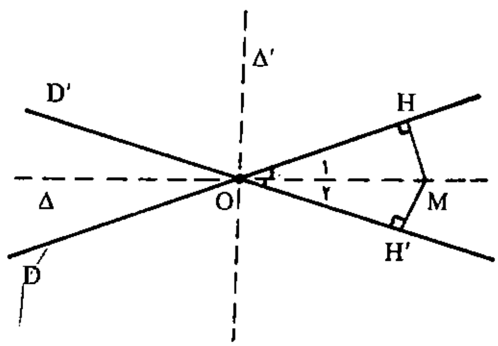
مکان هندسی

(قسمت چهارم)

محمدهاشم رستمی

۳ـ مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط است.



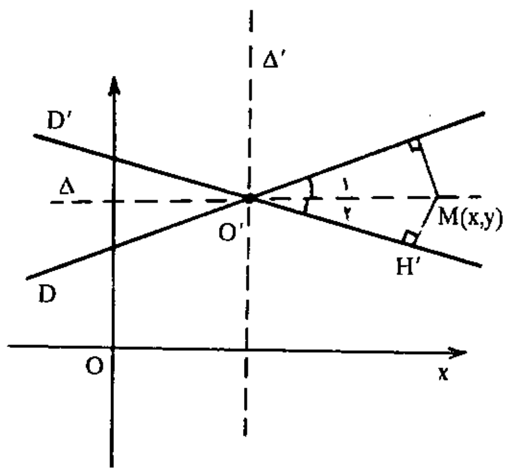
اثبات: دو خط متقاطع D و D′ را در نظر گرفته، نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط را رسم می‌کنیم و Δ و Δ′ می‌نامیم.

اولاً ـ اگر M نقطه‌ای واقع بر یکی از نیمسازها (دو خط Δ و Δ′) باشد، از دو خط D و D′ به یک فاصله است. زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه OMH و OMH′ به حالت برابری وتر و یک زاویه حاده متساویند ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $OM = OM$ و $\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$) پس: $MH = MH'$.

ثانیاً ـ اگر M نقطه‌ای باشد که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد ($MH = MH'$)، در این صورت روی نیمساز زاویهٔ بین دو خط D و D′ واقع است، زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه OMH و OMH′ به حالت برابری وتر و یک ضلع متساویند ($OM = OM$ و $MH = MH'$ و $\hat{H} = \hat{H}' = ۹۰^\circ$) پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ یعنی OM نیمساز زاویهٔ HOH′ است.

◆ اثبات به روش تحلیلی

فرض می‌کنیم $D: ax+by+c=۰$ و $D': a'x + b'y + c' = ۰$ باشد. در این صورت اگر $M\,(x\,,\,y)$ نقطه‌ای باشد که از دو خط D و D′ به یک فاصله باشد، خواهیم داشت:

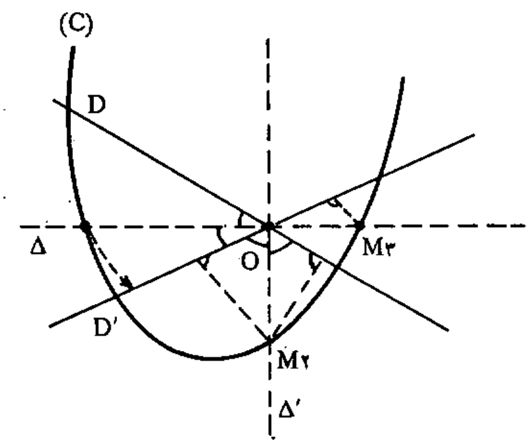


$$MH = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\,,\; MH' = \frac{|a'x+b'y\quad c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}$$

$$MH = MH' \Rightarrow \boxed{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}} = \frac{|a'x+b'y+c'|}{\sqrt{a'^۲+b'^۲}}} \quad (۱)$$

معادلهٔ (۱) که به صورت
$$\boxed{\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}}$$
نیز نوشته می‌شود، دو خط راست عمود بر هم را که همان خطوط Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' می‌باشند، مشخص می‌کند. به‌عکس مشخص است، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند از دو خط D و D' به یک فاصله است یعنی روی نیمساز زاویه‌های بین دو خط D و D' قرار دارد.

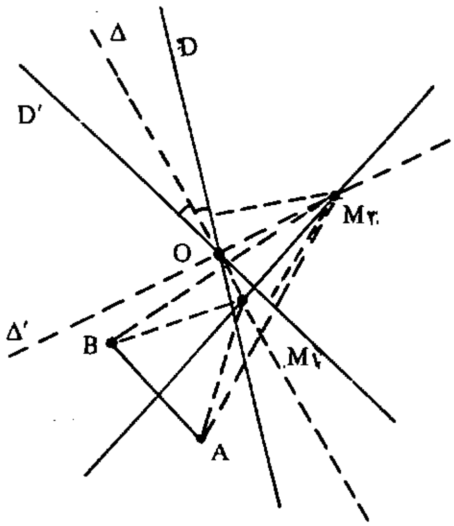
مثال ۱ : دو خط متقاطع D و D' و منحنی (c) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی منحنی (c) پیدا کنید که از دو خط D و D' به یک فاصله باشد.



حل : خطهای Δ و Δ' نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط D و D' را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقاط تقاطع این نیمسازها با منحنی (c) جواب مسأله است و به تعداد نقاط برخورد، جواب وجود دارد. (در شکل بالا ۳ جواب وجود دارد. نقاط M_1 و M_2 و M_3).

مثال ۲ : دو خط متقاطع D و D' و دو نقطهٔ A و B در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B، همچنین از دو خط D و D' به یک فاصله باشد.

حل : نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D'، همچنین عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های تقاطع این عمودمنصف با نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D' جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. (در شکل بالا دو جواب وجود دارد. نقاط M_1 و M_2).



مثال ۳ : معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط $D: 3x-4y-1=0$ و $D': 7x+24y-5=0$ را تعیین کنید.

حل: داریم:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}}$$

$$\frac{3x-4y-1}{\sqrt{9+16}}=\pm\frac{7x+24y-5}{\sqrt{49+576}}$$

$$\Rightarrow\frac{3x-4y-1}{5}=\pm\frac{7x+24y-5}{25}$$

$$\Rightarrow 15x-20y-5=\pm(7x+24y-5)$$

$$15x-20y-5=7x+24y-5\Rightarrow 8x-44y=0$$

$$\Rightarrow\boxed{2x-11y=0}$$

$$15x-20y-5=-7x-24y+5\Rightarrow$$

$$22x+4y-10=0\Rightarrow\boxed{11x+2y-5=0}$$

مثال ۴: نقطه‌ای از منحنی (c) به معادلهٔ $y = \frac{x+1}{2x-1}$ را تعیین کنید که از دو خط $D: x + 2y - 1 = 0$ و $D': x - 2y + 3 = 0$ به یک فاصله باشد.

حل: معادله‌های نیمسازهای زوایای بین دو خط D و 'D را به دست می‌آوریم و نقطه تقاطع این نیمسازها با منحنی (c) را تعیین می‌کنیم.

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{a'x+b'y+c'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{x+2y-1}{\sqrt{1+4}} = \pm\frac{x-2y+3}{\sqrt{1+4}} \Rightarrow$$

$$x+2y-1 = \pm(x-2y+3)$$

$$\Rightarrow x+2y-1 = x-2y+3 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

$$x+2y-1 = -x+2y-3 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

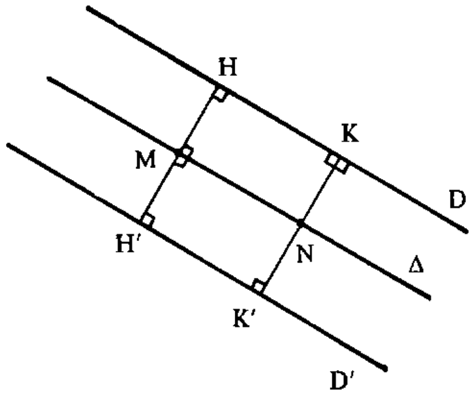
معادلات نیمسازهای زوایای بین دو خط D و 'D.

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{2x-1} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow M_1 \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1}{2x-1} \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow M_2 \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array}\right.$$

نقاط جواب مسأله

۴ـ مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متوازی به یک فاصله است، خطی است راست موازی آن دو خط و به یک فاصله از آن دو خط.



اثبات: دو خط راست متوازی D و 'D را در نظر می‌گیریم. اگر M نقطه‌ای باشد که از این دو خط به یک فاصله باشد (MH = MH')، از نقطهٔ M خط Δ را به موازات دو خط راست D و 'D رسم می‌کنیم.

اولاً ـ هر نقطه‌ای مانند N از خط Δ، از دو خط D و 'D به یک فاصله است زیرا چهار ضلعیهای MHKN و MH'K'N مستطیل یا مربعهای متساویند. $N \in \Delta \Rightarrow NK = NK'$

ثانیاً ـ هر نقطه‌ای که از دو خط D و 'D به یک فاصله باشد، روی خط Δ واقع است. $NK = NK' \Rightarrow N \in \Delta$

پس خط Δ مکان هندسی مورد نظر است.

◆ اثبات به روش تحلیلی

دو خط راست متوازی D و 'D به معادله‌های $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M(x,y) نقطه‌ای باشد که از این دو خط به یک فاصله باشد، در این صورت داریم:

$$\frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\frac{ax+by+c'}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow ax + by + c = \pm(ax + by + c')$$

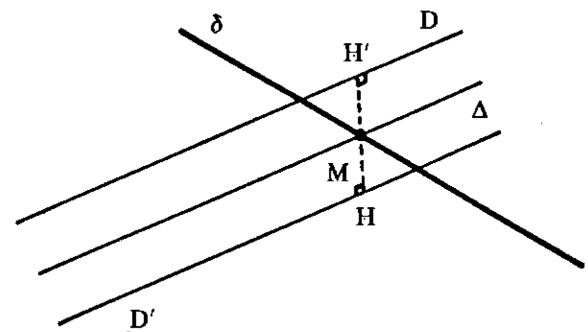
$$\Rightarrow \boxed{2ax + 2by + c + c' = 0} \ (1) \text{ یا } \boxed{ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0}$$

معادلهٔ (۱) خط راستی است که با دو خط D و D' موازی است زیرا:

$$m/D = m/D' = m/\Delta = \frac{-a}{b}$$

به عکس، هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ (۱) صدق کند از دو خط D و D' به یک فاصله است.

مثال ۱: دو خط راست موازی D و D' و خط δ (یا منحنی C) در یک صفحه مفروضند. نقطه‌ای روی خط δ (یا منحنی C) پیدا کنید که از دو خط D و D' به یک فاصله باشد.



حل: مکان هندسی نقاطی را که از دو خط متوازی D و D' به یک فاصله‌اند، رسم می‌کنیم (خط Δ). نقطهٔ برخورد این خط با خط δ (یا منحنی C) جواب مسأله است.

مثال ۲: دو خط $D: x - 2y + 1 = 0$ و $D': 2x - 4y + 3 = 0$ مفروضند. روی سهمی به معادلهٔ $x^2 + 8y - 2x - 8 = 0$ نقطه‌ای بیابید که از دو خط فوق به یک فاصله باشد.

حل: دو خط فوق موازی‌اند بنابراین معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای که از این دو خط به یک فاصله است به صورت زیر است:

$$D: x - 2y + 1 = 0 \quad \text{یا} \quad D: 2x - 4y + 2 = 0$$

$$D': 2x - 4y + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta: 2x - 4y + \frac{3+2}{2} = 0 \Rightarrow 2x - 4y + \frac{5}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{4x - 8y + 5 = 0}$$

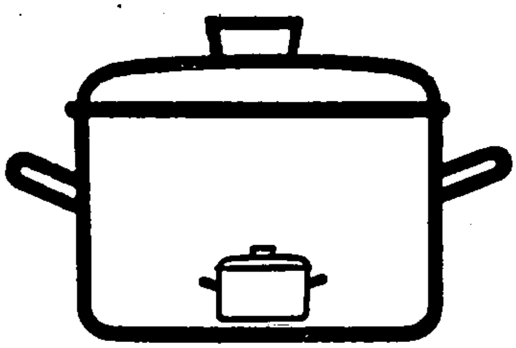
حال نقطهٔ برخورد این خط با سهمی به معادلهٔ $x^2 + 8y - 2x - 8 = 0$ را پیدا می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + 8y - 2x - 8 = 0 \\ 4x - 8y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$M_1 \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \frac{9}{8} \end{array} \right. \qquad M_2 \left| \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -\frac{7}{8} \end{array} \right.$$

تفریح اندیشه ۲

دو قابلمهٔ مسی با شکل یکسان و ضخامت یکسان دیواره‌ها مفروض است. گنجایش یکی ۸ بار از گنجایش دیگری بیشتر است. وزن آن چقدر بیشتر است؟



جواب در صفحهٔ ۸۸