# هم‌رسی سه میانه‌ی مثلث

● دکتر احمد شرف‌الدین

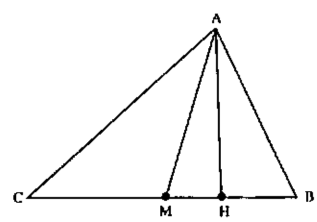
**چکیده:**

**در مقاله‌ی حاضر، پنج برهان برای «قضیه‌ی هم‌رسی سه میانه‌ی مثلث» می‌نویسیم. مطالعه‌ی این مقاله برای دانش‌آموزان سودمند است. برهان‌های اول، دوم و سوم اثر نگارنده است. برهان‌های چهارم و پنجم را از کتاب‌های هندسه نقل می‌کنم.**

**قضیه:** سه میانه‌ی هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند (به عبارت دیگر هم‌رس‌اند).

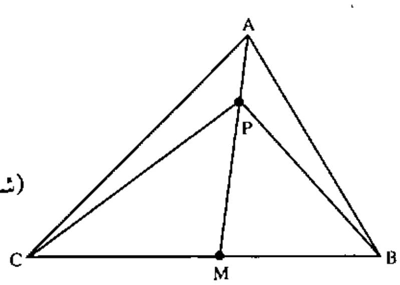
**برهان اول:**

الف) مثلث ABC و میانه‌ی AM را که رأس A را به نقطه‌ی M وسط ضلع BC وصل می‌کند، درنظر می‌گیریم. می‌گوییم مساحت‌های دو مثلث AMB و AMC برابرند، زیرا MB=MC و به‌علاوه، دو مثلث یاد شده یک ارتفاع AH دارند.



(شکل ۱)

ب) روی میانه‌ی AM نقطه‌ی دل‌خواه P را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم مساحت‌های دو مثلث PMB و PMC برابرند (بنابر حکم الف). پس مساحت‌های دو مثلث PAB و PAC برابرند.



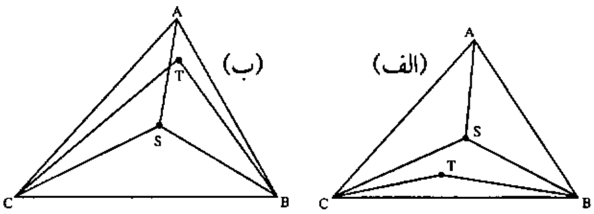
(شکل ۲)

پ) اکنون نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM، بسیار نزدیک به نقطه‌ی A می‌گیریم. در این وضعِ نقطه‌ی P، مساحت دو مثلث PAB و PAC بسیار به صفر نزدیک است. نقطه‌ی P را روی میانه‌ی AM به سوی نقطه‌ی M حرکت می‌دهیم. با حرکت نقطه‌ی P به سوی نقطه‌ی M، مساحت‌های دو مثلث PAB و PAC به تدریج زیاد می‌شوند. وقتی نقطه‌ی P به نقطه M می‌رسد، مساحت‌های دو مثلث یاد شده برابر نصف مساحت مثلث ABC می‌شوند. پس

روی میانه‌ی AM نقطه‌ای چون $A'$ وجود دارد، به طوری که:
مساحت مثلث $A'AB$ = مساحت مثلث $A'CA$ = مساحت مثلث $A'BC$

ت) اکنون می‌گوییم که داخل مثلث ABC فقط یک نقطه وجود دارد، به طوری که مساحت‌های سه مثلث SAB، SBC و SCA مساوی باشند.

برای اثبات چنین می‌گوییم: داخل مثلث ABC، نقطه‌ی S را درنظر می‌گیریم، به طوری که مساحت سه مثلث SAB، SBC و SCA مساوی باشند (بنابر آن‌چه در سطرهای پیشین گفتیم، چنین نقطه‌ای وجود دارد). اگر نقطه‌ی $T \neq S$، نقطه‌ای داخل مثلث ABC باشد، آن‌گاه مساحت‌های سه مثلث TAB، TBC و TCA نمی‌توانند مساوی باشند، زیرا مساحت یکی از این مثلث‌ها یا دو تا از آن‌ها از یک سوم مساحت مثلث ABC کمتر می‌شود (در دو مثلث الف و ب در شکل ۳ این مطلب به وضوح معلوم است).

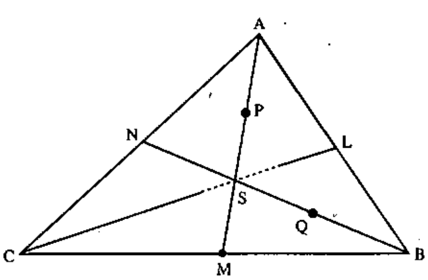



(شکل ۳)

از مطالب یاد شده نتیجه می‌شود، سه میانه‌ی مثلث بر یک نقطه می‌گذرند و جای نقطه‌ی برخورد سه میانه چنان است که اگر از آن نقطه به سه رأس مثلث وصل کنیم، سه مثلث هم‌مساحت به‌دست می‌آید.

برهان دوم: مثلث ABC و میانه‌ی AM را درنظر می‌گیریم. می‌گوییم خط AM مکان هندسی نقاطی چون P است، به طوری که:
مساحت مثلث PAC = مساحت مثلث PAB (۱)

(این حکم در اوایل برهان اول ثابت شده است). میانه‌ی مربوط به ضلع AC را BN می‌نامیم. می‌گوییم خط BN مکان هندسی نقاطی چون Q است، به طوری که:
مساحت مثلث QBC = مساحت مثلث QAB (۲)

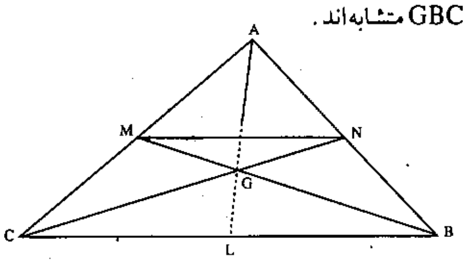



محل برخورد دو میانه‌ی AM و BN را با S نشان می‌دهیم. از دو رابطه‌ی (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:
مساحت مثلث SBC = مساحت مثلث SAC (۳)

از رابطه‌ی ۳ نتیجه می‌شود که نقطه‌ی S روی میانه‌ی CL قرار دارد.

برهان سوم: این برهان در کتاب «هندسه‌ی تحلیلی چندمحوری»، اثر نگارنده، آمده است (صفحه‌های ۶۸ و ۶۹).

برهان چهارم: این برهان در کتاب‌های هندسه چنین بیان شده است: مثلث ABC و دو میانه‌ی BM و CN را در نظر می‌گیریم و نقطه‌ی برخورد آن‌ها را G می‌نامیم. خط MN وسط‌های دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند، پس موازی ضلع BC است و طول پاره‌خط BC دو برابر طول پاره‌خط MN است. پس دو مثلث GMN و GBC متشابه‌اند.




از تشابه دو مثلث یاد شده نتیجه می‌شود:

$$\frac{GC}{GN}=\frac{GB}{GM}=\frac{BC}{MN}$$

و چون $BC = 2MN$، پس: $GC = 2GN$ و $GB = 2GM$.
نقطه‌ی برخورد میانه‌ی AL و میانه‌ی BM را k می‌نامیم. بنابر برهانی که هم‌اکنون یاد کردیم، تساوی زیر محقق است:

$$kB = 2kM$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود که نقطه‌ی k بر نقطه‌ی G منطبق است. پس سه میانه‌ی هر مثلث از یک نقطه می‌گذرند.

برهان پنجم: قضیه‌ی «سوا» را به‌کار می‌بریم.
قضیه‌ی سوا: اگر سه نقطه‌ی M و N و P به ترتیب بر اضلاع BC، AC و AB مثلث ABC طوری قرار داشته باشند که رابطه‌ی زیر برقرار باشد، آن‌گاه سه خط AM، BN و CP همرس‌اند و برعکس.

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}\cdot\frac{\overline{NC}}{\overline{NA}}\cdot\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-1$$

($\overline{MB}$ و $\overline{MC}$ اندازه‌های جبری بردارهای $\overrightarrow{MB}$ و $\overrightarrow{MC}$ روی محوری منطبق بر خط BC هستند. جهت این محور دل‌خواه است، زیرا مقدار نسبت $\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$ به جهت محور منطبق بر خط BC بستگی ندارد. بر دو خط CA و AB محورهایی اختیار و توضیحات اخیر را تکرار می‌کنیم.)

اگر AM، BN و CP میانه‌های مثلث ABC باشند، چنین داریم:

$$\overline{MB}=-\overline{MC} \quad و \quad \overline{NC}=-\overline{NA} \quad و \quad \overline{PA}=-\overline{PB}$$

اندازه‌های شش مقدار اخیر در رابطه (۱) صدق می‌کنند، پس سه میانه‌ی هر مثلث همرس‌اند.