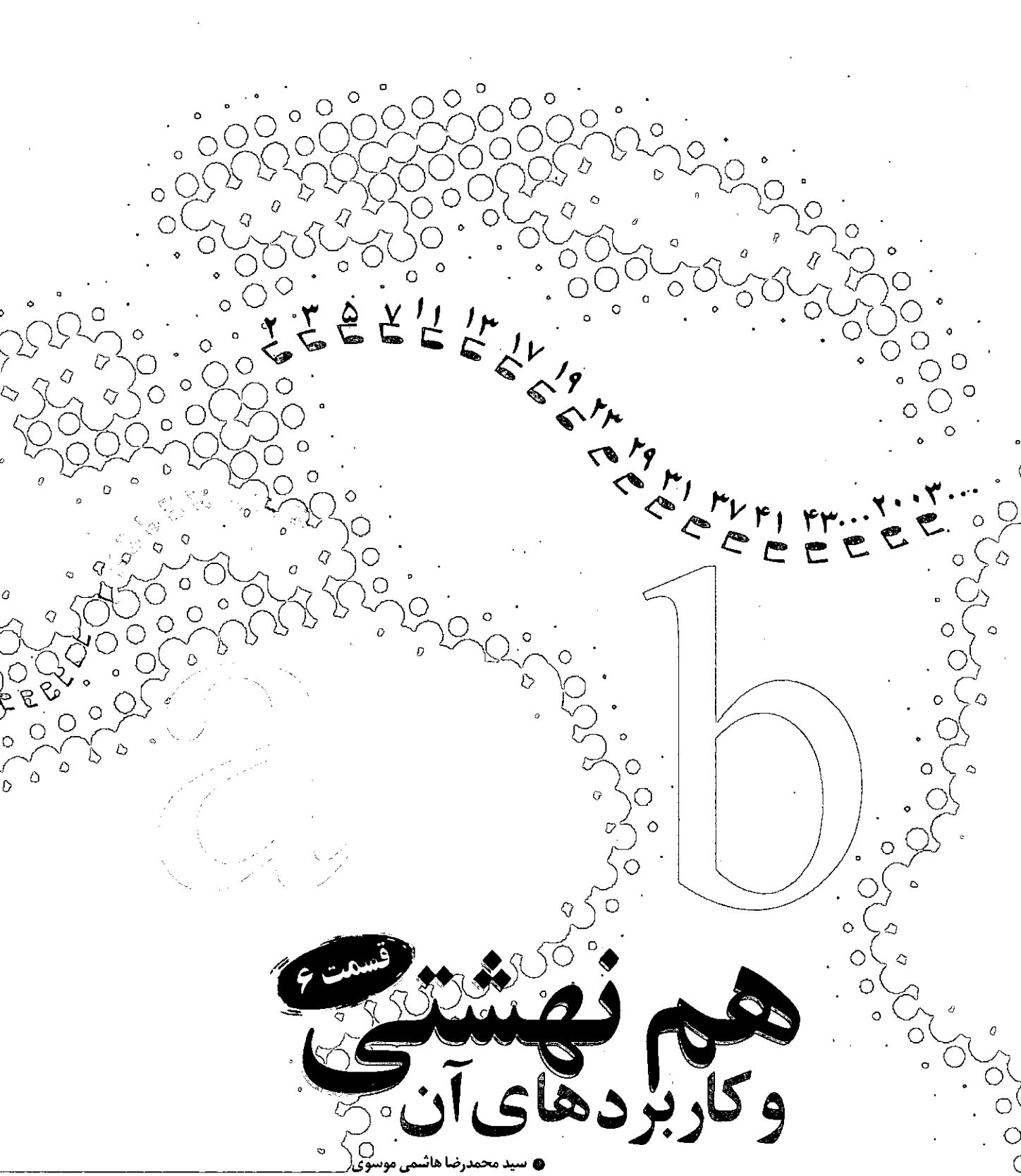

هم‌نهشتی و کاربردهای آن

قسمت ۶

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

اشاره

در قسمت قبل، به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این قسمت نیز به ادامه‌ی مطلب با عنوان قضیه‌ی اویلر، تعمیمی از قضیه‌ی کوچک فرما و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها و معادله‌های سیاله‌ی خطی و درجه‌ی nام و تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم و دیگر مسئله‌های خلاق می‌پردازیم. در آخر مبحث، تمرین‌هایی هدف‌دار طراحی شده‌اند که با مشاهده‌ی مثال‌های متن درس می‌توانید، آن‌ها را حل کنید. برای فراگیری بهتر مطالب، بکوشید مثال‌هایی

نظیر و یا در تعمیم مسئله‌ها طراحی و حل کنید.

قضیه‌ی اویلر و کاربردهای آن

قضیه‌ی اویلر که می‌توان آن را به‌عنوان یک قضیه‌ی مستقل معرفی کرد، در واقع تعمیمی از قضیه‌ی فرماست. ابتدا به عنوان این قضیه‌ی بسیار مهم و اثبات آن می‌پردازیم. توجه به این نکته لازم است که فرما قضیه‌ی کوچک خود را حدود ۸۰ سال قبل از اویلر بیان کرد.

قضیه‌ی اویلر: اگر m عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد و $(m,a)=1$، آن‌گاه: $a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$

تبصره‌ی ۱: تابع φ را تابع حسابی اویلر می‌نامند و این یک تابع ضربی است که برای $m>1$ در واقع برابر تعداد اعداد طبیعی و کوچک‌تر از m است که نسبت به m اول‌اند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$m = p_1 . p_2 . p_3 \cdots . p_n$$

$$\varphi(m) = m(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})(1-\frac{1}{p_3})\cdots(1-\frac{1}{p_n})$$

در این رابطه، p_1، p_2، ... و p_n اعداد اول هستند که m به حاصل‌ضرب n عدد اول تجزیه شده است. بدیهی است، اگر m برابر عددی اول باشد:

$$m=p : \varphi(m)=\varphi(p)=p(1-\frac{1}{p})=p-1$$

برای مثال، $\varphi(1)$، $\varphi(2)$، $\varphi(6)$، $\varphi(60)$ و $\varphi(2003)$ را تعیین می‌کنیم:

$$\varphi(1)=1 \ , \ \varphi(2)=1 \ , \ \varphi(6)=6(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})=2$$

$$\varphi(60)=60(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=16 \ ,$$

$$\varphi(2003)=2003-1=2002$$

(عدد $p=2003$ اول است و $60=2^2\times 3\times 5$)

تبصره‌ی ۲. چون φ یک تابع ضربی است، از تعریف $\varphi(m)$ داریم:

۱) $m,n\in N \ , \ (m,n)=d : \varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n)\times\frac{d}{\varphi(d)}$ (*)

(d: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی m و n)

اگر m و n نسبت به هم اول باشند، یعنی

$\varphi(mn)=\varphi(m).\varphi(n) \ : \ (m,n)=1$

$m=1 \ , \ n=p(\ ) \ ; \ (p,1)=1$

$\varphi(1\times p)=\varphi(1).\varphi(p)=1.\varphi(p)=p-1$

۲) $\varphi(10^n)=10^n(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=10^{n-1}\times 4$

۳) $\varphi(2n)^{\circ}=\begin{cases}2\varphi(n) & n \text{ زوج}\\ \varphi(n) & n \text{فرد}\end{cases}$

۴) $\varphi(3n)\overset{(*)}{=}\begin{cases}3\varphi(n) & 3\mid n\\ 2\varphi(n) & 3\nmid n\end{cases}$

۵) $n=2^k \ : \ \varphi(n)=\varphi(2^k)=2^k(1-\frac{1}{2})=\frac{2^k}{2}=\frac{n}{2}$

۶) $n\in N \ : \ \varphi(n^2)=\varphi(n,n)\overset{(*)}{=}\varphi(n).\varphi(n).\frac{(n,n)}{\varphi(n,n)}=n\varphi(n)$

۷) $(a,b)=d \ , \ [a,b]=c \ : \ \varphi(a)\varphi(b)=\varphi(c)\varphi(d)$

$(d=1 \ ; \ c=ab \ : \ \varphi(ab)=\varphi(a).\varphi(b))$

۸) $\sum_{i=1}^{k}\varphi(d_i)=m(d_1,d_2,\ldots,d_k)$:m شمارنده‌های مثبت

اثبات قضیه‌ی اویلر

اگر $(a,m)=1$ و فرض کنیم x_1، x_2، ... و x_n که در آن $n=\varphi(m)$، دسته‌ی ساده‌ی باقی‌مانده، به پیمانه‌ی m باشند، واضح است که عددهای ax_1، ax_2، ... و ax_n نیز دسته‌ی باقی‌مانده‌ها، به پیمانه‌ی m هستند؛ زیرا:

$$(a,m)=1 \ , \ n=\varphi(m) : \quad ax_1 \overset{m}{\equiv} x_1$$

$$ax_2 \overset{m}{\equiv} x_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$ax_n \overset{m}{\equiv} x_n$$

از ضرب هم‌نهشتی‌ها:

$$a^n x_1.x_2.\ldots x_n \overset{m}{\equiv} x_1.x_2.\ldots x_n$$

چون $(m, x_1x_2\ldots x_n) = 1$، پس از اختصار لازم خواهیم داشت:

$$a^n \overset{m}{\equiv} 1 \; ; \; a^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1$$

بدیهی است، اگر m عدد اولی مثل p باشد، قضیه‌ی اویلر به حالت خاص، یعنی قضیه‌ی کوچک فرما تبدیل می‌شود:

$$m = p : \varphi(p) = p-1 \; ; \; a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$$ (قضیه‌ی فرما)

تذکر: در قسمت‌های قبل ثابت شد، قضیه‌ی لاینیتز حالت خاصی از قضیه‌ی ویلسن و قضیه‌ی ویلسن نیز نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک فرماست. بنابراین، در این جا ثابت می‌شود، از قضیه‌ی اویلر، قضیه‌های لاینیتز، ویلسن و فرما نتیجه خواهد شد:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$ (قضیه‌ی ویلسن) , $$(p-1)! \overset{p}{\equiv} (p-2)$$ (قضیه‌ی لاینیتز)

هم‌چنین می‌توان ثابت کرد، قضایای فرما و ویلسن جمعاً با این حکم معادل‌اند که به ازای هر عدد اول p و هر عدد صحیح a، عدد $a + a^p = M$ عبارت عددی $(p-1)!a + a^p = M$ را می‌شمارد:

$$P|M$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $۷^{۸۳}$ بر ۳۰ را بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر و برابری $۵ \times ۳ \times ۲ = ۳۰$، می‌توان نوشت:

$$\varphi(۳۰) = ۳۰(1-\frac{1}{۲})(1-\frac{1}{۳})(1-\frac{1}{۵}) = ۸ \; ; \; ۷^{\varphi(۳۰)} \overset{۳۰}{\equiv} 1$$

$$۷^{۸} \overset{۳۰}{\equiv} 1 \; ; \; ۷^{۸۰} \overset{۳۰}{\equiv} 1 \; ; \; ۷^{۸۳} \overset{۳۰}{\equiv} ۷^{۳} = ۷(۷^{۲}) \overset{۳۰}{\equiv} ۷(۱۹) \overset{۳۰}{\equiv} ۱۳$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $N = ۸۷ \times ۴۷^{۲۰۰۸}$ بر ۱۲ را بیابید.

حل: $(۴۷,۱۲) = 1 \; , \; ۴۷^{\varphi(۱۲)} \overset{۱۲}{\equiv} 1 \; ; \; ۴۷^{۴} \overset{۱۲}{\equiv} 1 \; ; \; (۴۷^{۴})^{۵۰۲} \overset{۱۲}{\equiv} 1$

$$\varphi(۱۲) = \varphi(۲^{۲} \times ۳) = ۱۲(1-\frac{1}{۲})(1-\frac{1}{۳}) = ۴$$

$$۸۷ \times ۴۷^{۲۰۰۸} \overset{۱۲}{\equiv} ۳ \; ; \; ۴۷^{۲۰۰۸} \overset{۱۲}{\equiv} 1$$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم) ۳

مثال: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۹۰ را که نسبت به ۶۰ و ۳۶ اول‌اند تعیین کنید.

حل:

$$۳۹۰ = ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۱۳ \; , \; (a, ۶۰) = 1 \; ; \; (a, ۲^{۲} \times ۳ \times ۵) = 1 \; (1)$$

$$(a, ۳۶) = 1 \; ; \; (a, ۲^{۲} \times ۳^{۲}) = 1 \; (2) \xrightarrow{(2),(1)} (a, ۲ \times ۳ \times ۵) = 1$$

$$۳۹۰(1-\frac{1}{۲})(1-\frac{1}{۳})(1-\frac{1}{۵}) = ۳۹۰ \times \frac{1}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۵} = ۱۰۴$$ = جواب مسئله

۱۰۴ عدد طبیعی وجود دارد که نسبت به دو عدد ۳۶ و ۶۰ اول‌اند.

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید:

$$N = ۳^{۱۳۶۷} \times ۲۰۰۸$$

حل:

$$(۳,۱۰۰) = 1 \; , \; \varphi(۱۰۰) = \varphi(۱۰^{۲}) = ۱۰^{۲-۱} \times ۴ = ۴۰$$

با توجه به قضیه‌ی اویلر:

$$۳^{\varphi(۱۰۰)} \overset{۱۰۰}{\equiv} 1 \; ; \; ۳^{۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} 1 \; ; \; (۳^{۴۰})^{۳۴} \overset{۱۰۰}{\equiv} 1 \; ; \; ۳^{۱۳۶۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} 1$$

$$۳^{۱۳۶۰} \times ۳^{۷} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۳^{۷} = ۲۱۸۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸۷ \; ; \; ۲۰۰۸ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸$$

$$N = ۳^{۱۳۶۷} \times ۲۰۰۸ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۸۷ \times ۸ = ۶۹۶ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۹۶$$

(دو رقم سمت راست N)

مثال: اگر $(m, n) = 1$، نشان دهید:

$$m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$$

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$$(m,n) = 1 \; ; \; m^{\varphi(n)} \overset{n}{\equiv} 1 \; (1) \; , \; n^{\varphi(m)} \overset{m}{\equiv} 1 \; (2)$$

از طرفی، هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی است:

$$m^{\varphi(n)} \overset{m}{\equiv} ۰ \; (3) \; , \; n^{\varphi(m)} \overset{n}{\equiv} ۰ \; (4)$$

از جمع هم‌نهشتی‌ها

$$(1)+(4) : m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{n}{\equiv} 1 \; (5),$$

$$(2)+(3) : n^{\varphi(m)} + m^{\varphi(n)} \overset{m}{\equiv} 1 \; (6)$$

از جمع ۵ و ۶ هم‌نهشتی مورد نظر حاصل می‌شود:

$$(5)+(6) : m^{\varphi(n)} + n^{\varphi(m)} \overset{mn}{\equiv} 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k را بر ۹۶۰ بیابید:

$$k = ۲۵^{۴۸} + ۱۶۸^{۲۰}$$

حل: با توجه به برابری‌های $۱۶۸ = ۲^{۳} \times ۳ \times ۷$ و $۲۵ = ۵^{۲}$ و قضیه‌ی اویلر و مثال قبل:

$۲۵^{\varphi(۱۶۸)} + ۱۶۸^{\varphi(۲۵)} = ۲۵^{۴۸} + ۱۶۸^{۲۰} \overset{۲۰\times۴۸}{\equiv} ۱$;

$k \overset{۹۶۰}{\equiv} ۱$ (باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: نشان دهید اگر $(m,۵) = (n,۵) = ۱$ ، آن‌گاه: $۲۵ \mid (m^{۲۰} - n^{۲۰})$

حل: با توجه به برابری $۲۵ = ۵^۲$ و قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$(m,۵) = ۱$; $(m,۲۵) = ۱$: $m^{\varphi(۲۵)} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$

$\varphi(۲۵) = ۲۵(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۲۰$

$m^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$, $(n,۲۵) = ۱$; $n^{\varphi(۲۵)} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$; $n^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۱$

بنابراین:

$m^{۲۰} - n^{۲۰} \overset{۲۵}{\equiv} ۰$; $۲۵ \mid m^{۲۰} - n^{۲۰}$

مثال: اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $k^{۵۴}$ بر ۸۱ را بیابید.

حل: با توجه به برابری $۸۱ = ۳^۴$ و قضیه‌ی اویلر:

$\varphi(۸۱) = ۸۱(۱ - \frac{۱}{۳}) = ۵۴$; $۳ \mid k$ یا $(۳,k) = ۱$

$(۳^۴, k) = ۱$; $k^{\varphi(۸۱)} \overset{۸۱}{\equiv} ۱$; $k^{۵۴} \overset{۸۱}{\equiv} ۱$ $(۳,k) = ۱$

بدیهی است که در حالت $۳ \mid k$ یا $۳^۴ \mid k^۴$:

$۳^۴ \mid k^{۵۴}$; $k^{۵۴} \overset{۸۱}{\equiv} ۰$

مثال: نشان دهید اگر $(۱۰,m) = ۱$ ، آن‌گاه سه رقم سمت راست m و $m^{۱۰۱}$ با هم برابرند.

حل: برای اثبات حکم، باید نشان دهیم: $m^{۱۰۱} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} m$

با توجه به برابری $۱۰۰۰ = ۸ \times ۱۲۵$ و قضیه‌ی اویلر، می‌توان نوشت:

$\varphi(۸) = \varphi(۲^۳) = ۸(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۴$, $\varphi(۱۲۵) = \varphi(۵^۳)$

$= ۱۲۵(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۱۰۰$

$m^{\varphi(۱۲۵)} \overset{۱۲۵}{\equiv} ۱$; $m^{۱۰۰} \overset{۱۲۵}{\equiv} ۱$ (۱) , $\varphi(۸) \mid \varphi(۱۲۵)$; $m^{۱۰۰} \overset{۸}{\equiv} ۱$ (۲)

از روابط ۱ و ۲ خواهیم داشت:

$m^{۱۰۰} \overset{۸\times۱۲۵}{\equiv} ۱$; $m^{۱۰۰} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۱$; $m^{۱۰۱} \overset{۱۰۰۰}{\equiv} m$

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$N = ۱۳۸۸ \times ۷^{۳۰۰۱}$

حل: با توجه به قضیه‌ی اویلر:

$\varphi(۱۰۰) = \varphi(۲^۲ \times ۵^۲) = ۱۰۰(۱ - \frac{۱}{۲})(۱ - \frac{۱}{۵}) = ۴۰$

$(۷,۱۰۰) = ۱$; $۷^{\varphi(۱۰۰)} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$; $۷^{۴۰} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$; $(۷^{۴۰})^{۷۵} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱$

$۷^{۳۰۰۰} \times ۷ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۷$; $N = ۱۳۸۸ \times ۷^{۳۰۰۱} \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۳۸۸ \times ۷ = ۹۷۱۶$;

$N \overset{۱۰۰}{\equiv} ۹۷۱۶ \overset{۱۰۰}{\equiv} ۱۶$

(دو رقم سمت راست عدد N برابر ۱۶ است)

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی خطی عمومی $ax+by=c$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر حل کنید.

حل: ابتدا معادله را به یک معادله‌ی هم‌نهشتی تحویل می‌دهیم:

$ax + by = c$; $ax \overset{b}{\equiv} c$ یا $by \overset{a}{\equiv} c$

می‌دانیم شرط جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی مورد نظر $(a,b) \mid c$ است. پس برای حل معادله‌ی مورد نظر، همیشه باید داشته باشیم $(a,b) = ۱$ که با این فرض خواهیم داشت:

$(a,b) = ۱$; $x \overset{b}{\equiv} ca^{\varphi(b)-۱}$ یا $y \overset{a}{\equiv} cb^{\varphi(a)-۱}$

مثال: معادله‌ی سیاله‌ی $۳x + ۴y = ۱۹$ را حل کنید.

حل: با توجه به $(۳,۴) = ۱$ و قضیه‌ی اویلر می‌توان نوشت:

$\varphi(۴) = ۴(۱ - \frac{۱}{۲}) = ۲$; $x \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \times ۳^{\varphi(۴)-۱} = ۱۹ \times ۳ = ۵۷ \overset{۴}{\equiv} ۱$

$x = ۴k + ۱$;

k	۰	۱	۲	...
x	۱	۵	۹	...
y	۴	۱	۳	...

$۳(۴k + ۱) + ۴y = ۱۹$; $y = ۴ - ۳k$

مثال: اگر $(m,n) = ۱$ ، آن‌گاه یک سلسله جواب عمومی معادله‌ی زیر را با استفاده از قضیه‌ی اویلر تعیین کنید.

$x^n + y^n = z^m$ (۱)

حل: برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را تعیین می‌کنیم:

$k > ۱$, $k \in N$: $x_۱^{k-۱} + x_۲^{k-۱} = x_۴^k$ (۲)

برای تعیین یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۲ ، کافی است آن را با اتحاد زیر مقایسه کنیم :

$$a,b\in Z : (a^k+ab^{k-1})^{k-1}+(ba^{k-1}+b^k)^{k-1}=(a^{k-1}+b^{k-1})^k \quad (۳)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۲ و اتحاد ۳ ، بلافاصله یک سلسله جواب معادله‌ی ۲ به‌دست می‌آید :

$$(x_1,x_2,x_3)=(a^k+ab^{k-1},ba^{k-1}+b^k,a^{k-1}+b^{k-1})$$

در این جا، با فرض $k=m^{\varphi(n)}$ ، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحول می‌شود :

$$x_1^{m^{\varphi(n)}-1}+x_2^{m^{\varphi(n)}-1}=x_3^{m^{\varphi(n)}} \quad (۴)$$

(φ : تابع حسابی اویلر)

طبق قضیه‌ی اویلر، اگر $(m,n)=1$ ، آن‌گاه $(m^{\varphi(n)}-1)$ بر n بخش‌پذیر است :

$$(m,n)=1 \; ; \; m^{\varphi(n)}-1=n\left(1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]\right) \quad (۵)$$

($[\;]$: قسمت درست عدد)

با توجه به رابطه‌ی ۵ بلافاصله یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شود :

$$(۶)\begin{cases} x=(a^{m^{\varphi(n)}}+ab^{m^{\varphi(n)}-1})^{1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]} \\ y=(ba^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}})^{1+2\left[\frac{m^{\varphi(n)}-1}{2n}\right]} \\ z=(a^{m^{\varphi(n)}-1}+b^{m^{\varphi(n)}-1})^{m^{\varphi(n)}-1} \end{cases}$$

$$(m=p^k.q^s.r^t\ldots,\varphi(m)=m(1-\frac{1}{p})\ldots)$$

مثال : معادله‌ی سیاله‌ی درجه‌ی هفتم زیر را حل کنید.

$$34x^7-14y=4282$$

حل : معادله را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$17x^7\equiv 2141 \; ; \; 17x^7\equiv 3x\equiv 6 \; ; \; x\equiv 2$$

$$x=2 \; ; \; y=\frac{17(2)^7-2141}{7}=5 \; ;$$

$x=7k+2 \; , \; y=17s+5$

k	۰	۱	۲	...
x	۲	۹	۱۶	...
y	۵	۶۸۳۲۶۳	۶۵۱۹۱۴۳۷۳	...

تمرین

۱ . حاصل $\varphi(10^{1387})$ ، $\varphi(2008)$ ، $\varphi(kn)$ و $\varphi(2^k)$ را بیابید.

۲ . از قضیه‌ی اویلر ، قضیه‌های فرما، لایبنیتز و ویلسن را نتیجه بگیرید.

۳ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد 7^{87} بر ۲۰ را بیابید.

۴ . تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۴۰۰ را که نسبت به اعداد ۳۰ و ۱۸ اول‌اند، بیابید.

۵ . دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=3^{1364}\times 2009$$

۶ . اگر m و n نسبت به هم اول باشند، نشان دهید :

$$m^{\varphi(n)}+n^{\varphi(m)}\overset{mn}{\equiv}1$$

۷ . باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد k بر ۶۳ را بیابید.

$$k=13^7+78^9$$

۸ . نشان دهید، اگر $(k,3)=(s,3)=1$ ، آن‌گاه :

$$9\mid(m^6-n^6)$$

۹ . اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم N^{294} بر ۳۴۳ را بیابید.

۱۰ . نشان دهید اگر $(10,n)=1$ ، آن‌گاه چهار رقم سمت راست $10m$ و $10m^{101}$ با هم برابرند.

۱۱ . دو رقم سمت راست عدد M را بیابید :

$$M=1389\times 7^{2001}$$

۱۲ . معادله‌ی سیاله‌ی $13x+87y=74$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر حل کنید.

۱۳ . یک سلسله جواب عمومی $x^{1387}+y^{1387}=z^{2003}$ را با استفاده از قضیه‌ی اویلر تعیین کنید.

۱۴ . اگر $(m,n)=1$ ، مضرب k را در برابری زیر تعیین کنید :

$$m^{\varphi(n)}\geq kn+1$$