگان مربوط به همهٔ این مباحث را می‌توانید در مرجع [۲] بیابید.

سرانجام با بازگشت به ماتریسهای تصادفی به‌عنوان موجودات ریاضی، خواننده درمی‌یابد که ما با آنها به‌عنوان موجودات ریاضی «واقعی» و نه «مجرد» رفتار کرده‌ایم. از یک ماتریس می‌توان به ویژه‌مقدارها و بعد شاید به طیفی که مجدداً نرمال‌شده تا میانگین فاصله‌ها یک شود و سپس به بافت‌نگار فاصله‌گذاری رسید. تمام اینها به‌طور مکانیکی قابل ترجمه به زبان توابع اندازه‌پذیر است. ولی، این کار کمی شبیه کار با زبان ماشین به‌جای برنامه‌نویسی طبیعی با رایانه است. نظریهٔ ماتریسهای تصادفی به‌تدریج به‌صورت زبان توصیفی مرتبه بالایِ این مجموعهٔ غنی از نتایج تکامل یافته است.

مراجع

1. P. DIACONIS. Patterns in Eigenvalues: The 70th Josiah Willard Gibbs Lecture, *Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 155-178 (2003).

2. P. FORRESTER, N. SNAITH, and V. VERBAARSCHOT, Introduction Review to Special Issue on Random Matrix Theory, *Jour. Physics A: Mathematical and General* **36**, R1-R10 (2003).

3. M. MEHTA, *Random Matrices*, 3rd Edition, Elsevier, Amsterdam. (2004).

* * * * * *

• Persi Diaconis, "What is a random matrix?", *Notices, Amer. Math. Soc.*, (11) **52** (2005) 1348-1349.

* پرسی دایاکونیس، دانشگاه استنفرد، آمریکا