هم‌نهشتی و کاربردهای آن
قسمت ۵

● سید محمدرضا هاشمی موسوی
hashemi-moosavi@yahoo.com

اشاره

در قسمت قبل به برخی از کاربردهای هم‌نهشتی اشاره شد. در این شماره نیز به ادامه‌ی مطلب که تعیین دو رقم راست یک عدد، تعیین سه‌رقم سمت راست یک عدد، قضیه‌ی ویلسن به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک‌فرما و کاربردهای آن در حل مسئله‌ها و معادله‌های سیاله‌ی درجه‌ی nام و تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم یک عدد شامل فاکتوریل بر یک عدد اول و دیگر مسئله‌های خلاق و ابتکاری می‌پردازیم.

در آخر مبحث، تمرین‌هایی نظیر مثال‌های متن طراحی شده‌اند که می‌توانید با دیدن مثال‌ها، آن‌ها را حل کنید.

تعیین دو رقم سمت راست یک عدد

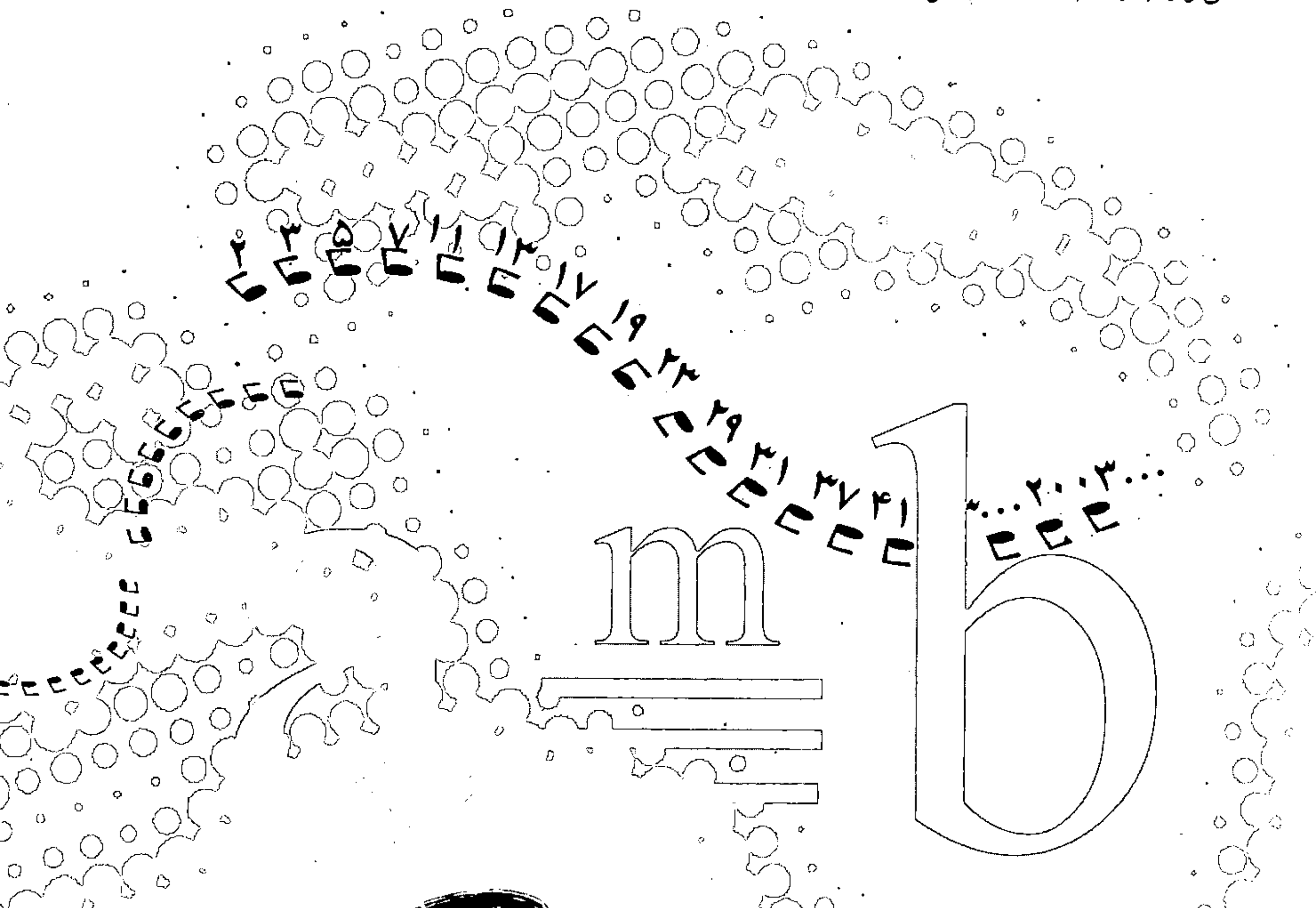
برای تعیین دو رقم سمت راست هر عدد، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰۰ بیابیم. در واقع دو رقم سمت راست عددی مثل N از هم‌نهشتی $N \overset{100}{\equiv} \overline{ab}$ تعیین می‌شود.

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N = 1!+2!+3!+\cdots+1387!$$

حل: بدیهی است که اگر $n \geq 10$، آن‌گاه $n! \overset{100}{\equiv} 0$. پس:

$$N = 1!+2!+3!+\cdots+1387! \overset{100}{\equiv} 1+2+6+24$$
$$+20+20+40+20+80+0+\cdots+$$



$N \overset{100}{\equiv} 213 \overset{100}{\equiv} 13$; $N \overset{100}{\equiv} 13$ (دو رقم سمت راست N)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$M = 2!+4!+6!+\dots+2008!$

حل: با توجه به هم‌نهشتی $n! \underset{(n\geq 10)}{\overset{100}{\equiv}} 0$ ، می‌توان نوشت:

$M = 2!+4!+6!+\dots+2008! \overset{100}{\equiv} 2+24+20+20+0+0+\dots+0 = 66$

$M \overset{100}{\equiv} 66$ (دو رقم سمت راست عدد M)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$M = 2^{1387}+5^{1387}+7^{1387}$

حل: $M = (2^{10})^{138}\times 2^7 + (5^2)^{693}\times 5 + (7^4)^{346}\times 7^3$

$M = (1024)^{138}\times(128)+(25)^{693}\times 5+(2401)^{346}\times(343)$

$M \overset{100}{\equiv} 24^{138}\times 28+25\times 5+(1)^{346}\times 43 \overset{100}{\equiv} 76\times 28+25+43$

$M \overset{100}{\equiv} 2196$; $M \overset{100}{\equiv} 96$ (دو رقم سمت راست عدد M)

مثال: دو رقم سمت راست عدد N را تعیین کنید.

$N = 26^1+26^2+\dots+26^{1388}$

حل: با توجه به نکات قبل، هم‌نهشتی $26^n \overset{100}{\equiv} 76$ بدیهی است، پس:

$N = 26^1+26^2+26^3+\dots+26^{1388} \overset{100}{\equiv} 26+\underbrace{76+76+\dots+76}_{\text{۱۳۸۷ مرتبه}}$

$N \overset{100}{\equiv} 26+1387(76) \overset{100}{\equiv} 26+(87)(76) = 6638 \overset{100}{\equiv} 38$

$N \overset{100}{\equiv} 38$ (دو رقم سمت راست عدد N)

مثال: دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$M = 24^{25^{1387}}+25^{26^{1388}}+26^{24^{1389}}$

حل: با توجه به نکات قبل، هم‌نهشتی‌های زیر بدیهی هستند:

$24^n \underset{(n \text{ فرد})}{\overset{100}{\equiv}} 24$, $25^n \overset{100}{\equiv} 25$, $26^n \underset{(n\geq 2)}{\overset{100}{\equiv}} 76$

بنابراین، چون توان عدد ۲۴ عددی فرد است، پس:

$M \overset{100}{\equiv} 24+25+76$

$M \overset{100}{\equiv} 125 \overset{100}{\equiv} 25$; $M \overset{100}{\equiv} 25$ (دو رقم سمت راست عدد M)

تعیین سه رقم سمت راست یک عدد

برای تعیین سه رقم سمت راست هر عدد، کافی است باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد را بر ۱۰۰۰ بیابیم. در واقع سه رقم سمت راست عددی مثل N، از هم‌نهشتی $N \overset{1000}{\equiv} \overline{abc}$ تعیین می‌شود.

مثال: سه رقم سمت راست عدد N را تعیین کنید.

$N = \left(7^{1387}\times 11^{1388}\times 13^{1389}\right)^2$

حل: با توجه به برابری $7\times 11\times 13 = 1001$ ، می‌توان نوشت:

$N = \left((7\times 11\times 13)^{1387}\times 11\times 13^2\right)^2 = (1001^{1387}\times 1859)^2$

$N = (1001)^{2\times 1387}\times(1859)^2 \overset{1000}{\equiv} (1)^{2\times 1387}\times (859)^2 = 737881 \overset{1000}{\equiv} 881$

$N \overset{1000}{\equiv} 881$ (سه رقم سمت راست عدد N)

مثال: سه رقم سمت راست Nرا از رابطه‌ی زیر بیابید:

$N \overset{1000}{\equiv} 343^{1387}\times 331^{1388}\times 197^{1389}$

حل: با توجه به برابری‌های زیر:

$7^3=343,\ 11^3=1331,\ 13^3=2197,\ 7\times 11\times 13=1001$

می‌توان نوشت:

$N \overset{1000}{\equiv} 343^{1387}\times 331^{1388}\times 197^{1389} \overset{1000}{\equiv} 343^{1387}\times 1331^{1388}\times 2197^{1389}$

$N \overset{1000}{\equiv} (7^3)^{1387}\times(11^3)^{1388}\times(13^3)^{1389} = (7\times 11\times 13)^{3\times 1387}\times 11^3\times 13^6$

$N \overset{1000}{\equiv} (1001)^{3\times 1387}\times(1331)(2197)^2 \overset{1000}{\equiv} (1)^{3\times 1387}\times(331)(197)^2$

$N \overset{1000}{\equiv} (331)(38809) \overset{1000}{\equiv} (331)(809) = 267779 \overset{1000}{\equiv} 779$

$N \overset{1000}{\equiv} 779$ (سه رقم سمت راست عدد N)

مثال: سه رقم سمت راست عدد Mرا بیابید.

$M = (2007)^{2008}.(2011)^{2009}.(2013)^{2010}$

حل:

$M = (2007)^{2008}.(2011)^{2009}.(2013)^{2010} \overset{1000}{\equiv} 7^{2008}\times 11^{2009}\times 13^{2010}$

$M \overset{1000}{\equiv} (7\times 11\times 13)^{2008}\times 11\times 13^2 \overset{1000}{\equiv} (1)^{2008}\times 11\times 169 = 1859 \overset{1000}{\equiv} 859$

$M \overset{1000}{\equiv} 859$ (سه رقم سمت راست عدد M)

مثال: سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$M = 5!+10!+15!+\dots+2010!$

حل: با توجه به هم‌نهشتی $n! \underset{(n\geq 15)}{\overset{1000}{\equiv}} 0$ می‌توان نوشت:

$M = 5!+10!+15!+\dots+2010! \overset{1000}{\equiv} 120+3628800+0+0+\dots+0$

$$M \overset{1000}{\equiv} 3628920 \overset{1000}{\equiv} 920 \;;\; M \overset{1000}{\equiv} 920$$

(سه رقم سمت راست عدد M)

قضیه‌ی ویلسن، نتیجه‌ای از قضیه‌ی کوچک فرما و کاربرد آن

اگر p عددی اول باشد، آن‌گاه:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

اثبات قضیه‌ی ویلسن و نتیجه‌ی آن:

$$(p-2)! \underset{(p\ \text{اول})}{\overset{p}{\equiv}} 1$$

به راحتی از قضیه‌ی کوچک فرما نتیجه می‌شود؛ زیرا کافی است در قضیه‌ی فرما:

$$(a,p)=1 \;;\; a^{p-1} \underset{(p\ \text{اول})}{\overset{p}{\equiv}} 1$$

به‌جای a، عدد $(p-2)!$ یا $(p-1)!$ را جای‌گزین کرد، زیرا:

$$(p,(p-2)!)=1 \;,\; (p,(p-1)!)=1$$

بنابراین:

$$(p>2) \;,\; a=(p-2)! : ((p-2)!)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \;;\; (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

$$(p>2) \;,\; a=(p-1)! : ((p-1)!)^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1 \;;\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

چون $(p-1)$ با فرض $p>2$، عددی زوج است، پس از جذرگیری از دو طرف هم‌نهشتی، اعداد ± 1 ظاهر می‌شوند که از طریق آزمایش معلوم می‌شود، جواب‌های $(p-1)! \overset{p}{\equiv} 1$ و $(p-2)! \overset{p}{\equiv} -1$ خارجی هستند و این قضیه برای $p=2$ نیز برقرار است:

$$(p\ \text{اول}) : (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1 \;,\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

توجه داشته باشیم که از قضیه‌ی ویلسن می‌توان به‌طور مستقیم به رابطه‌ی دیگر رسید؛ زیرا:

$$(p-1)! \overset{p}{\equiv} -1 \;;\; (p-1)! \overset{p}{\equiv} p-1 \;,\; (p-1 \;,\; p)=1 \;;$$

$$(p-2)!(p-1) \overset{p}{\equiv} p-1 \;;\; (p-2)! \overset{p}{\equiv} 1$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $(2002)!$ بر ۲۰۰۳ را بیابید.

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن، چون $p=2003$ عددی اول است، پس می‌توان نوشت:

$$p=2003 : (2003-1)! \overset{2003}{\equiv} -1 \;;\; (2002)! \overset{2003}{\equiv} -1$$

$$(2002)! \overset{2003}{\equiv} -1+2003=2002 \;;\; (2002)! \overset{2003}{\equiv} 2002$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: با استفاده از قضیه‌ی ویلسن، یک سلسله جواب برای معادله‌ی سیاله‌ی زیر بیابید.

$$p_1, p_2 \in \mathbb{N} \;,\; p_1, p_2 < p\ (\text{اول}) : X^{p_1} + Y^{p_2} = Z^p \qquad (1)$$

حل: به‌منظور تعیین جوابی برای معادله‌ی ۱، ابتدا یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$X_1^n + X_2^n = X_3^{n+1} \qquad (2)$$

به این منظور، کافی است که معادله‌ی ۲ را با اتحاد زیر مقایسه کنیم:

$$(a^{n+1}+ab^n)^n + (a^n b + b^{n+1})^n = (a^n+b^n)^{n+1} \qquad (3)$$

از مقایسه‌ی معادله ۲ و اتحاد ۳ خواهیم داشت

$$(4)\left|\begin{array}{l} x_1 = a^{n+1}+ab^n \\ x_2 = a^n b + b^{n+1} \\ x_3 = a^n + b^n \end{array}\right.$$

در این‌جا، با فرض $n=(p-1)!$، معادله‌ی ۲ به معادله‌ی زیر تحویل می‌شود:

$$x_1^{(p-1)!} + x_2^{(p-1)!} = x_3^{(p-1)!+1} \qquad (5)$$

طبق قضیه‌ی ویلسن، اگر p عددی اول باشد، عبارت $(p-1)!+1$ بر p بخش‌پذیر است. از طرف دیگر می‌توان نوشت:

$$(p-1)!+1 = p\left(1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor\right) \qquad (6)$$

($\lfloor\ \rfloor$: قسمت درست عدد)

در این‌جا، با استفاده از رابطه‌ی ۶ و با توجه به شرط $p_1, p_2 < p$، معادله‌ی ۵ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left(x_1^{\frac{(p-1)!}{p_1}}\right)^{p_1} + \left(x_2^{\frac{(p-1)!}{p_2}}\right)^{p_2} = \left(x_3^{1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor}\right)^p \qquad (7)$$

از مقایسه‌ی معادله‌ی ۱ با اتحاد ۷، یک سلسله از جواب‌های معادله‌ی ۱ حاصل می‌شوند:

$$(8)\left|\begin{array}{l} X = \left(a^{(p-1)!+1} + ab^{(p-1)!}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_1}} \\ Y = \left(a^{(p-1)!}b + b^{(p-1)!+1}\right)^{\frac{(p-1)!}{p_2}} \\ Z = \left(a^{(p-1)!} + b^{(p-1)!}\right)^{1+2\left\lfloor \frac{(p-1)!+1}{2p} \right\rfloor} \end{array}\right.$$

(برای کسب اطلاع بیش‌تر درباره‌ی حل معادله‌های سیاله و تعمیم آن‌ها، به شماره‌های ۵۴، ۵۵ و ۵۶ رشد برهان متوسطه رجوع شود.)

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۸۳ بیابید.

$$M = 1+82!^{1387}+82!^{1388}+82!^{1389}+82!^{1394}$$

حل: با توجه به قضیه‌ی ویلسن می‌توان نوشت:

$$(83-1)! \overset{83}{\equiv} -1 \;;\; 82! \overset{83}{\equiv} -1$$

و با توجه به قضیه‌ی کوچک فرما:

$$۸۲^{۸۳-۱} \overset{۸۳}{\equiv} ۱ \;;\; ۸۲^{۸۲} \overset{۸۳}{\equiv} ۱ \;;\; (۸۲^{۸۲})^{۱۷} \overset{۸۳}{\equiv} (۱)^{۱۷} \;;\; ۸۲^{۱۳۹۴} \overset{۸۳}{\equiv} ۱$$

بنابراین:

$$M \overset{۸۳}{\equiv} ۱+(-۱)^{۱۳۸۷}+(-۱)^{۱۳۸۸}+(-۱)^{۱۳۸۹}+۱=$$

$$۱-۱+۱-۱+۱=۱ \;;\; M \overset{۸۳}{\equiv} ۱$$

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بر ۲۰۰۳ بیابید.

$$N=(۲۰۰۱!)^{۲۰۰۸}+(۲۰۰۲!)^{۲۰۰۹}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ویلسن و نتیجه‌ی آن:

$$۲۰۰۲!=(۲۰۰۳-۱)! \overset{۲۰۰۳}{\equiv} -۱ \;,\; ۲۰۰۱!=(۲۰۰۳-۲)! \overset{۲۰۰۳}{\equiv} ۱$$

بنابراین:

$$N \overset{۲۰۰۳}{\equiv} (۱)^{۲۰۰۸}+(-۱)^{۲۰۰۹}=۱-۱=۰ \;,\; N \overset{۲۰۰۳}{\equiv} ۰$$

پس، عدد N بر ۲۰۰۳ بخش‌پذیر است.

مثال: برای هر عدد اول p و هر عدد صحیح a نشان دهید:

$$p \mid (a^p+(p-۱)!a)$$

حل: طبق قضیه‌ی کوچک فرما ($a^p \overset{p}{\equiv} a$)، می‌توان نوشت:

$$a^p+(p-۱)!a \overset{p}{\equiv} a(۱+(p-۱)!)$$

هم‌چنین، طبق قضیه‌ی ویلسن ($(p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱$) می‌توان نوشت:

$$a(۱+(p-۱)!) \overset{p}{\equiv} a(۱-۱)=۰$$

در این‌جا حکم ثابت می‌شود.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم !۱۸ را بر ۴۳۷ به‌دست آورید.

حل: با توجه به ۴۳۷=۱۹×۲۳ و طبق قضیه‌ی ویلسن: $۱۸! \overset{۱۹}{\equiv} -۱$ و $۲۲! \overset{۲۳}{\equiv} -۱$ یا $۱۸!\times۱۹\times۲۰\times۲۱\times۲۲ \overset{۲۳}{\equiv} -۱$، خواهیم داشت:

$$۲۲!=۱۸!(-۴)(-۳)(-۲)(-۱) \overset{۲۳}{\equiv} ۱۸!(۲۴) \overset{۲۳}{\equiv} ۱۸!(۱)=۱۸! \overset{۲۳}{\equiv} -۱$$

پس:

$$۱۸! \overset{۱۹\times۲۳}{\equiv} -۱ \;;\; ۱۸! \overset{۴۳۷}{\equiv} -۱ \;;\; ۱۸! \overset{۴۳۷}{\equiv} ۴۳۷-۱=۴۳۶$$

(باقی‌مانده‌ی تقسیم)

مثال: عکس قضیه‌ی ویلسن را ثابت کنید. یعنی اگر $m>۱$ و m اول نباشد، ثابت کنید:

$$(m-۱)! \overset{m}{\not\equiv} -۱$$

حل: چون m عددی اول نیست، بنابراین عدد صحیح $k>۱$ وجود دارد؛ چنان‌که $k|m$، پس $k|(m-۱)!$. در نتیجه، اگر $(m-۱)! \overset{m}{\equiv} -۱$ پس باید $k|(-۱)$ باشد که غیرممکن است و در این‌جا عکس قضیه‌ی ویلسن نیز ثابت می‌شود.

مثال: اگر p عددی اول و فرد باشد، از قضیه‌ی ویلسن نتیجه بگیرید:

$$۲(p-۳)! \overset{p}{\equiv} -۱$$

حل: از قضیه‌ی ویلسن $\left((p-۱)! \overset{p}{\equiv} -۱\right)$ نتیجه می‌شود:

$$p \ge ۳ : (p-۱)! \overset{p}{\equiv} (p-۱)(p-۲)(p-۳)! \overset{p}{\equiv}$$

$$(-۱)(-۲)(p-۳)!=۲(p-۳)! \overset{p}{\equiv} -۱$$

تمرین

۱. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۱!+۲!+۳!+\cdots+۲۰۰۹!$$

۲. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=۲!+۴!+۶!+\cdots+۱۳۸۹!$$

۳. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۹^{۹^{۹^{۹}}}+۹^{۹^{۹}}+۹^{۹}+۹$$

۴. دو رقم سمت راست عدد M را تعیین کنید.

$$M=۲۴^{۱}+۲۴^{۲}+۲۴^{۳}+\cdots+۲۴^{۲۰۰۹}$$

۵. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۲^{۲۰۰۹}+۵^{۲۰۰۹}+۷^{۲۰۰۹}$$

۶. دو رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=۲۶^{۱}+۲۶^{۲}+۲۶^{۳}+\cdots+۲۶^{۲۰۰۸}$$

۷. دو رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۲۴^{۲۶^{۲۰۰۷}}+۲۵^{۲۵^{۲۰۰۸}}+۲۶^{۲۵^{۲۰۰۹}}$$

۸. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=(۷^{۲۰۰۸}\times۱۱^{۲۰۰۹}\times۱۳^{۲۰۱۰})^{۳}$$

۹. سه رقم سمت راست عدد N را از رابطه‌ی زیر تعیین کنید:

$$N \overset{۱۰۰۰}{\equiv} ۳۴۳^{۲۰۰۷}\times۳۳۱^{۲۰۰۸}\times۱۹۷^{۲۰۰۹}$$

۱۰. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=(۲۰۰۷)^{۱۳۸۷}.(۲۰۱۱)^{۱۳۸۸}.(۲۰۱۳)^{۱۳۸۹}$$

۱۱. سه رقم سمت راست عدد N را بیابید.

$$N=۴۰۱^{۱۳۸۷}\times۶۴۱^{۱۳۸۸}\times۵۶۱^{۱۳۸۹}$$

۱۲. سه رقم سمت راست عدد M را بیابید.

$$M=۵!+۱۰!+۱۵!+\cdots+۱۳۹۰!$$

۱۳. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بیابید.

$$N=(۲۰۰۲)!^{۱۳۸۸}+(۲۰۰۲)!^{۲۰۰۹}$$

۱۴. با استفاده از قضیه‌ی ویلسن، یک سلسله از جواب‌های عمومی معادله‌ی زیر را بیابید.

$$x^{۱۳}+y^{۸۹}=z^{۲۰۰۳}$$

۱۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد M را بر ۸۳ بیابید.

$$M=۱+۸۲!^{۲۰۰۸}+۸۲!^{۲۰۰۹}+۸۲!^{۲۰۱۰}$$

۱۶. باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد N را بیابید.

$N=(۲۰۰۱!)^{۱۳۸۸}+(۲۰۰۲!)^{۱۳۸۹}$ را بر ۲۰۰۳

ادامه دارد...