نامساویها در احتمال

$P_{(A)} \leq ?$

● سیامک جعفری

اهمیت حساب احتمالات بر کسی پوشیده نیست. حتی عامه مردم به کثرت از این کلمه «احتمال» در زندگی روزانه استفاده می‌کنند. احتمال، زبان همهٔ پدیده‌های طبیعی است.

این نظریه مانند بیشتر بخشهای ریاضیات دچار تغییرات اساسی شده است، که با ارائه نظریه‌های ریاضیدانان روسی براساس اصول متعارف شروع شده است و امروزه با نظریه مجموعه‌ها و توابع گره‌خورده است.

اگر U مجموعه یا فضای حوادث باشد و F یک مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های U باشد، عناصر F را حوادث تصادفی و F را میدان حوادث یا جبر می‌نامند. حادثه تصادفی U را حادثه یقینی و حادثه تصادفی $\overline{U}$ را حادثه غیرممکن خواهیم نامید. A و $\overline{A}$ حوادث معکوس هستند.

تعریف: با هر حادثه‌ای تصادفی از میدان حوادث F، عدد غیر منفی $P(A)$ را در تناظر گذاشته، که احتمال حادثه A نامیده می‌شود. آشکار است که: $P(U)=1$.

اگر دو حادثه A_1 و A_2 ناسازگار باشند داریم:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

این اصل در مورد حوادثی که دوبدو ناسازگار هستند قابل تعمیم است و بدون اثبات می‌پذیریم که با اصل زیر هم‌ارز است.

اگر حوادث A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n طوری باشند، که وقوع هر یک باعث وقوع دیگری شود، یعنی $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ و حاصلضرب تمامی حوادث یک حادثه غیرممکن باشد، آنگاه:

$$n \longrightarrow \infty \Rightarrow P(A_n) \longrightarrow 0$$

که به نام اصل پیوستگی است.

در تعریف احتمال باید مجموعه حوادث ساده U، مجموعه حوادث F و تابع P که روی مجموعه F تعریف شدد است، معین و معرف باشند. این مجموعه P و F و U را که یک سه‌تایی مرتب (U, F, P) است، فضای احتمال می‌نامند.

نتایج:

I) $0 \leq P(A) \leq 1$

احتمال حادثه یقین $P(U)=1$ است و حادثه غیرممکن $P(\varnothing)=0$، زیرا

$U \cup \varnothing = U$ یا $U + 0 = u$

بنابراین:

$$P(U \cup \varnothing) = P(U+0) = P(U) + P(0) = P(U)$$

از تساوی اخیر نتیجه می‌شود:

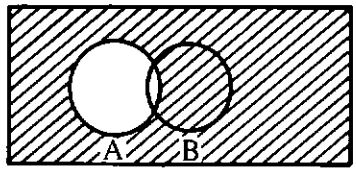
$P(\varnothing)=0$ یا $P(0)=0$

II) اگر $A \subset B$ باشد، یعنی احتمال وقوع B منوط به وقوع

A باشد :

$P(A) \le P(B)$

از روی شکل معلوم است که A و $\overline{A}B$ (یعنی $A' \cap B$) ناسارگارند. داریم :



$A+\overline{A}B = A\cup(A'\cap B) = (A\cup A')\cap(A\cup B) =$

$M\cap(A\cup B) = A\cup B = B$

تساوی اخیر به دلیل $A\subset B$ به دست می‌آید. بنابراین :

$A+\overline{A}B = B \Rightarrow P(A+\overline{A}B)=P(B)$

$$P(A)+P(\overline{A}B)=P(B)$$

از آن جا $P(\overline{A}B)\ge 0$ پس :

$P(A)\le P(B)$

III) به کمک مطلب قبل می‌توان نشان داد :

$A\cap B\subset A \Rightarrow P(A\cap B)\le P(A)$

$A\subset A\cup B \Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)$

$A-B\subset A \Rightarrow P(A-B)\le P(A)$

مثلاً برای اثبات رابطه اخیر حادثه A را بصورت تجزیه دو حادثه ناسازگار می‌توان نوشت $A-B$ و AB (یا $A\cap B$).

یعنی :

$A=(A-B)+AB$

$P(A)=P[(A-B)+AB]=P(A-B)+P(AB)$

از آنجا که $P(AB)\ge 0$ نتیجه می‌شود :

$P(A-B)\le P(A)$

در ضمن نتیجه مفید روبرو نیز به دست می‌آید :

$P(A-B)=P(A)-P(AB)$ IV

نشان دهید که :

$P(A+B)\le P(A)+P(B)$

برای اثبات $A+B$ را به دو حادثه ناسازگار $A-B$ و B تجزیه می‌کنیم :

$A+B=(A-B)+B$

$P(A+B)=P[(A-B)+B]=P(A-B)+P(B)$

به کمک IV

$P(A+B)=P(A)-P(AB)+P(B)$

یا تساوی مهم

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

که از آنجا که $P(AB)\ge 0$، نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

مطلب اخیر قابل تعمیم است.

اگر حادثه B باعث وقوع حادثه C شود، آنگاه احتمال شرطی حادثه B از احتمال شرطی حادثی C تجاوز نخواهد کرد.

$P(B|A)\le P(C|A)$

با توجه به صورت مسأله خواهیم داشت :

$B\subset C$

$B\subset C \Rightarrow B\cap A\subset C\cap C$

$\Rightarrow P(BA)\le P(CA)$

و $P(A)\ge 0$

بنابراین اگر A اتفاق بیفتد یعنی $P(A)\ge 0$ داریم :

$$\Rightarrow \frac{P(BA)}{P(A)}\le\frac{P(CA)}{P(A)}$$

$\Rightarrow P(B|A)\le P(C|A)$

مسائل حل شده

۱) ثابت کنید اگر $P(A\cap B)\le P(A).P(B)$ آنگاه

$P(A'\cap B')\le P(A').P(B')$

حل:

می‌دانیم :

$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)$

ولی :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

بنابراین :

$P(A'\cap B')=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

از آنجا که :

$P(A\cap B)\le P(A).P(B)$

می‌توان نتیجه گرفت :

$$P(A'\cap B')\le 1-P(A)-P(B)+P(A).P(B)$$

یا :

$$P(A'\cap B')\le[1-P(A)]\,[1-P(B)]$$

که خواهد شد :

$$P(A'\cap B')\le P(A').P(B')$$

۲) اگر $AB\subset C$ باشد ثابت کنید :

$$P(A)+P(B)-P(C)\le 1$$

(درباره تعمیم قضیه بحث کنید)

حل: بنا به قضیه

بنا به قضیه خوانده شده :

$$P(AB)\le P(C)$$

می‌دانیم :

$$P(A)=P(AB)+P(AB')$$
$$P(B)=P(AB)+P(A'B)$$

اکنون :

$$P(A)+P(B)-P(C)\le[P(AB)+P(AB')]+[P(AB)+P(A'B)]-P(AB)$$

$$P(A)+P(B)-P(C)\le P(AB)+P(AB')+P(A'B)$$

از آنجا که :

$$P(AB)+P(AB')=P(A)$$

و همچنین :

$$P(A'B)=P(B)-P(AB)$$

پس :

$$P(A)+P(B)-P(C)\le P(A)+P(B)-P(AB)$$

برهان تمام است امّا :

$$\le P(A+B)\le 1$$
$$\le 1-P(A+B)'$$
$$\le 1-P(A'B')\le 1$$

۳) ثابت کنید اگر $AB=\{\ \}$ آنگاه $P(A)\le P(\bar{B})$

$$AB=\varnothing\Rightarrow A\cap B=\varnothing$$
$$\Rightarrow A\ ,\ B \quad \text{جدا از هم}$$
$$\Rightarrow A\subset B'$$
$$\Rightarrow P(A)\le P(\bar{B})$$

مسایل

۱) اگر $ABC\subset D$ ثابت کنید :

$$P(A)+P(B)+P(C)-P(D)\le 2$$

۲) اتحاد زیر و تعمیم آن را ثابت کنید.

$$P(A\cap B)\ge 1-P(\bar{A})-P(\bar{B})$$

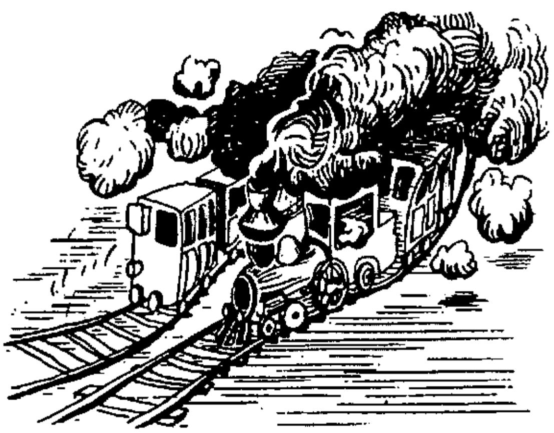
۳) تعمیم مسئله اجتماع حوادث را ثابت کنید.

$$P\left(\bigcup_n A_n\right)\le\sum_n P(A_n)$$

تفریح اندیشه ۴

دو شهر به وسیلهٔ راه‌آهن به هم وصل شده‌اند و رأس هر ساعت یک ترن از هریک از این دو شهر، به طرف شهر مقابل حرکت می‌کند.

سرعت تمام ترنها یکسان و زمان پیمودن فاصله بین دو شهر ۵ ساعت است. هر ترن از شروع حرکت خود تا رسیدن به شهر مقابل با چند ترن مواجه می‌شود؟



جواب در صفحهٔ ۸۸