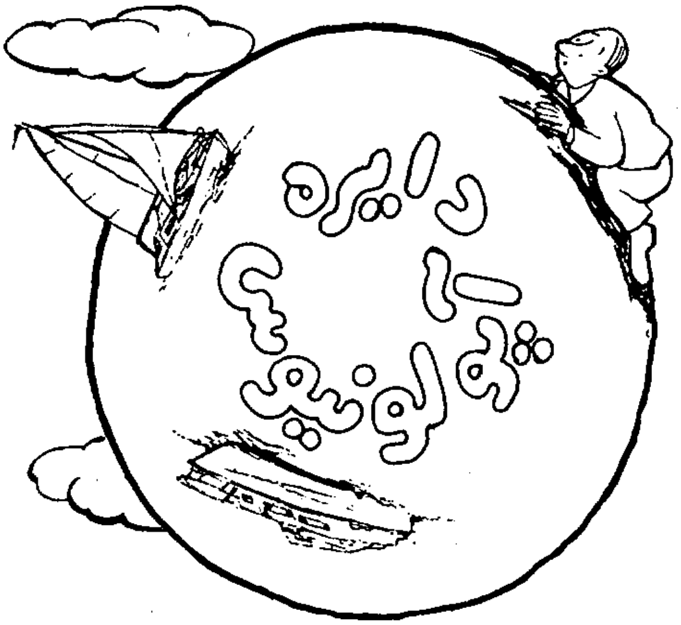
مکان هندسی

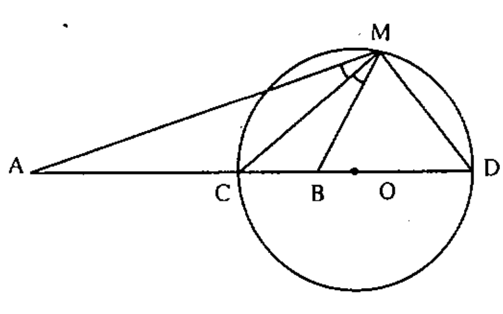


(قسمت بیست و دوم)

● محمدهاشم رستمی

دایرهٔ آپولونیوس. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k($k \neq 0$ و $k \neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی. دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست AB را رسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، یعنی، $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ (۱) باشد. دایرهٔ به



قطر CD مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است. زیرا :

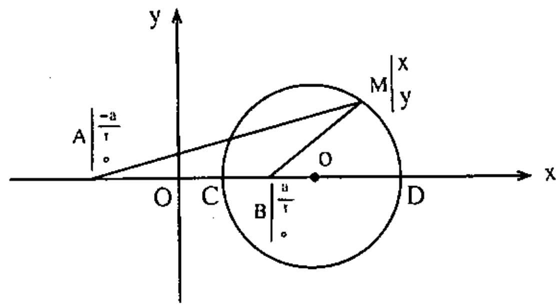
اولاً. هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است. پس دستگاه M−ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند (زاویهٔ $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر 90° است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{MA}{MB} = k$$

ثانیاً. هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k، یعنی $\frac{MA}{MB} = k$ (۲) باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$، اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD بترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس $C\hat{M}D = 90^\circ$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس (Appolonieus of Perga) می‌نامند.

اثبات به روش تحلیلی. دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم. خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط



AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر $M(x,y)$ نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت k است، با فرض $AB = a$ داریم:

$$A(-\frac{a}{2},0)\ ,\ B(\frac{a}{2},0)\ ,\ M(x,y)$$

$$\Rightarrow MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}\ ,$$

$$\frac{MA}{MB}=k\Rightarrow\sqrt{\frac{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}=k$$

$$\Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+y^2=k^2(x-\frac{a}{2})^2+k^2y^2$$

$$\Rightarrow (k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-a(k^2+1)x+$$

$$(k^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)},0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$ است.

بعکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است.

قطر CD از این دایره، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، زیرا داریم:

$$O_1A=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|\ ,\ O_1B=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right|\ ,$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$$

$$\Rightarrow O_1C^2=O_1D^2=\overline{O_1A}.\overline{O_1B}\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

$$=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}.\frac{a}{2}\right|$$

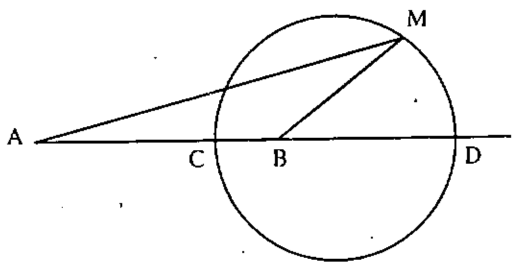
$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}\left(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}-1\right)$$

$$\Rightarrow\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

بنابراین، مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

مثال ۱. پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل. نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند.

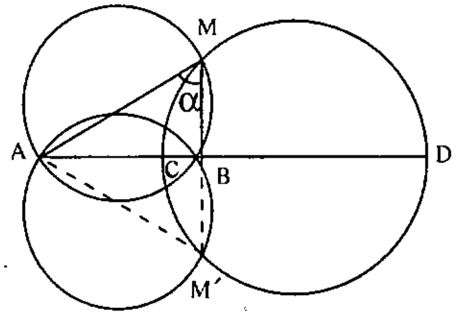


یعنی $2=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}$ باشد. دراین‌صورت $CA = 8$، $CB = 4$، $DA = 24$ و $DB = 12$ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی مورد نظر است.

مثال ۲. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای

از این صفحه را تعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده می‌شود، و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

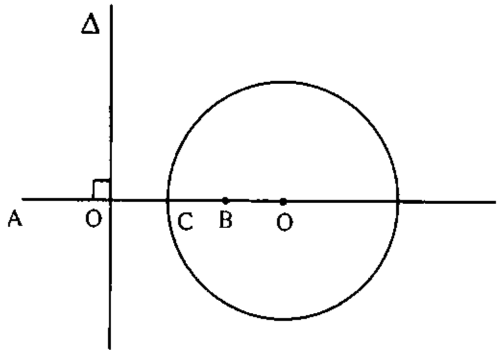
حل. کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، رسم می‌نماییم. نقطه‌های



برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

مثال ۳. دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت k باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

حل. نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، سپس دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به



یک فاصله است، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است O می‌نامیم. اما می‌دانیم بنا به رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند، پس مسأله دارای جواب نیست.

تفریح اندیشه

سعید که آدم عجولی است، از پلّه‌برقی متحرک واقع در مسیرش با نرخ یک پله در هر ثانیه بالا می‌رود و پس از بیست پله به آن می‌رسد. روز بعد، باز هم درحالی که پله‌برقی در حرکت است، با نرخ دو پله در ثانیه از آن بالا می‌رود و در سی‌ودو پله به بالای آن می‌رسد. درصورتی که پلکان برقی متوقف باشد، چند پله از پایین تا بالا دارد؟