تاریخچهٔ قضیهٔ استوکس*

ویکتور کاتس*

بگذارید حق به حق‌دار برسد: قضایای گرین، گاوس، و استوکس، پیش از آنان عرضه شده و مسکوت مانده بود.

امروزه بیشتر کتابهای درسی امریکایی در زمینهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته، بخشهای چندی را به‌قضایای گرین، گاوس، واستوکس اختصاص می‌دهند. متأسفانه، قضایای مزبور در اصل متعلق به‌این افراد نیست. هدف این مقاله ارائهٔ تاریخچهٔ مبسوطی از این نتایج است‌که از ریشه‌های این قضایا تا تعمیم و یگانگی آنها درقالب قضیهٔ تعمیم‌یافتهٔ استوکس را در برمی گیرد.

ریشه‌های این قضایا

هریک از سه قضیهٔ فوق یك انتگرال k بعدی را به‌یك انتگرال $k-1$ بعدی مربوط می‌سازد. از آنجایی کـه اثبات هریك از آنها وابسته به‌قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است، روشن است کـه ریشه‌های این قضایا به‌قرن ۱۷ میلادی باز می گردد. دراواخر قرن ۱۸ میلادی هم لاگرانژ و هم لاپلاس عملاً قضیهٔ اساسی را برای تحویل یك انتگرال k بعدی به‌انتگرالی از بعدکوچکتر به‌کار بردند. با این وجود، قضایای مورد بحث به‌گونه‌ای که امروزه می‌بینیم تا پایان قرن ۱۹ میلادی به‌طور صریح ظاهر نشدند.

از این سه قضیه، اولین قضیه‌ای که اساساً به‌شکل امروزی بیان و اثبات شد، قضیه‌ای است کـه امروزه به‌نام قضیهٔ گاوس و یا قضیهٔ دیورژانس نامیده‌می‌شود. سه‌حالت خاص این قضیه درمقاله‌ای از گاوس به تاریخ ۱۸۱۳ دیده می‌شود.[۸]. گاوس رویه‌ای را درنظرمی گیرد که یك جسم صلب را احاطه‌کرده است. او بردار قائم خارجی وارد بر رویه دریك نقطهٔ P واقع بریك جزء بینهایت کوچك از رویه‌مانند ds را با PQ نشان می‌دهد و زوایایی راکه این بردار با جهت مثبت محورهای x، y، و z می‌سازد به‌ترتیب با QX، QY، و QZ نمایش می‌دهد. گاوس سپس یك جزء بینهایت کوچك صفحهٔ y-z را با $d\Sigma$ نمایش داده و استوانه‌ای روی آن برپا می کند. این استوانه، رویه را درتعدادزوجی جزء بینهایت کوچك از رویه مانند ds_1، ds_2، ...، ds_{2n} قطع می کند. برای هر j داریم $d\Sigma=\pm ds_j \cos QX_j$ که در آن، علامت مثبت هنگامی به‌کارمی‌رودکه زاویهٔ مزبور حاده باشد؛ علامت منفی برای زاویهٔ منفرجه به‌کاربرده می‌شود. چون اگر استوانهٔ مزبور در جایی وارد رویه شودکه زاویهٔ QX منفرجه باشد، درجایی از آن خـارج می‌شود کـــه QX حـاده است (شکل ۱)، گـاوس رابطـهٔ $d\Sigma=-ds_1\cos QX_1=ds_2\cos QX_2=\dots$ را بـه دسـت می‌آورد و با جمعبندی نتیجه می گیرد که "انتگرال $\int ds\cos QX$ روی کل رویهٔ جسم برابر صفر است."

او به‌علاوه اشاره می کند که اگر T، U، و V به ترتیب توابع گویایـی از فقط y و z، فقط x و z، و فقط x و y باشند، آنـگاه، $\int(T\cos QX+U\cos QY+V\cos QZ)\,ds=0$. گاوس سپس حجم جسم را به‌وسیلهٔ استوانه‌هایی به‌طول x ومساحت مقطع عرضی $d\Sigma$ تقریب می‌زند و بـه روشی مشابه، قضیهٔ بعدی خودرا به‌دست می‌آورد: "حجم کل جسم به‌وسیلهٔ انتگرال $\int ds\, x(\cos QX)$ روی کل‌رویهٔ جسم معین‌می‌شود." ما در زیرنشان خواهیم دادکه این‌نتایج، حالات خاص قضیهٔ دیورژانس هستند.

در سالهای ۱۸۳۳ و ۱۸۳۹ گاوس صورتهای خاص دیگری از این‌قضیه را انتشارداد. اما قبلاً صورت کلی این‌قضیه به‌وسیلهٔ میخائیل اوستروگرادسکی[1] بیان واثبات شده بود. این ریاضیدان روس که در اواخردههٔ ۱۸۲۰ درپاریس به‌سرمی‌برد، در۱۳ فوریهٔ ۱۸۲۶ مقاله‌ای تحت‌عنوان "اثبات قضیه‌ای درحساب انتگرال" [۱۵] به آکادمی علوم پاریس ارائه‌کرد. در این مقالـه اوستروگرادسکی رویه‌ای بـا جزء مـساحت ε که جسمی با جزء حجم ω رامحصورمی کند، درنظرمی گیرد. او زوایایی را که گاوس QX، QY، و QZ می‌نامید، به‌وسیلهٔ α، β، و γ نشان می‌دهد، و سه تابـع مشتق‌پذیر از x، y، و z را p، q، و r می‌نامد. آنگاه قضیهٔ دیورژانس را به‌صورت زیر بیان می کند

$$\int\left(a\frac{\partial p}{\partial x}+b\frac{\partial q}{\partial y}+c\frac{\partial r}{\partial z}\right)\omega$$

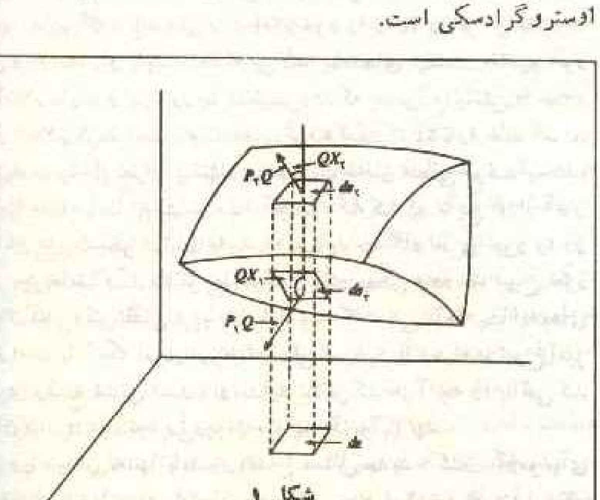
$$=\int(ap\cos\alpha+bq\cos\beta+cr\cos\gamma)\varepsilon$$

که در آن a، b، و c مقادیری ثابت‌اند؛ انتگرال سمت چپ روی جسم و انتگرال سمت راست روی رویهٔ مرزی آن محاسبه می‌شود.

یادآوری می کنیم کـه نتایج گاوس همگی حالات خاص قضیهٔ اوستروگرادسکی هستند. در هرحالت، $a=b=c=1$؛ نتیجهٔ اول گاوس به‌ازای $p=1$، $q=r=0$ حاصل می‌شود؛ دومین آنهـا با فرض

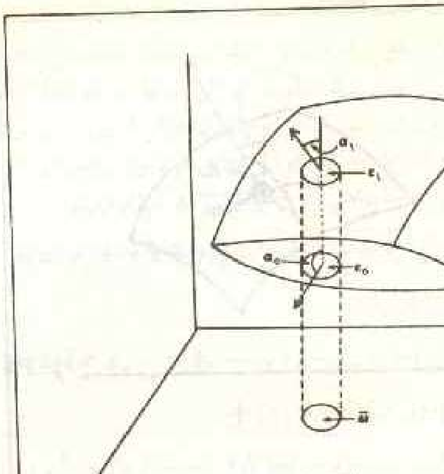
$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}=\frac{\partial r}{\partial z}=0$$

و سومین نتیجه نیز بـا فرض $p=x$، $q=r=0$ به‌دست می‌آید. همچنین خواهیم دیـد کـه اثبات گـاوس حالت خاصی از اثبات اوستروگرادسکی است.



شکل ۱

1. Michael Ostrogradsky



شکل ۲

اوستروگرادسکی نتیجهٔ خود را به‌این ترتیب اثبات می‌کند. ابتدا $\omega(\partial p/\partial x)$ را در نظر می‌گیرد، از آن روی یك "استوانهٔ باریك" که مساحت مقطع عرضی آن $\overline{\omega}$ است و در جهت محور x از جسم می‌گذرد، انتگرال می‌گیرد و با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال آن را به‌صورت

$$\int \frac{\partial p}{\partial x}\omega = \int (p_1 - p_0)\overline{\omega}$$

بیان می‌کند. در اینجا p_0 و p_1 مقادیر p روی قطعاتی از رویه‌اند که استوانهٔ مزبور جسم را در آنها قطع می‌نماید. از آنجایی که در یك مقطع رویه داریم $\overline{\omega} = \varepsilon_1 \cos\alpha_1$ و در مقطع دیگر داریم $\overline{\omega} = -\varepsilon_0 \cos\alpha_0$ (α_1 و α_0 زوایای مناسب ساخته شده به‌وسیلهٔ قائم، و ε_1 و ε_0 اجزاء متناظر رویه هستند) به‌دست می‌آوریم

$$\int \frac{\partial p}{\partial x}\omega = \int p_1\varepsilon_1 \cos\alpha_1 + \int p_0\varepsilon_0 \cos\alpha_0 = \int p\cos\alpha\varepsilon$$

در اینجا، انتگرال سمت چپ روی استوانه وانتگرال سمت راست روی دوقطعهٔ رویه محاسبه می‌شوند (شکل ۲). با جمع کردن انتگرالها روی تمام این‌گونه استوانه‌ها، یك ثلث نتیجهٔ نهایی حاصل می‌شود. دو ثلث دیگر نیز به‌همین ترتیب به‌دست می‌آیند. اشاره می‌کنیم که این اثبات، با اصلاحاتی که به‌آسانی انجام می‌شود، قابل انطباق بر استانداردهای جدید است و در واقع امروزه نیز مورد استفاده قرار دارد، مثلاً کتاب تیلر و مان [۲۴] را ببینید.

اگرچه اثبات فوق برای توابع مشتقپذیر دلخواه p، q، و r معتبر است اما برای مراجعات بعدی اشاره می‌کنیم که اوستروگرادسکی نتیجه را تنها در حالت خاص

$$p = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad q = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad r = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}$$

به‌کار می‌گیرد، که در آن u و v توابعی مشتقپذیر از سه متغیرند.

اوستروگرادسکی این قضیه را دوباره درطی یك‌مقاله به تاریخ ۶ اوت ۱۸۲۷ در پاریس و بالاخره آن را در تاریخ ۵ نوامبر ۱۸۲۸ در سن‌پترزبورگ عرضه کرد. تنها متن دستخط اخیر است که به‌وسیلهٔ وی در ۱۸۳۱ انتشار یافت [۱۶]. دوکار قبلی او به صورت دستخط باقی مانده‌اند، ولی ترجمهٔ روسی آنها منتشرشده است.

در همین زمان این قضیه و قضایای وابسته به‌آن در انتشارات سه تن دیگر از ریاضیدانان ظاهر شد. سیمون دنیس پواسون[1] در مقاله‌ای که درتاریخ ۱۴ آوریل ۱۸۲۸ درپاریس عرضه شد (وبه‌سال ۱۸۲۹ انتشار یافت) نتیجهٔ مشابهی را عنوان و اثبات کرد [۱۹]. بنا به گفتهٔ یوشکه‌ویچ[2] در [۳۸]، پواسون به‌مقالهٔ ۱۸۲۷ اوستروگرادسکی اشاره کرده و بنابراین از آن نتیجه قطعاً مطلع بوده است. پواسون نه ادعای اصالت این نتیجه را داشت و نه ذکری ازاوستروگرادسکی به‌میان آورد اما باید به‌این نکته توجه داشت که در آن زمان، ارجاع‌دادن مانند امروز معمول نبوده است.

ریاضیدان فرانسوی دیگر، فردریك ساروس[3] نتیجهٔ مشابهی‌را در۱۸۲۸ انتشار داد [۳۱]، اما نمادها وایده‌های او به‌اندازهٔ نمادها و ایده‌های اوستروگرادسکی وپواسون واضح نیست. وبالاخره، جرج گرین ریاضیدان انگلیسی درمقاله‌ای که درهمان سال به‌طورخصوصی انتشارداد [۹]، نتیجهٔ زیر را بیان و اثبات کرد

$$\int u\,\Delta v\,dx\,dy\,dz + \int u\frac{dv}{dw}d\sigma = \int v\,\Delta u\,dx\,dy\,dz + \int v\frac{du}{dw}d\sigma$$

در اینجا، u و v توابعی از سه متغیر در یك جسم صاب "به هرشکل دلخواه" و Δ نمادی برای لاپلاسی و d/dw به‌معنای مشتق معمولی است. در هردو طرف، اولین انتگرال، روی جسم و دومین آنها روی رویهٔ مرزی آن محاسبه می‌شود. گرین قضیهٔ خود را با همان ایده‌های اساسی اوستروگرادسکی به‌اثبات رساند. اگر حالت خاصی را به‌کار گیریم که در آن

$$p = v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}, \quad q = v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y}, \quad r = v\frac{\partial u}{\partial z} - u\frac{\partial v}{\partial z}$$

می‌توان با محاسبه‌ای کوتاه نتیجه گرفت که دو قضیهٔ فوق با یکدیگر معادل‌اند. ولی گرین چنین نتیجه‌ای نگرفت. او به‌قضیه به‌همان شکلی که خود ارائه داد، علاقه‌مند بود. بدین سبب مشکل می‌توان قضیهٔ دیورژانس را به‌او نسبت داد.

تمامی ریاضیدانانی که صورتهای گوناگون این قضیه را بیان و اثبات کردند، به دلایل خاص فیزیکی بدان علاقه‌مند بودند. گاوس به نظریهٔ جاذبهٔ مغناطیسی، اوستروگرادسکی به نظریهٔ گرما، گرین به‌الکتریسیته و مغناطیس، پواسون به‌اجسام کشسان، و ساروس به‌نظریهٔ اجسام شناورعلاقه‌مند بودند. تقریباً درتمامی موارد، قضایای فوق در وسط مقاله‌ای طولانی ظاهر می‌شدند و تنها به‌عنوان ابزاری درجهت نیل به‌یك نتیجهٔ خاص فیزیکی مطرح بودند. در حقیقت، هم برای گرین و هم برای اوستروگرادسکی توابع u و vی پیشگفته غالباً جوابهای معادلاتی از نوع معادلات لاپلاس بودند و در مسائل‌مقدار مرزی به‌کار می‌رفتند.

قضیه‌ای که عموماً به‌نام قضیهٔ گرین شناخته می‌شود، نتیجه‌ای در حالت دو بعدی است که این نیز مورد نظر گرین نبوده است. البته می‌توان آن را ازصورت قضیه به‌روایت گرین و با تحویل آن به‌حالت دو بعدی و با محاسبه‌ای مختصر به‌دست آورد. اما هیچ دلیلی مبنی بر آنکه گرین خود چنین‌کاری انجام داده باشد در دست نیست.

از طرف دیگر، از آنجایی که قضیهٔ گرین در نظریهٔ مقدماتی متغیرهای مختلط اهمیت اساسی دارد، تعجب‌آور نیست که این قضیه

---

1. Simeon Denis Poisson　2. Yushkevich　3. Frederic Sarrus

اولین بار، بدون اثبات، در سال ۱۸۴۶ در نوشته‌ای از کوشی [۵] ظاهر شده است. در این مقاله کوشی از آن برای اثبات "قضیهٔ کوشی" دربارهٔ انتگرال یک تابع مختلط روی یک خم بسته استفاده می‌کند. کوشی نتیجه را به‌صورت زیر ارائه می‌دهد

$$\int\left(p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}\right)ds=\pm\iint\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx\,dy$$

در اینجا p و q توابعی از x و y هستند و علامت انتگرال سمت راست وابسته به‌جهت خمی است که ناحیهٔ انتگرالگیری را احاطه می‌کند. کوشی در مجلهٔ شخصی خود، تمرینهای آنالیز و فیزیک ریاضی[1]، قول اثبات آن را می‌دهد اما هرگز چنین اثباتی را انتشار نمی‌دهد.

پنج سال بعد، برنهارد ریمان همین قضیه را در [۲۰] عنوان می‌کند و این بار با اثبات و به‌چند صورت مختلف. او نیز این قضیه را در ارتباط با نظریهٔ متغیرهای مختلط به‌کار می‌گیرد. اثبات ریمان کاملاً مشابه اثباتی است که امروزه معمولاً ارائه می‌شود. اساس کار ریمان این‌است که قضیهٔ اساسی را برای انتگرالگیری $\partial q/\partial x$ روی خطهای موازی محور x به‌کار می‌برد تا مقادیر q را در جاهایی که این خطوط مرز ناحیه را قطع می‌کنند، به‌دست آورد و آنگاه نسبت به y انتگرال می‌گیرد تا رابطهٔ زیر حاصل شود

$$\int\left[\int\frac{\partial q}{\partial x}dx\right]dy=-\int q\,dy=-\int q\frac{dy}{ds}ds$$

نیمهٔ دیگر فرمول نیز به‌طور مشابه به‌اثبات می‌رسد.

آخرین قضیه در فهرست ما، قضیهٔ استوکس، اولین بار در سال ۱۸۵۴ به چاپ رسید. جورج استوکس سالهای متمادی مسؤولیت برگزاری امتحانات جایزهٔ اسمیت را در کمبریج برعهده داشت. در امتحان فوریهٔ سال ۱۸۵۴، مسألهٔ شمارهٔ ۸ به‌صورت زیر بود [۳۲] (شکل ۳):

اگر X، Y، و Z توابعی از مختصات قائم x، y، و z، dS جزئی از هر رویهٔ محدود، l، m، n کسینوسهای زوایای بین قائم بر dS و محورها، و ds جزئی از خط مرزی باشند، نشان دهید که

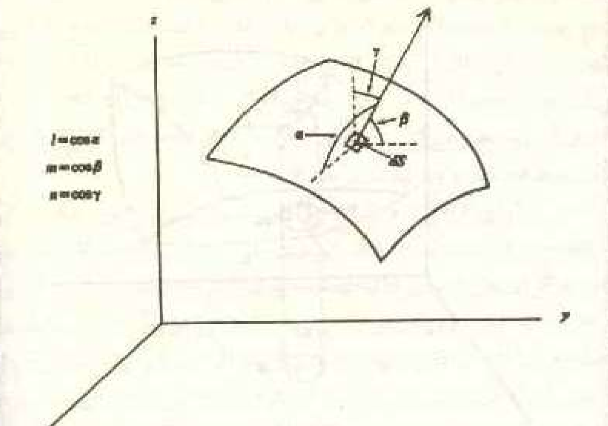
$$\iint\left\{l\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+m\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+n\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)\right\}dS$$

$$=\int\left(X\frac{dx}{ds}+Y\frac{dy}{ds}+Z\frac{dz}{ds}\right)ds$$

... انتگرال ساده روی محیط رویه محاسبه می‌گردد.

از اینکه دانشجویی این قضیه را اثبات کرده باشد، ظاهراً اطلاعی در دست نیست. با این حال، قضیهٔ فوق قبلاً در نامه‌ای از ویلیام تامسون (لرد کلوین) به استوکس در ۲ ژوئیهٔ ۱۸۵۰ آمده بود و عبارت سمت چپ قضیه نیز در دو تا از آثار پیشین استوکس مشاهده شده است. ظاهراً اولین اثبات این قضیه در کتابی از هرمان هانکل به‌سال ۱۸۶۱ [۱۰] انتشار یافت. هانکل این قضیه را به‌کسی نسبت نمی‌دهد و تنها اشاره‌ای به‌ریمان در ارتباط با قضیهٔ گرین می‌کند؛ وی این قضیه را معروف می‌نامد و از آن برای اثبات نتیجهٔ استوکس استفاده می‌کند.

هانکل در اثبات خود انتگرال $\int X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ را روی خمی که رویه‌ای به‌معادلهٔ صریح $z=z(x,y)$ را محدود می‌کند،



شکل ۳

درنظر می‌گیرد و سپس به‌دست می‌آورد

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

بنابراین، انتگرال فوق به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int\left(X+\frac{\partial z}{\partial x}Z\right)dx+\left(Y+\frac{\partial z}{\partial y}Z\right)dy$$

بنا به‌قضیهٔ گرین، این نیز به‌شکل زیر قابل بیان است

$$\iint\left\{\frac{\partial\left(X+\frac{\partial z}{\partial x}Z\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(Y+\frac{\partial z}{\partial y}Z\right)}{\partial x}\right\}dx\,dy$$

با محاسبهٔ صریح مشتقات فوق، نتیجهٔ نهایی زیر حاصل می‌شود

$$\int(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\iint\left\{\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}\right\}dx\,dy$$

از آنجایی که هر قائم بر رویه به‌صورت $(-\partial z/\partial x,\ -\partial z/\partial y,\ 1)$ معین می‌شود و چون مؤلفه‌های بردار قائم واحد در واقع کسینوسهای زوایای بین قائم و محورهای مختصات‌اند، نتیجه می‌شود که: $\partial z/\partial x=-1/n$، $\partial z/\partial y=-m/n$، و $dS=dx\,dy/n$ بنابراین، هانکل با جایگذاری این مقادیر نتیجهٔ مطلوب را به‌دست می‌آورد.

بدون شک، در این اثبات لازم است که رویهٔ موردنظر صریحاً به‌صورت $z=z(x,y)$ مشخص شده باشد. اثبات دیگری که تا حدی با این اثبات متفاوت است و چنین شرطی در آن مطرح نیست، در اثر تامسون و تیت[1] به‌نام رساله در باب فلسفهٔ طبیعی (۱۸۶۷) بدون ارجاع آمده است [۳۵]. در سال ۱۸۷۱ ماکسول در نامه‌ای از استوکس درمورد تاریخچهٔ این قضیه سؤال می‌کند [۱۲]. ظاهراً باید استوکس به‌او جواب داده باشد چرا که در اثر ماکسول به نام رساله در باب الکتریسیته و مغناطیس در ۱۸۷۳ این قضیه با ارجاع به‌امتحان جایزهٔ اسمیت آمده است [۱۳]. ماکسول همچنین قضیهٔ دیورژانس را عنوان و اثبات می‌کند.

1. Exercises d' Analyse et de Physique Mathématique

1. Tait

صورتهای برداری این قضایا

هر سه قضیهٔ فوق، همان طور که دیدیم، ابتدا در شکل مختصاتی خود ظاهر شدند. اما از آن جایی که نظریهٔ کواترنیونها در اواسط قرن نوزدهم توسط هامیلتون و سپس تیت درحال پیدایش و پیشرفت بود، انتظارمی‌رفت که این قضایا به‌شکل کواترنیونی‌خود نیز ترجمه گردند. ابتدا باید اشاره‌کنیم که حاصلضرب هامیلتونی دوکواترنیون

$$\mathbf{q}=y_0+y_1\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+y_3\mathbf{k} \text{ و } \mathbf{p}=x_0+x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+x_3\mathbf{k}$$

را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\mathbf{pq}=(x_0y_0-x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3)+(x_2y_3-y_2x_3)\mathbf{i}$$
$$+(x_3y_1-y_3x_1)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}$$

قسمت اسکالر این عبارت به صورت $S.\mathbf{pq}$ و قسمت برداری آن با نماد $V.\mathbf{pq}$ نمایش داده می‌شود. ثانیاً با اعمال اپراتور ∇ی هامیلتون: $\mathbf{i}(\partial/\partial x)+\mathbf{j}(\partial/\partial y)+\mathbf{k}(\partial/\partial z)$ به تابع برداری $\sigma=\mathbf{i}X+\mathbf{j}Y+\mathbf{k}Z$، کواترنیونی به‌دست می‌آید

$$\nabla\sigma=-\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+\mathbf{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)$$
$$+\mathbf{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)$$

در اینجا نیز قسمت اسکالر وبرداری را به‌ترتیب با $S.\nabla\sigma$ و $V.\nabla\sigma$ نمایش می‌دهیم.

بعدها تیت در مقاله‌ای به سال ۱۸۷۰ [۲۳] توانست قضیهٔ دیورژانس را به‌صورت

$$\iiint S.\nabla\sigma\, d\varsigma=\iint S.\sigma Uv\, ds$$

بیان کند که در آن، $d\varsigma$ جزئی از حجم و ds جزئی از رویه و Uv یک بردار قائم واحد بررویه است. علاوه براین، تیت قضیهٔ استوکس را به‌صورت

$$\int S.\sigma\, d\rho=\iint S.V\nabla\sigma\, Uv\, d\varsigma$$

بیان کرد که در آن، $d\rho$ جزئی از طول خمی است که رویه را احاطه می‌کند.

ماکسول سه سال بعد در رسالهٔ خود فرمول تیت را تکرار کرد با این تفاوت که قدمی به‌زبان و اصطلاحات امروزی ما نزدیکتر شد. اوپیشنهاد کرد که $S.\nabla\sigma$ را همگرایی σ و $V.\nabla\sigma$ را تاو (یا $\text{curl}\ \sigma$) بنامند. همگرایی ماکسول، منفی آن چیزی است که ما دیورژانس می‌نامیم. بعلاوه اشاره می‌کنیم که اگر دو کواترنیون $\mathbf{p}$ و $\mathbf{q}$ بردارهایی خالص باشند، $S.\mathbf{pq}$ی هامیلتون دقیقاً برابر منفی حاصلضرب داخلی $\mathbf{p}.\mathbf{q}$ است. (این ایدهٔ خاص برای اولین بار توسط گیبس و هویساید در حدود بیست سال بعد ارائه شد.)

با ترکیب این مفاهیم، صورت برداری جدید قضیهٔ دیورژانس را به‌دست می‌آوریم

$$\iiint_V(\text{div}\ \sigma)\, dV=\iint_S \sigma.\mathbf{n}\, dA$$

در اینجا σ یک میدان برداری $X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$، dV جزئی ازحجم و dA جزئی از مساحت رویهٔ S، رویه‌ای که جسم M را محدود می‌کند، و $\mathbf{n}$ قائم خارجی واحد براین رویه است. به‌این‌ترتیب، قضیهٔ استوکس به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\iint_S(\text{curl}\ \sigma)\cdot\mathbf{n}\, dA=\int_\Gamma(\sigma\cdot\mathbf{t})\, ds$$

که در آن ds جزئی ازطول خم مرزی Γ است که سطح S را محدود کرده و $\mathbf{t}$ بردار مماس واحد بر Γ است. بدیهی است که می‌توان نتیجهٔ مشابهی برای قضیهٔ گرین هم ارائه داد.

تعمیم و یگانه‌سازی

تعمیم و یگانه‌سازی قضایای سه‌گانهٔ ما درمراحل مختلفی صورت گرفت. پیش از همه اوستروگرادسکی شخصاً در مقاله‌ای به سال ۱۸۳۶ در مجلهٔ کرل [۱۷] قضیهٔ خود را به‌صورت زیر تعمیم داد

$$\int_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}+\dots\right)dx\,dy\,dz\cdots$$
$$=\int_S\frac{\left(P\frac{\partial L}{\partial x}+Q\frac{\partial L}{\partial y}+R\frac{\partial L}{\partial z}+\dots\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2+\cdots}}dS$$

دراینجا اوستروگرادسکی فرض می‌کند $L(x,y,z,\dots)$ "تابعی از تعداد دلخواهی متغیر"، V مجموعهٔ مقادیر x، y، z، ... با ضابطهٔ $L(x,y,z,\dots)>0$ و S مجموعهٔ مقادیری با ضابطهٔ $L(x,y,z,\dots)=0$ باشد. به‌زبان امروزی، اگر n مقدار داشته باشیم، S یک ابررویهٔ $n-1$ بعدی است که حجم n بعدی V را محدود می‌کند.

اثبات اوستروگرادسکی دراینجا نیزهمچون اثبات اولیهٔ اوست. او از $\partial P/\partial x$ نسبت به x انتگرال می‌گیرد وپس ازعملیات مختصری به‌دست می‌آورد

$$\int\frac{\partial P}{\partial x}dx\,dy\,dz\dots=\int\frac{P\frac{\partial L}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2}}dy\,dz\dots$$

والبته برای هرجملهٔ دیگر نیزعبارت مشابهی به‌دست می‌آورد. سپس با قراردادن

$$dS=\sqrt{dy^2\,dz^2\dots+dx^2\,dz^2\dots+dx^2\,dy^2\dots+\dots}$$

نشان می‌دهد که

$$\frac{dy\,dz\cdots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2}}=\frac{dx\,dz\cdots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2}}=\cdots$$
$$=\frac{dS}{\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2+\cdots}}$$

و نتیجهٔ نهایی را با جمعبندی به‌دست می‌آورد.

(برای‌آنکه بفهمیم اوستروگرادسکی عبارت خود برای dS را چگونه به دست می‌آورد، اشاره می‌کنیم که برای‌یک رویهٔ پارامتری-

شده در فضای سه‌بعدی داریم

$$dS=\Delta\, du\, dv$$
$$=\sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\,du\,dv$$

و

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}du\,dv=dy\,dz,\quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}du\,dv=dz\,dx,$$
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\,dv=dx\,dy$$

بنابراین

$$dS=\sqrt{dy^2\,dz^2+dz^2\,dx^2+dx^2\,dy^2}$$

برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۱] مراجعه کنید.)

اگر به‌علاوه توجه کنیم که

$$\left(\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2+\cdots}\right)^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y},\frac{\partial L}{\partial z},\ldots\right)$$

بردار قائم واحد خارجی $\mathbf{n}$ بر S است و اگر σ نشان دهندهٔ تابع برداری $(P, Q, R\ldots)$ باشد، دراین‌صورت، نتیجهٔ اوستروگرادسکی به‌صورت زیر در می‌آید

$$\int(\operatorname{div}\sigma)\,dV=\int\sigma\cdot\mathbf{n}\,dS$$

که تعمیم مستقیمی از قضیهٔ اولیهٔ دیورژانس است.

اولین ریاضیدانی که هر سه قضیهٔ فوق را تحت یك نتیجهٔ کلی درآورد، ویتو ولترا[1]، در سال ۱۸۸۹ در [۲۷]، بود. قبل از بیان این قضیه باید زبان اورا بشناسیم. یك ابرفضای r بعدی در فضای n بعدی به‌صورت پارامتری به‌وسیلهٔ n تابع $x_i=x_i(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_r)$، $n\geqslant i\geqslant 1$، معین می‌شود. ولترا ماتریس n در r ی را که به صورت $J=(\partial x_i/\partial u_j)$ است درنظر می گیرد و دترمینان زیر ماتریس r در r از ماتریس J را که از سطرهای $i_1, i_2, \ldots, i_r$ پدید می آید، با $\Delta_{i_1 i_2\ldots i_r}$ نشان می‌دهد. او قرار می‌دهد

$$\Delta=\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_r}\Delta^2_{i_1 i_2\ldots i_r}\Big)^{1/2}$$

و $\Delta du_1\,du_2\ldots du_r$ را یك "جزء ابرفضا" و

$$\alpha_{i_1\ldots i_r}=(\Delta_{i_1\ldots i_r}/\Delta)$$

را یك کسینوس‌هادی ابرفضا می‌نامد. (البته، αها توابعی از uها هستند.) در حالتی که $r=2$ و $n=3$، ما قبلاً Δ را در بحث خود از قضیهٔ اوستروگرادسکی محاسبه کرده‌ایم. از آنجایی که دترمینانهای $\partial(x_i,x_j)/\partial(u_1,u_2)$ دقیقاً مؤلفه‌های بردار قائم بر رویه هستند، α_{ij}ها مؤلفه‌های بردارقائم واحد و به‌عبارت دیگر کسینوسهای زوایایی هستندکه آن بردار با محورهای مختصات می‌سازد.

حال ترجمهٔ قضیهٔ ولترا را از زبان ایتالیایی را نقل می کنیم:

فرض کنید $L_{i_1 i_2\ldots i_r}$ توابعی از نقاط ابرفضای S_n هستندکه کلیهٔ مشتقات مرتبهٔ اول آنها تعریف شده و پیوسته‌اند و نیز هر ترانهاده‌ای از اندیسها تنها علامت را تغییر می‌دهد. صورتهای زیر را در نظر بگیرید

$$M_{i_1 i_2\ldots i_{r+1}}=\sum_{s=1}^{r+1}(-1)^{s-1}\frac{\partial L_{i_1 i_2\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}$$

مرز ابرفضای $r+1$ بعدی S_{r+1} را که در S_n نشانده شده و باز است، با S_r نمایش می‌دهیم، و $\alpha_{i_1 i_2\ldots i_{r+1}}$ نمایش کسینوس‌های هادی S_{r+1}، و $\beta_{i_1 i_2\ldots i_r}$ نمایش کسینوسهای هادی S_r هستند.

بسط قضیهٔ استوکس، عبارت است از فرمول زیر

$$\int_{S_{r+1}}\sum_i M_{i_1i_2\ldots i_{r+1}}\alpha_{i_1i_2\ldots i_{r+1}}dS_{r+1}=\int_{S_r}\sum_i L_{i_1i_2\ldots i_r}\beta_{i_1i_2\ldots i_r}dS_r$$

اکنون حالت $r=1$ و $n=3$ را امتحان می کنیم تا ببینیم که این نتیجه چگونه قضیهٔ استوکس را تعمیم می‌دهد. دراین حالت، سه تابع L_1، L_2، L_3 از نقاط فضای ۳ بعدی در دست‌اند. پس توابع M به‌صورت زیر معین می‌شوند

$$M_{12}=\frac{\partial L_2}{\partial x_1}-\frac{\partial L_1}{\partial x_2},\ M_{31}=\frac{\partial L_1}{\partial x_3}-\frac{\partial L_3}{\partial x_1},\ M_{23}=\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_3}$$

چون $r=1$، S_r خمی است که به وسیلهٔ سه تابع $x_1(u)$، $x_2(u)$، و $x_3(u)$ معین می‌شود. بنابراین

$$\Delta=\sqrt{\left(\frac{dx_1}{du}\right)^2+\left(\frac{dx_2}{du}\right)^2+\left(\frac{dx_3}{du}\right)^2}$$

و $ds=\Delta du$. پس به‌ازای $i=1,2,3$

$$\beta_i=\frac{\frac{dx_i}{du}}{\Delta}\quad \text{و}\quad \beta_i\,ds=\frac{dx_i}{du}ds$$

α_{12}، α_{31}، و α_{23} کسینوسهای زوایای بالا هستند. بنابراین قضیه به‌صورت زیر عرضه می‌شود

$$\int_{S_2}\left(\frac{\partial L_3}{\partial x_2}-\frac{\partial L_2}{\partial x_3}\right)\alpha_{23}+\left(\frac{\partial L_1}{\partial x_3}-\frac{\partial L_3}{\partial x_1}\right)\alpha_{31}+\left(\frac{\partial L_2}{\partial x_1}-\frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right)\alpha_{12}dS_2$$
$$=\int_{S_1}\left(L_1\frac{dx_1}{du}+L_2\frac{dx_2}{du}+L_3\frac{dx_3}{du}\right)du$$

که دقیقاً قضیهٔ استوکس است. محاسبهٔ مشابهی نشان می‌دهد که حالت $r=2$، $n=3$ قضیهٔ دیورژانس را نتیجه خواهد داد. و با در نظر گرفتن $r=1$، $n=2$، قضیهٔ گرین حاصل می‌شود. حالت $r=n-1$ دقیقاً تعمیمی است که خود اوستروگرادسکی ارائه داده است.

و نیز توجه کنید که اگر α_{ij} را با $(\partial(x_i,x_j)/\partial(u,v))/\Delta$ و dS_2 را با $\Delta du\,dv$ و $(\partial(x_i,x_j)/\partial(u,v))\,du\,dv$ را با $dx_i dx_j$ عوض کنیم واگر قرار دهیم $x_1=x$، $x_2=y$، $x_3=z$، صورت آشنای دیگری از قضیهٔ استوکس به‌دست می‌آید

$$\int_{S_2}M_{23}\,dy\,dz+M_{31}\,dz\,dx+M_{12}\,dx\,dy$$
$$=\int_{S_1}L_1\,dx+L_2\,dy+L_3\,dz$$

1. Vito Volterra

به‌همین ترتیب، قضیهٔ دیورژانس به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{S_2} L_{23}\, dy\, dz + L_{31}\, dz\, dx + L_{12}\, dx\, dy$$
$$= \int_{S_3} \left(\frac{\partial L_{23}}{\partial x} + \frac{\partial L_{31}}{\partial y} + \frac{\partial L_{12}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

اگرچه ولترا قضیهٔ خود را در مقالات متعددی در ارتباط با مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل به‌کارمی گیرد، اثباتی ازاین نتیجه ارائه نمی‌دهد؛ و فقط می گوید که این نتیجه "به‌آسانی به‌دست می‌آید."

با مطالعهٔ کار ولترا روشن می‌شود که ساده‌سازی نمادهای ولترا[1] بسیار سودمند است. در آستانهٔ این قرن، ریاضیدانان چندی بدین‌کار همت گماشتند. هانری پوانکاره در اثر خود موسوم به روشهای جدید مکانیك سماوی [۱۸] به‌سال ۱۸۹۹ همان تعمیم ولترا را به‌صورت بسیار مختصرتری ذکر می کند

$$\int \sum A\, d\omega = \int \sum \sum_k \pm \frac{dA}{dx_k}\, dx_k\, d\omega$$

دراینجا، انتگرال سمت چپ روی مرز $r-1$ بعدی یك‌خمینهٔ r بعدی در فضای nبعدی، و انتگرال سمت راست روی‌تمامی خمینه محاسبه می‌شود. بنابراین، A تابعی از n متغیر است و $d\omega$ حاصلضرب $r-1$ تا dx_i، ومجموع فوق روی همهٔ چنین‌حاصلضربهایی محاسبه می‌شود. صورتی از قضیه که پوانکاره ارائه‌کرده، فشرده‌تر از شکل ولتراست چراکه کسینوسهای هادی در داخل عبارات $d\omega$ جذب شده‌اند. (برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۹] مراجعه‌کنید.) پوانکاره مانند ولترا در این اثر و نیز دردیگر آثاری که در این دوره نوشت، اساساً به‌شرایط انتگرالپذیری‌چیزهایی که امروزه صورتهای دیفرانسیل‌نامیده می‌شوند، علاقه‌مند بود یعنی به‌حالتی که یك صورت ω، یك دیفرانسیل‌کامل‌است.

ریاضیدانی که بیش‌ازهمه مسؤول روشن‌سازی مفهوم یك صورت دیفرانسیل است، الی‌کارتان می‌باشد. وی در مقالهٔ اساسی خودبه‌سال ۱۸۹۹[۳]، ابتدا "عبارت دیفرانسیل" رابه‌صورت یك عبارت نمادی تعریف می‌کند که به‌وسیلهٔ تعدادی متناهی جمع و ضرب روی n دیفرانسیل dx_1، dx_2، . . . ، dx_n و توابع مشخصی از متغیرهای x_1، x_2، . . . ، x_n به‌عنوان ضریب، معین می‌شود. اوعبارت دیفرانسیل درجهٔ اول $A_1 dx_1 + A_2 dx_2 + \cdots + A_n dx_n$ رایك"عبارت پفاف" می‌نامد.

کارتان قواعدی برای محاسبه با این‌عبارات بیان می کند. به‌ویژه قاعدهٔ او برای "محاسبهٔ" یك عبارت دیفرانسیل‌ایجاب می کندکه مقدار $A dx_{m_1}\, dx_{m_2} \ldots dx_{m_n}$ به صورت حاصلضرب A در دترمینان $|\partial x_{m_j}/\partial \alpha_i|$ باشدکه در آن xها توابعی از پارامترهای α_i هستند. آنگاه قواعد استاندهٔ محاسبه با دترمینانها ایجاب می کنند که اگرهریك از dx_iها تکرارشده باشد، مقدار برابر صفر است و اگر جابگشتی از dx_iها به کار رود تغییر علامت لازم است مشروط بر آنکه این جایگشت فرد باشد. کارتان، مثلاً، نتیجه می گیردکه

$$A\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -A\, dx_2\, dx_1\, dx_3$$

و یا

$$dx_1 dx_2 = -dx_2 dx_1$$

او سپس تعویض متغیر را مورد بحث قرار می‌دهد؛ اگر x_1، x_2، . . . ، x_n توابعی از y_1، y_2، . . . ، y_n باشند، آنگاه به ازای $i = 1, 2, \ldots, n$

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 + \cdots + \frac{\partial x_i}{\partial y_n} dy_n$$

بنابراین، مثلاً در حالت $n=2$ داریم

$$dx_1\, dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)}\, dy_1\, dy_2$$

ازطرف دیگر با قبول چنین فرمولی برای تعویض‌متغیر، اجباراً قاعدهٔ کلی $dx_i dx_j = -dx_j dx_i$ به‌دست می آید.

و بالاخره، کارتان "عبارت مشتق" یك صورت دیفرانسیل درجهٔ اول $\omega = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2 + \cdots + A_n\, dx_n$ رابه‌صورت عبارت درجه‌دوم: $\omega' = dA_1\, dx_1 + dA_2\, dx_2 + \cdots + dA_n\, dx_n$ تعریف می کندکه البته در آن

$$dA_i = \Sigma_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j} dx_j$$

در حالت $n=3$، با در نظر گرفتن قواعد بالا و با فرض $\omega = A_1\, dx + A_2\, dy + A_3\, dz$ به‌دست می‌آوریم

$$\omega' = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) dy\, dz + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) dz\, dx$$
$$+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) dx\, dy$$

از مقایسهٔ این با مثالی که در بحث کار ولترا آوردیم، روشن می‌شود که مقادیرM_{23}، M_{31}، و M_{12} ولترا دقیقاً ضرایب ω'کارتان هستند.

کارتان در [۳] از ارتباط عبارات دیفرانسیل خود با قضیهٔ استوکس بحثی نمی کند؛ با این وجود، در اولین سالهای قرن بیستم صورت تعمیم یافتهٔ قضیهٔ استوکس به شکلی که اساساً توسط پوانکاره ارائه شد، موردنظر و استفادهٔ مؤلفان زیادی قرارگرفت،گرچه به‌نظر نمی‌رسدکه اثباتی از آن انتشار یافته باشد.

تا سال ۱۹۲۲کارتان کار خود را روی عبارات دیفرانسیل در [۳] بسط داده بود. در اینجاست که او برای اولین بار اصطلاحات "صورت دیفرانسیل برونی" و"مشتق برونی" را به‌کار می برد. اوبه‌ویژه با محاسبهٔ مشتق یك صورت درجهٔ اول (همچنان که ما در بالا انجام دادیم) به این نکته توجه می کند که در حالت $n=3$ برطبق قضیهٔ استوکس داریم $\int_C \omega = \iint_S \omega'$. در اینجا C خم مرزی رویهٔ S است. (البته، این نتیجه دقیقاً نتیجهٔ ولترا درهمین حالت خاص‌است.) بعد مشتق برونی‌هرصورت دیفرانسیل $\omega = \sum A\, dx_i dx_j \ldots dx_l$ را به شکل $\omega' = \sum dA\, dx_i dx_j \ldots dx_l$ تعریف می کند (که dA به همان شکل بالاست) و مشتق یك صورت درجهٔ دوم Ω در حالت خاص $n=3$ را به دست می‌آورد و نشان می‌دهد که برای یك متوازی‌السطوح P با مرز S، داریم $\iint_S \Omega = \iiint_P \Omega'$. با محاسبهٔ ساده‌ای روشن می‌شود که این قضیهٔ دیورژانس است و باید بپذیریم که کارتان از صحت آن در حالتهای کلیتر نیز اطلاع داشته است. با این وجود، وی هنوز برای بیان کلیترین شکل نتیجه‌آمادگی نداشت.

نماد "d" برای مشتق برونی در۱۹۰۲ به‌وسیلهٔ تئودور ددوندر[1] در[۶] به‌کار گرفته شد اما دیگرمورد استفاده قرارنگرفت تا آنکه در سال۱۹۳۴ به‌وسیلهٔ اریش کلردراثرش موسوم به‌مدخلی برنظریهٔ دستگاه معادلات دیفرانسیل [۱۱] مجدداً معرفی شد. نمادگذاری او اندکی متفاوت با نمادگذاری امروزی ماست؛ اما به‌شکلی که نزدیکتر به‌شکل امروزی است، به وسیلهٔ کارتان در درسهایی که در پاریس به سال ۱۹۳۶–۱۹۳۷ ارائه‌کرد به کارگرفته شد. (این درسها تحت عنوان

1. Theodore DeDonder

دستگاههای دیفرانسیلهای برونی وکاربردهای هندسی آنها [۴] در ۱۹۴۵ انتشار یافت.) در اینجا کارتان پس از بحث در تعریف صورت دیفرانسیل ω و مشتق آن $d\omega$، اشاره می کند که هر سه قضیهٔ فوق (که او آنها را به ترتیب به‌اوستروگرادسکی، کوشی-گرین و استوکس نسبت می‌دهد) حالات خاصی از $\int_A d\omega = \int_C \omega$ هستند که در آن، C مرز A است. مشخصاً قضیهٔ گرین حالت خاصی است که در آن، ω یك صورت درجهٔ اول در فضای دو بعدی است؛ قضیهٔ استوکس حالت خاصی است که، ω یك صورت درجهٔ اول در فضای سه‌بعدی است؛ وقضیهٔ دیورژانس حالت خاصی است کــه ω یك صورت درجهٔ دوم در فضای سه بعدی است. بالاخره، کارتان می گوید که برای هر ناحیهٔ $P+1$ بعدی A با مرز P-بعدی C می‌توان فرمول کلی استوکس را ثابت کرد

$$\int_C \omega = \int_A d\omega$$

(برای ملاحظهٔ مثالهایی از کاربرد این قضایـا، می‌توان به هر کتاب حساب دیفرانسیل وانتگرال پیشرفته، مثلاً [۱] یا [۲۴] مراجعه کرد. برای اطلاعات بیشتر در مورد صورتهای دیفرانسیل به [۷] مراجعه کنید.)

ظهور در کتابهای درسی

نکتهٔ آخری که شایان ذکر است، نحوهٔ ظهور این قضایا در کتابهای درسی است. در دههٔ ۱۸۹۰ هرسه قضیهٔ فوق در بسیاری از کتابهای درسی آنالیز دیده می‌شدند. سومین قضیه همواره به استوکس نسبت داده می‌شد؛ مؤلفان فرانسوی و روسی گرایش به‌این داشتند که اولین قضیه را به اوستروگرادسکی منسوب کنند در حالی که دیگر مؤلفان معمولاً آن را به گرین یا گاوس نسبت می‌دادند؛ امروزه نیز وضع چنین است. به‌همین‌ترتیب، فرانسویان ریمان و بقیه گرین را صاحب دومین قضیه می‌دانند. قبل از انتشار کتاب کارتان در ۱۹۴۵، تقریباً تنها مؤلفی که آن را به کوشی منسوب می کرد ووگت بود [۲۶].

صورت تعمیم یافتهٔ قضیهٔ استوکس، که همان‌طور کـه گفته شد اولین‌بار در ۱۹۴۵ انتشاریافت، تنها در بیست سالهٔ اخیر در کتابهای درسی دیده می‌شود. اولین ظهور این قضیه احتمالاً در کتاب نیکرسون، اسپنسر، و استین‌رود چاپ ۱۹۵۹ [۱۴] بوده است.

ترجمهٔ حسین ترابی تهرانی

مراجع

1. Buck R. C., *Advanced Calculus*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York (1965).
2. Cartan E., "Sur certaines expressions différentielles et sur le problème de Pfaff," *Annales École Normale*, **16**(1899) 239-332; *Oeuvres*, Part II, vol. I, 303-397.
3. Cartan E., *Leçons sur les Invariants Intégraux*, chap. VII, Hermann, Paris (1922).
4. Cartan E., *Les Systèmes Différentiels Extérieurs et leurs Applications Géométriques*, Hermann, Paris (1945).
5. Cauchy A.,"Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée," *Comptes Rendus*, **23** (1846) 251-255; *Oeuvres* , 1re série, Tome X, 70-74.
6. DeDonder T., "Etude sur les invariants intégraux," *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **16** (1902) 155-179.
7. Flanders H., *Differential Forms*, Academic Press, New York (1963).
8. Gauss C. F., "Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo novatractata," *Commentationes Societatis Regiae Scientiarium Gottingensis Recentiores*, vol. II (1813); *Werke*, vol 5, 1-22.
9. Green G., An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, London (1828); *Green's Mathematical Papers*, 3-115.
10. Hankel H., *Zur Allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten*, Dieterische Univ. Buchdruckerei, Göttingen (1861).
11. Kähler E., *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen*, Leipzig (1934).
12. Maxwell C., Letter to Stokes in *G. Stokes, Memoir and Scientific Correspondence*, vol. II, ed. by J. Larmor, Cambridge (1907) 31.
13. Maxwell C., *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Oxford (1873) vol. I.
14. Nickerson H., Spencer D., Steenrod N., *Advanced Calculus*, Van Nostrand, Princeton (1959).
15. Ostrogradsky M., "Démonstration d'un théorème du calcul intégral," Pub. in Russian in *Istoriko-Matematicheskie Issledovania*, vol. XVI (1965) 49-96.
16. Ostrogradsky M., "Note sur la théorie de la chaleur," *Mémoires de L'Acad. Imp. des Sciences de St.Petersburg*, ser. 6, vol. I (1831) 129-133.
17. Ostrogradsky M., "Sur le calcul des variations des intégrales multiples," *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, vol. XV (1836) 332-354.
18. Poincaré H., *Les Méthodes Nouvelles de la Mécaniques Céleste*, vol. III, 10, Gauthier-Villars, Paris (1899); Dover, N.Y. (1957).
19. Poisson S., "Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques," *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences de l'Institut de France*, vol. VIII (1829) 357-571.
20. Riemann B., "Grundlagen für eine allgemeine theorie der functionen einer veränderlichen complex grösse," Gottingen (1851); *Werke*, 3-48.
21. Sarrus F., "Mémoire sur les oscillations des corps flottans," *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*(Nismes),vol. XIX (1828) 185-211.
22. Stokes G., *Mathematical and Physical Papers*, **5**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1905) 320.
23. Tait P., "On Green's and other allied theorems," *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, (1869-70) 69-84.
24. Taylor A., Mann W., *Advanced Calculus*, 2nd. ed., Xerox, Lexington (1972).
25. Thomson W., Tait P., *Treatise on Natural Philosophy*, vol. 1, Oxford (1867).
26. Vogt H., *Éléments de Mathématiques Supérieures*, Paris (1925).
27. Volterra V., "Delle variabili complesse negli iperspazi," *Rendiconti della R. Accad. der Lincei*, ser IV, vol.V(1889) 158-165; *Opere*, vol. I, 403-411.
28. Yushkevich A., *Istoriya Matematiki v Rossii do 1917 goda*, Moscow(1968) 290.

• Katz Victor J., "The history of Stokes' theorem," *Mathematics Magazine*, (3) **52** (1979) 146.

• ویکتور کاتس، دانشگاه ناحیهٔ کلمبیای آمریکا