هم‌ارزی قضیه‌های مقدار میانی و بولتزانو ـ کاربردهای آنها

مورد استفاده دانش‌آموزان پیش‌دانشگاهی

• محمّدصادق عسگری

کتابهای کمک درسی نظام قدیم دبیرستان درقسمت پیوستگی و مشتق، بیشتر به بررسی پیوستگی توابع و مشتق‌پذیری آنها دریک نقطه و یا دریک فاصله پرداخته‌اند، و در قسمت کاربرد مشتق نیز به بیان چگونگی رسم نمودار توابع حقیقی و یا پیداکردن اکسترمم‌های نسبی و ماکزیمم و می‌نیمم مطلق توابع می‌پردازند. درنظام جدید نیز این مفاهیم بیشتر در موارد گفته شده به‌کار رفته است. در ریاضی عمومی دورهٔ پیش‌دانشگاهی، دراین قسمتها قضایایی وجود دارد که درکتابهای کمک درسی به دلیل جدید بودن آنها، کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. این قضیه‌ها در قسمت پیوستگی عبارتند از :

۱ ـ قضیه بولتزانو ۲ـ قضیه مقدار میانی ۳ـ قضیه ماکزیمم و می‌نیمم‌مطلق توابع پیوسته.

و در بخش مشتق پذیری تحت عنوان :

۱ـ قضیه ماکزیمم و مینیمم نسبی

۲ـ قضیه رُول

۳ـ قضیه مقدار میانگین می‌باشند.

دراینجا سعی در بیان این قضایا و چگونگی استفادده از آنها در حل مسائل شده است. بنابراین، فرض براین است که خوانندگان ازقبل با تعاریف پیوستگی و مشتق‌پذیری و قضیه‌های مقدماتی این دوقسمت آشنایی کافی دارند.

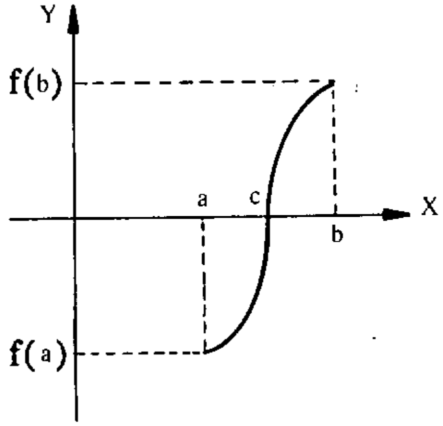
قضیه بولتزانو و قضیه مقدار میانی دو قضیه معادل در مبحث پیوستگی هستند که درابتدا این دوقضیه را به صورت نتیجه‌ای از قضیه دیگر می‌آوریم.

قضیه بولتزانو :

اگر تابع حقیقی f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<0$ باشد، آنگاه نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$. یعنی با برقراری شرایط قضیه معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصله (a,b) دارد.

تعبیر هندسی قضیه بولتزانو

شرایط قضیه بولتزانو به‌طور هندسی، یعنی اگر نمودار تابع f بر فاصله $[a,b]$ متصل باشد و ابتدا و انتهای نمودار تابع f یکی در پایین و دیگری در بالای محور xها قرار داشته باشد، آنگاه نمودار تابع f محور xها را حداقل در یک نقطه $a<c<b$ قطع می‌کند.

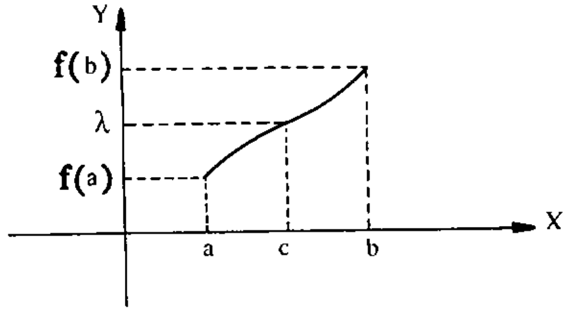


قضیه مقدار میانی پیوستگی:

اگر f برفاصله $[a,b]$ پیوسته و λ عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشدآنگاه نقطه $a<c<b$ وجوددارد،به‌طوری که $f(c)=\lambda$. به بیان دیگر یعنی اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و دریک حالت داشته باشیم $f(a)<\lambda<f(b)$، آنگاه نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=\lambda$.

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی

قضیه مقدار میانی به تعبیر هندسی یعنی توابع پیوسته بریک فاصله بسته همواره تمام مقادیر بُردشان را اختیارمی‌کنند.



اثبات قضیه بولتزانو با استفاده از قضیه مقدار میانی

اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$، آنگاه دو حالت اتفاق می‌افتد.

I) $f(a)<0<f(b)$ II) $f(b)<0<f(a)$

درحالت I داریم $f(a)<0<f(b)$ چون ۰ بین $f(a)$ و $f(b)$ قرار دارد، بنابر قضیه مقدار میانی نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$.

به‌طور مشابه درحالت II نیز حکم قضیه برقرار است.

اثبات قضیه مقدار میانی با استفاده از قضیه بولتزانو :

فرض‌کنیم f بر $[a,b]$ و $f(a)<\lambda<f(b)$ باشد f بنابراین داریم :

$$f(a)<\lambda \Rightarrow f(a)-\lambda<0$$

$$\lambda<f(b) \Rightarrow f(b)-\lambda>0 \quad (*)$$

تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ را با ضابطهٔ $g(x)=f(x)-\lambda$ تعریف می‌کنیم. چون f بر $[a,b]$ پیوسته است، درنتیجه تابع g نیز پیوسته می‌شود. و به‌علاوه داریم :

$$g(a)=f(a)-\lambda<0 \text{ و } g(b)=f(b)-\lambda>0$$

یعنی $g(a)g(b)<0$ بنابر قضیه بولتزانو نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $g(c)=0$ و یا $f(c)-\lambda=0$ در نتیجه $f(c)=\lambda$.

قضیه دیگری که در قسمت پیوستگی اهمیت زیادی دارد، قضیه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته است ؛ که قبل از بیان صورت این قضیه تعریف زیر را می‌آوریم.

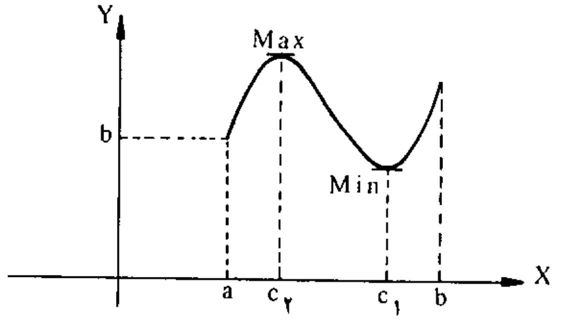
تعریف : نقطه $c\in D_f$ را نقطه ماکزیمم مطلق تابع حقیقی f خوانیم، هرگاه برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم، $f(x)\le f(c)$,در این صورت $f(c)$را مقدار ماکزیمم مطلق f می‌گویند. به طور مشابه نقطه $C\in D_f$ را نقطهٔ مینیمم مطلق f گویند.هرگاه برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $f(x)\ge f(c)$ که دراین‌حالت‌نیز $f(c)$ را مینیمم مطلق f می‌گویند.

قضیه ماکزیمم و مینیمم مطلق توابع پیوسته:

اگر تابع f بر فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، آنگاه f ماکزیمم و مینیمم مطلق خود را براین فاصله اختیار می‌کند، یعنی نقاط $C_1,C_2\in[a,b]$ وجود دارند، به‌طوری که برای هر $x\in[a,b]$ داریم :

$$f(C_1)\le f(x)\le f(C_2)$$

$f(C_1)$ را می‌نیمم مطلق و $f(C_2)$ را ماکزیمم مطلق f می‌گویند.



لازم به تذکر است که قضیه فوق روی فاصله‌های باز برقرار نیست، مثلاً تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ روی فاصله باز $(0,+\infty)$ پیوسته است. در صورتی‌که این تابع روی این فاصله ماکزیمم و مینیمم مطلق ندارد.

استفاده از قضایای پیوستگی درحل مسائل اهمیت زیادی دارد که درمثالهای زیر طریقه استفاده از این قضایا را نشان می‌دهیم.

مثالها:

مثال ۱: بُرد تابع $f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$ را تعیین کنید.

می‌دانیم همواره در توابع حقیقی محاسبه دامنه تابع بر محاسبه بُرد آن مقدم است. بنابراین ابتدا دامنه این تابع را تعیین می‌کنیم.

الف ـ تعیین دامنه:

$$1-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 1\Rightarrow |x|\le 1\Rightarrow -1\le x\le 1$$
$$D_f=[-1,1]$$

ب ـ تعیین بُرد:

تابع $\sin\theta$ برای هر $\theta\in\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته است که بُرد این تابع فاصله $[-1,1]$ است. از طرفی داریم: $-1\le x\le 1$ بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع سینوس، وجود دارد $\theta\in\mathbb{R}$ به‌طوری که $x=\sin\theta$ در نتیجه:

$$y=f(x)=f(\sin\theta)=\sin\theta+\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sin\theta\pm\cos\theta$$

با توجه به نامساوی $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin\theta+b\cos\theta\le\sqrt{a^2+b^2}$ داریم:

$$-\sqrt{2}\le y=\sin\theta\pm\cos\theta\le\sqrt{2}$$
$$-\sqrt{2}\le y\le\sqrt{2}$$

از طرفی

$$y=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow y-x=\sqrt{1-x^2}\ge 0\Rightarrow y-x\ge 0$$
$$\Rightarrow\ -1\le x\le y\le\sqrt{2}\Rightarrow\ -1\le y\le\sqrt{2}$$
$$\Rightarrow\ R_f=[-1,\sqrt{2}]$$

مثال ۲: بُرد تابع $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ را تعیین کنید.

الف ـ تعیین دامنه: $D_f=\mathbb{R}$

ب ـ تعیین بُرد:

تابع $\tan\theta$ برای هر $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ پیوسته است و بُرد آن برابر مجموعه اعداد حقیقی($\mathbb{R}$) است. حال برای $x\in\mathbb{R}$، بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع تانژانت وجود دارد $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ به‌طوری که $x=tg\theta$، درنتیجه:

$$y=f(x)=f(\tan\theta)=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\sin 2\theta\Rightarrow y=\sin 2\theta$$

از $-\pi\le 2\theta\le\pi$ نتیجه می‌گیریم $-1\le y\le 1$ بنابراین $R_f=[-1,1]$

مثال ۳: بُرد تابع $f(x)=ax\pm\sqrt{b^2-x^2}$ را به‌دست آورید: (a و $b\ge 0$)

الف ـ تعیین دامنه:

$$b^2-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le b^2\Rightarrow |x|\le b\Rightarrow -b\le x\le b$$
$$\Rightarrow D_f=[-b,b]$$

ب ـ تعیین بُرد: بنابر قسمت الف داریم $-b\le x\le b$، درنتیجه: $-1\le\frac{x}{b}\le 1$ بنابر پیوستگی تابع سینوس و استفاده از قضیه مقدار میانی وجود دارد $\theta\in\mathbb{R}$ به‌طوری که $\frac{x}{b}=\sin\theta$ و یا $x=b\sin\theta$

$$y=f(x)=f(b\sin\theta)=ab\sin\theta\pm\sqrt{b^2-b^2\sin\theta}$$
$$\Rightarrow y=ab\sin\theta\pm b\cos\theta$$

چون داریم:

$$-\sqrt{a^2b^2+b^2} \le ab\sin\theta \pm b\cos\theta \le \sqrt{a^2b^2+b^2}$$

درنتیجه $-b\sqrt{1+a^2} \le y \le b\sqrt{1+a^2}$ حال دوحالت را درنظر می‌گیریم:

$$y=ax+\sqrt{b^2-x^2} \quad (I \qquad\qquad y=ax-\sqrt{b^2-x^2} \quad (II$$

$$y=ax+\sqrt{b^2-x^2} \Rightarrow y-ax=\sqrt{b^2-x^2} \ge 0 \Rightarrow y-ax \ge 0 \quad (I)$$

$$\Rightarrow ax \le y \Rightarrow -b \le x \le \frac{y}{a} \le \frac{b}{a}\sqrt{1+a^2}$$

$$\Rightarrow -ab \le y \le b\sqrt{1+a^2} \Rightarrow R_f=[-ab, b\sqrt{1+a^2}$$

$$y=ax-\sqrt{b^2-x^2} \Rightarrow ax-y=\sqrt{b^2-x^2} \ge 0 \qquad (II$$

$$\Rightarrow ax-y \ge 0 \Rightarrow y \le ax \Rightarrow \frac{-b\sqrt{1+a^2}}{a} \le \frac{y}{a} \le x \le b \Rightarrow$$

$$-b\sqrt{1+a^2} \le y \le ab \Rightarrow R_f=\left[-b\sqrt{1+a^2}, ab\right]$$

مثال ۴: ثابت کنید معادله $x^4-x-1=0$ در فاصله $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

قرار می‌دهیم $f(x)=x^4-x-1$. دراین‌صورت تابع f بر فاصله $[0,2]$ پیوسته است و به‌علاوه داریم

$$f(0)=-1<0 \quad \text{و} \quad f(2)=13>0$$

بنابراین طبق قضیهٔ بولتزانو، نقطهٔ $0<c<2$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$ یا $c^4-c-1=0$، یعنی معادلهٔ فوق در فاصلهٔ $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد.

نکته: باتوجه به حل مثال ۴ ملاحظه می‌شود که قضیه بولتزانو، فقط وجود ریشه را برای یک معادله درصورت امکان نشان می‌دهد. ازاین قضیه نمی‌توان به‌طور دقیق ریشه‌های یک معادله را محاسبه کرد. ولی به کمک این قضیه می‌توان مقدار تقریبی ریشه‌های یک معادله را به‌دست آورد. به‌مثال ۵ توجه کنید.

مثال ۵: با استفاده از جدول زیر محلّ تقریبی جواب معادلهٔ $\sin 3x\cos 4x = \frac{x^3}{\pi^3}$ را در بازه [۱/۰۷,۱/۱۵] به‌دست آورید.

x	x^3/π^3	$\sin 3x\cos 4x$	$f(x)=\frac{x^3}{\pi^3}-\sin 3x\cos 4x$
۱/۰۷	۰/۰۳۹۵	۰/۰۲۸۶	۰/۰۱۰۹
۱/۰۸	۰/۰۴۰۶	۰/۰۳۷۶	۰/۰۰۳۰
۱/۰۹	۰/۰۴۱۸	۰/۰۴۴۲	−۰/۰۰۲۴
۱/۱۰	۰/۰۴۲۹	۰/۰۴۸۵	−۰/۰۰۵۶
۱/۱۱	۰/۰۴۴۱	۰/۰۵۰۴	−۰/۰۰۶۳
۱/۱۲	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۹۹	−۰/۰۰۴۶
۱/۱۳	۰/۰۴۶۵	۰/۰۴۷۰	−۰/۰۰۰۵
۱/۱۴	۰/۰۴۷۸	۰/۰۴۱۷	۰/۰۰۶۱
۱/۱۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۳۴۰	۰/۰۱۵۱

باتوجه به جدول بالا ملاحظه می‌شود که معادلهٔ $\frac{x^3}{\pi^3}-\sin 3x\cos 4x=0$ حداقل دراین فاصله دو ریشه دارد که محل تقریبی این دو ریشه، فاصله‌های [۱/۱۳,۱/۱۴]، [۱/۰۸,۱/۰۹] می‌باشد، که به‌طور تقریبی این دو ریشه برابرند با:

$$[1/08, 1/09] \qquad x_1 \cong \frac{1/08+1/09}{2}=\frac{2/17}{2}=1/085$$

$$[1/13, 1/14] \qquad x_2 \cong \frac{1/13+1/14}{2}=\frac{2/27}{2}=1/135$$

مثال ۶: اگر تابع f در بازه $[0,1]$ پیوسته و برای هر $x \in [0,1]$، $0 \le f(x) \le 1$ نشان دهید که برای حداقل یک مقدار $c \in [0,1]$، $f(c)=c$.

اگر $f(0)=0$ و یا $f(1)=1$ باشد، آنگاه حکم مسأله برقرار است. فرض کنیم $f(0)\neq 0$ و $f(1)\neq 1$ تابع $g:[0,1]\to \mathbb{R}$ را با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم.

دراین‌صورت بنابر پیوستگی تابع f ، تابع g نیز بر فاصله $[0,1]$ پیوسته است و به‌علاوه بنابر فرض $f(0)>0$ و $f(1)<1$، $0<$ حال داریم:

$g(0)=f(0)>0$ و $g(1)=f(1)-1<0$

درنتیجه بنابر قضیه بولتزانو نقطه $0\le c\le 1$ وجود دارد، به‌طوری که $g(c)=0$ و یا $f(c)-c=0$ و بنابراین $f(c)=c$

مثال ۷: ثابت کنید معادله $ax^2+bx+c=0$ با شرط $5a+3b+3c=0$ همواره یک ریشه درفاصله (۲و۰) دارد.

شرط $5a+3b+3c=0$ را به‌صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$5a+3b+3c=c+(a+b+c)+(4a+2b+c)=$
$f(0)+f(1)+f(2)$

بنابراین $f(0)+f(1)+f(2)=0$ چون مجموع سه‌عدد $f(0)$ و $f(1)$ و $f(2)$ برابر صفراست، درنتیجه باید همواره دوتا از این سه عدد مختلف‌العلامه باشند، در نتیجه حالتهای زیر را داریم:

$f(0)$ و $f(1)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(0)f(1)<0 \xRightarrow{\text{ق بولتزانو}}$ f یک ریشه در(۰،۱) دارد

$f(0)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(0)f(2)<0 \xRightarrow{\text{ق بولتزانو}}$ f یک ریشه در(۰،۲) دارد

$f(1)$ و $f(2)$ مختلف‌العلامه $\Rightarrow f(1)f(2)<0 \xRightarrow{\text{ق بولتزانو}}$ f یک ریشه در(۱،۲) دارد

که ازهریک از حالتهای فوق می‌توان نتیجه گرفت که همواره f حداقل یک ریشه در (۰،۲) دارد.

مثال ۸: اگر f تابعی حقیقی پیوسته بر فاصله [۱،۲] باشد و داشته باشیم $f(1)>1$ و $f(2)<2$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند $1<c<2$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=c$
تابعی حقیقی $g:[1,2]\to\mathbb{R}$ با ضابطه $g(x)=f(x)-x$ تعریف می‌کنیم.

چون f و تابع همانی بر فاصله [۱،۲] پیوسته در نتیجه تفاضل آنها یعنی تابع g نیز براین فاصله پیوسته است. با استفاده از مفروضات مسأله داریم:

$g(2)=f(2)-2>0$ و $g(1)=f(1)-1<0$

درنتیجه: $g(1)g(2)<0$ بنابر قضیه بولتزانو وجود دارد $1<c<2$ به‌طوری که $g(c)=0$ یا $f(c)-c=0$ یعنی $f(c)=c$

تمرین: اگر f تابعی حقیقی پیوسته بر فاصله [a,b] باشد و داشته باشیم $f(a)<a$ و $f(b)<b$ ، آنگاه نقطه‌ای مانند $a<c<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=c$

{**تذکر**: نقطه c را یک نقطه ثابت تابع حقیقی f گویند هرگاه $f(c)=c$.}

مثال ۹: اگر $-1<a<b$ ، ثابت کنید عدد حقیقی $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که

$$2\sqrt{1+c}=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$$

حل:

$$-1<a<b\Rightarrow 0<a+1<b+1\Rightarrow\sqrt{a+1}<\sqrt{b+1}$$

از آنجا که میانگین هردو عدد حقیقی همواره بین آن دو عدد حقیقی قرار دارد، بنابراین داریم:

$$\sqrt{1+a}<\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}<\sqrt{1+b}$$

تابع حقیقی $f(x)=\sqrt{1+x}$ را درنظر می‌گیریم. این تابع روی فاصله [a,b] پیوسته است و به‌علاوه $R_f=\left[\sqrt{1+a},\sqrt{1+b}\right]$ اگر قرار دهیم $\lambda=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}$ آنگاه داریم: $\sqrt{1+a}<\lambda<\sqrt{1+b}$ بنابر قضیه مقدار میانی برای تابع f نقطه $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=\lambda$ یعنی $\sqrt{1+c}=\frac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}}{2}$ در نتیجه:

$$2\sqrt{1+c}=\sqrt{1+a}+\sqrt{1+b}$$

مثال ۱۰: ثابت کنید که هر چند جمله‌ای با درجه فرد حتماً یک صفر دارد.

فرض کنیم $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$ یک چند جمله‌ای از درجه n باشد و n یک عدد طبیعی فرد در این‌صورت همواره حدود تابع f در $\pm\infty$ مختلف‌العلامه می‌باشند، یعنی $\lim_{n\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$ درنتیجه اعداد حقیقی $a<0$ و $b>0$ وجود دارند، به‌طوری که $f(a)<0$ و $f(b)>0$.

حال اگر تابع f را بر فاصله [a,b] درنظر بگیریم، این تابع

برای این فاصله پیوسته است و به‌علاوه $f(a)f(b)<0$، درنتیجه بنابر قضیه بولتزانو وجود دارد $a<c<b$، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی $x=c$ یک صفر چندجمله‌ای $f(x)$ است. به‌عبارت دیگر هر معادله از درجه فرد حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

مثال ۱۱: فرض کنیم

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ و $a_0a_n<0$، ثابت کنید وجود دارد $c>0$، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی هر معادله درجه nام با شرط $a_na_0<0$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

$$a_nf(x)=a_n^2x^n+a_na_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_na_1x+a_na_0$$

حال داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} a_nf(x)=\lim_{x\to+\infty} a_n^2x^n=+\infty$$

بنابراین عدد حقیقی $b>0$ وجود دارد، به‌طوری که $a_nf(b)>0$ یعنی $f(b)$ و a_n هم علامت هستند. بنابر فرض $a_na_0<0$ یعنی a_n و a_0 مختلف‌العلامه‌اند درنتیجه $f(b)$ و a_0 نیز مختلف‌العلامه‌اند یعنی $a_0f(b)<0$ حال تابع f را بر فاصله $[0,b]$ درنظر می‌گیریم. این تابع بر این فاصله پیوسته است و به‌علاوه $f(0)=a_0$ بنابراین $f(0)f(b)=a_0f(b)<0$ حال بنا بر قضیه بولتزانو نقطه $0<c<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(c)=0$.

مثال ۱۲: فرض کنید f تابعی پیوسته بر فاصله $[a,b]$ باشد و به‌علاوه $f(a)+f(b)=0$. ثابت کنید معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه در فاصله $[a,b]$ دارد.

اگر $f(a)=0$ یا $f(b)=0$ باشد، حکم مسأله برقرار است.

فرض کنیم $f(a)\neq 0$ و $f(b)\neq 0$ دراین‌صورت چون $f(a)+f(b)=0$ درنتیجه:

$$f(a)+f(b)=0\Rightarrow f(a)=-f(b)\Rightarrow f(a)f(b)=-[f(b)]^2<0\Rightarrow f(a)f(b)<0$$

بنابر قضیه بولتزانو نقطهٔ $a<c<b$ وجود دارد، به‌طوری که $f(c)=0$ یعنی معادلهٔ $f(x)=0$ در فاصلهٔ $[a,b]$ حداقل یک ریشه دارد.

تمرین

۱ـ بُرد هریک از توابع زیر را با استفاده از قضیهٔ مقدار میانی پیوستگی محاسبه کنید.

1) $f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$ 2) $f(x)=2x-\sqrt{9-x^2}$

3) $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ 4) $f(x)=\frac{7x}{1+x^2}$

5) $f(x)=\frac{2x^2}{1+x^2}$ 6) $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

7) $f(x)=\frac{1+2x-x^2}{1+x^2}$ 8) $f(x)=\frac{(1+x)^2}{1+x^2}$

9) $f(x)=3-x+\sqrt{1-x^2}$

۲ـ ثابت کنید هرمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ با شرط $a+c=0$ همواره یک ریشه در فاصله $[-1,1]$ دارد. (راهنمایی: $f(-1)+f(1)$ را تشکیل دهید.)

۳ـ ثابت کنید معادله $x^5+x^4-x^3+2x-2=0$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

۴ـ ثابت کنید معادله $x^3+x^2+x-1=0$ همواره یک ریشه در فاصلهٔ $[0,1]$ دارد.

۵ـ ثابت کنید به ازای هر مقدار حقیقی k معادله $3\sin x+k\cos x-1=0$ همواره یک ریشه در فاصلهٔ $[0,\pi]$ دارد. (راهنمایی: $f(0)+f(\frac{\pi}{2})+f(\pi)$ را تشکیل دهید).