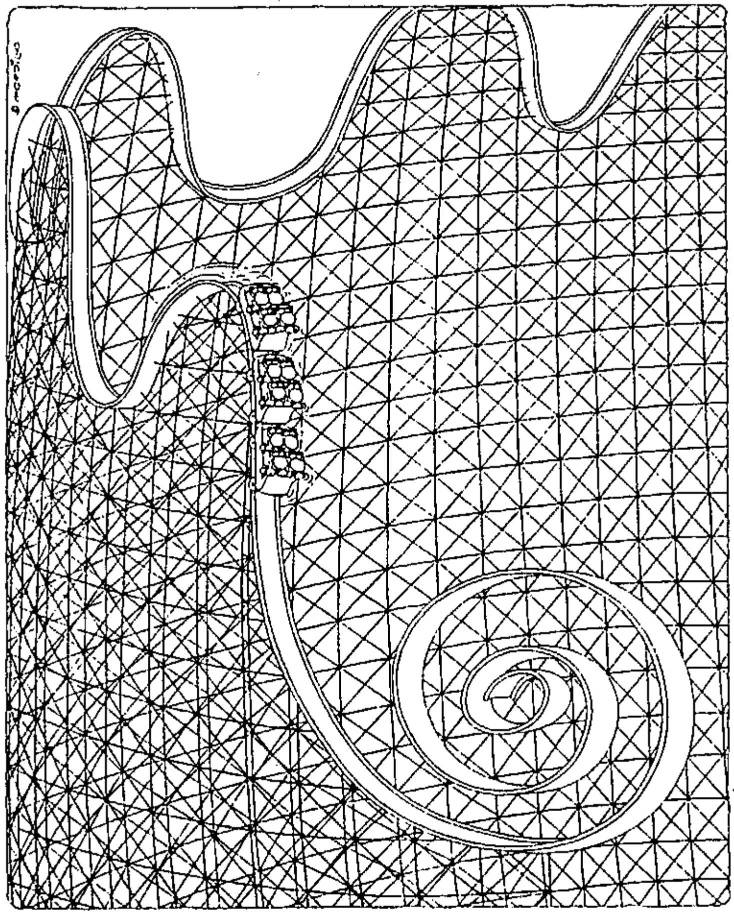


نگاشتهای خطی

(تبدیلهای خطی)

(قسمت اوّل)

● حمیدرضا امیری

اشاره:

در یکی از شماره‌های قبل مجله (برهان ۱۷) نگاشت را به عنوان یک تابع معرفی ومفهوم نگاشتهای خطی را هم از دیدگاه تابعی و هم از دیدگاه تبدیل در صفحه و فضا مورد تجزیه و تحلیل قرار دادیم. در این سلسله مقاله‌ها بیشتر به مفهوم نگاشت خطی و کاربردهای آن می‌پردازیم و مقاله را با یادآوری تعریف نگاشت آغاز می‌کنیم.

تعریف: نگاشت $\underset{f(x)=y}{f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n}$ یک نگاشت خطی است؛ هرگاه مؤلفه‌های $f(x)$ هرکدام، عبارتی درجهٔ اوّل برحسب x_1، x_2، ...، x_m بوده و فاقد عدد ثابتِ ناصفر باشند. در تعریف فوق، نگاشت f با تأثیر روی اعضای $\mathbb{R}^m$، که m تایی‌هایی مرتّب به صورت $(x_1,x_2,\dots,x_m)$ هستند، اعضایی از $\mathbb{R}^n$ را نتیجه می‌دهد. در واقع، هر مؤلفهٔ n تایی‌های حاصل از تأثیر f روی اعضای $\mathbb{R}^m$، عبارتی درجهٔ اوّل و بدون جملهٔ ثابت است که توسط x_1، x_2، ...، x_m تولید می‌شود و می‌توان هر مؤلفهٔ این n تایی‌ها را در حکم تابعی چون $\underset{f(x)=a_1x_1+\dots+a_mx_m}{f_i:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}}$ فرض کرد، که در آن $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ یک m تایی از $\mathbb{R}^m$ است.

مثال: نگاشتهای زیر را درنظر بگیرید:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$f(x_1,x_2)=(x_1+x_2,\, x_1x_2,\, 2x_1-x_2)$$

$$g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$y_1=x_1+x_2$$

$$y_2 = x_2 + x_3$$

$$y_3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$h:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

که $h(x_1, x_2) = (f_1, f_2)$

$$f_1:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

و $f_2:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_2(x_1, x_2) = 3x_2 - x_1$$

نگاشت f خطی نیست ؛ ولی نگاشتهای g و h خطی می‌باشند.

نکته: تابع $\underset{f(x)=ax+b}{f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}}$ $(a,b \neq 0)$ به تابع خطی معروف است ؛ ولی نگاشتِ خطی نیست!

تست: کدام یک از نگاشتهای زیر از $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ، خطی است؟

۱) $f(x,y,z) = (xy, x+y, z+y)$

۲) $f(x,y,z) = (x+1, x-y, 2z+x)$

۳) $f(x,y,z) = (x-y, x^2+y, z)$

۴) $f(x,y,z) = (0, y+z, x+y)$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

در گزینه‌های (۱) ، (۲) و (۳) به ترتیب به خاطر عبارتهای xy و $x+1$ و x^2+y خاصیت خطی بودن برقرار نمی‌باشد.

ماتریس یک نگاشت خطی

در فضاهای برداری $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ می‌توان هر عضو آنها را با ماتریسهایی ستونی نمایش داد. در این صورت، اگر به‌طور مثال $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ نگاشتی خطی باشد، داریم :

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} ax_1+bx_2+cx_3 \\ a'x_1+b'x_2+c'x_3 \end{bmatrix}$$

نگاشت خطی f را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت :

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

که اگر فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix}$ و $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ در این صورت

می‌توان نوشت : $f(x) = Ax$.

A را ماتریس نگاشت خطی f می‌نامند.

نکتهٔ مهم: توجه دارید که $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ؛ ولی ماتریس A، ماتریسی 2×3 می‌باشد. در حالت کلّی، اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ باشد و A ماتریس این نگاشت باشد، مرتبهٔ A، $n \times m$ است. همچنین هر ماتریس $n \times m$ می‌تواند یک نگاشت خطی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را تعریف کند.

مثال ۱: اگر $\underset{f(x,y)=(x+y,x-2y,y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ یک نگاشت خطی باشد، ماتریس این نگاشت کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است ؛ زیرا :

نگاشت از $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ تعریف شده، پس ماتریس این نگاشت می‌بایست ماتریسی 3×2 باشد. از طرفی می‌توانیم بنویسیم :

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-2y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال ۲: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ماتریس نگاشت خطی f باشد، در این صورت f کدام است؟

۱) $\underset{f(x,y)=(x+y,-x+y,2y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ ۳) $\underset{f(x,y,z)=(x-y,x+2z)}{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$

۲) $\underset{f(x,y)=(x-y,x+y,2y)}{f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3}$ ۴) $\underset{f(x,y,z)=(x-y,x+y+2z)}{f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :
ماتریس A از مرتبهٔ ۳×۲ است، پس f باید از $\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ باشد و داریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x-y \\ x+y+۲z \end{bmatrix}$$

معیاری برای تشخیص خطی بودنِ نگاشتها

قضیه: نگاشت $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ یک نگاشت خطی است ؛ اگر و فقط اگر هردو شرط زیر برقرار باشد :

I) به ازای هر $x,y \in \mathbb{R}^m$ ، $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

II) به ازای هر $x \in \mathbb{R}^m$ و $r \in \mathbb{R}$ ، $f(rx)=rf(x)$.

تتابج زیر، بلافاصله از قضیهٔ پیش حاصل می‌شود :

I) نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ ، بردارِ صفر در $\mathbb{R}^m$ را به بردار صفر در $\mathbb{R}^n$ تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر $f(۰)=۰$.

II) اگر $x \in \mathbb{R}^m$ ، در این صورت $f(-x)=-f(x)$.

I (اثبات) $f(۰)=f(۰+۰) \Rightarrow f(۰)=f(۰)+f(۰) \Rightarrow f(۰)=۰$

II (اثبات) $f(-x)=f[(-۱)x]=(-۱)f(x)=-f(x)$

نکته: قضیهٔ پیش را می‌توان به صورت زیر، خلاصه کرد و معادل آن را نوشت :
اگر f نگاشتی از $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ باشد، شرط لازم و کافی برای آن که f خطی باشد، آن است که برای هر $x,y \in \mathbb{R}^m$ و $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ،
$f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$

مثال ۳: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ و $f(۱,۰)=(۱,۲)$ و $f(۰,۱)=(۲,۲)$ در این صورت $f(۲,۱)$ کدام است؟

۱) (۴،۶) ۲) (۴،۴) ۳) (۶،۴) ۴) (۶،۶)

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است ؛ زیرا :
طبق مطالب فصل فضای برداری، (۱،۰) و (۰،۱) بردارهای مبنا بوده و هر بردار، بالاخص (۲،۱) را می‌توان برحسب ترکیب خطی آنها نوشت

$$f(۲,۱)=f[۲(۱,۰)+۱(۰,۱)] \overset{\text{f خطی است}}{=\!=\!=} ۲f(۱,۰)+f(۰,۱)$$
$$=۲(۱,۲)+(۲,۲) \Rightarrow f(۲,۱)=(۴,۶)$$

مثال ۴: اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^۳ \to \mathbb{R}^۲$ و داشته باشیم $f(۱,۰,۰)=(۱,۲)$ و $f(۰,۱,۰)=(۱,-۱)$ و $f(۰,۰,۱)=(-۲,۱)$ در این صورت، حاصل $f(۲,۱,-۱)$ کدام است؟

۱) (۵،۳) ۲) (۵،-۲) ۳) (۵،۲) ۴) (-۵،۲)

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

$$f(۲,۱,-۱)=f[۲(۱,۰,۰)+۱(۰,۱,۰)-۱(۰,۰,۱)]$$
$$=۲f(۱,۰,۰)+f(۰,۱,۰)+(-۱)\ f(۰,۰,۱)$$

چون f خطی است

$$=۲(۱,۲)+(۱,-۱)-(-۲,۱)=(۵,۲)$$

مثال۵ : اگر f نگاشتی خطی از $\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ و داشته باشیم $f(۲,۱)=(۲,۴)$ و $f(۲,-۱)=(۴,۲)$ در این صورت حاصل $f(۲,۲)$ کدام است؟

۱)(۱،-۵) ۲) (۵،۱) ۳) (-۵،-۱) ۴) (۱،۵)

حل: گزینه (۴) صحیح است ؛ زیرا :
بردارهای (۲،-۱) و (۲،۱) مستقل خطی بوده ؛ بنابراین می‌توانند یک مبنا تشکیل دهند و هر بردار در $\mathbb{R}^۲$ بالاخص (۲،۲) را می‌توان برحسب ترکیب خطی این دو بردار نوشت :

$$x(۲,-۱)+y(۲,۱)=(۲,۲)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x+۲y=۲ \\ -x+y=۲ \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}\ ,\ y=\frac{۳}{۲}$$

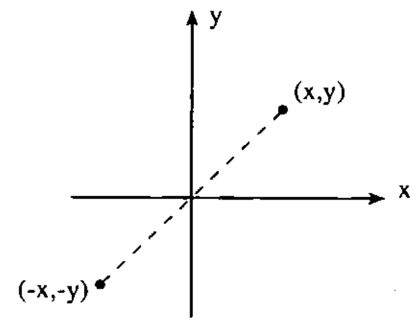
$$f(۲,۲)=f\left[-\frac{۱}{۲}(۲,-۱)+\frac{۳}{۲}(۲,۱)\right]$$
$$=-\frac{۱}{۲}f(۲,-۱)+\frac{۳}{۲}f(۲,۱)$$
$$=-\frac{۱}{۲}(۴,۲)+\frac{۳}{۲}(۲,۴)=(۱,۵)$$

ماتریس نگاشتهای خطّی مهم در صفحه

ماتریس تقارن نسبت به مبدأ مختصات

می‌دانیم اگر نقطه‌ای را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کنیم، طول و عرض آن قرینه می‌شوند، لذا نگاشتی خطی چون f باید تعریف کنیم به قسمی که :

$$f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲ \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$$



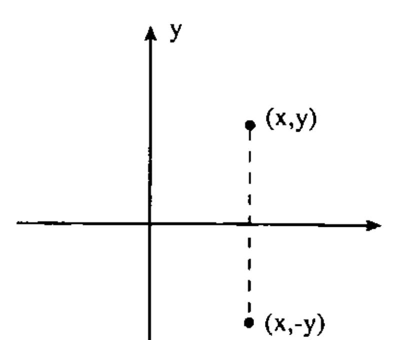
که ماتریس این نگاشت خطی، بنابر مطالب قبل، عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix}$$

ماتریس تقارن نسبت به محور xها

برای تقارن نسبت به محور xها نگاشتی چون f باید تعریف کنیم که با تأثیر روی هر نقطه از صفحه، عرض آن نقطه را قرینه کند ؛ پس :

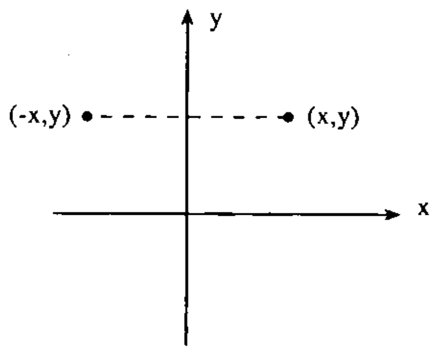
$$f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲ \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به محور yها

نگاشت f در این تبدیل، می‌بایست عرض نقاط را ثابت نگه‌داشته و طول هر نقطه را قرینه کند :

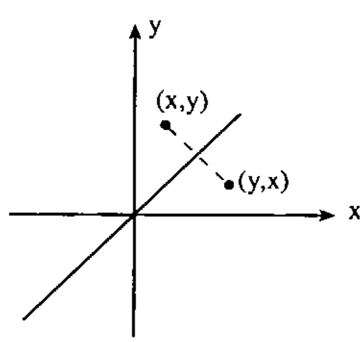
$$f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲ \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع اوّل (خط به معادلهٔ y=x)

نگاشت خطی که بتواند هر نقطه در صفحه را نسبت به نیمساز ربع اوّل و سوّم قرینه کند، به صورت زیر تعریف می‌شود :

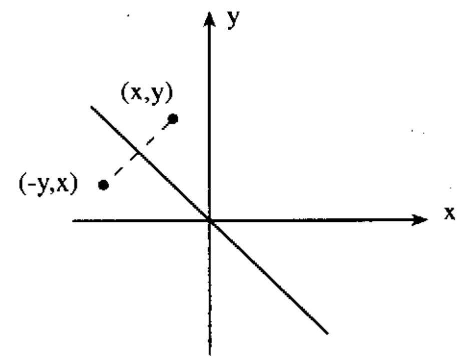
$$f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲ \Rightarrow \text{ماتریس نگاشت } f = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$



ماتریس تقارن نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم (خط به معادلهٔ $y=-x$)

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$، $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} -y \\ -x \end{bmatrix}$ می‌تواند هر نقطه در صفحه را نسبت به خط با معادلهٔ $y=-x$ قرینه کند ؛ بنابراین :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \text{ماتریس نگاشت } f$$



ماتریس دوران حول مبدأ به اندازهٔ زاویهٔ α

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\sin\alpha \end{bmatrix}$ می‌تواند با تأثیر روی هر نقطه از صفحه، آن را به اندازهٔ α ، حول مبدأ مختصات دوران دهد، که ماتریس این نگاشت برابر است با : $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

مثال۶: توسط ماتریس دوران، معادلهٔ تبدیل یافتهٔ منحنی به معادلهٔ $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ را بیابید ؛ هرگاه بخواهیم این منحنی را به اندازهٔ 90° حول مبدأ دوران دهیم.

حل: منحنی فوق، دایره‌ای است به مرکز $w\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ و به شعاع۳، و می‌دانیم دایره بر اثر دوران، به دایره‌ای با شعاع قبل، تبدیل شده و فقط مرکز آن تغییر می‌کند. پس کافی است مرکز دایره را به اندازهٔ $\frac{\pi}{2}$ حول مبدأ دوران داده و مرکز جدید را بیابیم :

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$(x-2)^2+(y-1)^2=9$: معادلهٔ دایره دوران یافته

نکتهٔ مهم: ماتریسهای دوران حول مبدأ، یعنی $A=\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ دارای سه‌ویژگی زیر می‌باشند :

I) دترمینان ماتریس دوران برابر با ۱ است.

II) طول هر بردار ستونی در ماتریسهای دوران حول مبدأ واحد است.

$$X=\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |X|=1 \ , \ Y=\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow |Y|=1$$

III) بردارهای ستونی در هر ماتریس دوران حول مبدأ بر هم عمودند.

$$X=\begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \ , \ Y=\begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow X.Y=$$

$$-\sin\alpha\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=0 \Rightarrow X \perp Y$$

ماتریس تجانس

نقطهٔ $M=\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ را مجانس نقطه $M=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ با نسبت تجانس k می‌نامیم و اگر بخواهیم نگاشتی چون f تعریف کنیم ؛ به طوری که $f(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix})=\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ ، ماتریس این نگاشت برابر است با :

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \text{ماتریس نگاشت } f$$

در تجانس، توجه دارید که طول و عرض نقاط، به یک نسبت، بزرگ یا کوچک می‌شوند (در حالت خاص $k=1$ ، تغییر نمی‌کنند).

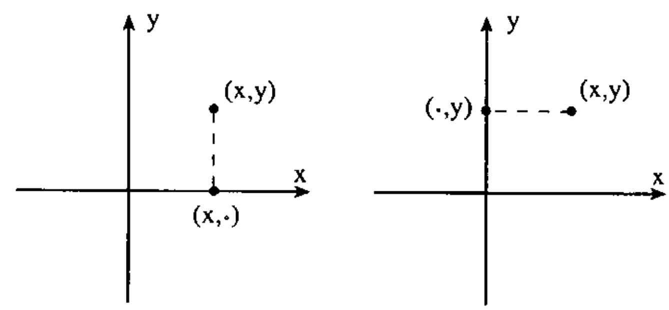
ماتریسهای تصویر قائم روی محور xها و yها

نگاشت خطی $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطهٔ $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ هر نقطه در صفحهٔ مختصات را روی محور xها به صورت قائم تصویر می‌کند و ماتریس این نگاشت، برابر است با : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

و به همین ترتیب، نگاشت $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه

$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ هر نقطه در صفحه را روی محور y ها به صورت قائم تصویر می‌کند که ماتریس این نگاشت نیز برابر است با $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$،

به شکلها توجه کنید :



مثال ۷: منحنی $x^2+y^2=4$ تحت تبدیل $T=\begin{bmatrix}4&0\\0&4\end{bmatrix}$ به کدام منحنی تبدیل می‌شود؟

۱) $x^2+y^2=8$ ۲) $x^2+y^2=16$

۳) $x^2+y^2=64$ ۴) $x^2+y^2=4$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است ؛ زیرا :

تبدیل فوق، یک تجانس است با نسبت ۴، بنابراین دایرهٔ مفروض، ۴ برابر بزرگ می‌شود و به عبارت دیگر، شعاعِ آن ۴ برابر می‌شود و چون شعاع آن، قبل از تبدیل، ۲ است، ۴ برابر شده و باید شعاع آن ۸ باشد.

ماتریسهای کشش در امتداد محور xها و yها

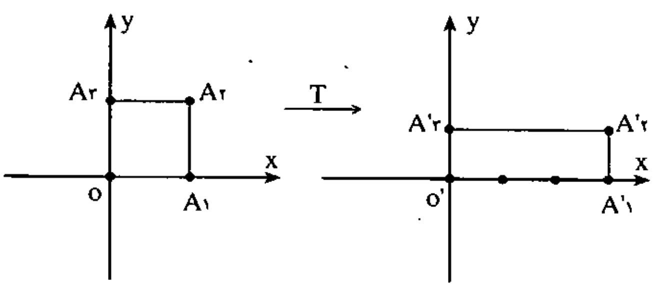
ماتریسهای $A=\begin{bmatrix}k&0\\0&1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&k\end{bmatrix}$ به ترتیب، ماتریسهای کشش در امتداد محور x ها و در امتداد محور yها می‌باشند.

مثال ۸: اگر نقطه‌های $O\Big|_{0}^{0}$ و $A_1\Big|_{0}^{1}$ و $A_2\Big|_{1}^{1}$ و $A_3\Big|_{1}^{0}$ مختصات رئوس یک چهارضلعی باشند (مربع واحد) شکل حاصل از تأثیر تبدیل T با ماتریس $T=\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}$ و مساحت آن را بیابید.

$$\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&3&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

توجه دارید که تبدیل یافته‌های هر نقطه را تحت تأثیر ماتریس تبدیل محاسبه کرده‌ایم و سپس با وصل کردنِ نقاط حاصل به‌هم، شکل تبدیل یافته مشخص می‌شود.

البته با توجه به این که T ماتریس کشش در امتداد محور x ها است، حدس می‌زدیم که شکل حاصل، یک مستطیل افقی باشد.



مساحت $O'A'_1A'_2A'_3 = 1\times3=3$

مثال ۹: تبدیل یافتهٔ منحنی $(x-1)^2+(y+2)^2=25$ تحت ماتریس تبدیل $T=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱) سهمی عمودی ۲) هذلولی عمودی

۳) بیضی افقی ۴) بیضی عمودی

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است ؛ زیرا :

تبدیل مذکور یک کشش در امتداد محور y ها و می‌دانیم کشش، دایره را به بیضی تبدیل می‌کند!