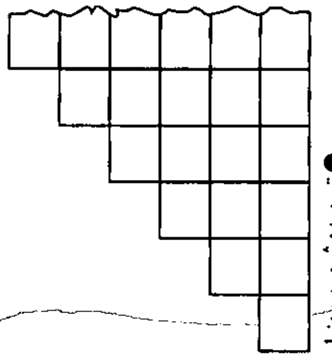
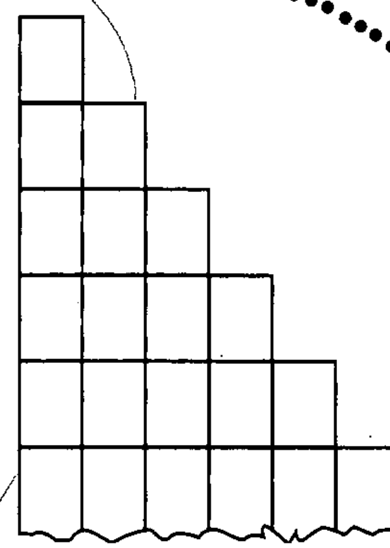


ترجمه: شهین نهضا

نگاهی به سری‌های هندسی

$$\sum_{k=۱}^{n} k^{۲} \text{ و } \sum_{k=۱}^{n} k$$



چکیده

در این مقاله، با نگاهی نو و جدید به سری‌های هندسی پرداخته‌ایم و از شکل‌های آشنای هندسی، برای اثبات جمع‌های جبری آموخته شده استفاده کرده‌ایم. برای اثبات رابطه‌ی اول از مساحت مربع‌های ایجاد شده در سطرها که روی هم قرار گرفته‌اند و در رابطه‌ی دوم از مکعب‌هایی به ضلع یک واحد استفاده شده است. سپس به کمک برش‌های داده شده، شکل‌ها محدودتر شده‌اند تا راحت‌تر بتوان مساحت و حجم آن‌ها را محاسبه کرد. در نهایت، مجموع مساحت‌ها در رابطه‌ی اول و نیز مجموع حجم‌ها در رابطه‌ی دوم، همان رابطه‌ی آشنای سری‌های هندسی را نتیجه‌گیری کرده است. هدف این مقاله، آشنایی دانش‌آموزان و همکاران با دیدگاهی دیگر برای اثبات سری‌هاست تا عزیزان با فهم بیشتر مسائل ریاضی و تجزیه و تحلیل آن‌ها، تأثیر مثبت تفکر ریاضی را دریابند.

مقدمه

تجربیات جدید و پژوهش در ریاضی، سبب می‌شود که انسان با بصیرت بیشتری به سامان‌دهی ذهن و اندیشه‌ی خویش بپردازد و برای رویارویی با چالش‌های علمی در بستر تدریس آماده شود. اکثر آموزشگران ریاضی، یادگیری ریاضی را مبنای توفیق فرد در حل مسئله، هم در زندگی عادی و هم در حوزه‌های دیگر مانند شیمی، فیزیک و... می‌دانند. بنابراین بهتر است، به‌دنبال روش‌های جدید و جذاب برای اثبات آموخته‌های قبلی باشیم تا نشان دهیم، ریاضی اگر زیبا و فهمیدنی باشد، بازتابی از طبیعت و جهان اطراف ماست.

قبلاً با دو نمونه از جمع‌های جبری زیر آشنا شده‌ایم:

$$۱)\ ۱+۲+۳+۴+\cdots+(n-۱)+n=\sum_{k=۱}^{n} k=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۲)\ ۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\cdots+(n-۱)^{۲}+n^{۲}=\sum_{k=۱}^{n} k^{۲}=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

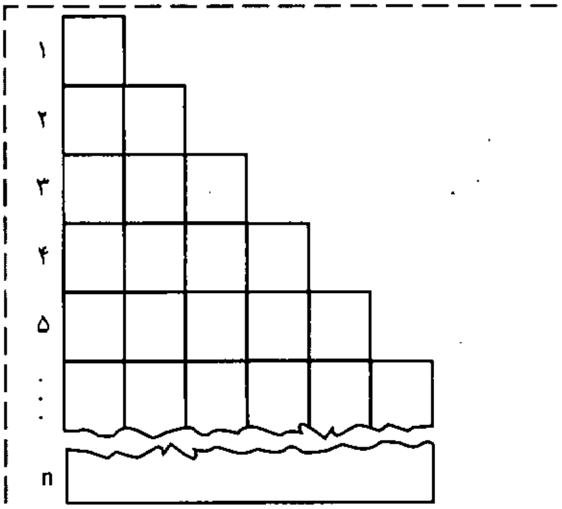
حال می‌خواهیم به $\sum_{k=۱}^{n} k$ و $\sum_{k=۱}^{n} k^{۲}$ از منظر هندسی بنگریم و آن‌ها را اثبات کنیم.

برای اثبات اولین جمع؛ مربع‌هایی را داریم که با استفاده از مساحت آن‌ها، اتحاد بالا اثبات می‌شود. و برای دومین جمع، آرایشی از مکعب‌ها را داریم که حجم آن‌ها به اثبات اتحاد می‌انجامد.

اثبات اولین مجموع

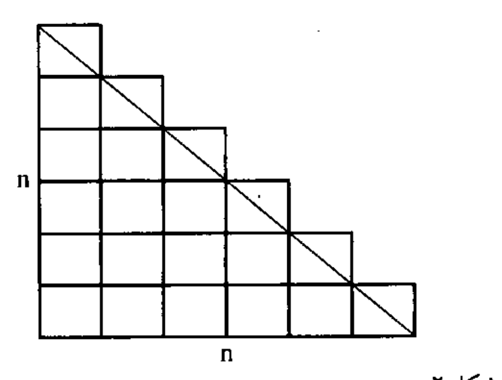
برای اثبات اولین مجموع، مربع‌هایی به طول ضلع یک واحد را داریم، که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. با توجه به شکل می‌بینیم که یک مربع روی اولین سطر، دو مربع روی دومین سطر، سه مربع روی سومین سطر و... تا n مربع روی nامین سطح قرار دارد. این مربع‌ها جمع زیر را می‌سازند:

$1+2+3+\cdots+(n-1)+n$



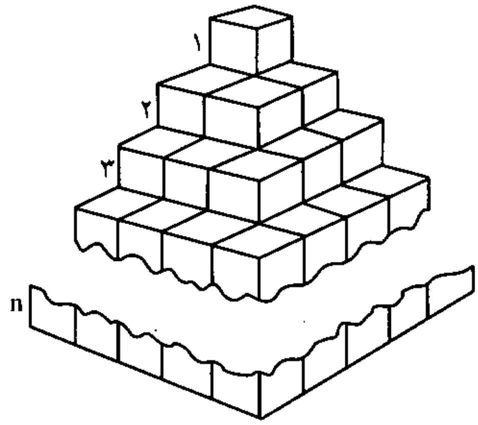
شکل ۱ الگوی پلکانی از مربع‌های واحد

علاوه بر این، می‌توان شکل بالا را با جدا کردن قسمت‌هایی از آن به شکل ۲ تبدیل کرد. مساحت مثلث بزرگ در شکل ۲، $\frac{n^2}{2}$ است؛ زیرا n سطر و n ستون دارد. از طرف دیگر، نیم شدن مربعات باقی‌مانده در شکل، نشان می‌دهد که مساحت آن‌ها نیز نصف شده است و چون در n سطر، n مثلث داریم، پس مساحت آن‌ها می‌تواند $(\frac{1}{2})n$ باشد. به این ترتیب، مجموع مساحت‌ها در شکل ۲ یا $\sum_{k=1}^{n} k$ برابر با $\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$ خواهد شد که برابر است با: $\frac{n(n+1)}{2}$.



شکل ۲

اثبات دومین مجموع

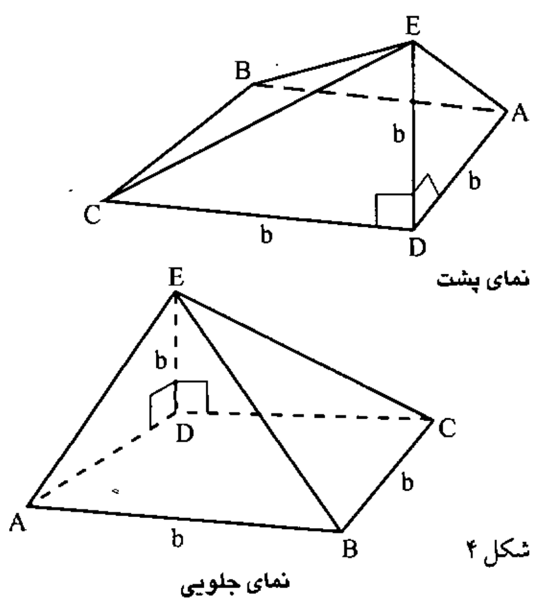


شکل ۳ لایه‌هایی از مکعب‌ها

حال برای مجموع دوم، اگر بخواهیم $\sum_{k=1}^{n} k^2$ را به‌وسیله‌ی شکل‌های هندسی نمایش دهیم، باتوجه به شکل ۳ تعداد مکعب‌ها در هر سطر برابر با k^2 است. یعنی یک مکعب در اولین سطر، چهار مکعب در دومین سطر، نه مکعب در سومین سطر و همین طور تا آخر، تا nامین سطر. به طور کلی ما در شکل ۳، n^2 مکعب داریم که اگر تعداد آن‌ها شمارش شود، حجم شکل، مجموع زیر خواهد بود:

$1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2+n^2$

برای این قسمت هم از روشی که در جمع اول اعمال شد، بهره می‌گیریم. پس شکل ۳ را با برش‌هایی تقسیم می‌کنیم که بدین وسیله شکل‌های زیر ایجاد خواهند شد:

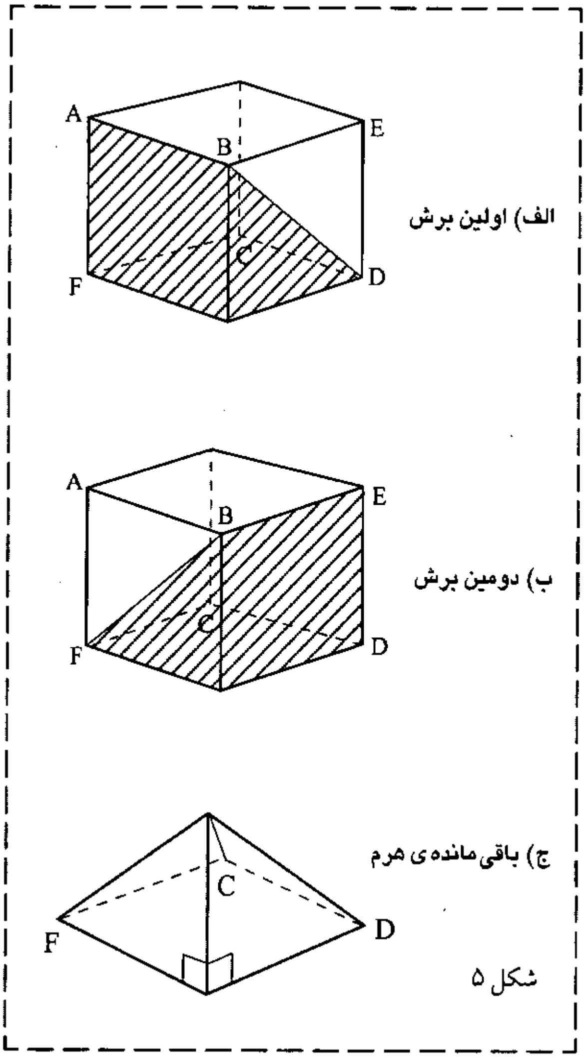


شکل ۴

نمای پشت و جلویی تقسیم‌ها، هرم‌هایی با قاعده‌ی ABCD هستند و DE عمودی است که برای قاعده‌ی ABCD ارتفاع محسوب می‌شود. ضلع‌ها و لبه‌های دیگر یکسان هستند و طولی برابر b دارند. پس فرمول حجم هرم تشکیل‌شده به این صورت خواهد بود:

$$\frac{b^3}{3} = (b^2)(b) \div 3 = \text{(ارتفاع)} \, \text{(مساحت قاعده هرم)} \div 3$$

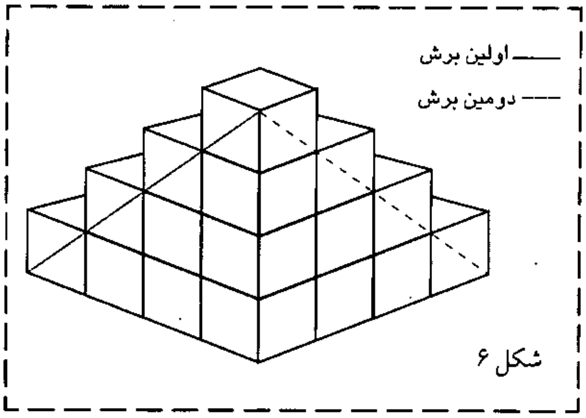
شکل‌های ۵، عمل برش را در مکعب شکل ۳ از نگاهی دیگر نشان می‌دهند. مکعب به‌وسیله‌ی برش‌هایی به دو قسمت از AB به CD برش داده شده و سپس به‌وسیله‌ی چرخش مکعب، عمل برش از لبه‌ی BE به CD انجام شده است.



شکل ۵

بالاخره و در نهایت از تقسیم شکل ۳، مکعب به دو تکه جداگانه تقسیم می‌شود.

حجم هرمِ به‌دست آمده $\frac{b^3}{3}$ است. پس حجم باقی‌مانده‌ی هرم $\frac{2b^3}{3}$ می‌شود (شکل ۵ـ الف). این برش‌ها را به طور کلی می‌توان به‌صورت شکل ۶ نمایش داد.



شکل ۶

پس می‌توان گفت: چون مکعب n سطر دارد، حجم هرم بزرگ $\frac{1}{3}n^3$ است و تکه‌های باقی‌مانده نیز $\frac{2}{3}n$ حجم دارند. حال تنها قسمت‌هایی که هنوز محاسبه نشده‌اند، نیمه‌هایی هستند که در قسمت‌های بالایی قرار گرفته‌اند و به صورت $(n-1)$ لایه مکعب نصف شده روی n لایه هستند و حجم آن‌ها به این صورت محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots+(n-1))$$

که با استفاده از مجموع اول، مقدار آن $\frac{1}{2}((n-1)\frac{n}{2})$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، مجموع حجم شکل و در نتیجه $\sum_{k=1}^{n} k^2$ برابر است با:

$$\underbrace{\frac{n^3}{3}}_{(I)} + \underbrace{\frac{(n-1)\times n}{2}}_{(II)} + \underbrace{\frac{2n}{3}}_{(III)}$$

(I) حجم هرم بزرگ

(II) قسمت بالایی مکعبات نیمه

(III) باقی‌مانده مکعبات پس از برش دوباره

بنابراین داریم:

$$\frac{n^3}{3} + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{2n}{3} = \frac{2n^3 + 3n(n-1) + 4n}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3(n-1) + 4)}{6}$$

$$= \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و این همان جوابی است که انتظار داشتیم.

□□□