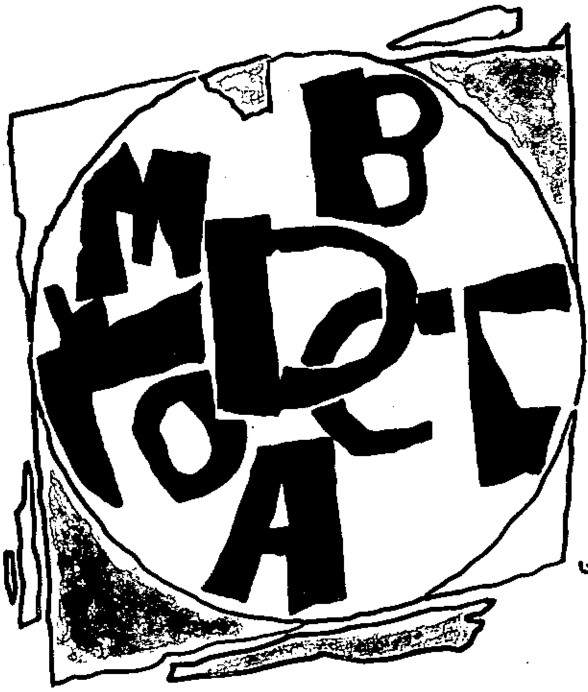
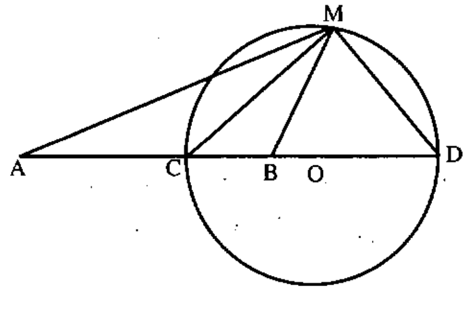


مکان هندسی (۲۳)

دایره آپولونیوس

محمدهاشم رستمی

دایرهٔ آپولونیوس: مکان هندسی، نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابت K($K\neq 0$, $K\neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.



اثبات به روش هندسی: دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P درنظر گرفته، خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط، دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند ؛ یعنی، (۱) $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=K$ باشد. دایرهٔ به قطر CD مکان هندسی موردنظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است ؛ زیرا :

اوّلاً: هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر K است ؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است، پس دستگاه M-ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی، یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند(زاویهٔ $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر 90° است)، پس این دو شعاع، نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند ؛ یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه، ضلع روبه‌رو آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=K$$

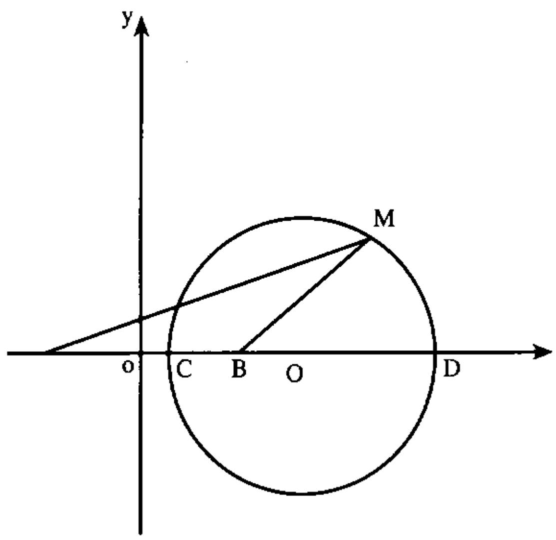
ثانیاً: هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K ، یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=K$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد ؛ زیرا اگر از M به نقطه‌های A،B،C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که

$K=\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ ؛ اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث ABC می‌باشد که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $C\hat{M}D=90^\circ$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.

(Appolonieus of perga)

اثبات به روش تحلیلی: دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم. خط AB را محور xها و عمودمنصّف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت K است، با فرض $AB=a$ داریم:



$$A(-\frac{a}{2},0),\ B(\frac{a}{2},0),\ M(x,y)\Rightarrow$$

$$MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2},\ \frac{MA}{MB}=K\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}=k\Rightarrow$$

$$(x+\frac{a}{2})^2+y^2=K^2(x-\frac{a}{2})^2+K^2y^2\Rightarrow$$

$$(K^2-1)x^2+(K^2-1)y^2-a(K^2+1)x+(K^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(K^2+1)}{K^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ(۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)},0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{aK}{K^2-1}\right|$ است.

بعکس ثابت می‌شود، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ(۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B، برابر K است. قطر CD از این دایره، پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند ؛ زیرا داریم :

$$O_1A=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}+\frac{a}{2}\right|,\ O_1B=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}-\frac{a}{2}\right|,$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{aK}{K^2-1}\right|\Rightarrow O_1C^2=O_1D^2=\overline{O_1A}\,.\,\overline{O_1B}$$

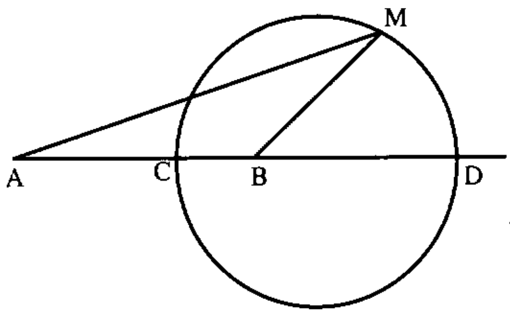
$$\Rightarrow\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(K^2+1)}{2(K^2-1)}.\frac{a}{2}\right|\Rightarrow$$

$$\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\frac{a^4}{4}.(\frac{(K^2+1)^2}{(K^2-1)^2}-1)\Rightarrow\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}=\frac{a^2K^2}{(K^2-1)^2}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت K است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

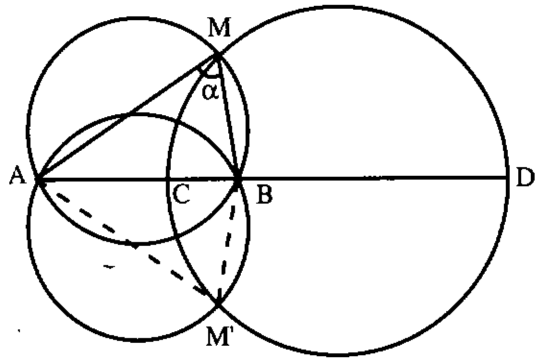
مثال ۱: پاره‌خط AB به‌طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل: نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند ؛ یعنی $2=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ باشد. در این‌صورت



CA = ۸، CB = ۴، DA = ۲۴ و DB = ۱۲ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره، مکان هندسی موردنظر است.

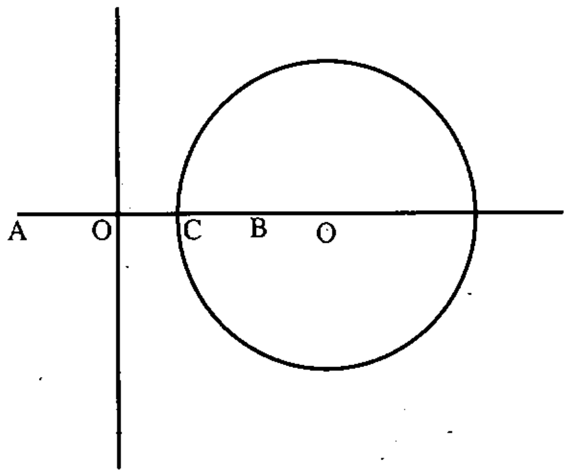
مثال ۲: دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B، برابر مقدار ثابت K باشد.



حل: کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، جواب مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

مثال ۳: دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت K باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

حل: نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن، چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند؛ پس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم، (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، خط Δ عمودمنصّف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است، O می‌نامیم. اما



می‌دانیم بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصّف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر K است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند؛ پس مسأله دارای جواب نیست.