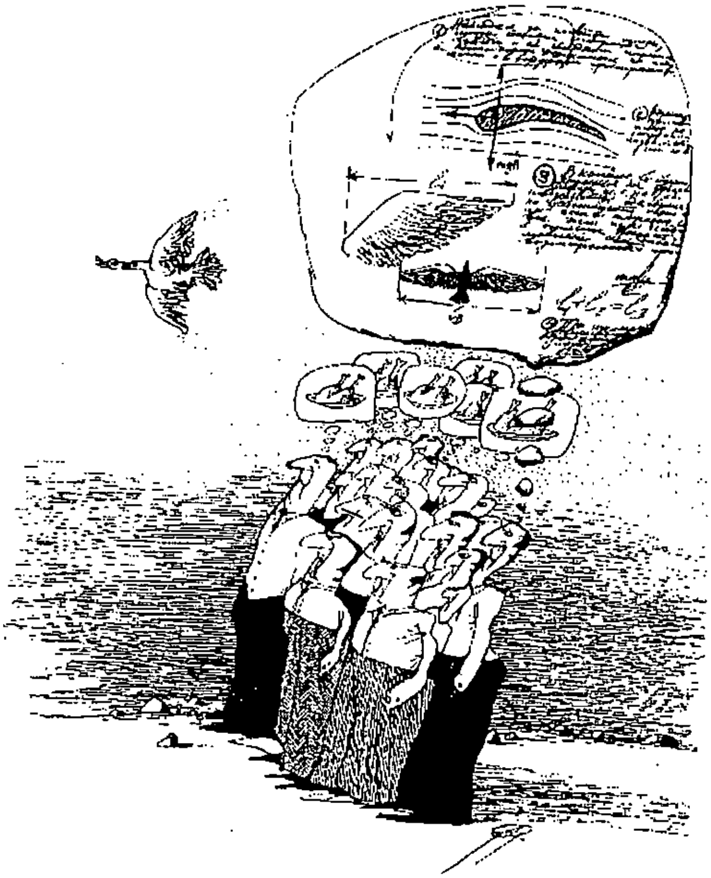
نقش «شهود» در ریاضی دبیرستانی

● سیّدحسین سیّد موسوی

(ارائه شده در سوّمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران)



کلمهٔ «شهود» که بارها در کتابهای ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، از رازآمیزترین و مبهمترین مفاهیم ریاضیات است. در جاهای مختلف، کاربردهای کاملاً متفاوتی از آن دیده می‌شود.

۱ ـ کتابهای دبیرستان، «شهود» را دانشی غریزی یا احساس بدون استدلال می‌داند و معتقد است که با درک شهودی، درستی گزاره‌هایی را به‌طور سطحی می‌پذیریم و لذا ما را آماده می‌کند که به سوی اثبات واقعی آن خیز برداریم. این نوع برداشت از شهود، درجاهایی است که ما چند حالت خاص از یک حکم را ملاحظه می‌کنیم و بعد می‌گوییم «بنابراین انتظار می‌رود که براساس این تجربیات، فلان‌چیز درست باشد». در بسیاری از حکمهایی که با استقرای ریاضی سروکار داریم، چنین برداشتی از شهود داریم.

۲ ـ برخی کتابها، «شهود» را به معنای عدم دقّت می‌گیرند و در این صورت، گاه جانشین خطرناک و غیر مشروعی برای اثبات دقیق است. به‌طور مثال، در موقع بیان مفهوم حد، می‌گوییم $\lim_{x\to a} f(x) = l$ هرگاه وقتی x در نزدیکیهای a هست، $f(x)$ در نزدیکیهای l قرار دارد. در صورتی که مفهوم مجاورت و نزدیک بودن را به‌طور دقیق، تعریف نکرده‌ایم.

۳ ـ در بعضی کتابها، «شهود» را به معنای اتکا کردن به یک مدل فیزیکی، برای بیان اثبات یک مسأله یا یک قضیه می‌گیرند؛ یعنی ابتدا با نگاه یا لمس کردن یک مدل فیزیکی، خواص یک شیء را بفهمیم.

به عنوان مثال، شاید شما متوجه شده‌اید که دانش‌آموزان در تشخیص نقطهٔ تقاطع سه صفحه دچار اشتباه می‌شوند و اغلب باور کردن این مطلب که سه صفحه می‌توانند فقط در یک نقطه متقاطع باشند، برایشان مشکل است. در این صورت، نشان دادن گوشهٔ اتاق، در باوراندن این مطلب کمک می‌کند.

البته اتکا کردن به یک مدل فیزیکی، اشکالاتی دارد که ختماً شما با آن آشنا هستید. می‌دانید اشیای ریاضی، اشیای ذهنی

هستند. به‌طور مثال، صفحه، یک شیء، ایده‌آل و ذهنی است و هیچ شیء فیزیکی، نمی‌تواند در شرایط تعریف صفحه صدق کند؛ زیرا هر شیء صافی را که به عنوان صفحه اختیار کنیم، متناهی و سه بعدی است و نمی‌تواند به مثابهٔ یک صفحهٔ هندسی باشد. اما بعضی دانش‌آموزان فکر می‌کنند سطح یک میز یا یک صفحه، واقعاً یک صفحه به مفهوم ریاضی است؛ در این صورت، گاهی فکر می‌کنند امکان این که دو صفحه فقط در یک نقطه متقاطع باشند، وجود دارد.

۴ـ شهود، پرتو غیرقابل بیانی است که افراد کمی به‌وسیلهٔ آن، بخشهایی از دانش ریاضی را ادراک می‌کنند، که دیگران فقط پس از سعی و تلاش فراوان، به آن دست می‌یابند. می‌دانید که بعضی از ریاضیدانان بر این عقیده‌اند که اشیای ریاضی، چیزهایی نیستند که ما آنها را می‌سازیم، بلکه چیزهایی هستند که وجود دارند و ما تنها آنها را کشف می‌کنیم؛ یعنی اشیای ریاضی، در دسترس همگان نیستند، بلکه باید در پشت دیواری در انتظار بمانند تا توسط ریاضیدانی که مورد رحمت خداوندی قرار گرفته و از شهود کافی برخوردار است، مشاهده شوند و یکی از آنها انتخاب شود.

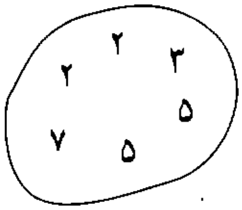
شهود، همان چیزی است که پیشینیان ما، که در جهل و تاریکی به‌سر می‌بردند، می‌توانستند قضایای درستی را با استدلالهای نادرست بیان کنند.

اکنون به بیان چند مثال می‌پردازیم که چگونه می‌توان مفاهیم و قضایای مجرّد را به‌طور شهودی، در دبیرستان توضیح داد.

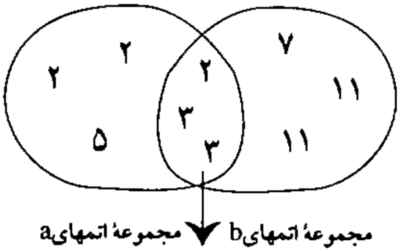
مثال ۱: همان‌طور که می‌دانید، نظریهٔ اعداد، یکی از مجرّدترین شاخه‌های ریاضی است، که سرتاسر آن، اثبات قضیه است. مهمترین خصوصیت نظریهٔ اعداد، این است که اشخاص آماتور را خیلی خوب جذب می‌کند؛ زیرا آنها با اطلاعات اندکی، ناگهان با مسائل بزرگ و حل نشدهٔ ریاضی مواجه می‌شوند و روح کاوشگر و ستیزه‌جوی آنان را تحریک می‌کند. با این اوصاف، نظریهٔ اعداد مقدماتی در دبیرستانها تدریس می‌شود و جز تعداد معدودی علاقه‌مند به ریاضیات، دانش‌آموزان با این درس، راحت کنار نمی‌آیند. بنابراین، به ذهنم رسید که چگونه می‌توان کاری کرد که آنان اثباتها را ببینند. از این ایده که ب.م.م و ک.م.م مانند اشتراک و اجتماع در مجموعه‌ها رفتار می‌کنند، استفاده کردم. برای این کار، ابتدا قضیهٔ اساسی حساب را که می‌گوید، هر عدد $n>1$ حاصل‌ضرب چند عدد اوّل است، بیان می‌کنیم و عوامل اوّل عدد n را اتمهای آن می‌نامیم. به‌طور مثال:

۲۱۰۰ = ۲×۲×۳×۵×۵×۷

و نموداری مانند نمودار «ون» برای مجموعهٔ اتمهای n درنظر می‌گیریم و در مورد $n=$ ۲۱۰۰ داریم:



البته توجه دارید که این مجموعه، با مجموعهٔ معمولی تفاوت دارد. بعد، اجتماع و اشتراک مجموعهٔ اتمها را تقریباً مشابه اجتماع و اشتراک معمولی تعریف می‌کنیم. به عنوان مثال:

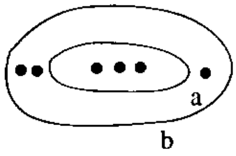


ب.م.م = اشتراک

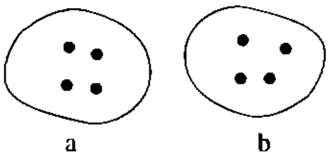
ک.م.م = اجتماع

حال، با این اوصاف، از نظر نموداری، می‌توان $a|b$ و $(a,b)=1$ را نشان داد.

$a|b$:



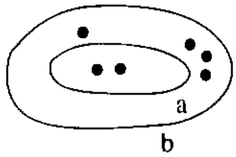
$(a,b)=1$:



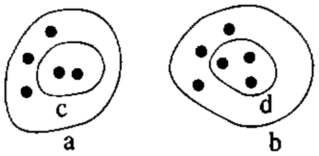
حال، بسیاری از گزاره‌های نظریهٔ اعداد را می‌توان با این

نمودارها نشان داد.

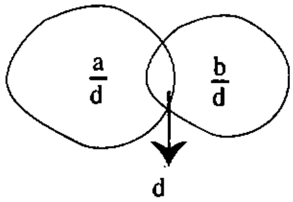
$$a|b \Rightarrow \begin{cases}(a,b)=a\\ [a,b]=b\end{cases}$$



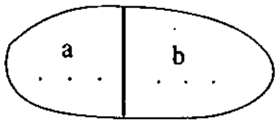
$$(a,b)=1\ ,\ c|a\ ,\ d|b \Rightarrow (c,d)=1$$



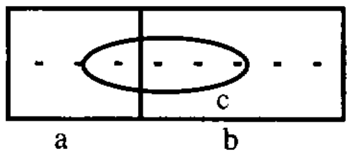
$$(a,b)=d \Rightarrow \left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$$



$$c|ab\ ,\ (c,a)=1 \Rightarrow c|b$$

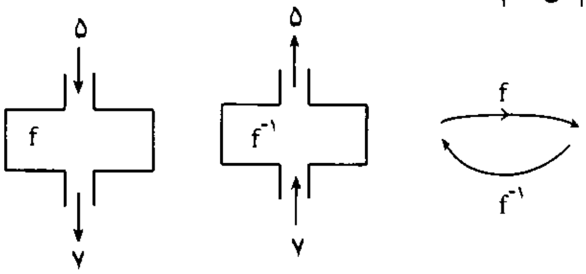


آوردن مثال برای حالتی که $(c,a)\neq 1$. با شکل زیر



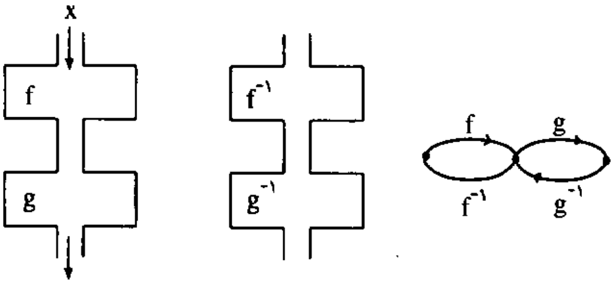
در این شکل $c|ab$، ولی $c\nmid a$ و $c\nmid b$

مثال ۲: هر تابع حقیقی f را می‌توان به منزلهٔ ماشینی تصور کرد که روی عددی عمل کرده و عددی را به دست می‌دهد. به عنوان مثال، عمل تابع $f(x)=x+2$، افزودن ۲ واحد به هر عدد است. با این تعبیر از تابع، وارون f تابعی است که عمل f را خنثی کند؛ (یعنی عکس عمل f را انجام دهد.) یعنی تابع f که به هر عددی ۲ واحد اضافه می‌کند، f^{-1}، ۲ واحد از هر عددی کم می‌کند. پس $f^{-1}(x)=x-2$. بعد نمودارهایی به صورت زیر رسم می‌کنیم:



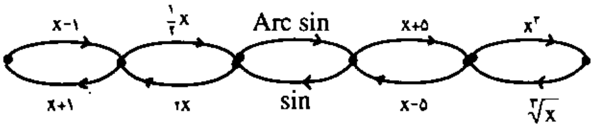
حالا فرض کنید می‌خواهیم قضیهٔ زیر را برای دانش‌آموزان بیان کنیم.

قضیه: اگر f و g وارون‌پذیر باشند، آن‌گاه $(gof)^{-1}=f^{-1}og^{-1}$ اثبات این قضیه را دانش‌آموز به سادگی می‌فهمد؛ ولی نمی‌داند چرا جای f و g در وارون عوض می‌شود؟ در این‌جا نمودارهایی به صورت زیر، علت را روشن می‌کند:



مسأله: وارون تابع $f(x)=(\mathrm{Arc}\sin(\frac{x-1}{2})+5)^3$ را به دست آورید.

حل: ابتدا تابع f را به صورت ترکیب چند تابع می‌نویسیم:



پس: $f^{-1}(x)=2\sin(\sqrt[3]{x}-5)+1$

هدف ما از استفاده از شهود در تدریس ریاضیات، کنارگذاشتن استدلال دقیق نیست؛ بلکه معتقدیم در کنار استدلال و اثباتهای دقیق، سعی کنیم که دانش‌آموزان با مشاهدهٔ این نوع مثالها و

نمودارها توانایی رسوخ به باطن این فرمولها و اشیا را به دست آورند.

من گاهی که دانش‌آموزان مفهوم حد را بدرستی درک نمی‌کنند، می‌گویم نگران نباشید؛ زیرا آفرینندگان حساب دیفرانسیل و انتگرال، بدون آن که مفهوم حد را به روش ε و δ بدانند، این مفاهیم را به کار می‌برده‌اند؛ چرا که آنان درک شهودی و احساس ریاضی را در حدّ اعلای خود داشتند. آنان گاهی اثبات درستی از یک قضیه را می‌دانستند، بی‌آن که هیچ یک از این اصطلاحات منطقی و دقیق امروزی را بدانند.

بنابراین، دبیرستان باید سرزمین ریاضیات شهودی باشد؛ زیرا در ذهن دانش‌آموز، روانتر و آشناتر است. اگر می‌خواهید نسل سالم و شادابی در آینده داشته باشیم، یکی از راه‌های آن، تأکید روی درک و استدلال شهودی در کتابهای درسی است. ما با اتکای بیش از حد به اثباتهای دقیق، نسلهایی را از دست داده‌ایم.

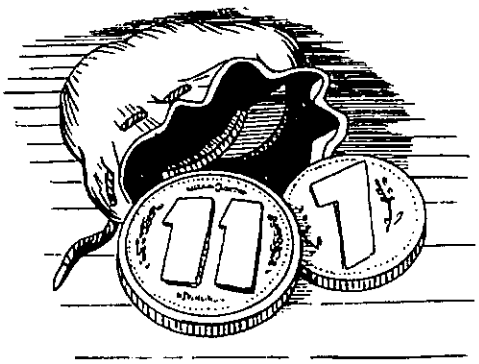
روش صوری محض، از نظر روانی برای مبتدیان مناسب نیست. حتی ریاضیدانی که یک مقالهٔ بسیار فنی و پیچیده را می‌نویسد، هرگز مانند نوشته‌اش رسمی و منطقی فکر نمی‌کند.

اکنون باید ریاضیاتی شهودی و قابل فهم، و آشنا و همسایه‌وار در دبیرستانها تدریس شود. ریاضیات باید درسی لذتبخش برای بچه‌های ما باشد، چرا باید مردمی که می‌توانند از ریاضیات استفاده و لذت ببرند، از آن متنفر باشند.

بیایید با همکاری همه استادان ریاضی دبیرستانها و دانشگاه‌هایی که مسؤولیت آماده کردن معلمان را دارند، نگذاریم نسل جوان ما که در دوران جوانی‌اش باید زندگی مفرّح و شادی‌آوری داشته باشد، با ارائهٔ ریاضیاتی خشک، صوری، زندگی برکام آنها تلخ شود.

بنابراین، همهٔ ما وظیفه داریم که سعی کنیم در دبیرستان ریاضیاتی دوست‌داشتنی‌تر، روانتر، دلپذیرتر و شهودی‌تر عرضه شود.

تفریح اندیشه ۲



کشوری تصمیم می‌گیرد بیش از دو نوع سکه نداشته باشد، یک سکهٔ ۷ واحدی و یک سکه ۱۱ واحدی، در این صورت بعضی پرداختها مانند ۱۵ واحد را نمی‌توان با این دو سکه انجام داد.

تعیین کنید بزرگترین مقداری که نمی‌توان با ترکیبی از این دو سکه پرداخت کرد، کدام است؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب درصفحهٔ ۸۸