نکاتی دربارهٔ اعداد گویا و گنگ

مرتضی بیات و مهدی حسنی
مرکز تحصیلات تکمیلی در علوم پایهٔ زنجان

چکیده

تفهیم اعداد گنگ به سادگی بیانشان نیست. بیان نمادهای صوری $\sqrt{2}$، e و π، به مراتب راحت‌تر از درک عمیق آن است که آنها چه نوع اعدادی هستند. در این مقالهٔ کوتاه، کوشش خواهد شد گامی هر چند کوچک در جهت درک بهتر اعداد گویا و گنگ برداشته شود. اشاره به زمینه‌های تاریخی موضوع نیز به درک بهتر مطالب کمک خواهد کرد و نیز اثبات گنگ بودن اعداد $\sqrt{2}$، e و π به روش کوتاه و جدید و همچنین بررسی قضیهٔ هالموس (صورت سادهٔ مسألهٔ هفتم هیلبرت) و قضیهٔ بیتی، پایان بخش این مقاله خواهد بود.

۱. ملاحظات تاریخی در باب اعداد گویا و گنگ

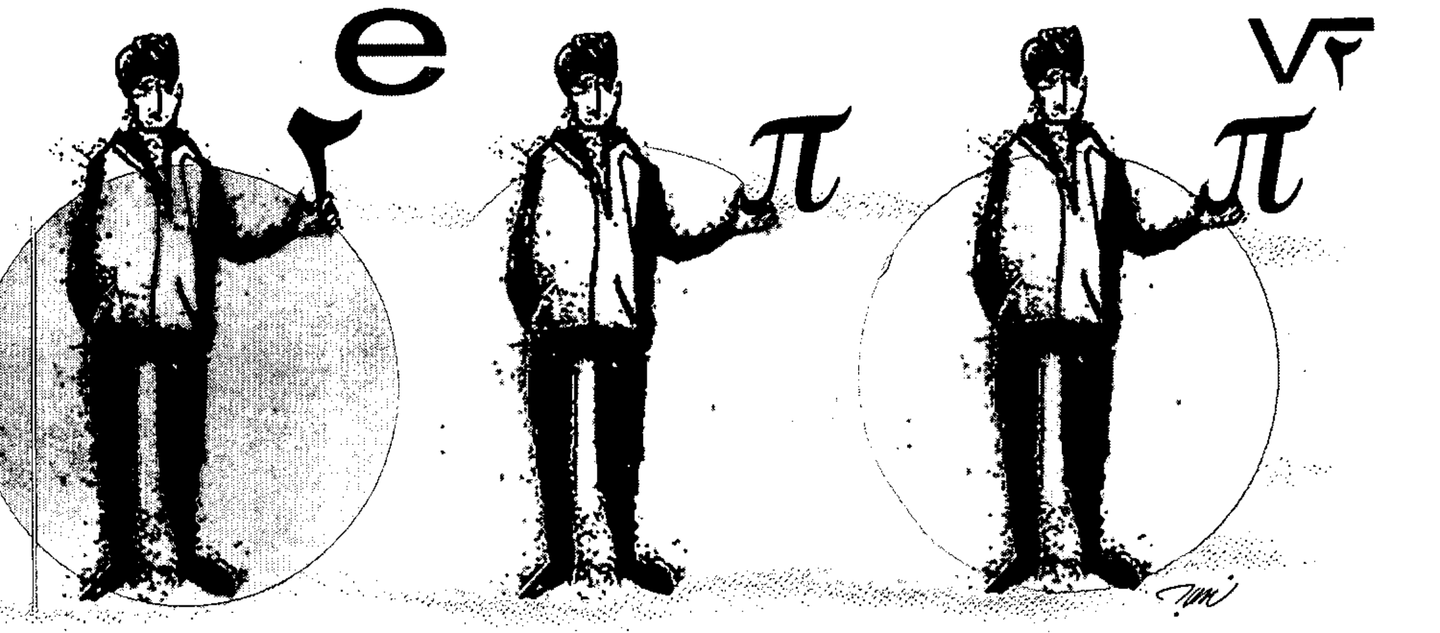
اعداد گویا و گنگ، سابقه‌ای قدیمی دارند. کشف گنگ بودن نسبت قطر مربع به ضلع آن، به فیثاغورثیان منسوب است. تئودوروس (اواخر قرن پنجم قبل از میلاد)، استاد افلاطون در ریاضیات، تحقیقات قابل توجهی در این زمینه کرده است و گنگ بودن جذر ۳ و سایر اعداد طبیعی غیرمجذور کامل را تا ۱۷ به اثبات رسانید. یونانیان، به جای عدد مجرد، عمدتاً به کمّیات هندسی نظر داشتند. کارهای آنها در زمینهٔ اعداد گنگ در کتاب اصول هندسه، از اقلیدس، به اوج می‌رسد. بحث هندسی از کمّیات گنگ، به تدریج منجر به مفهوم عدد شد و مبحث اعداد گنگ، در کتاب‌های «حساب نظری» قرن ۱۵ م میلادی دیده می‌شود.

یکی از مشهورترین اعداد ریاضی، نسبت محیط دایره به قطر آن است، که از ایّام بسیار قدیم مورد توجه بوده و این عدد از زمان اویلر به بعد، به نام «π» خوانده می‌شود. عدد مشهور دیگر، عدد «e» می‌باشد و سابقه‌اش ظاهراً پس از کشف لگاریتم است. تا اواسط قرن ۱۸ میلادی، کسی نمی‌دانست که این اعداد گویا هستند یا گنگ، تا آن‌که لامبرت در ۱۷۶۱ گنگ بودن آنها را ثابت کرد. گنگ بودن e^2 در ۱۸۴۰ به وسیلهٔ لیوویل به اثبات رسید. امروزه می‌دانیم که همهٔ قوای طبیعی e و π و کثیرالجمله‌های صحیح بر حسب e یا π با ضرایب گویا، اعداد گنگ هستند. گنگ بودن اعداد 2^e، π^e و $\pi^{\sqrt{2}}$ و عدد اویلر،

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\ln n\right),$$

هنوز دانسته نیست، ولی می‌دانیم که اعداد $2^{\sqrt{2}}$ و e^{π} گنگ‌اند.

مسألهٔ جبری یا متعالی بودن یک عدد، خود مسألهٔ دیگری است. در این موضوع، سه مسألهٔ متمایز می‌توان طرح کرد؛ اوّل اثبات وجود اعداد متعالی (بدون الزام به عرضه کردن چنین اعدادی)، دوم عرضه کردن عددی متعالی، سوم ـ که به مراتب مشکل‌تر است ـ اثبات این که عدد معینی (نه عددی که بدین منظور ساخته شده است، بلکه اعدادی مانند e، π، و اعداد مشخص دیگر متداول در آنالیز) متعالی



هست یا نه. نخستین ریاضیدانی که دسته‌ای از اعداد متعالی را عرضه کرد، لیوویل است (۱۸۴۴). پس از وی، هرمیت، متعالی بودن e را ثابت کرد (۱۸۷۳)، و سپس، لیندمان متعالی بودن π را به ثبوت رسانید (۱۸۲۲). با اثبات قضیهٔ شگفت‌انگیز کانتور، معلوم شد که ـبه عبارت مجازی ـتقریباً همهٔ اعداد متعالی هستند. در واقع، اعداد متعالی، اعداد استثنایی نیستند، بلکه اعداد غیرمتعالی اند که جنبهٔ استثنایی دارند.

در کنگرهٔ پاریس (سال ۱۹۰۰) هیلبرت توجه ریاضیون را به بیست و سه مسألهٔ لاینحل جلب کرد. هفتمین آنان، در متعالی بودن اعدادی بود به صورت a^b با مفروضات $a \neq ۱$ و $b \neq ۱$ جبری بودن a و b و گنگ بودن b. در ۱۹۳۴ ثابت شد که این اعداد جملگی متعالی هستند.

۲. عدد و تعبیر هندسی

در واقع، انسان از آن موقعی که تناظر یک به یک اعداد و نقاط روی یک محور را درک کرد، این قدرت آفرینش در انسان شکوفا شد و اندازه‌گیری طول یک پاره‌خط، شروع این خلاقیت بود. راه طبیعی اندازه‌گیری طول، این است که با خط‌کش که ابزار اندازه‌گیری است، شروع کنیم. اگر تکرار اندازهٔ خط‌کش ممکن باشد، آن را به دنبال هم کنار طولی که باید اندازه‌گیری شود، قرار می‌دهیم. در صورتی که سنجش کامل با چهار خط‌کش صورت گیرد، گوییم طول برابر با ۴ است. اگر سه طول چهار واحدی به دنبال هم قرار گیرند، تعداد ۱۲ خط‌کش اندازه‌گیری برای سنجش کامل تمام طول‌ها، لازم است. ملاحظه می‌کنیم که، اگر طول پاره‌خط، مضرب صحیحی از طول خط‌کش نباشد، با روش فوق اندازه‌گیری طول پاره‌خط امکان‌پذیر نیست. اگر معلوم شود که m واحد اندازه‌گیری برای سنجش n طول مساوی لازم است، در آن صورت طول مطلوب x در تساوی زیر صدق می‌کند:

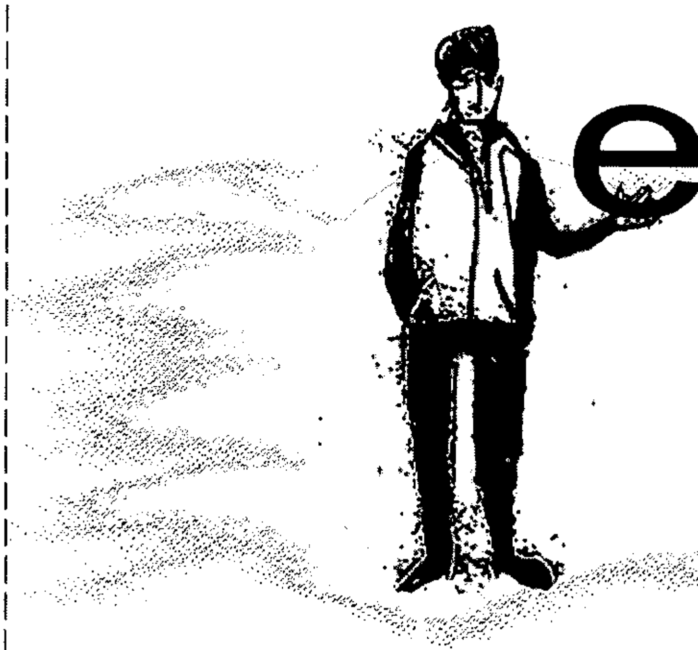
$$m = n \times x \qquad (۱)$$

متأسفانه اگر بخواهیم اعداد طبیعی را به کار بریم، باید گفت که معادله (۱)، معمولاً جواب ندارد. یونانیان قدیم از این مسأله دوری می‌کردند، به این ترتیب بیان می‌نمودند، طول واحد اندازه‌گیری به نسبت $\frac{m}{n}$ است و این در واقع، نقطهٔ شروع آشنایی آنها با اعداد گویا (مُنطق) بود.

از اعداد می‌توانیم برای اندازه‌گیری طول، یا کمّیت‌های دیگر فیزیکی استفاده کنیم؛ ولی یونانیان می‌دانستند پاره‌خط‌هایی هم وجود دارند که طول آنها را نمی‌توان در «تئوری» دقیقاً با اعداد گویا اندازه گرفت. آنان هندسه‌دانان بزرگی بودند، یکی از قضیه‌های ساده، ولی عمیقشان، قضیهٔ فیثاغورث بود.

فلاسفهٔ مکتب فیثاغورث، البته با قضیهٔ فیثاغورث آشنا بوده‌اند و از استدلال‌هایی استفاده می‌کردند که در آن مساحت‌های اشکال مختلف به کار گرفته می‌شد.

به محض این که قضیهٔ فیثاغورث کشف شد، در محدودهٔ کوچکی باید توافق می‌شد که پاره‌خطی به طول $\sqrt{۲}$، گنگ است. نتیجه با بهت و حیرت پذیرفته شد؛ حتی سعی گردید تا این «نقض کلّی» را مخفی نگه دارند، ارسطو در کتاب طبیعیات خود در باب عقاید فیثاغورث می‌گوید:



«... لیکن فیثاغورس یا اصحاب اوّلیهٔ او، به آسانی ثابت کرده بودند که مجذور هیچ عدد صحیحی نمی‌تواند دو برابر مجذور عدد دیگری باشد و به این جهت، طول ضلع یا طول وتر از مقادیر گنگ است؛ یعنی، هر واحد طول را هر اندازه کوچک اختیار کنید، اگر تعداد دفعاتی که واحد در طول ضلع تکرار می‌شود، بدون کسر باشد، در طول وتر بدون کسر نخواهد بود و بالعکس.»

همهٔ ما با کار پارچه فروشی آشنا هستیم؛ او میله‌ای به اندازهٔ یک متر در اختیار دارد. حال اگر از وی خواسته شود که دقیقاً $\sqrt{۲}$ متر پارچه جدا کند، آیا او قادر به انجام چنین کاری خواهد بود یا نه؟!

حتی اگر وی با وسیله‌ای، طول مترش را به n قسمت مساوی تقسیم کند، باز هم نمی‌تواند این کار را به طور دقیق با $\frac{۱}{n}$ مترش انجام دهد؛ زیرا اگر $\frac{۱}{n}$، مترش را در طول $\sqrt{۲}$ متر پارچه بسنجد، به طور طبیعی تعداد m تا $\frac{۱}{n}$ از طول $\sqrt{۲}$ متر پارچه بیشتر یا کمتر خواهد شد و در غیر این صورت، باید داشته باشیم:

$$\sqrt{۲} = m\times\frac{۱}{n}=\frac{m}{n}, \qquad (۲)$$

که البته بعداً ثابت می‌کنیم که این تساوی هیچ‌گاه اتفاق نمی‌افتد. از این جا متوجه می‌شویم که قسمت اضافی یا کسری که در انتهای سنجش $\sqrt{۲}$ متر پارچه به وجود می‌آید، باید به طریقی صرف‌نظر شود. این عمل را «تقریب اعداد گنگ به کمک اعداد گویا» می‌گویند. هر قدر مقدار اضافی یا کسری کمتر باشد، «تقریب دقیق‌تر» خواهد بود و از این جاست که «مفهوم حد» ظاهر می‌شود. حال سعی می‌کنیم

ادامه در صفحه بعد