هندســـه تحلیـــلی

(قسمت اول ـ تا معادلهٔ صفحه)

محمد عابدی

مورد استفاده دانش‌آموزان چهارم ریاضی

۱ـ مختصات فضایی

کنج سه وجهی سه‌قائمه $(Ox\ ,\ Oy\ ,\ Oz)$ یاکنج سه قائمه $O\ xyz$ و $(x\hat{o}y=y\hat{o}z=z\hat{o}x=90^\circ)$ را در نظر گرفته‌نقطه O را مبدأ مختصات و Ox و Oy و Oz رامحورهای مختصات می‌نامند. سه وجهی $Oxyz$ را مستقیم نامند هـر گاه بیننده‌ای درروی محور Oz بایستد به‌طوری که پایش درنقطه O و سرش به طرف z باشد، چون Ox را نگاه کند Oy را در سمت چپ خود ببیند.

اگر نقطه‌ای مانند M درفضا درنظر بگیریم واز نقطه M صفحاتی بر Ox (صفحه MHPA) و بر Oy (صفحه MHQB) و بر oz (صفحه MARB) عمود نماییم در این‌صورت اندازه‌های جبری $\overline{OP}$ و $\overline{OQ}$ و $\overline{OR}$ رابه ترتیب طول وعرض‌وارتفاع نقطهٔ M نامند وچنین نمایش می‌دهند :

$$M(\overline{OP}=x\ ,\ \overline{OQ}=y\ ,\ \overline{OR}=z)$$

ضمناً اگر بردارهای یکه‌محورهای xها و yها و zها رابه ترتیب

$$\vec{k}\ ,\ \vec{j}\ ,\ \vec{i}$$

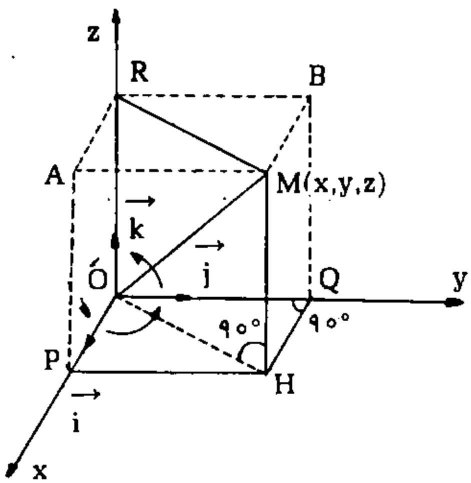
درنظر بگیریم ($\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهایی می‌باشند به ترتیب در روی xها و yها و zها به طولهای واحد وجهت مثبت آنها در جهت مثبت محورها می‌باشد) داریم:

$$\overrightarrow{OP}=x\vec{i}\ ,\ \overrightarrow{OQ}=y\vec{j}\ ,\ \overrightarrow{OR}=z\vec{k}$$

از طرفـی $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OR}$ و نیز در متوازی OPHQ داریم $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ پس:

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=$$

$$\boxed{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}$$



شکل ۱

با توجه به شکل(۱) $OR=HM$ یعنی‌ارتفاع نقطه M اندازه جبری‌فاصله نقطه M ازصفحه xy (یعنی $\overline{HM}$) و چون

$$PH=Q=AM$$

می‌باشد بنابراین عرض نقطه M برابر است با اندازه جبری فاصله نقطه M ازصفحه xz (یعنی $\overline{AM}$) و نیز چون

$$OP=HQ=MB$$

می‌باشد پس طول نقطه M برابر است بـا اندازه جبری فاصله نقطه M ازصفحه yz (یعنی $\overline{MB}$) و برای به‌دست آوردن طول و عرض و ارتفاع نقطه M ازنقطه M عمود HM را برصفحه xy فرود آورده وازنقطه H خطوط HQ و HP رابه‌موازات محورهای yها و xها رسم نموده داریم:

$$M(\overline{OP}=x\ ,\ \overline{OQ}=y\ ,\ \overline{HM}=z)$$

۲ـ محاسبه‌اندازه یك‌بردار برحسب تصاویر آن‌بردار

با توجه به شکل(۱) چون‌تصویر نقطه M روی‌محورهای xها و yها و zها به ترتیب P و Q و R می‌باشد بنابرایـن تصویر بردار $\overrightarrow{OM}$ روی محورها به ترتیب x و y و z است دچون خط HM برصفحه xy عمود است پس بـرکلیه خطوط صفحه منجمله برخط OH عمود بوده ومثلث OHM در زاویه $\hat{H}$ قائمه می‌باشدبنابراین $OM^2=OH^2+HM^2$ ازطرفی در مثلث قائم‌الزاویه OHQ ($\hat{Q}=90°$) داریم:

$$OH^2=OQ^2+QH^2$$

پس :

$$OM^2=OH^2+HM^2=OQ^2+QH^2+HM^2$$

$$\Longrightarrow OM^2=OQ^2+OP^2+HM^2=$$

$$y^2+x^2+z^2$$

اگر اندازه بردار $\overrightarrow{OM}$ رابه‌صورت $|\overrightarrow{OM}|$ نشان‌دهیم‌داریم:

$$\boxed{|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

بخصوص اگر $A(x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1)$ و $B(x_2\ ,\ y_2\ ,\ z_2)$ باشد تصویر بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت:

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1\ ,\ z_2-z_1)$$

بوده و اندازه بردار $\overrightarrow{AB}$ برابر است با:

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

مثال ۱ : مطلوب‌است معادله‌کره‌ای‌که مرکزش نقطه

$$C(\alpha\ ,\ \beta\ ,\ \gamma)$$

بوده وشعاعش R می‌باشد.

حل : نقطه $M(x,\ y,\ z)$ ازکره‌را درنظر گرفته داریم:

$$CM=R=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2}$$

بخصوص اگرمبدأ مختصات برمرکز کره منطبق باشد معادله کره به صورت $x^2+y^2+z^2=R^2$ می‌باشد.

مثال ۲ : اگرنقاط $A(1,2,3)$ و $B(-3,0,5)$ باشد معادله‌مکان هندسی‌نقاطی‌را بیابیدکه از آن نقاط پاره خط AB به زاویهٔ قائمه رؤیت‌شود.

حل : این مکان کره‌ای‌است‌به قطر AB زیرا اگراز قطر AB صفحه دلخواهی مرور دهیم ایـن صفحه‌کره را در دایره عظیمه‌ای قطع نموده و اگـر نقطه M را روی ایـن دایره در نظربگیریم زاویه محاطی $\hat{AMB}$ که روبروی‌قطرمی‌باشد قائمه است و چـون C مرکزکره وسط پاره خط AB است داریم :

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{۲}=\frac{۲+۰}{۲}=۱$$

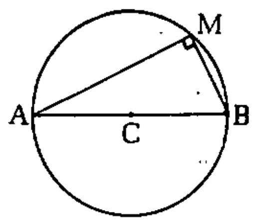
$$z_C=\frac{z_A+z_B}{۲}=\frac{۳+۵}{۲}=۴$$

$$C(\alpha=-۱\ ,\ \beta=۱\ ,\ \gamma=۴)$$

$$CA=R=\sqrt{(۱+۱)^۲+(۲-۱)^۲+(۳-۴)^۲}$$
$$=\sqrt{۴+۱+۱}=\sqrt{۶}$$

معادله کره : $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲+(z-\gamma)^۲=R^۲$

$$\Longrightarrow \boxed{(x+۱)^۲+(y-۱)^۲+(z-۴)^۲=۶}$$

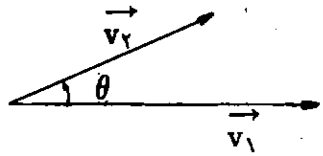


شکل ۲

۳ـ حاصلضرب داخلی دو بردار

مطابق تعریف حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{V_۱}$ و $\vec{V_۲}$ عددی است جبری که آن را به صورت $\vec{V_۱}\circ\vec{V_۲}$ نمایش داده و اندازه آن برابر است با اندازه بردار $\vec{V_۱}$ ضرب در اندازه بردار $\vec{V_۲}$ ضرب در کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{V_۱}$ و $\vec{V_۲}$. اگر اندازه بردار $\vec{V}$ را به صورت $|\vec{V}|$ نمایش دهیم داریم: (شکل ۳)

$$\vec{V_۱}\circ\vec{V_۲}=|\vec{V_۱}|\,|\vec{V_۲}|\cos\theta$$



شکل ۳

۴ـ خواص حاصلضرب داخلی دو بردار

۱ـ می‌دانیم اگر $(\widehat{\vec{V_۱}\,,\,\vec{V_۲}})=\theta$ باشد آنگاه

$$(\widehat{\vec{V_۲}\,,\,\vec{V_۱}})=-\theta$$

بوده از طرفی چون $\cos(-\theta)=\cos\theta$ است داریم:

$$\vec{V_۱}\circ\vec{V_۲}=|\vec{V_۱}|\,|\vec{V_۲}|\cos\theta \qquad (۱)$$

$$\vec{V_۲}\circ\vec{V_۱}=|\vec{V_۲}|\,|\vec{V_۱}|\cos(-\theta) \qquad (۲)$$

$$\xRightarrow{\text{با مقایسه روابط ۱ و ۲}} \boxed{\vec{V_۱}\circ\vec{V_۲}=\vec{V_۲}\circ\vec{V_۱}}$$

یعنی حاصلضرب داخلی دو بردار دارای خاصیت جابجایی می‌باشد.

۲ـ اگر دو بردار برهم عمود باشند یعنی

$$\cos\theta=\cos ۹۰^\circ=۰$$

در نتیجه $\vec{V_۱}\circ\vec{V_۲}=۰$ و یا اگر اندازه یکی از بردارها صفر باشد $\vec{V_۱}\circ\vec{V_۲}=۰$ است به عبارت دیگر حاصلضرب داخلی دو بردار وقتی صفر است که یا دو بردار برهم عمود باشند و یا آنکه اندازه یکی از بردارها صفر باشد برعکس اگر حاصلضرب داخلی دو بردار صفر باشد یا دو بردار برهم عمودند و یا اندازه یکی از بردارها صفر است.

۳ـ بردار $\vec{V_۲}$ را مطابق شکل (۴) روی بردار $\vec{V_۱}$ تصویر

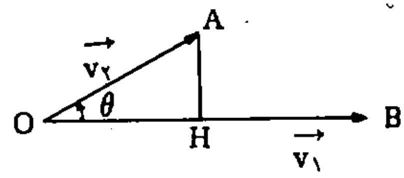
می‌کنیم و این تصویر را $\overline{OH}$ فرض می‌کنیم. درمثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:

$$\overline{OH}=OA\cos\theta \Longrightarrow \overline{OH}=|\vec{v}_2|\cos\theta$$

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta=|\vec{v}_1|\overline{OH}$$

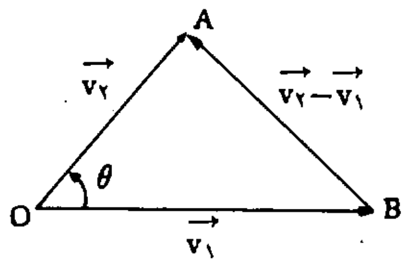
(تصویر بردار $\vec{v}_2$ روی بردار $\vec{v}_1$) × (اندازه‌بردار $\vec{v}_1$) =

یعنی حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{v}_1$ و $\vec{v}_2$ برابراست با اندازه یکی از بردارها ضرب در تصویر بردار دیگر روی آن بردار.



شکل ۴

۵ - محاسبه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویر آنها



شکل ۵

مطابق تعریف داریم:

$$\vec{v}_2-\vec{v}_1=\vec{BA} \quad \text{یا} \quad \vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA}$$

از طرفی طبق رابطه کسینوسها در مثلث OAB داریم: (شکل۵)

$$(1)\quad BA^2=OA^2+OB^2-2OA\,OB\cos\theta$$

اگر بردار $\vec{v}_1$ به تصاویر (a_1,b_1,c_1) و بردار $\vec{v}_2$ به‌تصاویر (a_2,b_2,c_2) باشد در این‌صورت

$$\vec{BA}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=(a_2-a_1\ ,\ b_2-b_1\ ,\ c_2-c_1)$$

بوده و می‌دانیم:

$$OA=|\vec{v}_1|=\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$$

$$OB=|\vec{v}_2|=\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$$

$$BA=|\vec{v}_2-\vec{v}_1|=$$

$$\sqrt{(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2}$$

$$OA\cdot OB\cos\theta=|\vec{v}_1|\,|\vec{v}_2|\cos\theta=\vec{v}_1\circ\vec{v}_2$$

اگر این مقادیر را در رابطه (۱) قرار دهیم داریم:

$$(a_2-a_1)^2+(b_2-b_1)^2+(c_2-c_1)^2=$$

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-$$

$$2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow a_2^2+a_1^2-2a_2a_1+b_2^2+$$

$$b_1^2-2b_2b_1+c_2^2+c_1^2-2c_2c_1=$$

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow$$

$$-2a_1a_2-2b_1b_2-2c_1c_2=$$

$$-2\vec{v}_1\circ\vec{v}_2 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}$$

تبصره ۱: با توجه به رابطه

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2$$

اگر $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ باشد یا بردار $\vec{v}_1$ بر بردار

$\vec{v}_2$ عمود است و یا اندازه یکی از بردارها صفر می‌باشد.

تبصره ۲: بردار $\vec{N}(a,b)$ برخط d به معادله

$$ax+by+c=0$$

عمود است.

اثبات: دو نقطه $P_1(x_1,y_1)$ و $P_2(x_2,y_2)$ را روی خط (d) درنظر گرفته داریم:

$$\overrightarrow{P_1P_2}(x_2-x_1\ ,\ y_2-y_1)$$

$$\vec{N}\circ\overrightarrow{P_1P_2}=a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1) \qquad (1)$$

چون نقاط P_1 و P_2 روی خط (d) می‌باشند پس مختصات این نقاط در معادله خط (d) صدق می‌کند یعنی:

$$\begin{cases}ax_1+by_1+c=0\\ ax_2+by_2+c=0\end{cases}\xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}}$$

$$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)=0$$

با توجه به رابطه (۱) لازم می‌آید که

$$\vec{N}\circ\overrightarrow{P_1P_2}=0$$

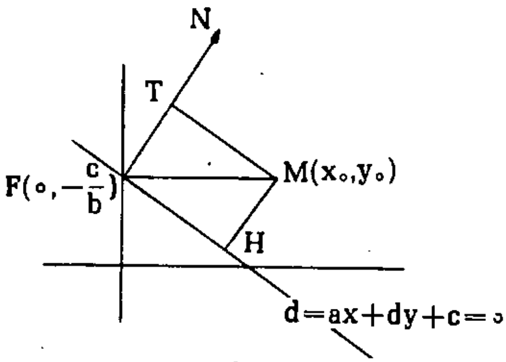
باشد و چون اندازه بردار $\vec{N}$ و اندازه بردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ مخالف صفراست پس بردار $\vec{N}$ بربردار $\overrightarrow{P_1P_2}$ عمود می‌باشد.

تبصره ۳: محاسبه فاصله نقطه $M(x_0,y_0)$ ازخط d به معادله $ax+by+c=0$ محل برخورد خط d با محور yها را نقطه F فرض کرده چون $x_F=0$ است پس

$$ax+by+c=0 \quad \text{یا} \quad ay+c=0 \quad \text{یا} \quad y=\frac{-c}{b}$$

بنابراین $F\left(0,-\frac{c}{b}\right)$ و

$$\overrightarrow{FM}\left(x_M-x_F=x_0\ ,\ y_M-y_F=y_0+\frac{c}{b}\right)$$



شکل ۶

می‌باشد بردار $\vec{N}$ که باتوجه به شکل(۶) برخط d عمود است مطابق تبصره (۲) می‌تواند تصاویرش $(a\ ,\ b)$ انتخاب شود، داریم:

$$(1)\quad \vec{N}\circ\overrightarrow{FM}=$$

$$|\vec{N}|\times(\text{تصویر بردار } \overrightarrow{FM} \text{ روی بردار } \vec{N})=$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{FT}=\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{HM}$$

وطبق محاسبه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویرداریم:

$$(2)\quad \vec{N}\circ\overrightarrow{FM}=ax_0+b\left(y_0+\frac{c}{b}\right)=$$

$$ax_0+by_0+c$$

از مقایسه روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$\sqrt{a^2+b^2}\times\overline{HM}=ax_0+by_0+c \implies$$

$$\boxed{|\overrightarrow{HM}|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

۶ـ محاسبه کسینوس زاویه بین دو بردار

$\vec{v}_1(a,b,c)$ و $\vec{v}_2(a',b',c')$

حل : می‌دانیم

$$\vec v_1 \circ \vec v_2 = aa'+bb'+cc' = |\vec v_1|\,|\vec v_2|\cos\theta =$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\cos\theta \Longrightarrow$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}}$$

۷ـ خاصیت پخشی ضرب داخلی بردارها

نشان دهید:

$$\vec v_1 \circ (\vec v_2+\vec v_3) = \vec v_1\circ\vec v_2+\vec v_1\circ\vec v_3$$

اثبات: فرض می‌کنیم

$\vec v_1(a,b,c)$ و $\vec v_2(a',b',c')$ و $\vec v(a'',b'',c'')$

باشد ،بنابراین

$$\vec v_2+\vec v_3(a'+a'',\ b'+b'',\ c'+c'')$$

می‌باشدو طبق قضیه حاصلضرب داخلی دو بردار برحسب تصاویرشان داریم :

$$\vec v_1\circ(\vec v_2+\vec v_3)=$$

$$a(a'+a'')+b(b'+b'')+c(c'+c'')=$$

$$(aa'+bb'+cc')+(aa''+bb''+cc'')=$$

$$\vec v_1\circ\vec v_2+\vec v_1\circ\vec v_3 \Longrightarrow$$

$$\boxed{\vec v_1\circ(\vec v_2+\vec v_3)=\vec v_1\circ\vec v_2+\vec v_1\circ\vec v_3}$$

حال حاصلضرب $(\vec v_1+\vec v_2)\circ\vec v_3$ را حساب می‌کنیم. چون حاصلضرب داخلی دو بردار خاصیت جابجایی دارد پس:

$$(\vec v_1+\vec v_2)\circ\vec v_3=\vec v_3\circ(\vec v_1+\vec v_2)=$$

$$\vec v_3\circ\vec v_1+\vec v_3\circ\vec v_2=\vec v_1\circ\vec v_3+\vec v_2\circ\vec v_3$$

$$\Longrightarrow \boxed{(\vec v_1+\vec v_2)\circ\vec v_3=\vec v_1\circ\vec v_3+\vec v_2\circ\vec v_3}$$

و نیز داریم:

$$(\vec v_1+\vec v_2)\circ\underbrace{(\vec v_3+\vec v_4)}_{\vec v}=(\vec v_1+\vec v_2)\circ\vec v=$$

$$\vec v_1\circ\vec v+\vec v_2\circ\vec v=$$

$$\vec v_1\circ(\vec v_3+\vec v_4)+\vec v_2\circ(\vec v_3+\vec v_4)=$$

$$\boxed{\vec v_1\circ\vec v_3+\vec v_1\circ\vec v_4+\vec v_2\circ\vec v_3+\vec v_2\circ\vec v_4}$$

تبصره ۴ : به سادگی می‌توان بررسی کرد

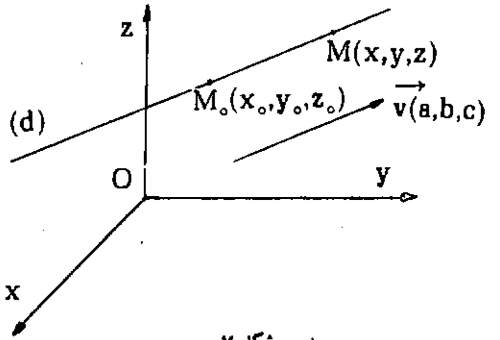
$$\boxed{a(b\vec v)=ab\vec v}$$

$$\boxed{a(\vec v_1\circ\vec v_2)=(a\vec v_1)\circ\vec v_2=\vec v_1\circ(a\vec v_2)}$$

$$\boxed{a(\vec v_1+\vec v_2)=a\vec v_1+a\vec v_2}$$

۸ـ معادله یک خط در فضا

بردار $\vec v(a,b,c)$ را موازی باخط (d) ویا منطبق برخط (d) در نظر گرفته a وb وc را پارامترهای‌هادی‌خط (d) نامند.



شکل ۷

طبق (شکل ۷) بردار

$$\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0\ ,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

بوده وچون بردار $\overrightarrow{M_0M}$ موازی‌بردار $\vec{v}$ می‌باشد پس مطابق تعریف‌دو بردار موازی $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{v}$ این‌رابطه‌راروی‌محورها تصویر نموده داریم:

$$x-x_0=ta\ \ ,\ \ y-y_0=tb\ \ ,\ \ z-z_0=tc$$

$$\Longrightarrow \frac{x-x_0}{a}=t\ \ ,\ \ \frac{y-y_0}{b}=t\ \ ,\ \ \frac{z-z_0}{c}=t$$

$$\Longrightarrow d \overset{\text{به معادله}}{\equiv} \boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$

معادله‌بالا را معادله کانونیك خط (d) نامند و معادلات زیر را معادلات‌پارامتری خط d نامند.

$$\begin{cases} x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$$

۹ـ کسینوسهای هادی یك خط

کسینوس زوایایی که خط (d) با محورهای مختصات می‌سازند کسینوسهای هادی‌خط(d) نامند. فرض‌می‌کنیم‌برداری ازخط (d) به صورت $\vec{v}(a,b,c)$ باشد بنابراین a و b و c پارامترهای‌هادی‌خط (d) می‌باشند . ازطرفی بردارهای‌یکه

$$\vec{i}\,(1\ ,\ 0\ ,\ 0)\ \ ,\ \ \vec{k}\,(0\ ,\ 0\ ,\ 1)\ \ ,\ \ \vec{j}\,(0\ ,\ 1\ ,\ 0)$$

را درنظر گرفته حاصلضرب داخلی بردار $\vec{v}$ با این بردارهای یکه را نوشته داریم:

$$\vec{v}\circ\vec{i}=|\vec{v}|\,|\vec{i}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v}\ ,\ \vec{i}})}_{\alpha'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\alpha'=$$

$$a\times 1+b\times 0+c\times 0=a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\alpha'=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\alpha}$$

$$\vec{v}\circ\vec{j}=|\vec{v}|\,|\vec{j}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v}\ ,\ \vec{j}})}_{\beta'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\beta'=$$

$$a\times 0+b\times 1+c\times 0=b$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\beta'=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\beta}$$

$$\vec{v}\circ\vec{k}=|\vec{v}|\,|\vec{k}|\cos\underbrace{(\widehat{\vec{v}\ ,\ \vec{k}})}_{\gamma'}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times 1\times\cos\gamma'=$$

$$a\times 0+b\times 0+c\times 1=c$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\gamma'=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\gamma}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$+\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1 \Longrightarrow$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1 \Longrightarrow \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}=1$$

یعنی بردار $\overrightarrow{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ برداریکه بردار $\overrightarrow{v}(a,b,c)$ می‌باشد، پس:

$$\overrightarrow{u}=\alpha\overrightarrow{i}+\beta\overrightarrow{j}+\gamma\overrightarrow{k}=$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\overrightarrow{i}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\overrightarrow{j}+$$

$$\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\overrightarrow{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{u}=\frac{a\overrightarrow{i}+b\overrightarrow{j}+c\overrightarrow{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\boxed{\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}}$$

بردار $\frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}$ را سوی بردار $\overrightarrow{v}$ می‌نامند.

مثال ۱ : a و b را چنان بیابید که بردارهای

$$\overrightarrow{v}_1(3,6,a)\ ,\ \overrightarrow{v}_2(2,b,4)$$

موازی باشند.

حل : چون دو بردار موازی‌اند پس :

$$\overrightarrow{v}_2=k\overrightarrow{v}_1$$

این تساوی‌را روی محورها تصویر نموده داریم:

$$2=3k\ ,\ b=6k\ ,\ 4=ak \Longrightarrow$$

$$\frac{2}{3}=\frac{b}{6}=\frac{4}{a} \Longrightarrow 12=3b \Longrightarrow \boxed{b=4}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{a} \Longrightarrow 2a=12 \Longrightarrow \boxed{a=6}$$

یا می‌توانیم بگوییم اگر دو بردار

$$\overrightarrow{v}_1(a,b,c)\ ,\ \overrightarrow{v}_2(a',b',c')$$

موازی باشند:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \Longrightarrow \frac{3}{2}=\frac{6}{b}=\frac{a}{4} \Longrightarrow$$

$$\boxed{b=4\ ,\ a=6}$$

مثال ۲ : نشان‌دهید زاویه بین دوبردار

$$\overrightarrow{v}_1(1,2,1)\ ,\ \overrightarrow{v}_2(2,1,-1)$$

دوبرابر زاویه بین دوبردار

$$\overrightarrow{A}(1,4,1)\ ,\ \overrightarrow{B}(2,5,5)$$

می‌باشد.

حل :

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{v}_1\ ,\ \overrightarrow{v}_2})=\frac{aa'+bb'+cc'}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$$

$$=\frac{(1)(2)+(2)(1)+(1)(-1)}{\sqrt{1+4+1}\times\sqrt{4+1+1}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

$$(\widehat{\overrightarrow{v}_1\ ,\ \overrightarrow{v}_2})=\frac{\pi}{3}\ ,\ \cos(\widehat{\overrightarrow{A}\ ,\ \overrightarrow{B}})=$$

$$\frac{(1)(2)+(4)(5)+(1)(5)}{\sqrt{1+16+1}\times\sqrt{4+25+25}}=$$

$$\frac{27}{\sqrt{18}\times\sqrt{3\times18}}=\frac{27}{18\sqrt{3}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

$$(\widehat{\vec{A},\vec{B}})=\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\boxed{(\widehat{\vec{v}_1,\vec{v}_2})=2(\widehat{\vec{A},\vec{B}})}$$

مثال ۳ : به ازای چه مقدار m بردارهای

$$\vec{v}_1(2,3,4)\ ,\ \vec{v}_2(a,-1,3a)$$

برهم عمودند؟

حل :

$$\vec{v}_1\circ\vec{v}_2=2(a)+3(-1)+4(3a)=0\Rightarrow$$

$$2a-3+12a=0\Rightarrow\boxed{a=\frac{3}{14}}$$

مثال ۴ : اگر دو بردار

$$\vec{v}_1(2\ ,a\ ,b)\ ,\ \vec{v}_2(4\ ,c\ ,1)$$

همسنگ‌باشند a و b و c کدام است؟

حل :

$$\vec{v}_1=\vec{v}_2\Rightarrow\frac{4}{2}=\frac{a}{c}=\frac{1}{b}\Rightarrow 2=\frac{1}{b}\Rightarrow$$

$\boxed{b=\frac{1}{2}}$ و $2=\frac{a}{c}\Rightarrow a=2c$ و

$$|\vec{v}_1|=|\vec{v}_2|\Rightarrow$$

$$\sqrt{4+a^2+b^2}=\sqrt{16+c^2+1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{4+4c^2+\frac{1}{4}}=\sqrt{17+c^2}$$

$$\Rightarrow 4+4c^2+\frac{1}{4}=7+c^2\Rightarrow$$

$$3c^2=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}\Rightarrow c^2=\frac{11}{3\times4}\Rightarrow$$

$$c^2=\frac{33}{9\times4}\Rightarrow\boxed{c=\pm\frac{\sqrt{33}}{6}}$$

$$\Rightarrow a=2c\Rightarrow\boxed{a=\pm\frac{\sqrt{33}}{3}}$$

مثال ۵ : زاویه‌بین خط (d) به معادله

$$x=1+t\ ,\ y=-1+\sqrt{3}t\ ,\ z=2\sqrt{3}t$$

و محورzها کدام است؟

حل :

$$x-1=t\ ,\ y+1=\sqrt{3}t\ ,\ z=2\sqrt{3}t\Rightarrow$$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{\sqrt{3}}=\frac{z}{2\sqrt{3}}=t$$

پارامترهای هادی‌خط (d) عبارتنداز:

$$a=1\ ,\ b=\sqrt{3}\ ,\ c=2\sqrt{3}$$

بنابراین :

$$\gamma=\cos\hat{\gamma}'=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3+12}}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\cos\gamma'=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\boxed{\gamma'=\frac{\pi}{6}}$$

. توجه‌کنید ضرایب t پارامترهای هادی خط می‌باشند.

مثال ۶ : آیا برداری وجود دارد کـه بـا محورهـا زوایای °۱۲۰ و °۶۰ و °۴۵ بسازد ؟

حل : $\alpha=\cos\alpha'=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$

$$\beta=\cos\beta'=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\gamma=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1 \Longrightarrow$$

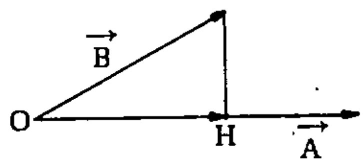
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$$

بنابراین چنین برداری وجود دارد.

مثال ۷ : بردارهای

$$\vec{B}=2\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k} \quad \text{و} \quad \vec{A}=6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$$

مفروض‌اند. مطلوب است تعیین بردار تصویر $\vec{B}$ روی بردار $\vec{A}$.



شکل ۸

حل :

$$(\vec{A}\ \text{برداریکه})\ \vec{u}=\frac{a\vec{i}+b\vec{j}+c\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=$$

$$\frac{6\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}}{\sqrt{36+9+4}}=\frac{6}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{2}{7}\vec{k}$$

$\overline{OH}=$ تصویر بردار $\vec{B}$ روی بردار $\vec{A}$ $=$

$$|\vec{B}|\cos(\widehat{\vec{A}\,,\,\vec{B}})=\cancel{\sqrt{4+1+9}}\times$$

$$\frac{(6)(2)+(-3)(1)+(2)(-3)}{\cancel{\sqrt{4+1+9}}\times\sqrt{36+9+4}}=$$

$\frac{12-3-6}{7}=\frac{3}{7}$ و $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{7}\vec{u}=$

$$\frac{3}{7}\left(\frac{6}{7}\vec{i}-\frac{3}{7}\vec{j}+\frac{2}{7}\vec{k}\right).$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OH}=\frac{18}{49}\vec{i}-\frac{9}{49}\vec{j}+\frac{6}{49}\vec{k}}$$

توجه داشته‌باشید از این موضوع استفاده کردیم که هر بردار در روی هرمحور برابر است با اندازه جبری آن بردار در بردار یکه محور یعنی:

$$\boxed{\overrightarrow{OH}=\overline{OH}\,\vec{u}}$$

مثال ۸ : اگر نیروی $\vec{F}=5\vec{i}-3\vec{k}$ برمتحرکی اثر کند و آن‌را از نقطه $A_1(4,1,3)$ تا نقطه $A_2(-5,6,2)$ تغییر مکان دهد مطلوب است کار انجام شده این نیرو .

حل : می‌دانیم اگر بردار نیرو $\vec{F}$ و بردار تغییرمکان $\vec{l}$ باشد کار این بردار نیرو برابراست با :

$$W=\vec{F}\circ\vec{l}=|\vec{F}|\,|\vec{l}|\cos\theta$$

$$\vec{l}=\overrightarrow{A_1A_2}(-5-4\ ,\ 6-1\ ,\ 2-3)$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{A_1A_2}(-9\ ,\ 5\ ,\ -1)$$

$$W=\vec{F}\circ\overrightarrow{A_1A_2}=$$

$$(-9)(5)+(5)(-3)+(-1)(0)=-45-15$$

$$\Longrightarrow \boxed{W=-60}$$

مثال ۹ : اگر بردار $\vec{A}=12\vec{i}+9\vec{j}-5\vec{k}$ و بردار

$$\overrightarrow{B} = ۴\overrightarrow{i} - ۳\overrightarrow{j} - ۵\overrightarrow{k}$$

باشد مقدار c را چنان بیابید که بردار

$$\overrightarrow{B} - c\overrightarrow{A}$$

بر بردار $\overrightarrow{A}$ عمود باشد.

حل: چون بردار $\overrightarrow{B} - c\overrightarrow{A}$ بر بردار $\overrightarrow{A}$ عمود می‌باشد پس حاصلضرب داخلی آنها صفر است:

$$(\overrightarrow{B} - c\overrightarrow{A}) \circ \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \circ \overrightarrow{A} - c\overrightarrow{A} \circ \overrightarrow{A} =$$

$$(۴)(۱۲) + (-۳)(۹) + (-۵)(-۵)$$

$$+ c[(۱۲)(۱۲) + (۹)(۹) + (-۵)(-۵)] =$$

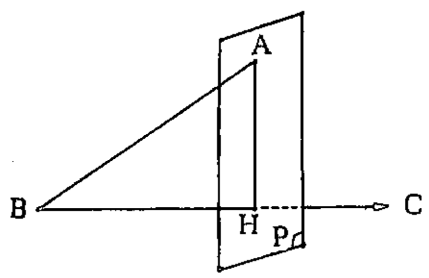
$$۴۸ - ۲۷ + ۲۵ + c(۱۴۴ + ۸۱ - ۲۵) = ۰$$

$$\Longrightarrow ۴۶ + ۱۰۰c = ۰ \Longrightarrow \boxed{c = -\frac{۲۳}{۵۰}}$$

مثال ۱۰: مطلوب‌است فاصله نقطه $A(۴,۱,۶)$ از خط BC که $B(۸,۳,۲)$, $C(۲,-۳,۵)$ می‌باشد.

حل:

$$\overrightarrow{BA}(۴-۸\ ,\ ۱-۳\ ,\ ۶-۲) \Longrightarrow$$



شکل ۹

$$\overrightarrow{BA}(-۴\ ,\ -۲\ ,\ ۴)$$

$$\overrightarrow{BC}(۲-۸\ ,\ -۳-۳\ ,\ ۵-۲) \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{BC}(-۶\ ,\ -۶\ ,\ ۳)$$

از نقطه A صفحه P را عمود بر بردار $\overrightarrow{BC}$ فرود می‌آوریم (شکل ۹) AH فاصله نقطه A تا خط BC می‌باشد:

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BC}| \times \overline{BH} \Longrightarrow$$

$$(-۴)(-۶) + (-۲)(-۶) + (۴)(۳) =$$

$$\sqrt{(-۶)^۲ + (-۶)^۲ + (۳)^۲} \times \overline{BH} \Longrightarrow ۴۸ =$$

$$۹\overline{BH} \Longrightarrow \boxed{\overline{BH} = \frac{۱۶}{۳}}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{۱۶ + ۴ + ۱۶} = ۶$$

از مثلث قائمه ABH $\Longrightarrow AH^۲ = AB^۲ - BH^۲ =$

$$۳۶ - \frac{۲۵۶}{۹} = \frac{۳۲۴ - ۲۵۶}{۹} = \frac{۶۸}{۹} \Longrightarrow$$

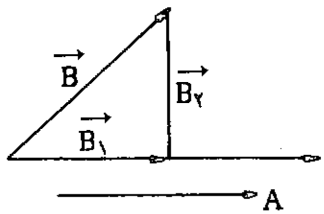
$$\boxed{AH = \frac{۲\sqrt{۱۷}}{۳}}$$

مثال ۱۱: بردار $\overrightarrow{B} = ۳\overrightarrow{i} + ۵\overrightarrow{j} - ۲\overrightarrow{k}$ را به دو بردار موازی با بردار $\overrightarrow{A} = ۴\overrightarrow{i} - ۳\overrightarrow{j} - ۵\overrightarrow{k}$ و عمود بر بردار $\overrightarrow{A}$ تجزیه کنید.

حل: با توجه به شکل (۱۰) داریم:

$$\overrightarrow{B} = \overrightarrow{B_۱} + \overrightarrow{B_۲} \quad و \quad \overrightarrow{B_۱} = c\overrightarrow{A} \Longrightarrow$$

$$B = c\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B_۲} \Longrightarrow \overrightarrow{B_۲} = \overrightarrow{B} - c\overrightarrow{A}$$



شکل ۱۰

$$\vec{B}^{۲}\perp\vec{A} \Longrightarrow \vec{B_۲}\circ\vec{A}=۰ \Longrightarrow$$

$$(\vec{B}-c\vec{A})\circ\vec{A}=۰ \Longrightarrow \vec{B}\circ\vec{A}-c\vec{A}\circ\vec{A}=۰$$

$$\Longrightarrow c=\frac{\vec{B}\circ\vec{A}}{\vec{A}\circ\vec{A}}=$$

$$\frac{(۳)(۴)+(۵)(-۳)+(-۲)(-۵)}{(۴)(۴)+(-۳)(-۳)+(-۵)(-۵)}=$$

$$\frac{۱۲-۱۵+۱۰}{۱۶+۹+۲۵}=\boxed{\frac{۷}{۵۰}}$$

$$\vec{B_۱}=c\vec{A}=\frac{۷}{۵۰}(۴\vec{i}-۳\vec{j}-۵\vec{k})=$$

$$\boxed{\frac{۱۴}{۲۵}\vec{i}-\frac{۲۱}{۵۰}\vec{j}-\frac{۷}{۱۰}\vec{k}}$$

$$\vec{B_۲}=\vec{B}-c\vec{A}=(۳\vec{i}+۵\vec{j}-۲\vec{k})-$$

$$\left(\frac{۱۴}{۲۵}\vec{i}-\frac{۲۱}{۵۰}\vec{j}-\frac{۷}{۱۰}\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B_۲}=\frac{۶۱}{۲۵}\vec{i}+\frac{۲۷۱}{۵۰}\vec{j}-\frac{۱۳}{۱۰}\vec{k}}$$

بنابراین مؤلفه‌های بردار $\vec{B}$ که بردارهای $\vec{B_۱}$ و $\vec{B_۲}$ می‌باشند کاملاً مشخص شده است.

مثال ۱۲: اگر نقاط

$A(۳,۶,-۷)$ و $B(-۵,۲,۳)$ و $C(۴,-۷,-۲)$

رئوس مثلث ABC باشند معادله میانه AM را بیابید.

حل: چون نقطه M وسط پاره‌خط BC است پس:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{۲}=\frac{-۵+۴}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_B+y_C}{۲}=\frac{۲-۷}{۲}=\frac{-۵}{۲}$$

$$z_M=\frac{z_B+z_C}{۲}=\frac{۳-۲}{۲}=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow$$

$$M\left(-\frac{۱}{۲}, -\frac{۵}{۲}, \frac{۱}{۲}\right) \quad \text{و} \quad A(۳, ۶, -۷)$$

$$\vec{MA}\left(۳+\frac{۱}{۲}, ۶+\frac{۵}{۲}, -۷-\frac{۱}{۲}\right) \Longrightarrow$$

$$\vec{MA}\left(\frac{۷}{۲}=a, \frac{۱۷}{۲}=b, -\frac{۱۵}{۲}=c\right)$$

$$MA \overset{\text{به معادله}}{=\!=\!=} \frac{x-x_۰}{a}=\frac{y-y_۰}{b}=\frac{z-z_۰}{c} \Longrightarrow$$

$$\frac{x+\frac{۱}{۲}}{\frac{۷}{۲}}=\frac{y+\frac{۵}{۲}}{\frac{۱۷}{۲}}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-\frac{۱۵}{۲}}$$

$$AM \overset{\text{به معادله}}{=\!=\!=} \boxed{\frac{x+\frac{۱}{۲}}{۷}=\frac{y+\frac{۵}{۲}}{۱۷}=\frac{z-\frac{۱}{۲}}{-۱۵}}$$

مثال ۱۳: فاصله دو خط

$$d: x=-۲+۲t \,,\ y=۳t \,,\ z=-۳+t$$

و

$$d': x=۲t'-۱ \,,\ y=۳t'-۴ \,,\ z=t'$$

را بیابید.

حل : ضرایب t پارامترهای هادی خط d یعنی

$a=۲\ ,\ b=۳\ ,\ c=۱$

و ضرایب t' پارامترهای هادی‌خط d' یعنی

$a'=۲\ ,\ b'=۳\ ,\ c'=۱$

چون $۱=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ می‌باشد پس دو خط d و d' موازی‌اند.

به ازای $t=۰$ نقطه

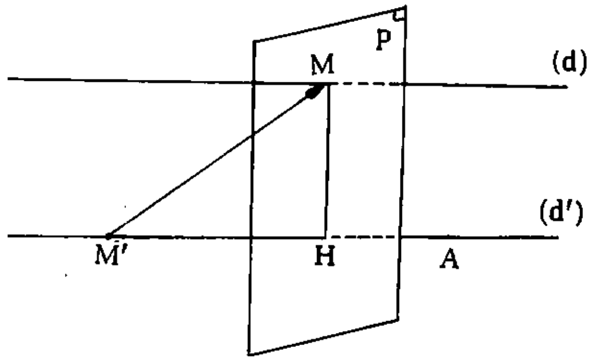
$M(-۲\ ,\ ۰\ ,\ -۳)$

مربوط به خط d و به ازای $t'=۰$ نقطه

$M'(-۱\ ,\ -۴\ ,\ ۰)$

مربوط‌به خط d' می‌باشد، از نقطه M صفحه P را برخط d' عمود نموده پـای عمود را نقطه H گرفته HM فاصله دوخط موازی می‌باشد. به‌ازای $t'=۱$ نقطه

$A(۱\ ,\ -۱\ ,\ ۱)$



شکل ۱۱

داریم :

$\overrightarrow{M'M}(-۲+۱\ ,\ ۰+۴\ ,\ -۳-۰) \Longrightarrow$

$\overrightarrow{M'M}(-۱\ ,\ ۴\ ,\ -۳)$

$\overrightarrow{M'A}(۱+۱\ ,\ -۱+۴\ ,\ ۱-۰) \Longrightarrow$

$\overrightarrow{M'A}(۲\ ,\ ۳\ ,\ ۱)$

$\overrightarrow{M'A}\circ\overrightarrow{M'M}=|\overrightarrow{M'A}|\times\overline{M'H} \Longrightarrow$

$(۲)(-۱)+(۳)(۴)+(۱)(-۳)=$

$\sqrt{۲^۲+۳^۲+۱^۲}\times\overline{M'H} \Longrightarrow$

$۷=\sqrt{۱۴}\times\overline{M'H} \Longrightarrow \overline{M'H}=\frac{۷}{\sqrt{۱۴}}$

$M'M=\sqrt{۲۶}$ و $HM^۲=M'M^۲-M'H^۲$

$\Longrightarrow HM^۲=۲۶-\frac{۴۹}{۱۴}=۲۶-\frac{۷}{۲}=\frac{۵۲-۷}{۲}=\frac{۴۵}{۲}$

$\Longrightarrow HM=\sqrt{\frac{۴۵}{۲}}=\sqrt{\frac{۵\times۹}{۲}}=۳\sqrt{\frac{۵}{۲}}=$

$۳\sqrt{\frac{۱۰}{۴}}=\boxed{\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۲}}$

مثال ۱۴ : وضع دوخط

$d: x=۲+۲t\ ,\ y=۱+۴t\ ,\ z=-۱-t$

$d': x=-۳۱+۳t'\ ,\ y=۶+۲t'\ ,\ z=۳+۶t'$

را نسبت‌به هم مشخص‌نمایید.

حل: ضرایب t و t' پارامترهای هادی‌خطوط d و d' می‌باشند پس :

$a=۲\ ,\ b=۴\ ,\ c=-۱$

$a'=۳\ ,\ b'=۲\ ,\ c'=۶$

چون $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ نمی‌باشد لذا دو خط d و d' موازی نمی‌باشند.

حال بررسی می‌کنیم که آیا دو خط مزبور متقاطع‌اند داریم:

$$\begin{cases} 2+2t=-31+3t' \\ 1+4t=6+2t' \\ -1-t=3+6t' \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} 2t-3t'=-33 \\ 4t-2t'=5 \\ t+6t'=-4 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$-2\begin{cases} -4t+6t'=66 \\ 4t-2t'=5 \end{cases}$$

$$4t'=71 \Longrightarrow \boxed{t'=\frac{71}{4}}$$

و

$$4t-\frac{71}{2}=5 \Longrightarrow$$

$$4t=\frac{81}{2} \Longrightarrow \boxed{t=\frac{81}{8}}$$

اگر این مقادیر t و t' در معادله سوم یعنی

$$t+6t'=-4$$

صدق نماید دوخط متقاطع خواهند بود.

$$\frac{81}{8}+6\times\frac{71}{4}=-4 \Longrightarrow \frac{81+6\times 142}{8}\neq -4$$

بنابراین دو خط نه‌موازی‌اند و نه متقاطع به ناچار دو خط متنافرند.

تفریح اندیشه ۱

برج ایفل

برج ۳۰۰ متری ایفل در پاریس از فولادی به وزن ۸،۰۰۰،۰۰۰ کیلوگرم ساخته شده است.

می‌خواهیم مدلی از این برج به وزن یک کیلوگرم بسازیم. ارتفاع این مدل چقدر می‌شود؟ آیا بزرگتر یا کوچکتر از یک لیوان آبخوری خواهد بود؟

جواب در صفحهٔ ۹۶