سید محمدرضا هاشمی موسوی

۹ هم‌نهشتی و کاربردهای آن

معادله‌های سیاله پارامتری

اشاره

در بخش پیشین، به روش حل متداول معادله‌های سیاله پرداختیم. در این بخش سعی بر این است که حل معادله‌های سیاله‌ی پارامتری را بررسی کنیم و هم‌چنین روش حل معادله‌های سیاله چندمتغیره‌ی خطی را ارائه دهیم. در آخر، به حل و بحث این گونه معادله‌های سیاله به کمک هم‌نهشتی می‌پردازیم.

حل و بحث معادله‌های سیاله‌ی پارامتری

مثال: اگر معادله‌ی زیر، در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) دارای جواب باشد، مقدارهای مورد قبول برای m را تعیین کنید.

$18x + my = 12$

حل: با توجه به $(12, 18) = 6$، اگر مقدار m مضربی از ۶ باشد، معادله به صورت زیر ساده می‌شود:

$m = 6k \ : 18x + 6ky = 12 \ ; \ 3x + ky = 2$

معادله‌ی فوق وقتی دارای جواب است که $(3,k) = 1$ و یا $(3,k) = d|2$. بدیهی است که $d = 1$ و در نتیجه همه‌ی مقادیر k که در شرط $(3,k) = 1$ صدق می‌کنند، جواب مسئله خواهند بود. در حالت کلی، اگر $(18, m)|12$، معادله جواب دارد.

مثال: در معادله‌ی زیر، مقدار n را برحسب m چنان تعیین کنید که معادله همواره دارای جواب باشد.

$mx + ny = 1$

حل: می‌دانیم، معادله‌ی فوق وقتی دارای جواب است که $(m,n) = 1$. واضح است که اگر m و n دو عدد متوالی باشند، شرط اخیر برقرار است. بنابراین، اگر $n = m - 1$ یا $n = m + 1$ در نظر گرفته شود، معادله همیشه دارای جواب است:

$mx + (m-1)y = 1$

(یا)

$mx + (m+1)y = 1$

بررسی معادله‌های سیاله‌ی دارای محدودیت

مثال: به چند طریق می‌توان ۱۰۰ تومان را توسط سکه‌های ۲ و ۵ تومانی خُرد کرد، به نحوی که از هر دو نوع سکه استفاده شود.

حل: در واقع باید تعداد جواب‌های طبیعی معادله‌ی زیر را تعیین کنیم:

$5x + 2y = 100$

ابتدا جواب عمومی معادله را در مجموعه اعداد صحیح به‌دست می‌آوریم.

$$y = 0, x = 20; (5,2) = 1, \begin{cases} x = 20 + 2k \\ y = 0 - 5k \end{cases}$$

یا

$(20 - 2k > 0, k < 10)$

$$\begin{cases} x = 20 - 2k \\ y = 5k \end{cases} ; k \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

مسئله دارای ۹ جواب است. بنابراین، به ۹ طریق می‌توان عمل خُرد کردن را انجام داد.

مثال: کوچک‌ترین عدد مثبت m را چنان بیابید که معادله‌ی زیر جواب داشته باشد:

$1001x + 91y = 6370 + (m^2 - 1)^{1387}$

حل: چون $(1001, 91) = 91$، پس معادله وقتی جواب دارد که اگر و تنها اگر ۹۱ عبارت $6370 + (m^2 - 1)^{1387}$ را بشمارد.

با توجه به تجزیه‌ی عدد ۶۳۷۰:

$$6370 = 2\times 5\times 7^2\times 13 = 70\times 91$$

واضح است که $m=1$، کوچک‌ترین عدد مثبتی است که به ازای آن، معادله دارای جواب است.

مثال: با فرض این‌که $(a,b)=1$ و $c \le ab$، آیا این گفته درست است که معادله‌ی $ax+by=c$ جواب مثبت ندارد؟

حل: خیر، زیرا در معادله‌ی $8x+9y=60$ شرایط $(8,9)=1$ و $60<8\times 9=72$ برقرار است، ولی معادله دارای جواب مثبت $x=3$ و $y=4$ است.

مثال: معادله‌ی زیر به ازای چه مقادیری از m دارای جواب است؟

$$(10m+4)x+(18m+7)y=4$$

حل:

$$(10m+4,18m+7)=d\in \mathbb{N}\ ;\ \begin{cases} d\mid(10m+4) \\ d\mid(18m+7)\end{cases};$$

$$\begin{cases} d\mid 9(10m+4) \\ d\mid 5(18m+7)\end{cases};\ d\mid(90m+36)-(90m+35)=1$$

$$;d=1$$

چون به ازای هر مقدار m داریم:

$(10m+4,18m+7)=1$،

پس، معادله به ازای هر m صحیح دارای جواب است.

تبصره: وقتی یکی از ضریب‌های دو مجهول برابر واحد باشد، به سادگی می‌توان معادله‌ی سیاله را حل کرد. برای مثال، اگر ضریب x برابر واحد باشد:

$$a=1:\quad x+by=c$$

کافی است برای حل معادله، x را برحسب y محاسبه کنیم:

$$x=c-by$$

به ازای هر $y=k$ صحیح، مقداری صحیح برای x به دست می‌آید: $x=c-bk$

مثال: معادله‌ی $(m^2+1)x+(m^4-1)y=m^3+m$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را بر ضریب x تقسیم می‌کنیم:

$$(m^2+1)x+(m^2-1)(m^2+1)y$$

$$=m(m^2+1);\ x+(m^2-1)y=m;$$

$$x=m-(m^2-1)y\ ,\ y=k\ :\ x=m-(m^2-1)k$$

به ازای هر $m,k\in Z$، برای y و x مقداری صحیح به دست می‌آید.

تبصره: برای تعیین جواب‌های مثبت معادله‌ی $ax+by=c$ کافی است $x=\alpha+bt$ و $y=\beta-at$ را مثبت در نظر بگیریم و در واقع جواب $\begin{cases}\alpha+bt>0\\ \beta-at>0\end{cases}$ را بیابیم.

مثال: جواب‌های مثبت معادله‌ی $6x-10y=22$ را بیابید.

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم: $3x-5y=11$

$$x=\frac{5y+11}{3}=\frac{6y-y+12-1}{3}$$

$$=2y+4-\frac{y+1}{3}\ ;\ \frac{y+1}{3}=t$$

$$y=3t-1\ ;\ x=2(3t-1)+4-t=5t+2$$

برای تعیین جواب‌های مثبت باید $x>0$ و $y>0$. پس کافی است $3t-1>0$ و $5t+2>0$ یا $t>\frac{1}{3}$ و $t>\frac{-2}{5}$ که به دست می‌آید $t>\frac{1}{3}$. در واقع، اگر t را مقادیر صحیح بزرگ‌تر از $\frac{1}{3}$ اختیار کنیم، به بی‌نهایت زوج جواب مثبت می‌رسیم.

...... معادله‌های سیاله‌ی درجه اول چند مجهولی ......

می‌دانیم معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی اول، به صورت عمومی زیر ظاهر می‌شوند:

$$ax+by+cz+\ldots=d \qquad (1)$$

پارامترهای مفروض a، b، c، ... و d جایگزین عددهای گویا و x، y، z و... مجهول‌های معادله محسوب می‌شوند.

در صورتی که $d\neq 0$ و a و دیگر پارامترها صفر باشند، معادله‌ی ۱ به معادله‌ای یک‌مجهولی تحویل می‌شود که در واقع $ax=d$ از نوع معادله‌ی سیاله نیست و به سادگی حل و بحث می‌شود. بنابراین، معادله‌ی ۱ را در حالتی در نظر می‌گیریم که حداقل دو پارامتر دل‌خواه غیر صفر و d نیز اعدادی گویا باشند.

برای نشان دادن روش حل معادله‌ی ۱ و آشنایی با مسئله‌هایی که به این گونه معادله‌ها تحویل می‌شوند، چند مثال

متنوع می‌آوریم.

مثال: عددی در مبنای ۱۲ به صورت $(\overline{abc})_{12}$ و در مبنای مجهولی به‌صورت $(\overline{abc0})_x$ نوشته شده است. a، b، c و مبنای مجهولی را بیابید.

حل: اگر برابری مفروض را بسط دهیم، به برابری زیر خواهیم رسید:

$$ax^3+bx^2+cx^1+(0)x^0=12^2a+12b+c$$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^3-144)a+(x^2-12)b+(x-1)c=0 \qquad (1)$$

چون a، b و c اعدادی طبیعی هستند، بنابراین، از برابری ۱ می‌توان نتیجه گرفت که x نمی‌توانند از ۵ بزرگ‌تر باشد؛ زیرا طرف اول برابری ۱ مثبت می‌شود که مجموع سه مقدار مثبت صفر نمی‌شود. هم‌چنین، x نمی‌تواند کوچک‌تر از ۵ باشد. زیرا برای $x=4$ به‌دست می‌آید:

$$-80a+4b+3c=0 \qquad (2)$$

چون مبنا $x=4$ است، پس b و c از ۴ کوچک‌ترند. در این صورت، اگر b و c بزرگ‌ترین رقم ممکن و a کوچک‌ترین رقم ممکن $(a=1)$ باشد ($a\neq 0$، زیرا رقم سمت چپ است)، باز هم مقدار سمت چپ برابری ۲ منفی و غیر صفر خواهد شد. پس: $x=5$.

$$x=5: \quad -19a+13b+4c=0 \qquad (3)$$

در این‌جا، با یک معادله‌ی سیاله‌ی درجه‌ی اول سه‌مجهولی روبه‌رو هستیم؛ با شرایط:

(۴) (a، b و c اعداد مثبت) $\quad a\neq 0 \ , \ a,b,c<5$

چون ضریب c کوچک‌تر است، آن را برحسب دو مجهول دیگر به‌دست می‌آوریم:

$$c=\frac{19a-13b}{4}=5a-3b-\frac{a+b}{4}$$

چون $\frac{a+b}{4}$ عددی صحیح است، پس $a+b$ مضربی از ۴ خواهد بود. با توجه به شرایط ۴، پنج حالت پیش خواهد آمد:

a	۱	۲	۳	۴	۴
b	۳	۲	۱	۴	۰
c	-۵	۳	۱۱	۶	۱۹

با توجه به شرایط مسئله، واضح است که فقط جواب‌های $a=2$، $b=2$ و $c=3$ صدق می‌کنند.

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی زیر را به‌دست آورید:

$$7x+22y+52z=246$$

حل: با فرض $x=2t$ که یک فرض مسلّم است:

$$x=2t \ ; \ 7(2t)+22y+52z=246$$
$$7t+11y+26z=123$$

بزرگ‌ترین ضریب ۲۶ است و اگر به t و y مقادیر حداقل $t=y=1$ را اختصاص دهیم:

$$7+11+26z\leq 123 \ ; \quad z\leq 4\frac{1}{26}$$

بنابراین، مقادیر طبیعی ۱، ۲، ۳ و ۴ را برای z امتحان می‌کنیم:

$$z=1: \quad 7t+11y+26=123 \ ; \ 7t+11y=97$$

برای این معادله، جواب صحیح و مثبت $t=6$ و $y=5$ به دست می‌آید.

$$z=2: \quad 7t+11y+52=123 \ ; \ 7t+11y=71$$

برای این معادله، جواب صحیح و مثبت $t=7$ و $y=2$ به‌دست می‌آید.

برای حالت‌های $z=3$ و $z=4$، جواب صحیح و مثبت وجود ندارد.

بنابراین، معادله‌ی اصلی دارای دو جواب خصوصی با شرایط صحیح و مثبت بودن است:

$$(x_1,y_1,z_1)=(12,5,1)$$
$$(x_2,y_2,z_2)=(14,2,2)$$

..........یک معادله با سه مجهول..........

تبصره‌ی ۱: اگر $\alpha,\beta,\gamma\in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌ای عمومی با ضرایب $a,b,c,d\in Z$ باشد:

$$ax+by+cz=d$$

جواب‌های دیگر معادله به‌صورت زیر خواهندبود $(k,s,t\in Z)$:

$$x=\alpha+bk-cs \ , \ y=\beta+ct-ak \ , \ z=\gamma+as-bt$$

یک معادله با چهار مجهول

تبصره‌ی ۲: اگر $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌ای با ضرایب صحیح باشد:

$$ax+by+cz+dt=e$$

جواب‌های دیگر معادله به‌صورت زیر خواهند بود: $(m,n,p,q,k,s \in Z)$

$$x=\alpha+bk-cp-dn$$
$$y=\beta+cm-dq-ak$$
$$z=\gamma+ds+ap-bm$$
$$t=\gamma+an+bq-cs$$

دو معادله با دو مجهول

تبصره‌ی ۳: اگر $ax+by+c=0$ و $a'x+b'y+c'=0$ و x عددی صحیح باشد، ثابت می‌شود که y نیز عددی صحیح است، به جز وقتی که b و b' هر دو بر $(ab'-a'b)$ بخش‌پذیر باشند؛ زیرا:

$$a(bc')+b(ca')+c(ab')=0$$

و هم‌چنین:

$$a'(bc')+b'(ca')+c'(ab')=0$$

توجه: اگر $ax+by+cz=d$ و $a'x+b'y+c'z=d'$ باشند، همواره از حذف یکی از مجهول‌ها بین این دو معادله، به یک معادله‌ی دومجهولی می‌رسیم.

مثال: همه‌ی جواب‌های صحیح و مثبت دستگاه معادله‌های زیر را بیابید:

$$6x-6y+9z-21=0 \; ; \; 8x-14y-6z+38=0$$

معادله‌ی اول را به ۳ و معادله‌ی دوم را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$2x-2y+3z=7 \; ; \; 4x-7y-3z=-19$$

باحذف یکی از مجهول‌ها مثل z، خواهیم داشت:

$$6x-9y=-12$$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$$2x-3y=-4$$

یک جواب خصوصی معادله $x=1$ و $y=2$ است. بنابراین، جواب عمومی معادله چنین است:

$$x=3k-2 \;,\; y=2k \quad (k \in Z)$$

با جایگزین کردن مقدارهای x و y در یکی از معادله‌های دستگاه، خواهیم داشت:

$$2(3k-2)-2(2k)+3z=7 \; ; \; 2k+3z=11$$

با توجه به یک جواب خصوصی این معادله، یعنی $k=1$ و $z=3$، جواب‌های عمومی و صحیح آن چنین است:

$$k=4-3n \; ; \; z=1+2n$$

$$x=3k-2=3(4-3n)-2=10-9n \;,$$
$$y=2k=2(4-3n)=8-6n$$

تنها به ازای $n_1=0$ و $n_2=1$ جواب‌های صحیح و مثبت $(1,2,3)$ و $(10,8,1)$ حاصل می‌شوند. بنابراین، دستگاه بالا فقط دو جواب صحیح و مثبت دارد.

دو معادله با سه مجهول

تبصره‌ی ۴: اگر $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in Z$ یک جواب خصوصی معادله‌های دستگاه زیر باشد:

$$ax+by+cz=d \quad \text{و} \quad a'x+b'y+c'z=d'$$

جواب‌های دیگر معادله‌های دستگاه (جواب‌های عمومی صحیح) به ترتیب زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a\alpha+b\beta+c\gamma=d \end{cases} , \begin{cases} a'x+b'y+c'z=d' \\ a'\alpha+b'\beta+c'\gamma=d' \end{cases}$$

از تفاضل معادله‌های دستگاه، به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0 \\ a'(x-\alpha)+b'(y-\beta)+c'(z-\gamma)=0 \end{cases}$$

اگر از دستگاه بالا، یک‌بار $(z-\gamma)$ و بار دیگر $(y-\beta)$ و در آخرین‌بار $(x-\alpha)$ را حذف کنیم، به برابری‌های زیر می‌رسیم:

$$\frac{(x-\alpha)}{bc'-b'c}=\frac{(y-\beta)}{ca'-ac'}=\frac{(z-\gamma)}{ab'-ba'}$$

در صورتی که مقدار مشترک برابری‌های بالا را به $\frac{m}{n}$ نمایش دهیم (که در آن $m,n \in Z$ اعداد صحیحی هستند که انتخاب خواهند شد)، خواهیم داشت:

$$x-\alpha=\frac{m}{n}(bc'-b'c) \;,\; y-\beta=\frac{m}{n}(ca'-ac') \;,$$
$$z-\gamma=\frac{m}{n}(ab'-ba') \;,$$

بنابراین، x، y و z به ازای جمیع مقادیر m، فقط وقتی عدد صحیح هستند که n یک فاکتور مشترک عبارت‌های $(bc'-b'c)$، $(ca'-ac')$ و $(ab'-ba')$ باشد.

چون هر فاکتور مشترک از این اعداد، یک فاکتور از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک است، از آن‌جا، تمام جواب‌های صحیح از برابری‌های زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-\alpha}{bc'-b'c}=\frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}=\frac{m}{k}$$

در برابری‌های بالا، k بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک مخرج کسرهاست. اگر داشته باشیم:

$$bc'-b'c=0:\ x=\alpha,\ \frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}$$

به سادگی جواب‌های عمومی صحیح معادله به دست می‌آیند:

$$x=\alpha,\ \frac{y-\beta}{ca'-ac'}=\frac{z-\gamma}{ab'-ba'}=\frac{m}{s}$$

در برابری‌های بالا، s بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک $ab'-ba'$ و $ca'-ac'$ است.

..........یک معادله با k مجهول .... که یکی از ضریب‌های مجهول آن واحد است

تبصره‌ی ۵: در معادله‌ای با k مجهول:

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+...+a_kx_k=a_{k+1}$$

در صورتی که یکی از ضریب‌های مجهول‌ها برابر واحد باشد، معادله به سادگی قابل حل است. برای مثال، اگر $a_1=1$، معادله با k پارامتر دل‌خواه در مجموعه اعداد صحیح قابل حل است:

$$a_1=1:\ x_1++a_2x_2+a_3x_3+...+a_kx_k=a_{k+1}$$

برای حل معادله، کافی است برای x_2، x_3، ... و x_k، مقادیر صحیح دل‌خواه اختیار و x_1 را برحسب مقادیر جدید محاسبه کنیم $(m_1,m_2,...,m_{k-1}\in Z)$:

$$x_2=m_1,x_3=m_2,x_4=m_3,...,x_k=m_{k-1};$$

$$x_1=a_{k+1}-a_2m_1-a_3m_2-a_4m_3-...-a_km_{k-1}$$

توجه: در برخی معادله‌ها، از تفاضل یا جمع آن‌ها می‌توان مضرب یکی از مجهول‌ها را واحد کرد و معادله را به سادگی حل نمود.

........حل معادله‌های سیاله‌ی چند متغیره .... به کمک هم‌نهشتی

برای حل معادله‌های سیاله‌ی خطی چندمجهولی به صورت عمومی زیر:

$$ax+by+cz+...+\lambda z=d$$

ابتدا شرایط جواب و محدودیت‌های x، y، z و... را تعیین می‌کنیم. سپس با مقادیر متفاوت متغیرها و توجه به محدودیت‌ها، به معادله‌های جدید تقلیل یافته می‌رسیم و معادله‌های جدید دومتغیره‌ی نهایی را به کمک هم‌نهشتی حل می‌کنیم.

مثال: جواب‌های صحیح و مثبت معادله‌ی سیاله‌ی زیر را به کمک هم‌نهشتی حل کنید.

$$14x+22y+52z=260$$

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$$7x+11y+26z=130$$

می‌بینیم، بزرگ‌ترین ضریب مجهول‌ها، ضریب z است. بنابراین، اگر x و y کم‌ترین مقدار را داشته باشند، محدودیت z معین می‌شود:

$$x=1,y=1:\ 7+11+26z\le 130\ ;\ z\le 4$$

پس می‌توان نوشت:

$$z_1=1:\ 7x_1+11y_1=104\ ;$$
$$7x_1\overset{11}{\equiv}104\ ;\ 7x_1\overset{11}{\equiv}5\ ;$$

$$x_1=7,y_1=5$$

به همین ترتیب:

$$z_2=2:\ 7x_2+11y_2=78\ ;$$
$$7x_2\overset{11}{\equiv}78\ ;\ 7x_2\overset{11}{\equiv}5\ ;$$
$$x_2=8,y_2=2$$

(معادله به ازای $z_3=3$ و $z_4=4$، جواب صحیح ندارد).

معادله به ازای $z_1=1$ و $z_2=2$ دارای دو دسته جواب خصوصی (۷،۵،۱) و (۸،۲،۲) است که می‌توان با استفاده از این جواب‌های اختصاصی و با توجه به آن‌چه ارائه شد، جواب‌های عمومی معادله را نوشت.