بینهایت کوچکها به مدرسه باز می‌گردند*

ویکتور هارنیک

۱. آنالیز لایب‌نیتس

حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) را لایب‌نیتس و نیوتن، به‌طور مستقل، در حدود سالهای ۱۶۷۰ میلادی کشف کردند. کار آنها که بر پایهٔ کارهای پیشینیان بلافصلشان و همچنین کار ریاضیدانان بیشتر از آنها (که تاریخچهٔ آن دست‌کم تا زمان ارشمیدس به‌عقب بر می‌گردد)، قرار داشت، اثر عظیمی به جا گذاشت. واژگان و نمادهای لایب‌نیتس باقی ماندند، و هنوز هم به‌طور گسترده‌ای به‌کار برده می‌شوند. رهیافت او به اجمال چنین بود:

لایب‌نیتس می‌خواست جنبه‌های «موضعی» یا «لحظه‌ای» رفتار توابع را، یعنی پدیده‌هایی را که در تنها یك نقطه از مکان یا زمان اتفاق می‌افتند، تحلیل کند. به این منظور او گونهٔ جدیدی از اعداد، یعنی اعداد «بینهایت کوچك» را اختراع کرد ــ اعدادی که از لحاظ قدرمطلق از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر بودند و با این حال باز مخالف صفر فرض می‌شدند. او این اعداد را بینهایت کوچکها(ی ناصفر) نامید. لایب‌نیتس به‌یاری این اعداد مشتق تابعی چون $f(x)$ را چنین تعریف کرد

$$f'(x)=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

که در آن dx بینهایت کوچك ناصفری است که تغییری بسیار اندك، یعنی تغییری بینهایت کوچك را در x نشان می‌دهد. (البته dx با Δx که معمولاً برای نمایش یك نمو متناهی در x به کار می‌رود، به‌کلی فرق می‌کند. خود لایب‌نیتس نماد «$f'(x)$» را به‌کار نبرد. این نماد را بعدها لاگرانژ ابداع کرد.)

لایب‌نیتس توصیف پرآب‌وتابی از بینهایت کوچکها به‌عنوان کمیتهایی که در مقایسه با اعداد حقیقی مثبت معمولی (با آن گونه که امروزه آنها را می‌نامند، اعداد حقیقی مثبت استانده)، قابل اغماض هستند، به‌دست داد ــ تقریباً به‌همان معنایی که مثلاً قطر یك توپ در مقایسه با قطر زمین، یا قطر زمین در قیاس با قطر کیهان، قابل اغماض است.

برای آنکه بتوان با این اعداد جدید کار کرد، لایب‌نیتس اصلی بسیار کلی، اما نه چندان روشن، به‌نام «اصل پیوستگی» وضع کرد. آنچه این اصل حکم می‌کرد، به زبان ساده تقریباً چنین بود که بینهایت کوچکها در واقع به‌طور خارق‌العاده‌ای کوچك هستند، اما برکنار از این ویژگیشان کاملاً همانند اعداد حقیقی معمولی رفتار می‌کنند. تمثیلی که ذکر کردیم، این نظر را تأیید می‌کند. درحقیقت اعدادی که برای توصیف اشیای کوچك چون توپها به‌کار می‌روند، دقیقاً از همان قوانینی پیروی می‌کنند که بر اعداد بزرگ منتسب به قطر سیارات یا حتی اعداد بزرگتر که ابعاد کیهان را بیان می‌کنند، حکمفرما هستند. باید تصدیق کرد که گرچه این اصل مبهم است، اما لایب‌نیتس آن را با مهارتی تمام به‌کار می‌برد.

۲. سرنوشت بینهایت کوچکها

از همان آغاز، احساسات ناخوشایندی دربارهٔ بینهایت کوچکها پدید آمد و نضج گرفت. خود لایب‌نیتس آنها را مولود «افسانه‌ای به‌درد بخور» می‌نامید. نیوتن خیلی زود آنها را رها کرد و ترجیح داد مشتق را برحسب «سرعت لحظه‌ای» (که به هیچ‌وجه مفهوم روشنتری نیست) تعریف کند. برعکس، هوپیتال که نخستین درسنامهٔ حسابان را نوشت، از آن دو با حرارت‌تر بود و واقعاً بینهایت کوچکها را باور داشت. اما همروزگارانش در این شوروشوق وشیفتگی با او هم رأی نشدند. در واقع اعداد لایب‌نیتس در معرض انتقادات بسیار خشنی قرار گرفتند. نامدارترین و بی‌پرواترین مخالف بینهایت کوچکها اسقف برکلی بود که آنها را در اثر خود به سال ۱۷۳۴، آماج انتقادات بیرحمانه‌ای قرارداد. ایرادات او عمدتاً در این راستاها بود:

(الف) هیچ بینهایت کوچك ناصفری نمی‌تواند وجود داشته باشد، زیرا هرعددی که قدرمطلقش از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکتر باشد، باید برابر صفر شود.

(ب) اگر $f(x)=x^2$، آنگاه $f'(x)=2x$. حال آنکه $[f(x+dx)-f(x)]/dx=2x+dx$. چون این دو عبارت باید باهم برابر باشند، پس $2x=2x+dx$، یعنی $dx=0$، که با فرض ناصفر بودن dx متناقض است.

بینهایت کوچکها علی‌رغم ابهام منطقیشان، با موفقیت روزافزونی به‌کار برده شدند. پاره‌ای از ریاضیدانان برجسته نه تنها آنها را به‌کار می‌بردند، بلکه بیش از این، سخت می‌کوشیدند تا پایه‌ای منطقی برایشان فراهم کنند. در این راستا ما به نامهای لاگرانژ، دالامبر، بولتسانو و بیش از همه کوشی برمی‌خوریم. سهم کوشی در این تلاشها، داستان بس جالب و پیچیده‌ای دارد. او با بینهایت کوچکها به‌عنوان کمیتهای متغیری که به صفر می‌گرایند، برخورد

کرد. این برخورد حد را به صورت مفهومی بنیادی در آورد. (باید خاطر نشان کرد که توصیف کوشی از حد، دقیقاً با تعریف آشنا و نوین اپسیلون-دلتایی یکی نیست.) بعدها آشکار شد که تلاش کوشی برای جلب اعتماد بیشتر به بینهایت کوچکها چندان قرین موفقیت نبوده است؛ در واقع کوششهای او تأثیری کاملاً وارونه برجای نهاد. این تأثیر ناخوشایند را می‌توان به‌خوبی از خلال ماجرایی که ذکر می کنیم ، احساس کرد. کوشی در سال ۱۸۲۱ بینهایت کوچکها را در اثبات قضیه‌ای (با این مضمون که مجموع یك سری نقطه به نقطه همگرا از توابع پیوسته، یقیناً تابعی است پیوسته) به‌کار برده بود. بسیاری کسان مدعی شدند که قضیه نادرست است، اما کوشی سرسختانه از آن دفاع می کرد . مباحثه در این مورد تا پایان زندگانی او ادامه یافت. در ۱۸۵۳ چهار سال پیش از مرگش، در واکنش نسبت به مثال ناقضی که آبل به سال ۱۸۲۶ ارائه کرده بود، مقاله‌ای منتشر کرد که در آن ضمن پافشاری بر درستی قضیه، برخی توضیحات روشنگرانه آمده بود. ظاهراً ریاضیدانان نمی‌توانستند تصویر ذهنی خاصی را که از بینهایت کوچکها داشتند، به همدیگر انتقال دهند. (خوانندهٔ علاقه‌مند می‌تواند در این باره به [۳] یا [۴] رجوع کند؛ با مطالعهٔ این مراجع، او در خواهد یافت که شك بین اینکه آیا کوشی واقعا اشتباهی کرده است یا آنکه نظرش را بد می‌فهمیده‌اند، هنوز برطرف نشده است.)

نتیجهٔ تمام این وقایع به‌غایت شگفت‌آور است. در سال ۱۸۷۲ وایرشتراس مفهوم حد را بی آنکه حتی نامی از بینهایت - کوچکها به‌میان آورد ، تعریف کرد. گرچه کمی تناقض‌آمیز به‌نظر می‌آید، اما در واقع این توصیف کوشی از حد بود که زمینه‌را برای تعریف وایرشتراس، تعریفی که امروزه‌قبول عام یافته‌است، آماده کرد. پس از آن وایرشتراس مفهوم حد را برای تعریف دیگر مفاهیم اساسی- پیوستگی و مشتق - به‌کار برد. پیامد ناگزیر این تحولات این بود که بینهایت کوچکها به‌عنوان ساخته‌های منطقاً پذیرفتنی، به‌طور کامل به‌کنار نهاده شوند.

مرحلهٔ مهم دیگر در سرگذشت بینهایت کوچکها، در ۱۹۶۰ یعنی تقریباً ۳۰۰ سال پس از ابداع آنها توسط لایب‌نیتس، به‌وقوع پیوست. در این سال آبراهام رابینسون[1]، «آنالیز نااستاندهٔ» خود را که در کنار سایر ثمرات، همچنین توجیه منطقی بایسته‌ای هم برای بینهایت کوچکها فراهم می آورد، منتشر کرد. کاری که سرانجام از پس سالیان مدید، وجود این اعداد را «موجه» جلوه داد.

۳. کاربرد بینهایت کوچکها در آموزش و پژوهش

استفاده از بینهایت کوچکها هرگز کاملاً وانهاده نشد. حتی تا امروز هم فیزیکدانان و ریاضیدانان کاربردی (کسانی که البته هرگز رهیافت نوین رابینسون را نیاموخته‌اند) ، به‌طور گسترده‌ای آنها را به‌کار می‌برند. حدود سی سال پیش در بسیاری از دانشکده‌ها هنوز هم از بینهایت کوچکها برای آموزش حسابان به‌دانشجویان مهندسی استفاده می‌شد. حتی امروزه هم استادان فیزیك از «جزء سطح dA» یا «جزء طول dl» (از مثلاً یك رسانای الکتریکی) و مانند اینها سخن می گویند. شاهد خوبی برای پذیرش ناخودآگاه بینهایت کوچکها در ضمیر ریاضیدانان، این است که حتی در کتابی چون حساب دیفرانسیل و انتگرال لانداو- نمونهٔ اعلایی از دقت ریاضیات قرن بیستم- از نماد $\lim_{x \to a} f(x)$ استفاده می‌شود. ظاهراً این نماد، این دیدگاه را باز می‌تاباند که حد «آخرین مقداری» است که f «در لحظه‌ای که x به a می‌رسد» اختیار می کند.

تنها در سالهای اخیر شاهد پرورش نسل کاملی از معلمان ریاضیات بوده‌ایم که حتی نامی هم از بینهایت کوچکها نشنیده‌اند. گرایش غالب در دانشگاهها وحتی در دبیرستانها این است که از طرح مفاهیم «نادقیق» چون بینهایت کوچکها پرهیز شود. طبیعی است انتظار داشته باشیم که با کشف رابینسون، بینهایت کوچکها به‌مدارس باز گردند. اما بیشتر ریاضیدانها می‌پندارند که کار رابینسون چنان پیچیده وفنی است که نمی‌توان به‌هیچ‌عنوانی آن‌را در آموزش نوآموزان ریاضیات عالی به‌کار برد

کایزلر[1] ، ریاضیدان برجستهٔ معاصر ، از کسانی است که نظری خلاف این دارند . در ۱۹۷۶ کایزلر درسنامه‌ای در حساب بینهایت کوچکها [۱]، به‌پیوست یك راهنمای مدرسین [۲] برای آن منتشر کرد. او در این کتاب نشان داد که چگونه می‌توان بخش اساسی کشف رابینسون را به‌زبانی ساده بیان کرد و از آن در آموزش حسابان بهره جست. این کتاب در چند دانشگاه به‌طور آزمایشی تدریس شده است. (برای آگاهی از نتایج این کار، به گزارش [۵] مراجعه کنید.) وجود نوشتار حاضر، مرهون درسنامهٔ کایزلر است.

۴. چگونه از بینهایت کوچکها در دبیرستان استفاده کنیم

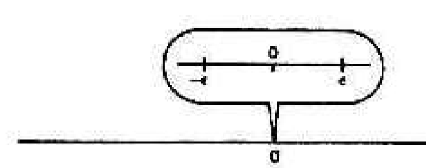
رهیافت مبتنی بر بینهایت کوچکها به‌حسابان‌را باید در جایی به‌کار برد که موضوع برای نخستین بار تدریس می‌شود، یعنی در دبیرستان. این آموزش مقدماتی را می‌توان با بهره‌گیری از روش کایزلر در سطحی بسیار شهودی انجام‌داد. البته برای عملی کردن این اندیشه، هنوز کارهای بسیار دیگری باید انجام شود، کارهایی از قبیل نوشتن کتابهای مقدماتیتر مناسب و آموزش دبیران. من می‌خواهم در اینجا به‌طور محدود روش آغاز آموزش بینهایت کوچکها در کلاس درس را مطرح کنم.

دبیر باید ابتدا این نکته را یادآوری کند که مفهوم عدد بارهاو بارها در مدرسه، با معرفی کسرها، اعداد منفی و اعداد گنگ (که این آخری برای سنجش نسبت درازای پاره‌خطها لازم است)، گسترش داده شده است. پس از آن او می‌تواند نوع جدیدتری از اعداد - یعنی بینهایت کوچکها (ی ناصفر) که مخالف صفرند ولی از لحاظ قدرمطلق از هرعدد حقیقی مثبتی کوچکترند - را معرفی کند. آنها را می‌توان با استفاده از یك ترفند کایزلر، به‌شیوه‌ای بس ساده و ملموس تصویر کرد. فرض کنیم میکروسکوپی را بر مبدأ، یعنی نقطهٔ ۰ روی محور اعداد، قرارداده باشیم. در حالی که چشم غیرمسلح تصویری ماکروسکوپی مانند آنکه در شکل ۱ آمده می بیند، آنچه از نقطهٔ ۰ تنها زیر میکروسکوپ دیده می‌شود چیزی است به‌کلی متفاوت.

شکل ۱

در مرکز یك «هستهٔ درخشان» خواهیم دید که آن‌را با صفر «واقعی» یکی می گیریم . در هردوطرف این هسته بسیاری اعداد دیگر به‌چشم خواهند خورد که، باز هم تکرار می کنیم، برای چشم غیرمسلح همهٔ آنها بر نقطهٔ صفر منطبق‌اند، اما زیر میکروسکوپ از آن متمایزند (شکل ۲). همهٔ آن اعدادی که زیر میکروسکوپ بر گرد نقطهٔ ۰ دیده می‌شوند، بینهایت کوچك هستند؛ خوده (یعنی «هستهٔ درخشان»)

1. Abraham Robinson



شکل ۲

نیز یك‌بینهایت‌کوچك است و بقیهٔ اعداد بینهایت‌کوچکهای نـاصفر هستند. همـان گونه که از تصویر میکروسکوپی پیداست، آنها دقیقاً همان رفتار اعداد ماکروسکوپی‌را دارند. برخی ازآنهامثبت وبرخی منفی هستند. آنها را می‌توان باهم جمع و درهم ضرب کرد، و هریك وارونی (جمعی) دارد. پس اگـر ε یك بینهـایت‌کوچك بـاشد، $2\varepsilon=\varepsilon+\varepsilon$، ε^2، و $-\varepsilon$ نیز همگی چنین خواهند بود.[1] حتی می‌توان هر بینهایت‌کوچك نـاصفری را به یك عدد معمولی چون ۲ افزود و عددی چون $2+\varepsilon$ به‌دست‌آورد. اینهـا هم‌گونهٔ جدیدی از اعـداد هستند، هرچند دیگر بینهـایت‌کوچك نیستند. اینها کجـایند؟ چگونه می‌توان‌آنهارا دید؟ حدس‌زدن پاسخ این‌پرسش چندان دشوار نیست. باچشم غیرمسلح، $2+\varepsilon$ را منطبق بر ۲ می‌بینیم، اما با میکروسکوپی که بر ۲ متمرکز شده بـاشد می‌توان آن‌را متمایز از ۲ مشاهده‌کرد (شکل ۳).

شکل ۳

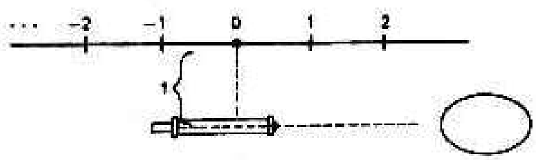
بیایید اعداد معمولی «ماکروسکوپی» را اعداد استانده بنامیم (اینهاهمان اعدادحقیقی‌متعارف‌هستند).اغلب به‌جای«اعداد استانده» آنها را «اعداد حقیقی استانده» خواهیم خواند.

پس‌به‌این نتیجه می‌رسیم‌که هرعدد استانده چون a با بینهایت عدد از نوع جدید احاطه شده است. همهٔ این اعداد از دید ماکرو-سکوپی بر a منطبق‌اند، اما زیرمیکروسکوپ از آن متمایزند.

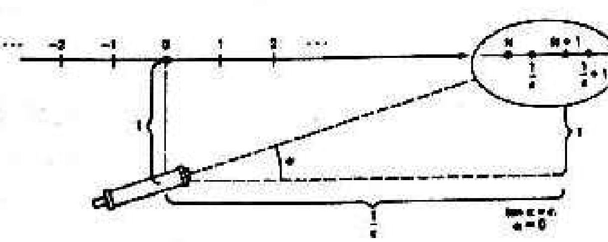
باز عدد استاندهٔ ۲ و عدد جدید نااستاندهٔ $2+\varepsilon$ را، که در آن ε بینهایت کوچك نـاصفری است، در نظر می‌گیریـم. به وضوح $2+\varepsilon\neq 2$، اما این نامساوی تنها از دیدگاه میکروسکوپی برقرار است، حال آنکه از دیدگاه ماکروسکوپی ۲ و $2+\varepsilon$ مساوی هستند. پس دونوع تساوی (یا به‌عبارت دیگر، دورابطهٔ‌تساوی متمایز) داریم: تساوی میکروسکوپی، یعنی همانـی مطلق‌کـه آن را بـا نماد «=» نمایش می‌دهیم؛ و تساوی ماکروسکوپی که بین اعدادی برقرار است که با چشم غیرمسلح برهم منطبق دیده می‌شوند. مـا این تساوی نوع اخیر را با «$\approx$» (نمادگـذاری رابینسون) نشان خواهیم داد. پس $2+\varepsilon\approx 2$ (بخوانید: $2+\varepsilon$ نزدیك به ۲ است)، اما $2+\varepsilon\neq 2$.

ε بینهایت‌کوچك است اگـر و تنها اگـر $\varepsilon\approx 0$. این تساوی ماکروسکوپی بـه هیچ وجه نامساوی میکروسکوپی $\varepsilon\neq 0$ را نقض نمی‌کند. خـود ۰ تنها بینهایت کوچك استانـده است. به‌طورکلی، $a\approx b$ (a نزدیك به b است)، اگر و تنها اگر $a-b$ بینهایت‌کوچك باشد. پس‌به‌ازای اعداد استاندهٔ a و b، رابطهٔ $a\approx b$ هم‌ارز $a=b$ است. امابه‌ازای هر a و bی دلخواه، ممکن است $a\approx b$ و درعین‌حال $a\neq b$.استفاده‌ازاین‌دومفهوم تساوی انتقادات اسقف‌برکلی را برطرف می‌کند. دراین‌باره باید خاطرنشان‌کرد کـه لایب‌نیتس و هوپیتال هم آشکارا از تمایز این دوگونه تساوی نیك‌آگاه بودند، اما هرگز این تمایز را به‌گونه‌ای نمادی مشخص نکردند.

اگر ε بینهایت‌کوچك مثبتی باشد، می‌توان از وارون (ضربی) آن $1/\varepsilon$ سخن گفت. این وارون «عدد» مثبتی خواهد بود بزرگتر از هرعدد حقیقی استانـده. چگونـه می‌تـوان آن را دید؟ خوب، معلوم است دیگر، بایك تلسکوپ! تلسکوپی را تصور کنید که موازی محور اعداد وبه فاصلهٔ یك واحـد ازآن قـرارگرفته باشد. دراین صورت چیزی درمیدان دیدآن قرار نخواهد داشت (شکل ۴). حال تلسکوپ رابه‌اندازهٔ یك‌زاویهٔ‌بینهایت‌کوچك ناصفر α به‌طرف‌محوربچرخانیم. گرچه تلسکوپ و محور اعداد هنوز «از دید ماکروسکوپی» موازی به‌نظر می‌رسند،«از دیـد میکروسکوپی» چنین نیستند و اگر زاویهٔ α به‌گونهٔ مناسب انتخاب شده باشد، تلسکوپ پاره‌خطی به مرکز $1/\varepsilon$ را نشان خواهـد داد (شکل ۵). واضح است‌که انتخاب مناسب α، یعنی انتخاب αیی‌که به‌ازای آن رابطهٔ $\tan\alpha=\varepsilon$ برقرار باشد.



شکل ۴



شکل ۵

اعدادی را کـه با تلسکوپ می‌توان دیـد همهٔ اعداد مثبت و بینهایت بزرگ نااستانده هستند، اما از دیگر جنبه‌ها قطعه خطی که دیده می‌شود هیچ تفاوتی با بقیه ندارد. پس $1/\varepsilon$ باید جایی بین دو عدد صحیح بینهایت بزرگ و نـااستاندهٔ N و $N+1$ بـاشد (البته ممکن است $N=1/\varepsilon$).

اعداد استانده و نااستانده باهم مجموعهٔ اعداد ابرحقیقی را تشکیل می‌دهند. آنها را می‌توان بەدو دستهٔ کلی تقسیم کرد:

---

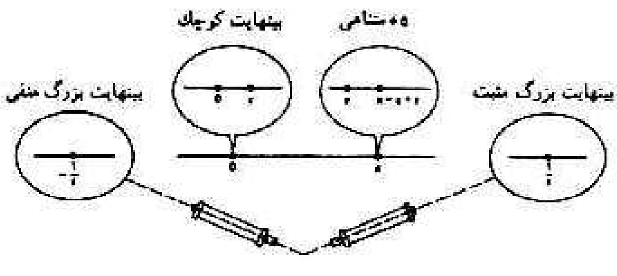
۱. این‌گونه توصیف بینهایت‌کوچکها بسیار جذاب است، زیرا بر پـایهٔ مفـاهیمی بنا شده است‌که ازجهـان فیزیکی آشنا برای دانش‌آموز قرن بیستم وام‌گرفته شده‌اند. اندیشهٔ اینکه آنچه در نگاه اول نقطهٔ واحدی‌می‌نماید، وقتی‌که ازنزدیك وبا ابزار دقیق‌تری به‌آن‌نگریسته شود، ممکن است ساختـار پرپیچیده‌ای داشته بـاشد، دیگر امروزه نباید هیچکس را به‌شگفتی وادارد. این‌را هم بیفزاییم‌که استفاده از مفاهیم فیزیکی درآموزش مفـاهیم ریـاضی دامنهٔ گسترده‌ای دارد. مثلا توصیف یك‌خط راست به‌عنوان شکل یك‌ریسمان‌کشیده، مقایسهٔ نقطه‌ها با دانه‌های شن، یا یکی انگاشتن اعداد با نقطه‌های روی‌خط حقیقی، ویا یاری جستن از مفهوم ارتفاع یا دما برای توضیح مفهوم اعداد منفی و چیزهایی از این قبیل را می‌توان ذکرکرد.

(الف) **ابرحقیقیهای متناهی:** x یك ابرحقیقی متناهی است اگر و تنها اگر بـه‌ازای عدد حقیقی استاندهٔ مثبتی چون M، داشته باشیم $|x|<M$. پس x جایی درفاصلهٔ M و $-M$ روی خط اعداد حقیقی است. این‌واقعیت اساسی که کایزلر آن‌را «اصل موضوع بخش استانده» نامید، به‌بیان دقیق چنین است:

هر عدد ابـرحقیقی متناهی x، نزدیك یك عـدد حقیقی استاندهٔ a است.

واضح است کـه x نمی‌تواند نزدیك دوعـدد حقیقی استاندهٔ متمایز باشد. عدد استاندهٔ یگانه‌ای چون a که $x\approx a$، بخش استاندهٔ x، $\mathrm{st}(x)$، نامیده می‌شود. پس بـه‌ازای ابرحقیقیهای متناهی x و y، $x\approx y$ اگـر وتنها اگـر $\mathrm{st}(x)=\mathrm{st}(y)$ و x بینهایت کوچك است اگر و تنها اگر $\mathrm{st}(x)=0$.

(ب) **ابر حقیقیهای نامتناهی** کـه می‌توانند مثبت یـا منفی باشند. شکل ۶ گونه‌های مختلف اعداد ابرحقیقی را نمایش می‌دهد.



شکل ۶

هدف بعدی، آشنا کـردن دانش‌آموز با اعداد ابـرحقیقی از طریق واداشتن او بـه انجام عملهای مشخص برروی آنهاست. کتاب کایزلر به‌ویژه از این لحاظ بس سودمند است، چون تمرینهای متنوع بسیاری دارد.

نخست باید چند قاعدهٔ محاسبه‌ای ذکر شود:

(الف) بینهایت کوچك = { بینهایت کوچك + بینهایت کوچك
ابرحقیقی‌متناهی × بینهایت کوچك }

(ب) بینهایت بزرگ = { بینهایت بزرگ + بینهایت بزرگ
(هر دو مثبت یا هر دو منفی)
(۰≉متناهی) × بینهایت بزرگ }

(پ) متناهی = متناهی + متناهی

(۰≉متناهی) = (۰≉متناهی) × (۰≉متناهی)

(ت) بینهایت بزرگ = ۱ / بینهایت کوچك ناصفر

بینهایت کوچك ناصفر = ۱ / بینهایت بزرگ

۰≉متناهی = ۱ / ۰≉متناهی

توجه کنید: هیچ قاعده‌ای برای

بینهایت کوچك / بینهایت کوچك ،

بینهایت بزرگ × بینهایت کوچك ناصفر

یا

بینهایت بزرگ − بینهایت بزرگ

(که هر دو مثبت یا هر دو منفی) وجود ندارد. زیرا مثلاً اگـر $\varepsilon\approx 0$، $\varepsilon\neq 0$ آنگاه $\varepsilon^2/\varepsilon$، ε/ε و $\varepsilon/\varepsilon^2$، همگی به‌صورت بینهایت کوچك / بینهایت کوچك هستند، اما به‌ترتیب بینهایت کوچك، ۰≉متناهی، و بینهایت بزرگ هستند. از سوی دیگر (۰ = ۰ × بینهایت بزرگ) و ۱/۰ تعریف نمی‌شود.

حال دوتمرین حل کنیم.

تمرین اول: با فرض $\varepsilon,\delta\approx 0$، بخش استاندهٔ $(3+\varepsilon)/(2+\delta)$ را پیدا کنید.

حل: حدس می‌زنیم که $(3+\varepsilon)/(2+\delta)\approx 3/2$، و به‌سادگی دیده می‌شود که تفاضل

$$\frac{3+\varepsilon}{2+\delta}-\frac{3}{2}=\frac{2\varepsilon-3\delta}{2(2+\delta)}=(2\varepsilon-3\delta)\cdot\frac{1}{2(2+\delta)}$$

بنا به قواعدی که ذکر کردیم، بینهایت کوچك است.

نکته: این تمرین حالت خاصی است ازیك اصل کلی حاکی از اینکه اگر $a'\approx a$ و $b'\approx b$ (a و b متناهی هستند)، آنگاه

$$a'+b'\approx a+b, \qquad (1)$$

$$a'b'\approx ab, \qquad (2)$$

$$\frac{a'}{b'}\approx\frac{a}{b}\ (\text{با فرض } b\not\approx 0). \qquad (3)$$

برای تحقیق درستی این اصل کافی است قـرار دهیم $a'=a+\varepsilon$ و $b'=b+\delta$ و همانند مثال بالا عمل کنیم.

تمرین دوم: (دشوار). اگـر $x\approx 1$ امـا $x\neq 1$، بخش استاندهٔ $(x^2-1)/(x^2+x-2)$ چیست؟

حل: دانش‌آموز کارآزموده بلافاصله به‌این نکته توجه خواهد کرد که اگر $x\approx 1$، آنگاه

$$x^2-1\approx 1^2-1=0,$$

$$x^2+x-2\approx 1^2+1-2=0,$$

و از این رو با عبارتی به‌صورت بینهایت کوچك / بینهایت کوچك سروکار دارد؛ او تصدیق خواهد کرد که ایـن تمرین مشکل است. (البته این امکان هم وجوددارد که دانش‌آموزحتی متوجه بعضی ازدشواریهای این تمرین نشود) یك راه حل طبیعی این است که قرار دهیم $x=1+\varepsilon$، کـه $\varepsilon\approx 0$، وعبارات زیر را محاسبه کنیم:

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(1+\varepsilon)^2-1}{(1+\varepsilon)^2+(1+\varepsilon)-2}=\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{3\varepsilon+\varepsilon^2}$$
$$=\frac{2+\varepsilon}{3+\varepsilon}\approx\frac{2}{3}$$

یك راه حل هوشمندانه‌تر توجه به تساویهای زیر است

$$\frac{x^2-1}{x^2+x-2}=\frac{(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)}=\frac{x+1}{x+2}\approx\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$$

تمرین دوم از لحاظی به‌یك تمرین معمول در حسابان می‌ماند: «$\lim_{x\to 1}(x^2-1)/(x^2+x-2)$ را بیابید.» درواقع نتیجهٔ این تمرین را می‌توان چنین هم بیان کرد. اگر قراردهیم

$$f(x)=\frac{(x^2-1)}{(x^2+x-2)}$$

آنگاه نشان داده‌ایم که هرگاه $x\approx 1$ ولی $x\neq 1$، خواهیم داشت $f(x)\approx 2/3$. به عبارت دیگر هرگاه x نزدیك ۱، ولی مخالف آن باشد، $f(x)$ نزدیك ۲/۳ است. پس ما به‌زبان بینهایت کوچکها حکم $\lim_{x\to 1}f(x)=2/3$ را بیان کرده‌ایم.

چگونه می‌توان مفهوم حد را برای یك تابع دلخواه $f(x)$ تعریف کرد؟ طبیعی است که تعریف زیر به‌نظر برسد:

(*) می‌گوییم $\lim_{x\to a}f(x)=l$ درصورتی که وقتی مقدار x نزدیك به a ومخالف آن باشد، مقدار $f(x)$ نزدیك به l باشد.

باید به یاد آورد که تابع f، یك تابع حقیقی استاندهٔ فرض می‌شود، یعنی تابعی که دامنهٔ تعریفش، D، مجموعه‌ای از اعداد حقیقی استانده است و $f(x)$ (به‌ازای $x\in D$) نیز استانده است. با این‌وجود درتعریف (*)، x می‌تواند مقادیر ابرحقیقی نااستانده را هم بگیرد! پس باید فرض کنیم که $f(x)$ برای (دست کم بعضی از) مقادیر نااستاندهٔ x هم تعریف شده است.

درمثال ویژهٔ ما، تابع $f(x)=(x^2-1)/(x^2+x-2)$ هیچ مسأله‌ای ایجاد نمی‌کند، چون به خودی خود نه تنها به ازای مقادیر حقیقی x، بلکه به‌ازای همهٔ ابرحقیقیهای مخالف ۱ و ۲ نیز تعریف می‌شود. علت این امر آن‌است که $f(x)$ تابعی گویا است، یعنی تابعی است که از کاربست چهار عمل اصلی روی x و ثابتها نتیجه می‌شود ــ عملهایی که می‌دانیم می‌توان آنها را روی اعداد ابرحقیقی هم انجام داد. هیچ دلیلی ندارد که حوزهٔ کاربست این اصل را تنها محدود به این عملهای اصلی و ترکیبات آنها بدانیم. درواقع، فرض می‌کنیم که هر تابع $f(x)$ تعریف شده به‌ازای برخی ازمقادیر حقیقی استاندهٔ x، خود به‌خود به‌ازای اعداد ابرحقیقی متناظر هم تعریف می‌شود. گرچه این ایده اساسا ساده است، در عمل باید با مثالهایی آن را روشن ساخت. بدین منظور فرض می‌کنیم که $\tan x$ که به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی غیر از اعداد به صورت $(2k+1)(\pi/2)$، که k عدد صحیح (استانده) است، تعریف می‌شود، به‌ازای همهٔ مقادیر ابرحقیقی x نیز، بجز اعدادی به‌صورت $(2k+1)(\pi/2)$، که k عدد صحیح (نه لزوما استانده!) است، تعریف می‌شوند (k می‌تواند عدد صحیح متناهی، یا بینهایت و در نتیجه نااستانده‌ای باشد)؛ گذشته از این، ما پیشتر $\tan\alpha$ را به‌ازای بینهایت کوچك ناصفر α هم به‌کار برده‌ایم. همچنین فرض می‌کنیم که مثلاً رابطهٔ

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$$

حتی به‌ازای x و yهای نااستانده هم برقرار است. به‌همین ترتیب، $\log x$ تابعی است که بر اعداد ابرحقیقی مثبت تعریف می‌شود (و همواره داریم $\log(xy)=\log x+\log y$)، یا $\sqrt{x}$ به‌ازای همهٔ ابرحقیقیهای نامنفی تعریف می‌شود، وقس علی‌هذا. دبیر باید این ایده‌ها را به‌تدریج و از طریق تمرینهای بیشمار به دانش‌آموزان القا کند. اگر این‌کار انجام شود، آنگاه تعریف (*) به‌ازای هرتابع (تعریف شده نزدیك به a) موجه جلوه می‌کند. به‌زبان نمادی

(۱*) $\lim_{x\to a}f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\forall x\approx a(x\neq a\to f(x)\approx l)$

پس ازاین می‌توان مفاهیم زیررا تعریف کرد:

f در x پیوسته است اگر وتنها اگر $\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x)$

(۲*) اگروتنها اگر $\forall\varepsilon\approx 0(f(x+\varepsilon)\approx f(x))$

(۳*) به‌ازای هر $\varepsilon\approx 0$ که $\varepsilon\neq 0$، $f'(x)=\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$.

باید تأکید کنیم که x در (۲*)، و x و $f'(x)$ در (۳*) همگی استانده فرض می‌شوند.

همان گونه که پیشتر گفتیم، لایب‌نیتس «dx» را برای نمایش تغییر بینهایت کوچکی در x به‌کار می‌برد. حال گیریم $y=f(x)$. وقتی مقدار x به اندازهٔ بینهایت کوچك dx به $x+dx$ تغییر می‌کند، مقدار y از $f(x)$ به $f(x+dx)$ تغییر خواهد کرد. اگر f پیوسته باشد، این تغییر در مقدار y هم بینهایت کوچك خواهد بود ولایب‌نیتس آن را با «dy» نشان می‌داده است. در این صورت

$$dy=f(x+dx)-f(x)$$

و

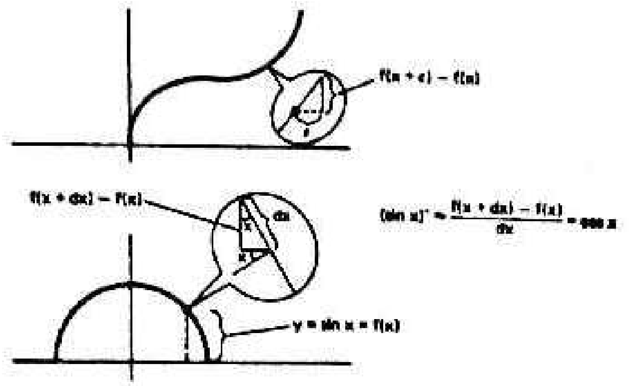
$$f'(x)\approx\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$

این‌ملاحظات بودکه لایب‌نیتس رابه‌نماد آشنای «dy/dx» رهنمون شد. تأکید می‌کنیم که تساوی $f'(x)\approx dy/dx$ ماکروسکوپی است و اگر می‌خواستیم از دید میکروسکوپی به آن بنگریم، می‌بایست چنین می‌نوشتیم: $f'(x)=\mathrm{st}(dy/dx)$. همان گونه که قبلا اشاره شده لایب‌نیتس‌دردسر چنین تمایزات نمادین را به‌خود نداده است.

دو شکلی که در زیر از کتاب کایزلر می‌آوریم، به‌اندازهٔ‌کافی گویا هستند و شواهد خوبی برای نمایش توان آموزشی ترفند «میکروسکوپ» به‌شمار می‌روند. خواننده باید براساس این‌شکلها نشان‌دهد که مشتق $\cos x$، برابر $-\sin x$ (ونه $\sin x$) است.

تا اینجاکوشیدیم که به‌خواننده تصوری کلی از شیوهٔ آموزش حسابان درسطحی بسیار شهودی، برپایهٔ رهیافت بینهایت کوچکها بدهیم. در این راستا تنها به‌مقدمات حساب دیفرانسیل پرداختیم. درسنامهٔ کایزلر مجموعهٔ مفصلی ازموضوعات، ازجمله حساب‌انتگرال، را عرضه می‌کند. بیشتر مواد این درسنامه را می‌توان برای آموزش دبیرستانی بازنویسی کرد.

رهیافت بینهایت کوچکها از نظر آموزشی جذاب است،



زیرا تعاریف منطقی آن‌را می‌توان به‌طور شهودی هم پذیرفت، از این گذشته حتی ریاضیدانان حرفه‌ای هم که با تعریف اپسیلون ـ دلتایی حد به‌راحتی کار می‌کنند، عملا آن‌را به‌این‌صورت درك می‌کنند که کوچکی $x-a$، کوچکی $f(x)-l$ را ایجاب می‌کند. چون تعریف نااستاندهٔ (یعنی تعریف مبتنی بر بینهایت کوچکهای) حد این تصور شهودی را باز می‌تاباند، دریافت آن آسانتر است. مثلا دلایلی بر این مدعا وجود دارد که دانش‌آموزان دبیرستانی می‌توانند تمرین دومی را که ذکر شد، حل کنند. همان‌گونه که پیشتر گفتیم، با حل این تمرین آنها اثبات نااستاندهٔ صحیحی از حکم

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{2}-1}{x^{2}+x-2}=\frac{2}{3}$$

خواهند داد. چندنفر از این دانش‌آموزان خواهند توانست اثبات استانده، یعنی اپسیلون ـ دلتایی، صحیحی ازهمین حکم را ارائه کنند؟ احتمالا تعداد معدودی.

اینرا هم بیفزاییم که تعریفهای نااستانده، ساختار منطقی ساده‌تری از مشابه‌های استانده‌شان دارند. مثلا تعریف نااستاندهٔ(*) از مفهوم حد، به‌طور ساده حکم می‌کند که به‌ازای هر x، یك شرط ساده و بی‌سور برقرار می‌شود. (عبارت «به‌ازای هر»، یا $\forall$، سور عمومی و عبارت «وجود دارد»، یا $\exists$، سور وجودی نامیده می‌شود.) برعکس درتعریف استاندهٔ حد، به توالی سورها مانند: «به‌ازای هر ε، وجود دارد یك δ، چنان‌که به‌ازای هر x...» برمی‌خوریم. هرچه این توالی سورهای یك‌جمله بیشتر باشد، آن‌جمله پیچیده‌تر است و بالطبع دریافت معنی آن دشوارتر. تعریفهای نااستانده، پیچیدگی سوری کمتری از همانندهای استانده‌شان دارند.

۵. ماهیت‌کار رابینسون

از آنجه که تاکنون گفته‌ایم شاید چندان روشن نشده‌باشد که ماهیت و معنای کشف رابینسون چیست. اینك می‌کوشیم تا آنجا که ممکن‌است بدون ذکر جزئیات فنی زیاد، این‌معنا را باز گشاییم.

در پیدایش یك‌مفهوم نوین ریاضی، سه‌مرحله را می‌توان ازهم بازشناخت.

(الف) مرحلهٔ آغازی. هرمفهوم نوینی از نیاز زاده می‌شود. در آغاز اغلب این‌مفهوم مبهم‌است وحتی ابداع‌کنندگانش هم‌نمی‌توانند به‌راحتی با آن‌کار کنند.

این مرحله را می‌توان به‌خوبی در پیدایش گونه‌های مختلف اعداد، چون اعداد گنگ، موهومی و ایدآل تشخیص داد (حتی خود این نامها نشانه‌هایی هستند از تردیدهای نخستین‌دربارهٔ این‌مفاهیم). همچنین می‌توان مفاهیم نقطه، خط، وصفحه یا مفهوم تابع را درنظر آورد.

(ب) مرحلهٔ آشنایی. مفهوم‌نوین بارهاوبارها با اطمینان روزافزونی به‌کار برده می‌شود، تا آنجا که سرانجام‌کاملا متبلورشده وفهمیده شود. این مرحله ممکن است بسیار پیش از فراهم آمدن روایت اصل موضوعی از مفهوم (که جوهرهٔ مرحلهٔ سوم است)، طی شود. این موضوع را می‌توان به‌بهترین وجهی در مورد اعداد طبیعی مشاهده کرد. این اعداد پس از کشفشان، مدتها پیش از ارائهٔ روایت اصل موضوعی آنها توسط پئانو، که تنها در پایان سدهٔ نوزدهم آماده شد، کاملا درك شده بودند! به‌همین‌گونه، یونانیان نه‌تنها اعداد گویا، که حتی اعداد گنگ را دو هزار سال پیش از اصل موضوعی شدنشان (در سدهٔ نوزدهم) درك کرده بودند.

(پ) مرحلهٔ اصل موضوعی‌سازی، که خود ازدومرحلهٔ فرعی تشکیل می‌شود.

(پ۱) اصل موضوعی‌سازی مادی. پاره‌ای ویژگیهای اساسی مفهوم (یا مفاهیم) به‌عنوان اصول موضوع برگزیده می‌شوند. همهٔ ویژگیهای شناخته‌شدهٔ دیگر از این اصول موضوع استنتاج می‌شوند. اولین‌اصل موضوعی‌سازی مادی‌شناخته‌شده، بی‌تردید کار اقلیدس درهندسه است. اهمیت سترگ این‌کار را خللهایی که ما امروزه از آنها آگاهیم، خدشه‌دار نمی‌کند. اصل موضوعی‌سازی مادی اعداد حقیقی در اواخر سدهٔ نوزدهم انجام شد. شاخصترین اصل موضوع آن (در یکی از صورتبندیهایش) بیان می‌کند که هرمجموعهٔ [ناتهی] کراندار از اعداد حقیقی، یك کوچکترین کران بالا دارد.

(پ۲) اصل موضوعی‌سازی صوری. این، مرحله‌ای است امروزی که نیاز به‌آن حدود صدسال پیش آشکار شد و ماهیت‌آن تنها در سدهٔ حاضر به‌روشنی تبلور یافت.

ریاضیدان امروزی به‌فهرست‌اصول‌موضوعی که‌مفهومی مشخص را توصیف می‌کنند، از این دید می‌نگرد که آیا این اصول موضوع تناقض‌آمیزند یا نه. هرچه باشد این امکان وجود دارد که شهودمان، ما را گمراه کند و در واقع هیچ ساختاری که در همهٔ این اصول موضوع صدق کند، وجود نداشته‌باشد. این پرسش معمولا با ساختن یك‌الگو برای‌آن اصول موضوع، یعنی دستگاهی از اشیای ریاضی که در همهٔ اصول موضوع صدق کنند، پاسخ داده می‌شود.

این الگو را تنها کسانی می‌توانند به‌تمامی درك کنند، که از «بلوغ ریاضی» قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار باشند. عموماً مشکل ذهنی عمده این است که اشیای الگو هیچ همانندی ظاهری با آن اشیای شهودی که اصل موضوعی‌شده‌اند ندارند. مثلا الگوهای بسیاری ازاعداد حقیقی وجود دارد. معروفترین آنها، دستگاه‌برشهای ددکینداست. این برشها اصول موضوع اعدادحقیقی را برآورده می‌کنند، اما چون زوجهای مشخصی از مجموعه‌های نامتناهی اعداد گویا هستند، هیچ شباهتی با آنچه که ما شهوداً از اعداد حقیقی می‌فهمیم، ندارند. با این وجود در برخی از متنهای پیشرفته، برشهای ددکیند با اعداد حقیقی یکی‌گرفته می‌شوند. این‌کار البته از نظر ریاضی بسیار باشکوه است، اما وقتی به‌نوآموزان آموخته شود (همان‌گونه که گهگاه نابخردانه چنین هم می‌شود)، دراغلب موارد تأثیری

ناخوشایند بر آنها می‌گذارد. احساسی که پدید می‌آید در بهترین حالت احساس مواجهه با یك معما و در بدترین حالت، چیزی است شبیه یك کابوس.

به سر وقت بینهایت کوچکها باز گردیم: هنگامی که از دید گذراندن این سه مرحله به تاریخچهٔ آنها می‌نگریم، در می‌یابیم که تا پیش از ۱۹۶۰ تنها نخستین مرحله واقعاً کامل شده بود، حال آنکه مرحلهٔ دوم، مرحلهٔ آشنایی، علیرغم کوششهای بسیار برای کامل کردن آن به فرجام نرسیده بود. رابینسون در آن سال به گونه‌ای درخشان مرحلهٔ اصل موضوعی سازی را به انجام رساند. او اصول موضوعی برای بینهایت کوچکها (یا دقیقتر، برای اعداد ابرحقیقی) معین کرد و الگویی (یا در واقع چند الگو) برای آنها ساخت. در خلال این کار او ماهیت بینهایت کوچکها را هم آشکار ساخت و با این عمل مرحلهٔ آشنایی را هم ضمن اصل موضوعی سازی به اتمام رساند. کایزلر، اصول رابینسون را ساده‌تر کرد. اصل موضوع تعیین کننده در فهرست کایزلر، «اصل موضوع جواب» نام دارد. این اصل حکم می‌کند که اگر $f(x)$ و $g(x)$ عبارتهایی استانده از متغیر x باشند (یعنی عبارتهایی که از ترکیب چند تابع استانده از متغیرها و ثابتهای حقیقی ساخته شده‌اند)، آنگاه معادلات $f(x)=0$ و $g(x)=0$ جوابهای حقیقی یکسان دارند اگر و تنها اگر جوابهای ابرحقیقی یکسان داشته باشند. به‌زبان نمادی، ویژگی

$$\forall x(f(x)=0\leftrightarrow g(x)=0)$$

به ازای مقادیر حقیقی x برقرار است اگر و تنها اگر به ازای مقادیر ابرحقیقی x هم برقرار باشد. این اصل چیزی نیست مگر بیان دقیق حالت خاصی از اصل مبهم لایب‌نیتس، موسوم به «اصل پیوستگی»، (این اصل که "یك ویژگی به ازای اعداد حقیقی برقرار است اگر و تنها اگر به ازای ابرحقیقیها برقرار باشد.") همین حالت خاص هم برای مقاصد حساب دیفرانسیل و انتگرال بسنده است!

دست آخر می‌بینیم که رابینسون (و به تبع او کایزلر) تمایزات نمادی را به‌دقت مراعات کرده اند. همان‌گونه که پیشتر گفتیم، دو رابطهٔ متمایز $=$ و $\simeq$ وجود دارد. $\mathbf{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است درحالی که $\mathbf{R}^*$ مجموعهٔ ابرحقیقیهاست و البته $\mathbf{R}\subset\mathbf{R}^*$. اگر f تابع استانده‌ای با مقادیر حقیقی و دامنهٔ $D\subset\mathbf{R}$ باشد، در این صورت (همان طور که اشاره شد) f «خودبه‌خود» روی یك مجموعهٔ «متناظر» از ابرحقیقیها تعریف می‌شود. به عبارت فنی‌تر، تابعی چون f^* با دامنهٔ تعریف D^* به f متناظر می‌شود، که $D\subset D^*\subset\mathbf{R}^*$، و به ازای هر $x\in D$ داریم $f^*(x)=f(x)$ و به ازای هر $x\in D^*$ عدد $f^*(x)$ ابرحقیقی است؛ f^* را توسیع طبیعی f می‌نامند. مثلاً! اگر $f(x)=\sqrt{x}$، آنگاه D دامنهٔ f، مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی است، و D^* دامنهٔ توسیع طبیعی f، یعنی $f^*(x)=\sqrt{x}^*$، مجموعهٔ همهٔ ابرحقیقیهای نامنفی است. چون به‌ازای هر $x\in D$ داریم $x=(\sqrt{x})^2$، اصل جواب ایجاب می‌کند که به ازای هر $x\in D^*$ نیز تساوی $x=(\sqrt{x}^*)^2$ برقرار باشد.

به دلایل عملی و آموزشی بهتر این است که تمایز نمادی بین یك تابع و توسیع طبیعی آن را نادیده بگیریم. به همین خاطر است که مثلاً هرگز جمع ابرحقیقیها را با نماد «$+^*$» نشان نمی‌دهیم (درحالی‌که باید چنین می‌کردیم). باز هم به‌همین دلیل، کایزلر پس از پشت سر گذاردن مقدمهٔ کتابش، نماد «f» را هم برای نشان‌دادن یك تابع استانده و هم برای نمایش توسیع طبیعی آن به‌کار می‌برد. شاید در آموزش دبیرستانی بهتر این باشد که این تمایزات نمادی را اصلاً مطرح نکنیم.

نتیجه گیری

همان‌گونه که کایزلر نشان‌داده است، بینهایت کوچکها، این ابزارهای خوب قدیمی و انگیزه‌بخش را می‌توان با اندکی انحراف از تعبیر لایب‌نیتسی آنها، به خوبی در آموزش حساب به کار بست. تفاوت عمده، تمایز صریحی است که باید میان $\simeq$ و $=$ قائل شد، و به کارگیری مفاهیمی است چون «بخش استانده» و چیزهایی از این قبیل که پیشتر به‌گونه‌ای صریح مطرح نشده بودند. درسطح کلاسهای درس، اهمیت عمدهٔ کار رابینسون این است که به ما معلمان اطمینان خاطر می‌بخشد. اطمینان از اینکه وقتی از «بینهایت کوچکها» سخن می‌گوییم، به واقع می‌دانیم چه می‌گوییم و از چه می‌گوییم.

ترجمهٔ رضا کرمی

• Harnik V., "Infinitesimals from Leibniz to Robinson, time to bring them Back to school", *The Mathematical Intelligencer* (2)8 (1986) 41-47.

مراجع

1. Keisler H. J., *Elementary Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.
2. Keisler H. J., *Foundations of Infinitesimals Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, 1976.
3. Lakatos I., "Cauchy and the continuum", *The Mathematical Intelligencer*, 1(1978) 151-161.
4. Robinson A., *Non-standard Analysis*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1974.
5. Sullivan, K., "The teaching of elementary calculus using the nonstandard approach", *Amer. Math. Monthly*, 83 (1976) 371-375.