● سید محمدرضا هاشمی موسوی

معادله‌های سیاله و روش‌های حل آن‌ها

اشاره

در قسمت قبل، به کاربردهای هم‌نهشتی در حل مسئله‌هایی در سطح المپیاد اشاره کردیم. در این قسمت می‌کوشیم، ابتدا روش‌های حل معادله‌های سیاله را بیاوریم و سپس روش‌های جدید حل معادله‌های دیوفانتی چند متغیره را که بر پایه‌ی هم‌نهشتی است، ارائه دهیم. از آن‌جا که بسیاری از مسئله‌های علوم پایه (ریاضی، فیزیک، شیمی و...) به یک معادله‌ی جبری چند متغیره می‌انجامد، اهمیت روش‌های حل معادله‌های سیاله‌ی چند متغیره به وضوح روشن می‌شود.

معادله‌های سیاله

می‌دانیم، بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است. از لحاظ تاریخی، این‌گونه مسئله‌ها از زمان **دیوفانت** مطرح بوده‌اند و به همین مناسبت به آن‌ها «معادله‌های دیوفانتی» می‌گویند. از طرف دیگر، بسیاری از مسئله‌های فیزیک، شیمی و دیگر رشته‌ها، به حل یکی از انواع درجه nام معادله‌های سیاله منجر می‌شود که هیچ الگوریتمی برای حل آن‌ها وجود ندارد. در حال حاضر نیز این‌گونه معادله‌ها در مسابقه‌ها و المپیادها، به‌عنوان مسئله‌هایی مستقل دیده می‌شوند. بنابراین، حل و بحث در مورد معادله‌های سیاله، بسیار ضروری به‌نظر می‌رسد.

اگرچه تا به‌حال به جز در مورد معادله‌های سیاله‌ی درجه اول دو مجهولی و یا بعضی از نوع‌های دیگر، فقط راه‌حل‌های عمومی و کلی ذکر شده است، ولی در واقع ذوق و ابتکار هر شخص، بیش از هر قاعده‌ای می‌تواند وسیله‌ای برای حل این‌گونه معادله‌ها باشد. ویژگی اصلی این مقاله آن است که روش حل و یک جواب عمومی معادله‌های درجه nام با ضرایب گویا را به‌دست می‌دهد که در اصل به بررسی معادله‌های سیاله‌ی عمومی از نظر وجود جواب با ضرایب گویا خاتمه می‌دهد؛ زیرا معادله‌های سیاله از نظر تعداد می‌توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند. برای مثال، برای معادله‌ی سیاله‌ی $x + y = 1$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی، هیچ جوابی یافت نمی‌شود، ولی در مجموعه‌ی اعداد صحیح، بی‌شمار جواب به صورت $(x,y) = (\alpha, 1-\alpha)$ وجود دارد.

معادله‌های سیاله‌ی درجه اول دو مجهولی

تاکنون مسئله‌های گوناگونی مطرح شده‌اند که در واقع به یک معادله‌ی دو مجهولی ساده می‌انجامند و پس از بررسی از نظر وجود جواب، به یک نتیجه‌ی قطعی منتهی شده‌اند. صورت عمومی معادله‌های سیاله درجه اول دو مجهولی را که از ابتدا مطرح بوده‌اند، با فرض وجود a، b و c پارامتر و این‌که x و y مجهول باشند، به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$ax + by = c \qquad (1)$$

درباره‌ی معادله‌ی ۱ باید متذکر این واقعیت شد که برای به دست آوردن جواب‌های گویای بسیاری از **معادلات خاص** از نوع ۱ در کارهای دیوفانتین اسکندرانی (۲۵۰ سال بعد از میلاد) روش قانون‌مندی پیدا شده است. در واقع، عبارت «**معادله‌های دیوفانتی**» به معادله‌هایی اطلاق می‌شود که جواب‌های آن‌ها اعدادی گویا باشند. اما در زمان حاضر،

معادله‌هایی که جواب‌های صحیح برای آن‌ها در نظر گرفته شود، به «معادله‌های دیوفانتی» مشهورند.

در این‌جا، جواب‌های صحیح معادله‌ی عمومی ۱ مورد نظر است. پیش از بحث روی وجود جواب‌های معادله‌ی ۱ و بیان قضیه‌ی مربوط به آن، چند مثال کاربردی ارائه می‌دهیم که به نوع خاصی از معادله‌ی ۱ منجر می‌شوند.

مثال ۱: علی با ۲۰۰۰ تومان، چند عدد مداد ۱۵۰ تومانی و چند عدد دفترچه‌ی ۳۵۰ تومانی می‌تواند خریداری کند؛ با شرط این‌که تعداد مدادها از ۴ عدد و تعداد دفترچه‌ها از ۳ عدد کم‌تر نباشد.

حل: با توجه به شرایط مسئله، با معادله‌ی دیوفانتی زیر روبه‌رو هستیم: $150x+350y=2000$؛ ($y\ge 3$: تعداد دفترچه‌ها و $x\ge 4$: تعداد مدادها) پس از تقسیم معادله بر ۵۰، به معادله‌ی ساده شده‌ی زیر می‌رسیم:

$3x+7y=40$

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x=\frac{40-7y}{3}=13-2y+\frac{1-y}{3}$$

با فرض $t=\frac{1-y}{3}$ خواهیم داشت:

$x=11+7t\ ,\ y=1-3t$

$t=-1:\ x=4\ ;\ y=4$

تنها جواب مسئله با شرایط مذکور، ۴ عدد مداد و ۴ عدد دفترچه است. ملاحظه می‌شود، همیشه تعداد جواب‌ها به شرایط اولیه‌ی مذکور در مسئله بستگی دارد. در مثال اخیر، شرایط اولیه‌ی تعداد مدادها و دفترچه‌ها، سبب منحصر به فرد بودن جواب، یعنی به تعداد برابر دفترچه و مداد شد:

$x=y\ ;\ 3x+7x=40\ ;\ 10x=40\ ;\ x=4$

(تعداد مداد یا دفترچه) $x=y=4$

حل و بحث معادله‌ی سیاله‌ی خطی $ax+by=c$ (۱)

از نظر تحلیلی، معادله‌ی درجه اول دو مجهولی ۱، در صفحه‌ی مختصات دکارتی، می‌تواند نمودار یک خط راست را مشخص کند که با رسم چنین خطوطی آشنا هستید. می‌دانیم، هر خط به معادله‌ی ۱ که در آن a و b هر دو با هم صفر نباشند، نشان دهنده‌ی بی‌نهایت نقطه است که با اختیار عددی برای x یا y، دیگری به دست می‌آید. برای مثال، اگر $x=0$ و $b\neq 0$، مقدار y محاسبه می‌شود: $y=\frac{c}{b}$ و اگر $y=0$ و $a\neq 0$، مقدار x محاسبه می‌شود: $x=\frac{c}{a}$.

در این‌جا، برای بحث روی معادله‌ی ۱، کافی است به دو پرسش زیر پاسخ دهیم:

۱. آیا معادله‌ی ۱ با فرض صحیح بودن a، b و c در مجموعه‌ی اعداد صحیح (Z) جواب صحیح دارد؟ به بیان دیگر، نقطه‌ی $A\begin{vmatrix}x_\circ\\y_\circ\end{vmatrix}$ را که $y_\circ\in Z$ و $x_\circ$، چگونه می‌توان تعیین کرد تا در معادله‌ی ۱ صدق کند؟

۲. در صورتی که یک جواب معادله‌ی ۱ مانند $A\begin{vmatrix}x_\circ\\y_\circ\end{vmatrix}$ معلوم باشد، چگونه می‌توان همه‌ی جواب‌های صحیح معادله را تعیین کرد؟ به بیان دیگر، با فرض وجود یک جواب صحیح معادله‌ی ۱، چگونه جواب عمومی معادله‌ی ۱ را ارائه دهیم؟

بسیاری از مسئله‌های جبر به معادله‌هایی می‌انجامد که تعداد مجهول‌های مسئله، بیش از تعداد معادله‌های مربوط به آن است

پاسخ پرسش اول را در برهان قضیه‌ی زیر می‌توان یافت:

قضیه: معادله‌ی ۱ در مجموعه‌ی اعداد صحیح Z دارای جواب است، اگر و تنها اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک a و b (ضریب‌های x و y). عدد c (ثابت معادله) را بشمارد. در واقع، اگر $(a,b)=d$، آن‌گاه باید داشته باشیم: $d|c$.

برهان این قضیه در کتاب ریاضیات گسسته پیش دانشگاهی آمده است.

نتیجه: اگر ضریب‌های مجهول‌های معادله‌ی سیاله نسبت به هم اول باشند، معادله همیشه دارای جواب‌های صحیح است.

در این‌جا، جواب عمومی معادله‌ی ۱، توسط یک جواب خصوصی معادله به این صورت تعیین می‌شود:

$\alpha,\beta,a,b\in Z: x=\alpha+bt\ ,\ y=\beta-at$

مثال ۱: در صورتی که یک جواب خصوصی معادله‌ی زیر معلوم (۱۶ و ۹) باشد، جواب عمومی معادله را بیابید.

$24x+14y=440$

حل: چون ۲=(۱۴ و ۲۴)، پس:

$12x+7y=220$

هم‌چنین، با معلوم بودن یک جواب خصوصی معادله، به طور مستقیم می‌توان به جواب عمومی آن رسید:

$(\alpha=9\ ,\ \beta=16)$

$x=9+7t\ ,\ y=16-12t$

جواب‌های طبیعی معادله، به‌ازای مقادیر ۱-، ۰ و ۱ به‌دست می‌آیند:

t	-1	0	1
x	2	9	16
y	28	16	4

مثال۲: عدد۲۹ را به تفاضل دو عدد بنویسید که یکی از آن‌ها بر ۱۱ و دیگری بر ۱۴ بخش‌پذیر باشد.

حل: مسئله، معادل حل معادله‌ی زیر است:

$11x - 14y = 29$;

دو طرف معادله را بر ضریب مجهول کوچک‌تر تقسیم می‌کنیم:

$$x - y - \frac{3y}{11} = 2 + \frac{7}{11} \; ;$$

$$x - y - 2 = \frac{3y + 7}{11} = t \; ;$$

$$3y + 7 = 11t \; ; \; y = \frac{11t - 7}{3} = 3t + \frac{2t}{3} - 2 - \frac{1}{3} \; ;$$

$$y - 3t + 2 = \frac{2t - 1}{3} = k \; ; \; 2t - 1 = 3k \; ;$$

$$t = \frac{3k + 1}{2} = k + \frac{k + 1}{2} \; ; \; \frac{k + 1}{2} = S \; ; \; k = 2S - 1$$

پس از جایگزینی مقدارهای فوق و اختصار لازم، خواهیم داشت:

$x = 14S - 5 \; , \; y = 11S - 6$

ساده کردن برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱........

در برخی از صورت‌های معادله‌ی ۱ می‌توان روش‌های ساده‌تری را به‌کار برد تا با سرعت بیش‌تری به جواب برسیم:

۱. اگر ضریب یکی از مجهول‌ها و مقدار ثابت، مقسوم‌علیه مشترکی داشته باشند، می‌توانیم با انتخاب مجهول کمکی جدید به جای مجهول دوم، دو طرف معادله را به مقسوم‌علیه مشترک ساده کنیم.

مثال۱: جواب عمومی معادله‌ی زیر را بیابید:

$18x - 25y = 21$

حل: چون ۳=(۲۱و۱۸)، پس جمله‌ی $25y$ نیز باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. چون ۱=(۳و۲۵)، پس y باید مضربی از ۳ باشد: $y = 3t$

$18x - 75t = 21$

معادله را به ۳ ساده می‌کنیم:

$6x - 25t = 7$

در این جا، معادله‌ی ساده شده را حل می‌کنیم:

$$6x = 25t + 7 \; ; \; x = \frac{25t + 7}{6} = 4t + 1 + \frac{t + 1}{6}$$

$$\frac{t + 1}{6} = k \; ; \; t = 6k - 1 \; ; \; x = 25k - 3$$

$$y = 3(6k - 1) = 18k - 3 \; ; \; y = 18k - 3$$

۲. در ضمن محاسبه‌ی یکی از مجهول‌ها بر حسب مجهول دیگر، اگر بین جمله‌های صورت کسری که به‌دست می‌آید (پس از گرفتن مقدار صحیح آن) مقسوم‌علیه مشترکی وجود داشته باشد، معادله را ساده‌تر می‌توان حل کرد.

مثال۲: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$24x + 17y = 41$

حل: ابتدا y را بر حسب x محاسبه می‌کنیم:

$$17y = 41 - 24x \; ; \; y = 2 - x + \frac{7 - 7x}{17} \; ;$$

$$y = 2 - x + 7\left(\frac{1 - x}{17}\right) \; ; \; \frac{1 - x}{17} = t \; ; \; x = 1 - 17t$$

$$y = 2 - (1 - 17t) + 7t = 1 + 24t \; ; \; y = 1 + 24t$$

هم‌چنین:

۳. در ضمن تقسیم، ممکن است باقی‌مانده بزرگ‌تر از نصف مقسوم‌علیه باشد. در این صورت بهتر است از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شود.

مثال۳: معادله‌ی سیاله‌ی زیر را حل کنید.

$11x - 40y = 49$

حل: ابتدا x را بر حسب y حل می‌کنیم:

$$x = \frac{49 + 40y}{11} = 4 + 3y + \frac{5 + 7y}{11} \; ; \; \frac{5 + 7y}{11} = t \; ;$$

$$y = \frac{11t - 5}{7} = t - 1 + \frac{4t + 2}{7} \; ; \; \frac{4t + 2}{7} = k$$

$$t = \frac{7k - 2}{4} \overset{**}{=} \frac{8k - k - 2}{4} = 2k - \frac{k + 2}{4} \; ;$$

$$\frac{k + 2}{4} = m ; k = 4m - 2$$

پس از اختصار لازم:

$x = 40m - 21 \; , \; y = 11m - 7$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک کسرهای مسلسل

به کمک کسرهای مسلسل می‌توان یکی از جواب‌های معادله‌ی سیاله‌ی ۱ را در صورت وجود به‌دست آورد. این مطلب را ضمن مثال نشان می‌دهیم.

مثال۱: معادله‌ی سیاله‌ی $30x + 86y = 16$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به ۲ ساده می‌کنیم:

$15x + 43y = 8$

کسر $\frac{43}{15}$ را در نظر می‌گیریم و آن را به کسر مسلسل تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{43}{15}=2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2}}}$$

در این جا، کسر متقارب ماقبل آخر را در نظر می گیریم. این کسر برابر $\frac{20}{7}$ است. آخرین کسر برابر با مقدار حقیقی کسر $\frac{43}{15}$ است و $\frac{20}{7}$ هم کسر متقارب ردیف فرداست. پس با توجه به قضیه‌های مربوط به کسرهای مسلسل می توان نوشت:

$$\frac{43}{15}-\frac{20}{7}=\frac{1}{15\times 7}$$

برابری عددی بالا را به صورت زیر می نویسیم:

$$43\times 7-15\times 20=1$$

دو طرف برابری بالا را هشت برابر می کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی، برابری عددی زیر را می نویسیم:

$$15(-160)+43(56)=8$$

با مقایسه‌ی رابطه عددی اخیر و معادله‌ی اصلی، یک جواب معادله به دست می آید:

$$x=-160\ ,\ y=56$$

با وجود یک جواب خصوصی معادله، جواب عمومی معادله به‌دست می آید:

$$\begin{cases}x=-160+43t\\ y=56-15t\end{cases}$$

برای ساده‌تر شدن جواب‌ها، کافی است t را به $t+3$ تبدیل کنیم:

$$x=-160+43(t+3)=-31+43t$$
$$y=56-15(t+3)=11-15t$$

مثال۲: معادله‌ی سیاله‌ی $21x-57y=15$ را به کمک کسرهای مسلسل حل کنید.

حل: معادله را به ۳ ساده می کنیم:

$$7x-19y=5$$

ابتدا $\frac{7}{19}$ را به کسر مسلسل تبدیل می کنیم:

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

کسر متقارب ماقبل آخر $\frac{3}{8}$ و چون کسر متقارب ردیف زوج است:

$$\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19\times 8}$$

این برابری را در $19\times 8\times 5$ ضرب می کنیم و با توجه به معادله‌ی اصلی به‌صورت زیر می نویسیم:

$$7(-40)-19(-15)=5$$

یک جواب خصوصی معادله، $x=-40$, $y=-15$ و جواب عمومی معادله چنین است:

$$\begin{cases}x=-40+19t\\ y=-15+7t\end{cases}$$

حل معادله‌ی سیاله‌ی ۱ به کمک هم‌نهشتی ....

یکی دیگر از کاربردهای هم‌نهشتی، حل معادله‌ی سیاله است. معادله‌ی سیاله‌ی $ax+by=c$ را می توان به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$ax\overset{b}{\equiv}c \text{ و } by\overset{a}{\equiv}c$$

معادله‌های سیاله از نظر تعداد می توانند دارای بی‌شمار جواب باشند و یا هیچ جوابی نداشته باشند

بدیهی است که برای حل هر یک از معادله‌های بالا، شرط $(a,b)|c$ باید برقرار باشد. با فرض این‌که $(a,b)=1$، معادله‌ی سیاله قابل حل است. در صورتی که $(a,b)=d$، آن‌گاه کافی است $d|c$. برای مثال، معادله‌ی $6x+21y=1389$ با توجه به $(6,21)=3$ و $1389=3\times 463$، $3|1389$، دارای جواب است و آن را می‌توان به صورت ساده شده‌ی زیر نوشت:

$$2x+7y=463 \qquad (1)$$

برای حل معادله‌ی بالا به کمک هم‌نهشتی، می توان معادله را به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$2x\overset{7}{\equiv}463\ ;\ 7y\overset{2}{\equiv}463$$

با توجه به برابری‌های $463=7\times 66+1$ و $463=2\times 231+1$ معادله‌های بالا ساده می شوند:

$$2x\overset{7}{\equiv}7\times 66+1\overset{7}{\equiv}1\ ;\ 2x\overset{7}{\equiv}1\ ;\ x=7k+4$$
$$7y\overset{2}{\equiv}2\times 231+1\overset{2}{\equiv}1\ ;\ 7y\overset{2}{\equiv}1\ ;\ y=2s+1$$

با قرار دادن x (یا y) در معادله‌ی اصلی (۱) مجهول دیگری را بر حسب k (یا s) به‌دست می‌آوریم که این جواب عمومی معادله محسوب می شود. زیرا بر حسب پارامتر دل‌خواه k (یا s) است. $2(7k+4)+7y=463\ ;\ y=65-2k$ بنابراین، جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است:

$$(x=7k+4\ ,\ y=65-2k)\ ;\ (x=228-7s\ ,\ y=2s+1)$$

برای آزمایش جواب‌ها کافی است هر جفت جواب را داخل معادله‌ی اصلی (۱) قرار دهیم.

پی نوشت ....

hashemi- moosavi@ yahoo.com

* برای (x,y) جفت‌های طبیعی (۱۰۴ و ۷)، ... و (۴ و ۲۶۷) به‌دست می آیند.

**: از باقی‌مانده‌ی منفی استفاده شد.