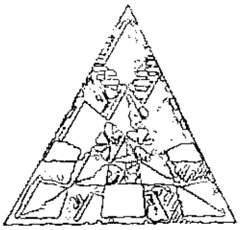
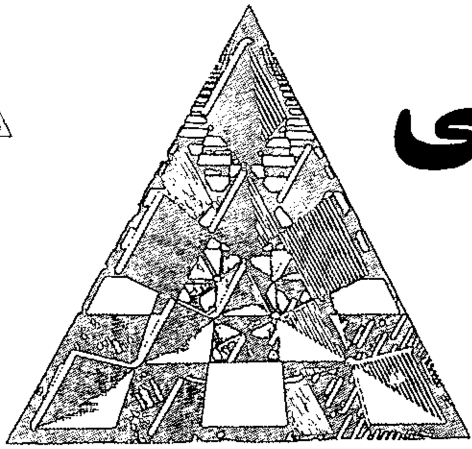


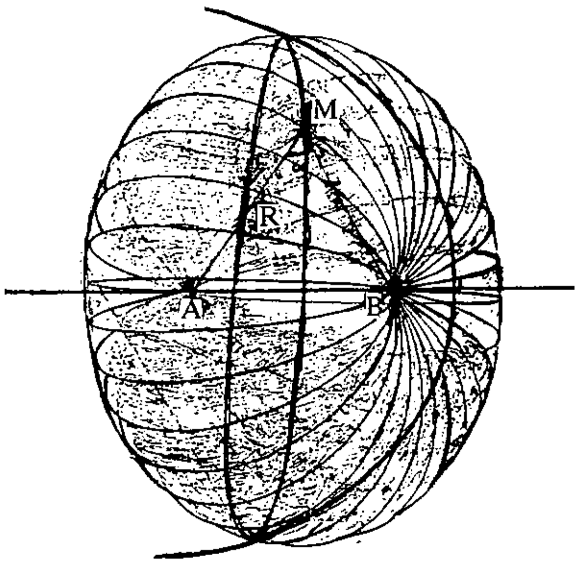
مکان هندسی

(قسمت یازدهم)



(اوّل، دوم، سوم، چهارم دبیرستان)

● محمد هاشم رستمی



مثال ۳ــ سه نقطهٔ A و B و C داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را بیابید که فاصلهٔ آن از نقطهٔ A برابر مقدار معلوم R باشد و از آن نقطه پاره‌خط BC به زاویهٔ α دیده شود.

حل ــ صفحهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A و B و C را P می‌نامیم و $\overset{\frown}{AMB}$ کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. از دوران این کمان درخور حول خط AB، مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویه α دیده می‌شود، به‌وجود می‌آید. حال کرهٔ به مرکز A و به شعاع R را رسم می‌کنیم. فصل مشترک این کره با مکان هندسی بالا (در صورت وجود)، جواب مسأله است.

مثال ۴ــ دو نقطهٔ $A(-۱,۲,۰)$ و $B(۰,۱,۳)$ داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از فضا را که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۴۵° دیده می‌شود، تعیین کنید.

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، خواهیم داشت:

$$A(-۱,۲,۰) \text{ ، } B(۰,۱,۳) \text{ ، } M(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AM}(x+۱, y-۲, z) \text{ و } \overrightarrow{BM}(x, y-۱, z-۳)$$

$$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$= \frac{(x+۱)x + (y-۲)(y-۱) + z(z-۳)}{\sqrt{(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ + z^۲}\sqrt{x^۲ + (y-۱)^۲ + (z-۳)^۲}} \Rightarrow$$

$$2\left[(x^2+x)+(y^2-3y+2)+(z^2-3z)\right]^2=$$
$$\left[(x+1)^2+(y-2)^2+z^2\right]\times\left[x^2+(y-1)^2+(z-3)^2\right]\Rightarrow$$
$$x^4+y^4+z^4+2x^3-6y^3-6z^3-5x^2+3y^2$$
$$+11z^2+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-6x^2y+2xy^2-6x^2z$$
$$+2xz^2-6z^2y-6zy^2-8xy+12yz+26y-12x+6z$$
$$-42=0$$
$$x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2(x^3-3y^3$$
$$-3z^3-3x^2y-3x^2z+y^2x-3y^2z+z^2x-3z^2y)-5x^2$$
$$+3y^2+11z^2-8xy+12yz-12x+26y+6z-42=0$$

معادلهٔ بالا یک رویهٔ درجهٔ چهارم را که مکان هندسی نقطهٔ موردنظر است، مشخص می‌کند.

مثال ۵ ــ دو نقطهٔ $A(3,0,0)$ و $B(0,0,3)$ و خط $D:\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ مفروض‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده شود.

حل ــ نقطه برخورد مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ ۶۰ درجه دیده می‌شود، با خط D جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. اگر $M(x,y,z)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، داریم:

$$M\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}\quad A\begin{vmatrix}3\\0\\0\end{vmatrix}\quad B\begin{vmatrix}0\\0\\3\end{vmatrix}\Rightarrow \vec{AM}\begin{vmatrix}x-3\\y\\z\end{vmatrix}\quad \vec{BM}\begin{vmatrix}x\\y\\z-3\end{vmatrix}$$

$$.\hat{AMB}=60^\circ\Rightarrow\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$=\frac{x(x-3)+y^2+z(z-3)}{\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}.\sqrt{x^2+y^2+(z-3)^2}}$$

$$\Rightarrow 4(x^2-3x+y^2+z^2-3z)^2=\left[(x-3)^2+y^2+z^2\right]\left[x^2+y^2+(z-3)^2\right]$$ معادلهٔ مکان هندسی

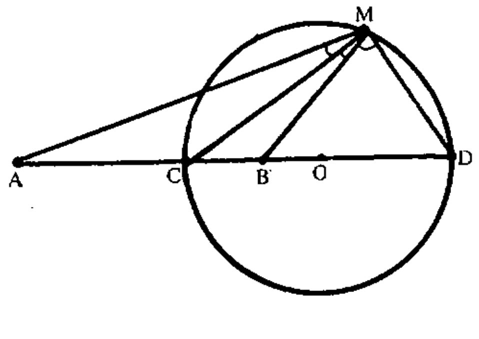
$$\begin{cases}4(x^2-3x+y^2+z^2-3z)^2=\left[(x-3)^2+y^2+z^2\right]\left[x^2+y^2+(z-3)^2\right]\\ \frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}=t\Rightarrow x=2t,y=-t,z=2t\Rightarrow\end{cases}$$

$$4(4t^2-6t+t^2+4t^2-6t)^2=\left[(2t-3)^2+t^2+4t^2\right]$$
$$\left[(4t^2+1)t^2+(2t-3)^2\right]\Rightarrow 4(9t^2-12t)^2=(9t^2-12t$$
$$+9)^2\Rightarrow 9t^2-12t=A\Rightarrow 4A^2=(A+9)^2\Rightarrow 2A=$$
$$\pm(A+9)\Rightarrow A=9 \text{ و } A=-3\Rightarrow 9t^2-12t+3=0$$
$$\Rightarrow 3t^2-4t+1=0\quad t=1 \text{ و } t=\frac{1}{3} \text{ و } 9t^2-12t=9\Rightarrow$$
$$3t^2-4t-3=0\Rightarrow t_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3} \text{ و } t_4=\frac{2-\sqrt{13}}{3}$$
$$\Rightarrow M_1(2,-1,2),M_2(\frac{2}{3},\frac{-1}{3},\frac{2}{3}),$$
$$M_3(\frac{4+2\sqrt{13}}{3},-\frac{2+\sqrt{13}}{3},\frac{4+2\sqrt{13}}{3}),$$
$$M_4(\frac{4-2\sqrt{13}}{3},-\frac{2-\sqrt{13}}{3},\frac{4-2\sqrt{13}}{3})$$

دو نقطه برخورد مربوط به کمان در خور زاویهٔ 60° وابسته به پاره‌خط AB است و دو نقطهٔ برخورد وابسته به کمان در خور زاویهٔ 120° وابسته به این پاره‌خط می‌باشد.

۷ــ دایرهٔ آپولونیوس ــ مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k ($K\neq 0$ و $K\neq 1$) باشد، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم می‌کند.

اثبات به روش هندسی ــ دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست AB رارسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت K تقسیم کنند، یعنی، $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=K$ (۱) باشد. دایرهٔ به قطر CD مکان هندسی موردنظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر K است. زیرا:



اولاً ــ هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت K یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=k$ باشد، روی دایرهٔ به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A و B و C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$، اما این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD به‌ترتیب نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند، که چون این دو نیمساز برهم عمودند، پس $C\hat{M}D=90°$ و در نتیجهٔ نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است.

ثانیاً ــ هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A و B و C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است؛ پس دستگاه M − ABCD دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD برهم عمود می‌باشند (زاویه $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر ۹۰° است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زوایای داخلی و خارجی بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم که نیمسازهای هر زاویه ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند. پس داریم: $\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=k$.

این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.

اثبات به روش تحلیلی ــ دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم؛ خط AB را محور xها و عمودمنصف پاره‌خط AB را محور yها اختیار می‌کنیم. اگر M(x,y) نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B مقدار ثابت k باشد، با فرض AB = a داریم:

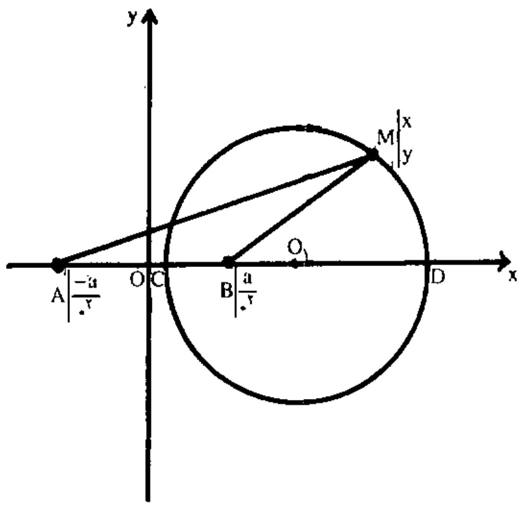
$$A(-\frac{a}{2},0),\ B(\frac{a}{2},0),\ M(x,y) \Rightarrow MA=\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}$$

$$MB=\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2},\ \frac{MA}{MB}=K \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+\frac{a}{2})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\frac{a}{2})^2+y^2}}$$

$$=k \Rightarrow (x+\frac{a}{2})^2+y^2=k^2(x-\frac{a}{2})^2+k^2y^2 \Rightarrow$$

$$(k^2-1)x^2+(k^2-1)y^2-a(k^2+1)x+(k^2-1)\frac{a^2}{4}=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-\frac{a(k^2+1)}{k^2-1}x+\frac{a^2}{4}=0 \qquad (1)$$



معادلهٔ (۱) معادلهٔ دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ $O_1(\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}$ و $0)$ و شعاعش $R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right|$ است. به عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند، نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است. قطر CD از این دایره پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند، زیرا داریم:

$$O_1A=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right| \text{ و } O_1B=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right| \text{ و}$$

$$O_1C=O_1D=R=\left|\frac{ak}{k^2-1}\right| \Rightarrow \overline{O_1C}^2=\overline{O_1D}^2=\overline{O_1A}.\overline{O_1B}$$

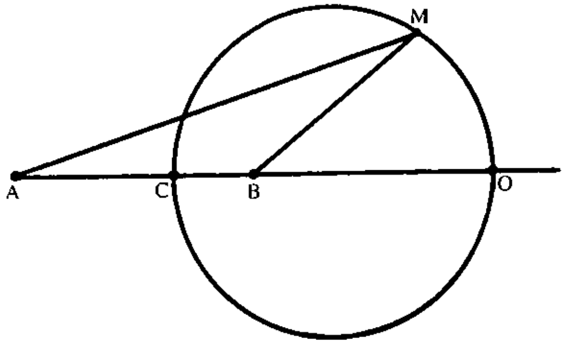
$$\Rightarrow \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}+\frac{a}{2}\right|.\left|\frac{a(k^2+1)}{2(k^2-1)}-\frac{a}{2}\right|$$

$$\Rightarrow \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2}{4}(\frac{(k^2+1)^2}{(k^2-1)^2}-1) \Rightarrow \frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}=\frac{a^2k^2}{(k^2-1)^2}$$

بنابراین: مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند.

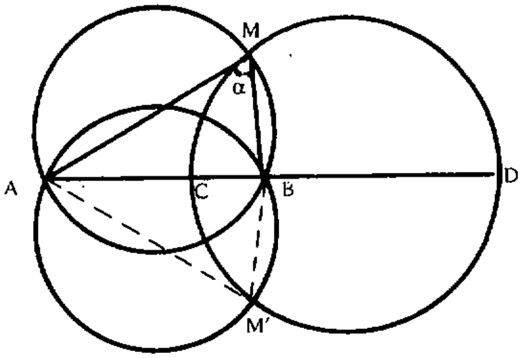
مثال ۱ ــ پاره‌خط AB به طول ۱۲ سانتیمتر در یک صفحه مفروض است. مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه رابیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۲ است.

حل ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم، که این پاره‌خط را به نسبت ۲ تقسیم کنند. یعنی $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=2$ باشد. در این صورت $CA=8$ و $CB=4$ و $DA=24$ و $DB=12$ سانتیمتر است. حال دایرهٔ به قطر CD را رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی موردنظر است.

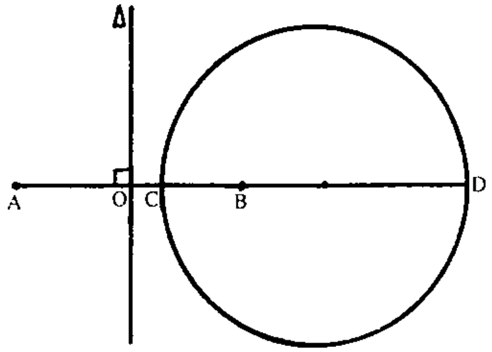


مثال ۲ ــ دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای از این صفحه راتعیین کنید که از آن نقطه پاره‌خط AB به زاویهٔ α دیده شود و نسبت فاصلهٔ آن نقطه از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k باشد.

حل ــ کمان در خور زاویه α وابسته به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، رسم می‌نماییم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله‌اند ؛ و مسأله همواره دو جواب دارد.



مثال ۳ ــ دو نقطهٔ A و B در یک صفحه داده شده‌اند. آیا نقطه‌ای وجود دارد که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر عدد ثابت k باشد و این نقطه از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد؟

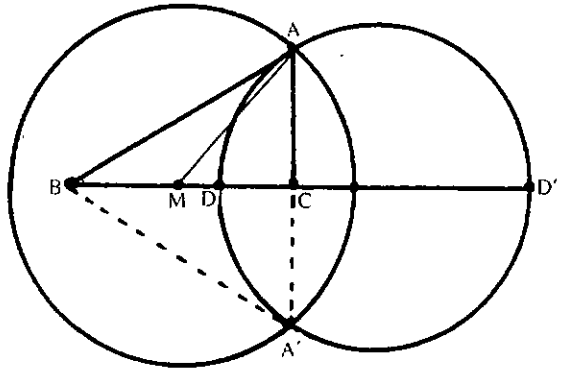


حل ــ نقطه‌های C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، سپس دایرهٔ به قطر CD رارسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است، که این خط را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را که وسط پاره‌خط AB است O می‌نامیم. امّا می‌دانیم بنابه رابطهٔ نیوتن در تقسیم توافقی، دو نقطهٔ C و D در یک طرف نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB قرار دارند (ABCD یک تقسیم توافقی است). بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AB، دایرهٔ آپولونیوس یعنی مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است، هیچ‌گاه قطع نمی‌کند، لذا مسأله دارای جواب نیست.

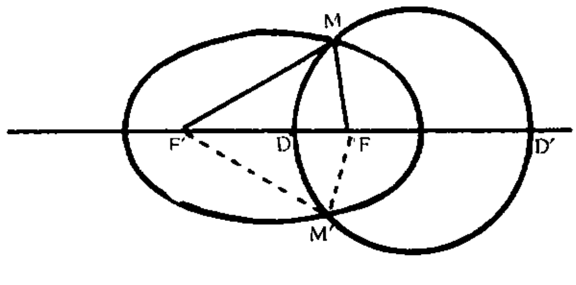
مثال ۴ ــ از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC=a$ و $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}$ و طول میانهٔ رأس A (m_a) معلوم است. مثلث را رسم کنید.

حل ــ ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم. چون $\frac{AB}{AC}=\frac{b}{c}=k$ است، پس یک مکان هندسی رأس A دایره‌ای

است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند. با مشخص کردن نقطه‌های D و D′ که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{b}{c}=k$ تقسیم می‌کنند، دایرهٔ به قطر DD′ را رسم می‌کنیم. از طرفی $AM=m_a$ معلوم است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به مرکز نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC و به شعاع m_a است؛ این دایره رانیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود. در صورت متقاطع بودن دو دایرهٔ مکان هندسی، مسأله دارای دو جواب متساوی است.



مثال ۵ــ بیضی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a درصفحه P مفروض است. نقطه‌ای از این بیضی را تعیین کنید، که نسبت فاصله‌اش از دو کانون F و F′ برابر ۲a باشد.



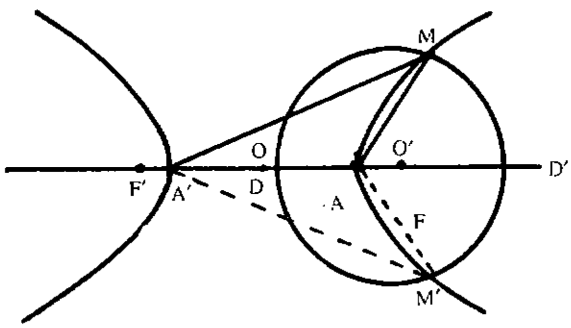
حل ــ می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F′ برابر مقدارثابت ۲a است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط FF′ را به نسبت ۲a تقسیم می‌کند. این دایره (دایرهٔ به قطر DD′) را رسم می‌کنیم.

نقطه‌های برخورد این دایره با بیضی داده شده، جواب مسأله‌اند.

($\frac{\overline{DF'}}{\overline{DF}} = -\frac{\overline{D'F'}}{\overline{D'F}} = 2a$ است).

مثال ۶ــ هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a مفروض است. نقطه‌ای از این هذلولی را تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو رأس کانونی این هذلولی (A و A′) برابر مقدار ثابت K باشد.

حل ــ دو نقطهٔ D و D′ را روی محور کانونی هذلولی چنان تعیین می‌کنیم که پاره‌خط AA′ را به نسبت K تقسیم کنند. سپس دایرهٔ به قطر DD′، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و A′ برابر K است رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با هذلولی جواب مسأله است.



مثال ۷ــ دو نقطه $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ دردستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحهٔ مختصات را بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ باشد.

حل ــ فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{1}{2}$ است، دراین صورت داریم:

$$A\left|\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right. ,\ B\left|\begin{matrix}3\\0\end{matrix}\right. ,\ M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right. \Rightarrow MA=\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}$$ و

$$MB=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$$

$$\frac{MA}{MB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}=\frac{1}{2} \Rightarrow 4(x+1)^2$$

$$+4(y-2)^2=(x-3)^2+y^2 \Rightarrow 3x^2+3y^2+14x-16y$$

$$+11=0 \Rightarrow x^2+y^2+\frac{14}{3}x-\frac{16}{3}y+\frac{11}{3}=0$$

معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس.

مثال ۸ــ خط $D: y-4x+4=0$ و دو نقطهٔ $A(-4,0)$ و $B(0,3)$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط D بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر ۳ باشد.

حل ــ معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس یعنی دایره‌ای که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت ۳ تقسیم می‌کند می‌نویسیم، و نقطهٔ برخورد آن با خط D را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم $M(x,y)$ یک نقطه از مکان هندسی بالا باشد، خواهیم داشت:

$$A(-4,0) \text{ و } B(0,3),\ M(x,y) \Rightarrow MA=\sqrt{(x+4)^2+y^2} \text{ و}$$

$$MB=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB}=3 \Rightarrow \frac{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}}=3 \Rightarrow 9x^2+9(y-3)^2$$

$$=(x+4)^2+y^2$$

$$\Rightarrow 8x^2+8y^2-8x-54y+65=0 \Rightarrow$$

$$x^2+y^2-x-\frac{27}{4}y+\frac{65}{8}=0 \qquad \text{معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-x-\frac{27}{4}y+\frac{65}{8}=0 \\ y=4x-4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x^2+(4x-4)^2-x-\frac{27}{4}(4x-4)+\frac{65}{8}=0$$

$$\Rightarrow 17x^2-60x+\frac{409}{8}=0 \Rightarrow x_1,x_2=\frac{+30\pm\sqrt{247}}{17}$$

$$\Rightarrow y_1,y_2=\frac{120\pm 4\sqrt{247}}{17}-4$$

$$M_1\left(\frac{30+\sqrt{247}}{17},\frac{52+4\sqrt{247}}{17}\right) \text{ و}$$

$$M_2\left(\frac{30-\sqrt{247}}{17},\frac{52-4\sqrt{247}}{17}\right) \qquad \text{نقطه‌های جواب مسأله}$$

مثال ۹ ــ سه نقطهٔ $A(2,-1)$ و $B(-2,3)$ و $C(-4,0)$ در دستگاه مختصات xoy داده شده‌اند. نقطه‌ای در این صفحهٔ مختصات تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، و نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت B و C برابر $\sqrt{2}$ باشد.

حل ــ نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB، با دایرهٔ آپولونیوسی که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت $\sqrt{2}$ تقسیم می‌کند، جواب مسأله است. بنابراین معادلهٔ این دو مکان هندسی را می‌نویسیم و نقطهٔ برخوردشان را تعیین می‌کنیم.

$$A(2,-1),B(-2,3) \Rightarrow AB \text{ وسط } M(0,1),$$

$$m/AB=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow m/AB=\frac{3+1}{-2-2}=-1$$

$$\Rightarrow AB \text{ عمودمنصف } m=+1$$

$$\Rightarrow y-1=1(x-0)$$

$$\Rightarrow y=x+1 \text{ . معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط } AB$$

$$B(-2,3),\ C(-4,0),\ M(x,y),\ K=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$MB=\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$$

$$MC=\sqrt{(x+4)^2+y^2},\ \frac{MB}{MC}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}{\sqrt{(x+4)^2+y^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$2(x+4)^2+2y^2=(x+2)^2+(y-3)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+12x+6y+19=0 \qquad \text{معادلهٔ دایرهٔ آپولونیوس}$$

$$\begin{cases} y=x+1 \\ x^2+y^2+12x+6y+19=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2+(x+1)^2+12x+6(x+1)+19=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+20x+26=0 \Rightarrow x^2+10x+13=0$$

$$\Rightarrow x_1,x_2=-5\pm 2\sqrt{3} \Rightarrow y_1,y_2=-4\pm 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow M_1(-5+2\sqrt{3},-4+2\sqrt{3}) \text{ و}$$

$$M_2(-5-2\sqrt{3},-4-2\sqrt{3}) \qquad \text{نقطه‌های جواب مسأله}$$