نگاهی به فرضیهٔ ریمان*

هربرت ویلف

بیشتر ریاضیدانهای حرفه‌ای از وجود فرضیهٔ ریمان و از اینکه این فرضیه مسأله‌ای حل نشده و به‌غایت مهم در ریاضیات محض و به‌ویژه درنظریهٔ اعداد است آگاه‌اند. در اینجا می‌خواهم راه بسیار ساده‌ای را برای بیان این مسأله با شما در میان نهم: راهی که می‌توان آن را برای یك کلاس قوی ماقبل آخر دبیرستان تشریح کرد. پس از آن مختصری دربارهٔ نتایج فرضیهٔ ریمان صحبت خواهم کرد، و سرانجام خبری در مورد پیشرفتهای هیجان‌انگیز اخیر دراین زمینه خواهم‌داد.

اولاً، چگونه ممکن است این مسأله را برای دانش‌آموزان دبیرستانی شرح داد؟ یك‌راه این است که‌کار را با مجموعهٔ همهٔ‌اعداد صحیح مثبت شروع، و آن اعدادی را که بر مربع یك عدد صحیح بزرگتر ازیك بخش‌پذیرند حذف‌کنیم. بدین ترتیب اعداد ۴، ۸، ۹، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۴ و...را کنار می‌گذاریم. برای ما فهرستی ازاعداد صحیح مثبت خالی از مربع به صورت زیر به‌جا می‌ماند

۱,۲,۳,۵,۶,۷,۱۰,۱۱,۱۳,۱۴,۱۵,۱۷,۱۹,۲۱,۲۲,۲۳, ...

اگر هر یك از این اعداد صحیح خالی از مربع را به عوامل اول تجزیه کنیم، هیچ عامل اولی در این تجزیه تکرار نخواهد شد؛ یعنی هر یك از این اعداد صحیح، حاصلضربی از اعداد اول متمایز است. بعضی از اعداد خالی از مربع، حاصلضرب تعداد زوجی از اعداد اول متمایز و برخی دیگر، حاصلضرب تعداد فردی از اعداد اول متمایزند.

قرارمی‌گذاریم که یك عدد صحیح، قرمز است اگر حاصلضرب تعداد زوجی از اعداد اول متمایز باشد، وآبی است اگرحاصلضرب تعداد فردی از اعداد اول متمایز باشد. بدین ترتیب ۱۴ عددی قرمز، و ۳۰ عددی آبی است (۱۸ بدون رنگ است، زیرا خالی از مربع نیست).

مثلاً اعداد صحیح خالی ازمربع تابزرگتر از ۳۰ عبارت‌انداز

۱، ۲، ۳، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۱۵،

۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۶، ۲۹، ۳۰.

در میان اینها، ۸ عدد قرمز

۱، ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۵، ۲۱، ۲۲، ۲۶

و ۱۱ عددآبی

۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۰

وجود دارند.

بنابراین درمیان اولین سی عدد صحیح مثبت، ۳ عددآبی بیشتر از اعداد قرمز موجود است. فرضیهٔ ریمان، با بیانی نه چندان دقیق، می‌گوید که در هر فاصلهٔ $[1, n]$، تعداد اعداد قرمز با تعداد اعداد آبی تفاوت بسیار زیادی ندارد. در زیر، صورت دقیق این فرضیه را، نه‌آن گونه‌که ریمان بیان کرده، بلکه به‌صورتی که‌کاملاً معادل‌شکل اولیهٔ آن است و امیدواریم که قابل توصیف برای کلاس دبیرستانی باشد، آورده‌ایم

فرضیهٔ ریمان. $\varepsilon > 0$ را عددی ثابت می‌گیریم. دراین صورت عددی مانند N وجود دارد که به‌ازای هر $n > N$ تفاوت تعداد اعداد آبی و قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ از $n^{(1/2)+\varepsilon}$ بیشتر نیست.

بنابراین، انتظار داریم که تعداد اعداد صحیح‌آبی و قرمز بین ۱ و n، با خطایی حداکثر «حدوده» $\sqrt{n}$، باهم تقریباً مساوی باشند.

گزارهٔ بالا، بیانی نسبتاً روشن از فرضیهٔ ریمان است و آنچه کم‌دارد، آشکارنکردن‌اهمیت‌مسأله‌است. اگرحقیقتاً فرضیهٔ ریمان فقط مربوط به‌این‌واقعیت‌بود که‌این‌دورنگ ازاعداد به‌صورتی نسبتاً‌خوب درهم مخلوط شده‌اند، آنگاه مطلبی جالب توجه ولی نه‌مسأله‌ای مهم و برجسته به‌حساب می‌آمد. اهمیت این‌گزاره از انبوه پیامدهای آن نتیجه می‌شود، و ما به راستی نمی‌توانیم در اینجا به تفصیل در مورد آنها بحث‌کنیم [۲].

تعدادی ازپیامدهای فرضیهٔ ریمان به‌صورت زیرظاهرمی‌شوند. دستورهای تقریبی مهم و زیادی درنظریهٔ اعداد وجود دارند. اهمیت این فرمولها در ارائهٔ تقریبهای نسبتاً دقیقی برای برخی توابع جالب است که رفتارشان به‌قدری پیچیده است که دستوردقیق برای‌آنها کمتر از دستورهای تقریبی مفید خواهد بود. یکی از آنها قضیهٔ مشهور به قضیهٔ اعداد اول است. این قضیه بیان می‌کند که تعداد اعداد اول بین ۱ و x، «نزدیك به» $x/\log x$ است.

این «نزدیك به»، تا چه حد نزدیکی را بیان می‌کند؟ ما چیز زیادی راجع به‌آن نمی‌دانیم. می‌توانیم بگوییم که خطای این‌تقریب ازخود $x/\log x$ کندتر رشد می‌کند، و حتی کمی بیش از این هم می‌توان گفت. اما مثلاً، نمی‌توانیم بگوییم که این خطا سریعتر از $x^{0/75}$ رشد نمی‌کند. در واقع انتظار داریم که تقریب $x/\log x$ به غایت خوب باشد: فکر می‌کنیم (البته کسانی که به فرضیهٔ

ریمان معتقدند) که این خطا تنها مانند $x^{0.5+\varepsilon}$ رشد می کند. معلوم‌شده است که این گزاره از فرضیهٔ ریمان نتیجه می‌شود. همچنین تعداد بسیار زیادی بـرآورد خطای مهم و جـالـب توجه «وابسته» به‌فرضیهٔ ریمان وجود دارد که اگر می‌توانستیم فرضیهٔ ریمان را ثابت کنیم ، آنگاه تمام آن برآوردها به‌طورهمزمان ثابت می‌شدند. بیشتر اهمیت فرضیهٔ ریمان در همین است.

به‌دورنگ عددی که در بالا از آنها صحبت کردیم برمی گردیم؛ درسال ۱۸۹۷، مرتنس[1] [۴] به‌این نظر رسید که داده‌های تجربی‌ممکن است حتی فرضیه‌ای قویتر را تأییـدکنند. او مشاهده کرد که به نظر می‌رسد به‌ازای همهٔ مقادیر nای که وی قادر بود محاسبات مربوط را انجام دهد تفاوت بین تعداد اعداد قرمز وآبی تا بزرگتر از nهیچگاه از $\sqrt{n}$ بزرگتر نیست. او آنچه را که بعدها «فرضیهٔ مرتنس» نامیده شد چنین فرمولبندی کرد:

فرضیهٔ مرتنس. به‌ازای هر $n \geqslant 1$، تفاوت بین تعداد اعدادصحیح قرمز وآبی در فاصلهٔ $[1, n]$ هیچگاه از $\sqrt{n}$ تجاوز نمی کند.

اگر فرضیهٔ مرتنس را با فرضیهٔ ریمان مقایسه کنیم، می‌بینیم که مرتنس مدعی بود که می‌توان ε را مساوی صفر و N را مساوی یك اختیار کرد،که اگر درست می‌بود، مسأله خیلی ساده می‌شد (آخرهمه دوست دارند که به‌جای ε، صفر را قرار دهند).

حال مایلم که راجع به‌نتایج محاسبهٔ زیبایی که چند سال پیش به وسیلهٔ نوبیاوئر [۵] ، روی فرضیهٔ مرتنس انجام شد با شما صحبت کنم. در آن محاسبه همهٔ مقادیر n تا 10^8 و همراه آنها مقادیر بسیار دیگری برای n بزرگتر از 10^8، تا 10^{10} در نظر گرفته شدند. به‌ازای هر یك از این nها، تفاوت بین تعداد قرمزها وآبیها محاسبه شد.

آنچه که نوبیاوئر انجام داد ثبت اعدادی است که آنها را با $M_1(n)/\sqrt{n}$ نمایش می‌داد. در ایـن نمایش، $M_1(n)$ تعداد اعداد صحیح قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ منهای تعداد اعداد صحیح آبی در این فاصله است.

بنابراین اگر حدس مرتنس درست می‌بود، آنگاه مقادیر جدولبندی شدهٔ این نسبت باید همواره بین ۱ــ و ۱ قرار می‌گرفتند. در واقع نوبیاوئر حدسی حتی قویتر از حدس مرتنس را، به‌این مضمون که این نسبت به‌ازای n بزرگتر از ۲۰۰ هیچگاه از حیث قدرمطلق از ۰٫۵ تجاوز نمی کند، آزمود.

به‌هر صورت، تمام خوانندگان علاقه‌مند به مقالهٔ حـاضر باید نمودارهایـی را که در آن مقالـه نشان داده شده‌اند ملاحظه کنند. درآنجا، تابعی دیده می‌شود که به‌گونه‌ای نامنظم نوسان می کند وبین ۰٫۲۸± و یا درهمین حدود جلو و عقب می‌رود و بیش از هرچیز، شبیه میانگینهای شاخص بازار سهام دردوران بی‌ثباتی اقتصادی‌است.

نوبیاوئر ناگهان بـه ازای $n = 7,700,000,000$ و یا نزدیکیهای آن[2]، آنچه را که درجستجویش بود یافت. نمودار ناگهان به بالای ۰٫۵ جهید و مثال نـاقض برای حدس تقویت شدهٔ مرتنس (یعنی فرضیهٔ ریمان دوبار تقویت شده) پیدا شد.

چنین رفتـاری از نظـر متخصصین کار کشتهٔ نظریـهٔ اعـداد شگفت‌آورنبود. آنها قبلاً چندین بار حدسهای ساده شدهٔ گوناگونی را در مورد رفتار تـوابع پیچیده‌ای از نظریهٔ اعداد دیده بودند ، حدسهایی که به‌ازای همهٔ مقادیرقابل‌محاسبهٔ n درست به‌نظرمی‌رسیدند ولی برای بسیاری ازمقادیر غیرقابل‌محاسبهٔ n نادرست ازآب‌درآمده بودند . در بعضی از حالتها، می‌دانیم که حدسی نادرست است، اما حتی‌مقداری از n را که به‌ازای آن حدس مزبوررد‌می‌شود نمی‌شناسیم. (آنچه را در زیر می‌آید ببینید).

خلاصه اینکـه، هرچند بعد از کار نوبیاوئر هنوز مثال ناقض برای حدس اولیهٔ مرتنس نداشتیم ، اما موجه بودن آن یقیناً مختصری لطمه دیده بود. باوجود این، مشکل بودن فوق‌العادهٔ حل‌مسائل مربوط به‌فرضیهٔ ریمان به‌این منجر شد که اکثراً تصور کنند که ممکن است تا تعیین تکلیف فرضیهٔ مرتنس راه درازی در پیش باشد.

در ۱۹۸۵، ادلیزکو و تی‌ریل [۶] ثابت کردند که فرضیهٔ‌مرتنس نادرست است.

در واقع آنها ثابت کردند که به‌ازای تعدادی نامتناهی ازمقادیر n،فزونی‌اعدادقرمز برآبی‌در فاصلهٔ$[1, n]$ از $1.06\sqrt{n}$ بیشتر است.

آنها همچنین نشان دادند که به‌ازای تعدادی نامتاهی از مقادیر n، فزونی اعدادآبی بر قرمز در فاصلهٔ $[1, n]$ از $1.009\sqrt{n}$ بیشتر است.

بااینکه این دو نفر نشان دادند که تعدادی نامتناهی از دو نوع n وجود دارد، اثبات‌آنها حتی یك مقدار برای n مشخص نمی کند که در موردآن یکی از نتایج بالا برقرار باشد.

بعداً یانوش‌پینتز [۷]، نشان داد که حدس مرتنس یقیناً به ازای xی کوچکتر از 3.21×10^{64} نادرست است.

دراثبات ادلیزکو و تی‌ریل از روشهای بسیار جدیدی استفاده می‌شود.مثلاً ،الگوریتم تقلیل‌پایهٔ شبکه‌ای‌لنسترا [۳] به‌کار گرفته‌می‌شود این اساساً الگوریتمی است که بردار کوتاهی را در شبکه‌ای صحیح که با پایه‌ای مفروض توصیف شده است سریعاً می‌یابد . احتمالاً بد نیست گفته شود که این الگوریتم در ابتدا برای یافتن روشهای چند‌جمله‌ای ـ زمان به‌منظور حل مسائلی محاسباتی که قبلاً قابل دستیابی نبودند ، مانند مسئلهٔ تجزیهٔ کامل یك چندجمله‌ای روی اعدادگـویا ، اختراع شد.

اما در مقالهٔ ادلیزکو و تی‌ریل در می‌یابیم که این الگوریتم برای‌هدفی نظری ونه‌محاسباتی به‌کار رفته است که همان یافتن‌جوابی خوب برای دستگاه نامعادلات دیوفانتی همزمان است . نکتهٔ اساسی این‌است: گیریم u_j و γ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ اعداد حقیقی مفروضی باشند، در این صورت مسألهٔ یافتن عددی مانند y که به ازای آن همهٔ کمیتهای $|\gamma_j y - u_j|$، $j = 1, \ldots, n$، به‌طور همزمان کوچك‌اند، می‌تواند به‌مسألهٔ‌یافتن بردار کوتاهی دریك شبکهٔ صحیح تبدیل شود. معلوم شده است که موضوع مورد توجه در اثبات ادلیزکو و تی‌ریل، بلندترین بردار در پایهٔ انتقال یافته است که الگوریتم پیدا می کند.

البته‌هیچ داستانی‌نباید بدون یکی دو تا نتیجهٔ‌اخلاقی‌به‌آخربرسد:

۱. εها را دست کم نگیرید،صفر گرفتن آنها همانا تن به‌زحمت‌دادن‌است.

۲. هیچ چیز را تنها به‌خاطر برخی دلایل پیش پاافتاده، مانند داشتن اینکه به‌ازای همهٔ مقادیر n تا ۷,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ درست‌است، باور نکنید.

۳. هرچند حدسی ممکن است نادرست باشد،کامپیوتر شما شاید قادر نباشد که نادرستی‌آن را در طی یك جستجوی طولانی (اما به هر

---

۱. فرانتس‌مرتنس (۱۸۴۰ــ۱۹۲۷) در یوزنان، واقع در غرب لهستان مرکزی، متولد شد و در برلین تحصیل کـرد (مرجع تاریخی [۸] را ببینید).

۲. کارهای بعد [۱] ، نقطهٔ جهش را به ازای $n = 7,725,038,629$ نشان داد.

حال محدود) بیابد.

۴. الگوریتمهایی که به خاطر علوم نظری کامپیوتر بسط داده شده‌اند ممکن است به‌اثبات قضایای مهمی در ریاضیات محض کمک کنند.

۵. هرچند کامپیوتر شما هنوز مثال ناقضی نیافته و هیچ علامتی دال بر رسیدن به‌چنین ناقضی را نشان نمی‌دهد، اما روی مطالعهٔ یك میلیارد حالت بعدی اصرار کنید زیرا کسی چه می‌داند که چه چیزی ممکن است در آن حالتها یافت شود.

ترجمهٔ مجتبی منیری

• Wilf Herbert S., "A greeting; and a view of Riemann's hypothesis", *Amer. Math. Monthly*, **94** (1987) 3-6.

مراجع

1. Cohen H., "Arithmétique et informatique", *Astérisque*, **61** (1979) 57-61.
2. Edwards Harold M., *Riemann's Zeta Function*, Academic Press, New York, 1974.
3. Lenstra A. K., Lenstra H. W. Jr., and Lovász L., "Factoring polynomials with rational coefficients", *Math. Ann.* **261** (1982) 515-534.
4. Mertens F.,"Über eine zahlentheoretische funktion", Sitzungss-berichte Akad. Wiss. *Wien*, **IIa 106** (1897) 761-830.
5. Neubauer Gerhard, "Eine empirische untersuchung zur Mertenss-chen funktion", *Numerische Mathematik*, **5** (1963) 1-13.
6. Odlyzko A. M., and te Riele H. J. J., "Disproof of the Mertens conjecture", *J. für die Reine und Angew. Math*, **357** (1985) 138-160.
7. Pintz Janos, "An effective disproof of the Mertens conjecture", *Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, preprint no **55** (1985).
8. te Riele H. J. J., "Some historical and other notes about the Mertens conjecture and its recent disproof", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, July 1985, 237-243.