نکاتی درباره توابع متناوب یا توابع دوره‌ای

احمد قندهاری

تعریف: تابع f را وقتی «متناوب» یا «دوره‌ای» گوییم که عدد مثبتی مانند T_1 وجود داشته باشد به طوری که:

$$\forall x \in D_f \Longrightarrow (x+T_1) \in D_f \wedge f(x+T_1)=f(x)$$

در این صورت کوچکترین مقدار T_1 را T می‌نامیم و T را «دوره» یا «تناوب» اساسی تابع f گوییم.

مثلاً در تابع $f(x)=\sin x$ داریم:

$$\sin(x+2k\pi)=\sin x \Longrightarrow f(x+2k\pi)=f(x)$$

$$\Longrightarrow T_1=2k\pi \Longrightarrow T=2\pi$$

$T=2\pi$ را «دوره» یا «تناوب» اساسی تابع گوییم.

همچنین در تابع $f(x)=tg\,x$ داریم:

$$tg(x+k\pi)=tg\,x$$

$$\Longrightarrow f(x+k\pi)=f(x) \Longrightarrow$$

$$T_1=k\pi \Longrightarrow T=\pi$$

$T=\pi$ را دوره یا تناوب اساسی تابع گوییم.

۱- تناوب اساسی توابع:

$$\sin^{2n}ax \text{ و } \cos^{2n}ax \text{ و } tg^{n}ax \text{ و } cotg^{n}ax$$

$n \in N$ برابر $(\frac{\pi}{a})$ است. $a>0$

اثبات: درمورد $f(x)=\sin^{2n}ax$ ثابت می‌کنیم تناوب اساسی $(\frac{\pi}{a})$ است.

می‌دانیم:

$$\sin^{2n}(ax+k\pi)=\sin^{2n}ax$$

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}a(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+aT_1)$$

اگر:

$$aT_1=k\pi \Longrightarrow f(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+k\pi)$$

$$=\sin^{2n}ax=f(x)$$

پس $K \in Z$:

$$aT_1=k\pi \Longrightarrow T_1=\frac{k\pi}{a} \Longrightarrow \boxed{T=\frac{\pi}{a}}$$

مثال: $n \in N$

$$f(x)=\sin^{2n}4x \Longrightarrow T=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{4}$$

۲- تناوب اساسی توابع $\sin^{2n-1}ax$ و $\cos^{2n-1}ax$ برابر $(\frac{2\pi}{a})$ است.

$n \in N$ و $a>0$

اثبات: در مورد $f(x)=\cos^{2n-1}ax$ ثابت می‌کنیم:

$$T=\frac{2\pi}{a}$$

می‌دانیم:

$$\cos^{2n-1}(ax+2k\pi)=\cos^{2n-1}ax$$

$$f(x+T_1)=\cos^{2n-1}a(x+T_1)=\cos^{2n-1}(ax+aT_1)$$

اگر :

$$aT_1 = 2k\pi \Rightarrow f(x=T_1) = \cos^{2n-1}(ax+2k\pi) = \cos^{2n-1}ax = f(x)$$

پس

$$aT_1 = 2k\pi \Rightarrow T_1 = \frac{2k\pi}{a} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{a}}$$

مثال :

$$f(x) = \sin^7 6x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{a} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

۳- تناوب اساسی تـابع $f(x) = nx - [nx]$ برابر $(\frac{1}{n})$ است .

اثبات:

$$f(x) = nx - [nx]$$

$$f(x+T_1) = n(x+T_1) - [n(x+T_1)]$$

$$f(x+T_1) = nx + nT_1 - [nx + nT_1]$$

اگر nT_1 عدد صحیح باشد ، داریم:

$$nT_1 = K \in Z$$

$$f(x+T_1) = nx + nT_1 - [nx] - nT_1 =$$

$$nx - [nx] = f(x) \Rightarrow nT_1 = K \quad , \quad K \in Z$$

$$T_1 = \frac{k}{n} \Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{n}}$$

۴- اگر تابعی ازچند تابع تشکیل‌شده باشد،کوچکترین مضرب مشترك، تناوبهای‌اساسی‌آنها، تناوب اساسی تابع‌اصلی خواهد بود .

مثال : تناوب اساسی تابع

$$f(x) = \sin\frac{3x}{2} + \cos\frac{4x}{3} + tg\frac{4x}{3}$$

را بیابید .

حل :

$$T_{\sin\frac{3x}{2}} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$$

$$T_{\cos\frac{4x}{3}} = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$$

$$T_{tg\frac{4x}{3}} = \frac{\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{4}$$

حال باید بین $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{4\pi}{3}$ کـوچکتریـن مضرب مشترك‌را گرفت. برای تعیین کوچکترین مضرب‌مشترك‌چند کسر، کافیست از صورتهـای کسر کوچکتریـن مضرب مشترك و از مخرجهای‌آن بزرگترین مقسوم علیه مشترك‌را گرفت.

$$4\pi \quad 3\pi \quad 3\pi \Rightarrow 12\pi = \text{ك م م}$$

$$3 \quad 2 \quad 4 \Rightarrow 1 = \text{ب م م}$$

$$\Rightarrow T_{f(x)} = 12\pi$$

۵- یك‌تابع ممکن‌است متناوب‌باشد ولی‌تناوب اساسی نداشته باشد مانند:

$f(x) = c$ تابع ثابت

زیرا :

$$\forall x \in R : (x+T_1) \in R \wedge f(x+T_1) = f(x) = c$$

امـا برای این تـابـع کوچکتریـن مقدار مثبت T_1 وجـود ندارد .

پس‌تابع‌ثابت $f(x) = c$ متناوب‌هست ولی‌تناوب‌اساسی ندارد .

۶- اگر کمان یک تابع مثلثاتی به صورت $(ax+b)$ نباشد، تابع متناوب نیست. مثلاً توابع:

$$h(x)=tg\frac{1}{x} \text{ و } g(x)=\cos x^2 \text{ و } f(x)=\sin\sqrt{x}$$

متناوب نمی‌باشد.

۷- اگر f تابعی متناوب وتناوب اساسی داشته باشدآن گاه تابع $|f|$ نیز متناوب‌است.

در بعضی‌از توابع، تناوب‌اساسی تابع $|f|$ برابر تناوب اساسی‌تابع f است ودر بعضی از توابع تناوب اساسی‌تابع $|f|$ نصف‌تناوب‌اساسی‌تابع f است. برای‌راحت‌تر پیدا کردن‌تناوب اساسی‌تابع $|f|$ بهتراست، T تناوب اساسی تابع f را نصف کرده درتابع $|f|$ به‌صورت زیر بررسی کنیم:

اگر درتابع $g(x)=|f|$ داشته‌باشیم:

$$\forall x\in D_g : g(x+\frac{T}{2})=g(x)$$

نتیجه می‌گیریم: تناوب اساسی تابع $|f|$، $(\frac{T}{2})$ است.

در غیر این صورت تناوب اساسی تابع $|f|$ همان (T) است.

مثال ۱: تناوب اساسی تابع g را بیابید:

$$g(x)=|\sin^2 x+\sin x|$$

$$T_{(\sin^2 x+\sin x)}=2\pi$$

$$g(x+\pi)=|\sin^2(x+\pi)+\sin(x+\pi)|=$$

$$|\sin^2 x-\sin x|\neq g(x) \implies T_{g(x)}=2\pi$$

مثال ۲: تناوب اساسی تابع g را بیابید:

$$g(x)=|tg x+cotg x|$$

$$T_{(tg x+cotg x)}=\pi$$

$$g(x+\frac{\pi}{2})=\left|tg(x+\frac{\pi}{2})+cotg(x+\frac{\pi}{2})\right|$$

$$=|-cotg x-tg x|=|tg x+cotg x|=g(x)$$

$$\implies T_{g(x)}=\frac{\pi}{2}$$

۸- اگر تابعی تناوب‌اساسی داشته باشد. چنانچه به‌کمك فرمولها،شکل‌ظاهری آن‌راعوض کنیم و تناوب‌اساسی کوچکتری حاصل‌شود، آن تناوب اساسی‌کوچکتر، تناوب اساسی تابع خواهد بود.

مثال: تناوب اساسی تابع به معادله:

$$f(x)=\sin^2 x+\cos^4 x$$

را بیابید.

تناوب اساسی تابع ظاهراً: $T=\pi$.

اما:

$$f(x)=\sin^2 x+(\cos^2 x)^2$$

$$=\frac{1-\cos 2x}{2}+(\frac{1+\cos 2x}{2})^2$$

$$f(x)=\frac{2-2\cos 2x+1+\cos^2 2x+2\cos 2x}{4}$$

$$=\frac{3+\cos^2 2x}{4} \implies T_{\text{جدید}}=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{2}$$

$$\implies T_{f(x)}=\frac{\pi}{2}$$

۹- اگر f تابعی متناوب باتناوب‌اساسی T باشد،آن‌گاه توابع $f>0$ $\sqrt[n]{f}$ ، $\sin(f)$ ، $tg(f)$ ، $cotg(f)$, $Arc\sin(f)$ و $Arc\cos(f)$ ، $Arctg(f)$, $Arccotg(f)$, $cosec(f)$, $f>0$ $\log(f)$ نیز متناوب‌اند و تناوب اساسی آنها همان (T) است.

اثبات: اگر f تابعی متناوب با تناوب اساسی (T) باشد، ثابت می‌شود تابع: $g(x)=\mathrm{Arc}\,cotg(f(x))$ نیز متناوب است و تناوب اساسی آن همان (T) است.

داریم:

$$\forall x\in D_f : (x+T)\in D_f \wedge f(x+T)=f(x)$$
$$\Longrightarrow g(x+T)=\mathrm{Arc}\,cotg(f(x+T))$$
$$=\mathrm{Arc}\,cotg(f(x))=g(x)$$

توجه: در مورد تابع $\sqrt[n]{f}$ ، اگر n زوج و $f>0$ ، ممکن است بخشی از فاصلهٔ تناوب اساسی در دامنهٔ تابع قرار گیرد مثلا در تابع $f(x)=\sqrt{\sin x}$ ، $T=2\pi$ و اگر فاصلهٔ تناوب را $[0\,,\,2\pi]$ اختیار کنیم فاصلهٔ $(\pi\,,\,2\pi)$ عضو دامنهٔ $f(x)$ نیست.

۱۰- اگر f تابعی متناوب با تناوب اساسی T باشد، آن گاه توابع $g(x)=\cos(f(x))$ و $g(x)=\sec(f(x))$ نیز متناوب است. برای تعیین تناوب اساسی تابع g ، می‌توان چنین عمل کرد:

اگر $\forall_x\in D_g: g(x+\frac{T}{2})=g(x)$ نتیجه‌می گیریم تناوب اساسی تابع g ، $(\frac{T}{2})$ است، درغیراین‌صورت تناوب اساسی تابع g همان T خواهد شد.

مثال: تناوب اساسی تابع به معادلهٔ

$$g(x)=\sec(\sin x)$$

را بیابید.

داریم: $T_{(\sin x)}=2\pi$

$$g(x+\pi)=\sec(\sin(x+\pi))=\sec(-\sin x)$$
$$=\sec(\sin x)=g(x) \Longrightarrow T_{g(x)}=\pi$$

۱۱- تناوب اساسی چهار تابع زیر $\frac{\pi}{2a}$ است:

$$f_1(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax \qquad n\in N\,,\ n\neq 1$$
$$f_2(x)=tg^{2n}ax+cotg^{2n}ax \qquad n\in N$$
$$f_3(x)=|\sin^n ax|+|\cos^n ax| \qquad n\in N\,,\ n\neq 2$$
$$f_4(x)=|tg^n ax|+|cotg^n ax| \qquad n\in N$$

اثبات: ثابت می‌کنیم تناوب اساسی تابع

$$f_1(x)=\sin^{2n}ax+\cos^{2n}ax$$

$n\in N$ و $n\neq 1$ برابر $\frac{\pi}{2a}$ است.

فرض می‌کنیم تناوب تابع f برابر T_1 باشد:

$$f(x+T_1)=\sin^{2n}a(x+T_1)+\cos^{2n}a(x+T_1)$$
$$f(x+T_1)=\sin^{2n}(ax+aT_1)+\cos^{2n}(ax+aT_1)$$

اگر

$$aT_1=\frac{(2k-1)\pi}{2} \Longrightarrow f(x+T_1)=f(x)$$

زیرا:

$$\begin{cases}\sin^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\cos^{2n}ax\\ \cos^{2n}(ax+\frac{(2k-1)\pi}{2})=\sin^{2n}ax\end{cases}$$

$$\Longrightarrow aT_1=\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$\Longrightarrow T_1=\frac{(2k-1)\pi}{2a} \Longrightarrow \boxed{T=\frac{\pi}{2a}}$$

مثال: تناوب اساسی تابع $f(x)=\sin^6x+\cos^6x$ را بیابید.

حل: بنا به دستور شماره (۱۱)

$$T=\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{2}$$

راه دوم :

$$f(x)=\sin^{۶}x+\cos^{۶}x=۱-۳\sin^{۲}x\cos^{۲}x$$

$$=۱-\frac{۳}{۴}\sin^{۲}۲x \implies T=\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{۲}$$

۱۲- توابعی نظیر تابع $f(x)=\sin\pi x+\cos ۲x$ متناوب نیست، زیرا:

$$T_{\sin\pi x}=\frac{۲\pi}{a}=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$$

$$T_{\cos ۲x}=\frac{۲\pi}{a}=\frac{۲\pi}{۲}=\pi$$

چون بین دو عدد (۲) و (π) کوچکترین مضرب مشترك وجود ندارد . پس تابع متناوب نیست .

همچنین توابعی نظیر تابع ؛

$$f(x)=\sin\frac{x}{\sqrt{۲}}+\cos\frac{x}{\sqrt{۳}}$$

متناوب نمی‌باشد زیرا؛ مانند مثال قبل بین تناوبهای اساسی توابع $\sin\frac{x}{\sqrt{۲}}$ و $\cos\frac{x}{\sqrt{۳}}$ کوچکترین مضرب مشترك وجود ندارد.

۱۳- تابع $f(x)=\cos|x|$ متناوب است و تناوب اساسی آن (۲π) است زیرا: $\cos|x|=\cos x$

ولی توابع $\sin|x|$ و $tg|x|$ و $cotg|x|$ متناوب نیست. (چرا؟)

۱۴- توابع مرکب جبری ومثلثاتی مانند تابع

$$f(x)=x^{۲}-۴x+\sin x$$

متناوب نیست. ولی می‌توان توابع مرکبی ساخت که قسمت جبری آن به فرم $nx-[nx]$ باشد ومتناوب هم باشد.

مانند: تابع $f(x)=۲x-[۲x]+\sin\pi x$

زیرا :

$$\begin{cases} T_{(۲x-[۲x])}=\frac{۱}{۲} \\ T_{\sin\pi x}=۲ \end{cases}$$

بین (۲) و ($\frac{۱}{۲}$) کوچکترین مضرب مشترك(۲) است

پس: $T_{f(x)}=۲$.

۱۵- اگر :

$$f(x)=\frac{a\sin x+b\cos x}{a'\sin x+b'\cos x} \quad ، \quad \frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$$

اگر به همین‌صورت تناوب‌اساسی‌را پیداکنیم $T=۲\pi$ خواهد شد ولی اگر عوامل کسر را بر $\cos x\neq ۰$ تقسیم کنیم آن گاه $f(x)=\frac{a\,tg x+b}{a'\,tg x+b'}$ که دراین‌صورت: $T=\pi$ خواهدشد.

پس: $T_{f(x)}=\pi$.

۱۶- اگرمعادلهٔ تابع به صورت حاصل ضرب سینوسها و کسینوسها باشد، باید آن‌را به حاصل‌جمع تبدیل کنیم سپس تناوب اساسی تابع‌را تعیین‌کنیم.

مثال .

$$f(x)=۲\sin\frac{۷x}{۲}\cdot\sin\frac{۳x}{۲}$$

$$f(x)=\cos\left(\frac{۷x}{۲}-\frac{۳x}{۲}\right)-\cos\left(\frac{۷x}{۲}+\frac{۳x}{۲}\right)$$

$$=\cos ۲x-\cos ۵x$$

$$T_{\cos ۲x}=\pi \ , \ T_{\cos ۵x}=\frac{۲\pi}{۵} \implies T_{f(x)}=۲\pi$$