مکان هندسی

• محمد هاشم رستمی

یکی از مهمترین و جالبترین مباحث هندسه،، مکان هندسی است، که در بخشهای دیگر هندسه نیز کاربردهای فراوان دارد.

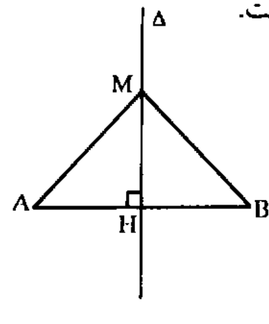
در این مقاله پس از تعریف مکان هندسی، ضمن معرفی مکانهای هندسی مهم، کاربردهایی از آنها و مسأله‌هایی در مورد تعیین مکانهای هندسی، ارائه خواهد شد. از اثبات مکانهای هندسی که به صورت قضیه در کتابهای درسی آمده‌اند خودداری خواهد شد، مگر آن که، روش دیگری برای اثبات آنها وجود داشته باشد، و یا نیازمند شرح و بسط بیشتری باشند.

تعریف: مجموعه‌ای از نقطه‌ها (یا خطها) که دارای خاصیت مشخصی باشند به قسمی که:

اولاً: هر نقطه (یاخط) متعلق به آن مجموعه، آن خاصیت را داشته باشد.

ثانیاً: هر نقطه (یا خط) که آن خاصیت را دارد به آن مجموعه تعلق داشته باشد، یک مکان هندسی نامیده می‌شود.

مثال ۱ : مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از سر دو پاره‌خط AB واقع در این صفحه به یک فاصله باشد (MA=MB)، عمودِ منصف پاره خط AB است.

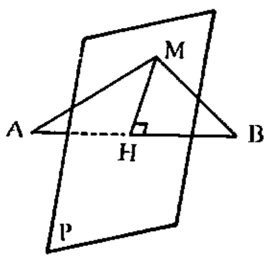


یعنی:

اولاً: هر نقطه‌ای که روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، از دونقطه A و B به یک فاصله است.

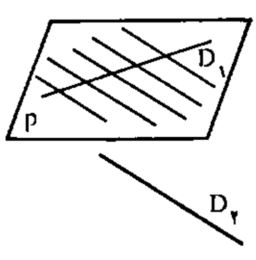
ثانیاً: هر نقطه‌ای که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد، روی عمود منصف پاره‌خط AB واقع است.

نکته: این مکان در فضا صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. (صفحهٔ P در شکل مقابل).

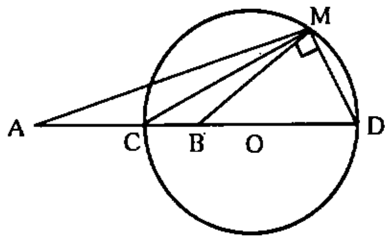


یعنی : مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد،صفحهٔ عمود منصف آن پاره‌خط است.

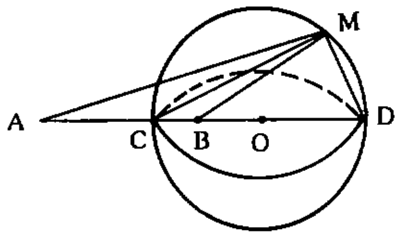
مثال ۲ : مکان هندسی خطهایی که از نقاط مختلف خط راست D_1 به موازات خط راست D_2 رسم می‌شوند، یک صفحه است که شامل خط D_1 است و با خط D_2 موازی می‌باشد.



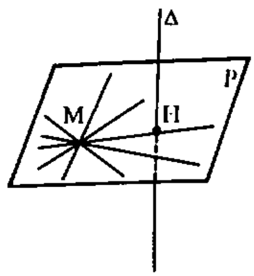
مثال ۳: مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت K ($K \neq 1$ و $K \neq 0$) باشد، ($\frac{MA}{MB} = K$)، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس).



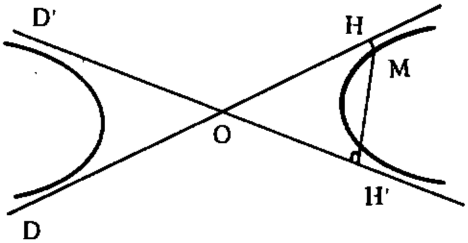
نکته: این مکان در فضا کره‌ای به قطر CD است، با توجه به اینکه (ABCD) یک تقسیم توافقی با نسبت K است.



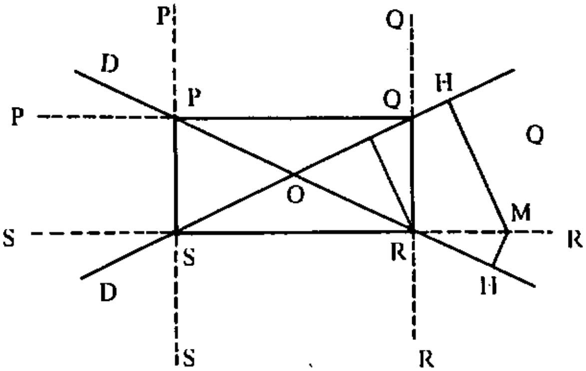
مثال ۴: مکان هندسی خطی که از یک نقطه عمود بر یک خط رسم می‌شود، صفحه‌ای است که از آن نقطه بر آن خط عمود می‌گردد.



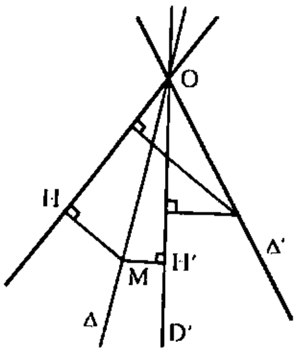
مثال ۵: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که حاصل ضرب فاصله‌های آن از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد ($MH.MH'=K$)، یک هذلولی است که دو خط مفروض مجانبهای آن می‌باشند.



مثال ٦: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل فاصله‌اش از دو خط متقاطع D و D' واقع در آن صفحه مقدار ثابت l باشد ($|MH - MH'| = l$) هشت نیم‌خط است، که این نیم خطها استداد اضلاع مستطیلی هستند که دو خط مفروض قطرهای آن، و فاصلهٔ هر رأس مستطیل از قطر مقابلش برابر l است.



مثال ۷: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دوخط متقاطع D و D' مقدار ثابت K($K \neq 0$)باشد، ($\frac{MH}{MH'} = K$)، دو خط Δ و Δ' است، که از نقطهٔ برخورد خطهای D و D' می‌گذرند، و چهار خط DD'ΔΔ' تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند.



تعریف مکان هندسی مشخص می‌کند که هر مجموعه‌ای از نقطه‌ها، خطها و یا سطوح یک مکان هندسی نیست. زیرا این مجموعه‌ها، می‌تواند هر شکلی باشد، مانند یک یا چند نقطه، یک خط،یک صفحه، بخشی از یک خط و یا بخشی از یک صفحه. همچنین تعریف مکان هندسی مشخص می‌کند که برای اثبات قضیه‌هایی که به صورت مکان هندسی بیان شده‌اند دو قضیه (یک قضیه و عکس آن قضیه) را باید ثابت کرد.

مکان هندسی از دیر زمان مورد توجه ریاضیدانان بوده است. ارشمیدس Archimedes (۲۸۷ تا ۲۱۲ ق.م.) در آثار خود خاصیت سهمی را که یک مکان هندسی است به کاربرده است. همچنین آپولونیوس Apollonius برغه‌ای (۲۶۰ تا ۲۰۰ ق.م) اوّلین اثر مهم و مستقل در مورد مقاطع مخروطی (دایره،بیضی، هذلولی و سهمی) را نوشت، که همگی مکان هندسی می‌باشند و با استفاده از همین مکانهای هندسی، کپلر Kepler در سال ۱۶۰۴ آینه‌های خاصی را طراحی کرد که به آینه‌های سهموی معروفند. و در سال ۱۶۰۹ نظریهٔ حرکت خورشید مرکزی را در مقابل نظریه بطلمیوس که زمین مرکزی بود ارائه داد. همچنین آپولونیوس ثابت کرد، مکان هندسی نقطه‌ای که مختصات آن در رابطهٔ $ay=x+b$ ($a>0$ و $b>0$) صدق کند، یک خط راست است.

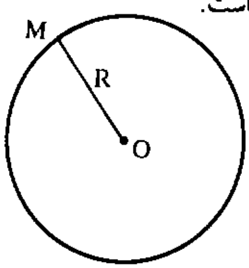
مکانهای هندسی علاوه بر آن که خود شامل قضایا و مسائل جالبی می‌باشند، در دیگر بخشهای هندسه نیز کاربردهای فراوانی دارند. از جمله مکانهای هندسی از ابزارهای مفید و مؤثر برای حل مسأله‌های ترسیم هندسی یا ساختمانهای هندسی است.

عده‌ای ساختمانهای هندسی یا ترسیمهای هندسی را عنصر اصلی آموزش ریاضی و وسیله‌ای نیرومند و قوی برای پرورش استعدادها در زمینه هندسه، و به طور کلی ریاضی می‌دانند،که این مطلب خود، اهمیت مکانهای هندسی را بیشتر نمایان می‌کند.

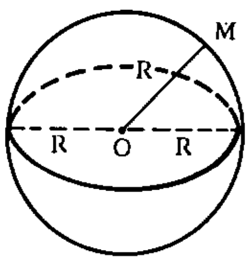
در مواردی از ما خواسته می‌شود که مکان هندسی یک نقطه یا یک خط را در صفحه یا فضا، مشخص کنیم. در این صورت باید ببینیم که آن مکان هندسی چه شکلی است و چه قسمتی از آن شکل به مکان هندسی نقطه یا خط داده شده تعلق دارد. **در این موارد نقطه‌های ثابت و خطهای ثابت همچنین مقدارهای ثابت موجود در مسأله اهمیّت زیادی دارند** که در زیر برخی حالتها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

۱ ـ در مسأله تنها یک نقطهٔ ثابت مانند O وجود دارد:

الف) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه P چنان حرکت کند که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

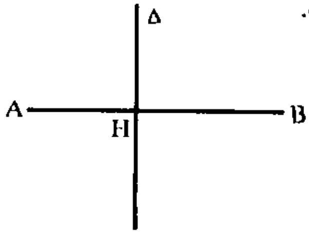


ب) اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت R باشد، مکان هندسی نقطهٔ M کره‌ای به مرکز O و به شعاع R است.

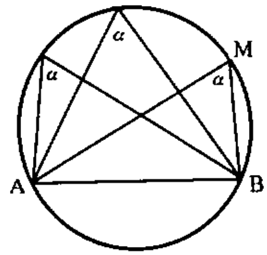


۲ ـ دو نقطهٔ ثابت مانند A و B در مسأله وجود دارد:

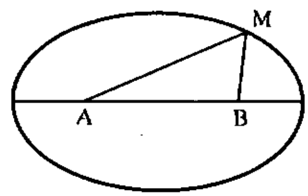
الف) اگر نقطهٔ متحرک M چنان حرکت کند که همواره از دو نقطهٔ ثابت A و B به یک فاصله باشد، مکان هندسی نقطهٔ M عمودمنصف پاره‌خط AB است.



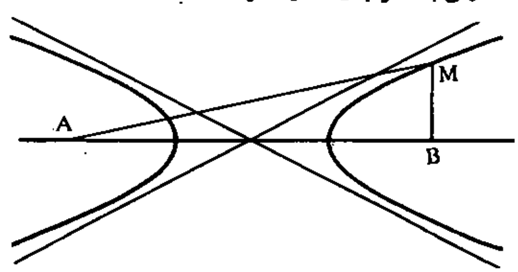
ب) اگر نقطهٔ متحرک M،چنان حرکت کند که همواره رأس زاویه‌ای باشد که اندازه‌اش مقدار ثابت α است و اضلاعش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند، مکان هندسی نقطه M کمان درخور زاویه α مقابل به پاره‌خط AB است.



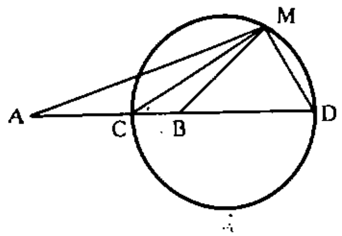
پ) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت ۲a ($2a>0$ و $2a>AB$) باشد ($MA+MB=2a$)، مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی است به کانونهای A و B و عدد ثابت ۲a.



ت) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که قدرمطلق تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت $2a>0$ باشد ($|MA-MB|=2a$)، مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۲a است.

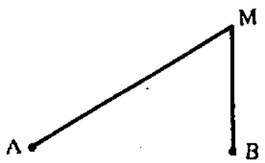


ث) اگر نقطهٔ متحرک M چنان در صفحه تغیر مکان دهد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K ($K\neq 1$ و $K\neq 0$) باشد، ($\frac{MA}{MB}=k$)، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس).

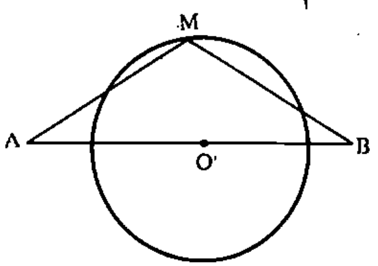


نکته: این مکان در فضا کره‌ای به قطر پاره‌خط CD است.

ج) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که حاصل ضرب فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K باشد ($MA\cdot MB=K$)، مکان هندسی نقطهٔ M یک منحنی از درجهٔ چهارم است (مقطع غیر مخروطی است).



چ) در صورتی‌که نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که مجموع مربعات فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت K^2 باشد ($MA^2+MB^2=K^2$)، مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به مرکز نقطه O وسط پاره خط AB و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است.



نکته: این مکان در فضا کره‌ای به مرکز O و به شعاع $R=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-AB^2}$ است.

بحث: این مکان هندسی وقتی وجود دارد که، $2K^2-AB^2 \geq 0$ یا $K^2 \geq \frac{AB^2}{2}$ باشد.

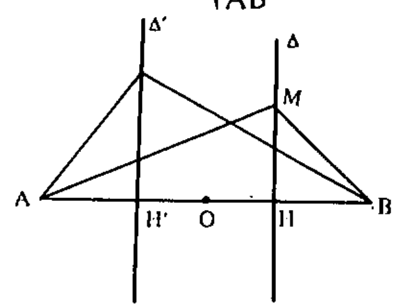
۱) در صورتی که $K^2=AB^2$ باشد، $R=\frac{AB}{2}$ یعنی شعاع دایرهٔ (یاکرهٔ) مکان هندسی برابر نصف پاره خط AB است.

۲) اگر $K^2>AB^2$ باشد، شعاع دایره (یاکرهٔ) مکان هندسی از $\frac{AB}{2}$ بیشتر است.

۳) اگر $K^2=\frac{AB^2}{2}$ باشد، دایره (یاکرهٔ) مکان هندسی به یک نقطه تبدیل می‌شود.

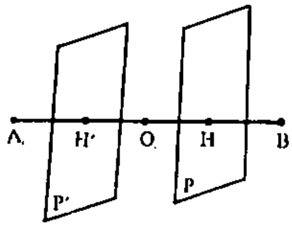
۴) در صورتی که $K^2<\frac{AB^2}{2}$ باشد، مسأله جواب ندارد.

ح) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه چنان حرکت کند که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مساوی مقدار ثابت K^2 باشد ($MA^2-MB^2=K^2$)، مکان هندسی نقطهٔ M خطی مانند Δ عمود بر خط AB است، به قسمی که، فاصلهٔ آن از نقطهٔ O وسط پاره خط AB برابر $OH=\frac{K^2}{2AB}$ است.



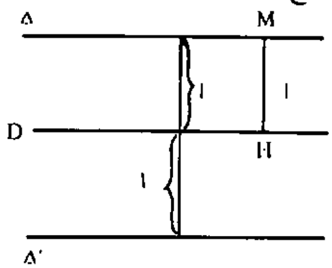
تبصره: اگر $MB^2-MA^2=K^2$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M خطی مانند Δ' عمود بر خط AB است که این خط قرینهٔ خط Δ نسبت به نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB می‌باشد ($\overline{OH'}=\frac{K^2}{2\overline{BA}}$)، به طور کلی می‌توان گفت؛ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که تفاضل مربعات فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت، مقدار ثابتی باشد، دو خط راست عمود بر خط واصل بین آن دو نقطه است، به قسمی که این دو خط نسبت به نقطهٔ وسط پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه قرینهٔ یکدیگرند.

نکته: این مکان در فضا دو صفحهٔ عمود بر خط AB است، به قسمی که فاصلهٔ این دو صفحه از نقطهٔ O وسط پاره خط AB برابر $\frac{K^2}{2AB}$ است.

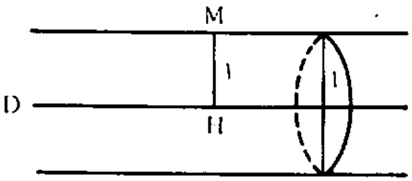


۳ـ در مسأله تنها یک خط ثابت مانند (l) وجود دارد:

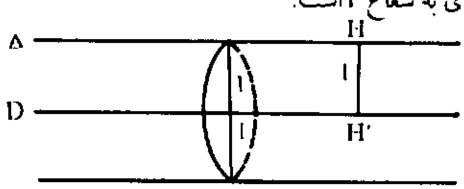
الف) اگر نقطهٔ متحرک M در صفحه، چنان حرکت کند که همواره فاصله‌اش از خط ثابت D برابر مقدار ثابت l باشد ($MH=l$)، مکان هندسی نقطه M دو خط Δ و Δ' موازی خط D و به فاصله ثابت l، واقع در طرفین آن می‌باشند.



ب) اگر نقطهٔ متحرک M در فضا چنان حرکت کند که همواره فاصله‌اش از خط ثابت D برابر مقدار ثابت K باشد، مکان هندسی نقطهٔ M یک سطح استوانی است که شعاع قاعدهٔ مقطع قائم آن برابر l است.



ج) اگر خط متحرک Δ در فضا چنان حرکت کند که همواره موازی خط ثابت D بوده ودرفاصلهٔ ثابت l از آن قرار داشته باشد، مکان هندسی خط Δ یک سطح استوانه‌ای دوار است که مقطع قائم آن دایره‌ای به شعاع l است.



(ادامه دارد)