مکان هندسی

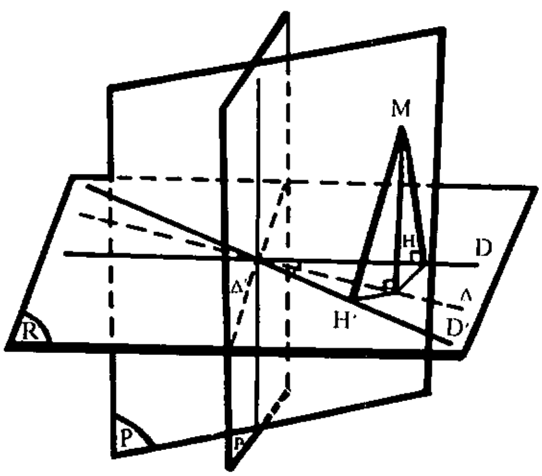
(قسمت چهارم)

محمدهاشم رستمی

این مقاله، یک مقاله تحقیقی است. به این جهت از دانش‌آموزان و دانشجویان ارجمند، اساتید محترم دانشگاهها، و دیگر ریاضیدانان و صاحبنظران درخواست می‌شود، مطالب و نظریات خود را که برای تکمیل و یا تصحیح این مقاله می‌تواند مؤثر و مفید باشد، همچنین کتابی که در مورد مکان هندسی در اختیار دارند و یا مشخصات آن کتاب را به نشانی مجلهٔ ریاضی برهان ارسال فرمایند، که قبلاً از این لطف و همکاری، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

۵. مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو خط راست متقاطع D و D' به یک فاصله است، دو صفحه است که برخطهای Δ و Δ' نیمسازهای زوایای بین دو خط D و D' می‌گذرند و برصفحهٔ حاصل از دو خط D و D' عمودند.

اثبات: خطهای متقاطع D و D' را درنظر می‌گیریم و خطهای Δ و Δ' نیمسازهای زوایای بین این دوخط را رسم می‌کنیم و دو صفحهٔ P و P' را برخطهای Δ و Δ' چنان می‌گذرانیم که برصفحهٔ دوخط D و D' (صفحهٔ R) عمود باشد.



اوّلاً: اگر M نقطه‌ای دلخواه از یکی از این دو صفحه مثلاً نقطه‌ای از صفحهٔ P باشد و از M عمودهای MH و MH' را بر دو خط D و D' فرود آوریم $MH = MH'$ است. زیرا اگر از M عمود MK را بر صفحه R فرود آوریم (K روی Δ است)، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MHK و $MH'K$ به حالت تساوی دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه متساوی‌اند ($KH=KH'$ و $MK=MK$ و $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$) پس $MH = MH'$ است.

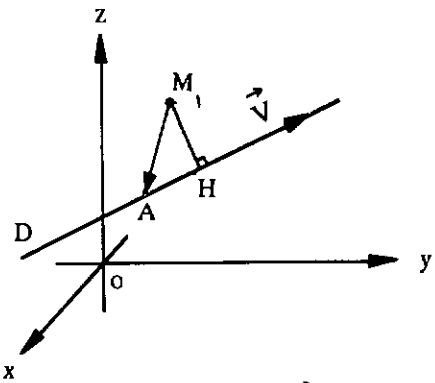
ثانیاً: ثابت می‌شود هرنقطه‌ای از فضا که از دو خط D و D' به یک فاصله باشد روی یکی از دو صفحه، P یا P' قرار دارد. زیرا اگر از M عمودهای MH و MH' را به ترتیب بر D و D' و عمود MK را برصفحهٔ R فرود آوریم و از K به H و H' وصل کنیم، دو مثلث MHK و $MH'K$ باهم برابرند ($MH = MH'$ و $MK = MK$ و $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90^\circ$)

پس: $KH = KH'$ یعنی $K \in \Delta$ یا $K \in \Delta'$ و چون MK برصفحهٔ R عمود است، پس نقطهٔ M روی یکی از دو صفحهٔ P یا P' واقع است.

اثبات به روش تحلیلی: می‌دانیم که اگر $\vec{V}(p, q, r)$ بردارهادی و

$A(x_0, y_0, z_0)$ یک نقطه از خط $D: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ باشند، فاصلهٔ نقطهٔ $M_1(x_1, y_1, z_1)$ از خط $D: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ از دستور زیر محاسبه می‌شود:

$$\boxed{M_1H=\frac{|\vec{V}\wedge\vec{AM_1}|}{|\vec{V}|}}$$



باتوجه‌به‌این‌که $\vec{V}(p, q, r)$ و $\vec{AM_1}(x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$ است داریم:

$$\vec{V}\wedge\vec{AM_1}\left|\begin{array}{l} q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)\\ r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0)\\ p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)\end{array}\right.$$

در نتیجه:

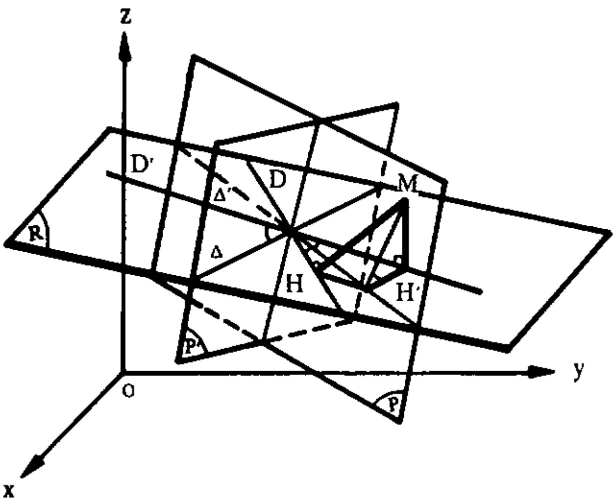
$$M_1H=\frac{\sqrt{[q(z_1-z_0)-r(y_1-y_0)]^2+[r(x_1-x_0)-p(z_1-z_0)]^2+[p(y_1-y_0)-q(x_1-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

با توجه به دستور فوق، فرض می‌کنیم $M(x, y, z)$ یک نقطه از مکان هندسی فوق باشد. یعنی نقطه‌ای که از دو خط

$$D': \frac{x-x_0}{p'}=\frac{y-y_0}{q'}=\frac{z-z_0}{r'} \text{ و } D: \frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$$

به یک فاصله است، در این صورت اگر نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطهٔ تقاطع دو خط D و D' اختیار شود (برای سهولت محاسبه)، داریم:

$$M\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right., A\left|\begin{array}{l}x_0\\y_0\\z_0\end{array}\right. \Rightarrow \vec{AM}\left|\begin{array}{l}x-x_0\\y-y_0\\z-z_0\end{array}\right., \vec{V}\left|\begin{array}{l}p\\q\\r\end{array}\right., \vec{V'}\left|\begin{array}{l}p'\\q'\\r'\end{array}\right. \Rightarrow$$



$$MH=\frac{\sqrt{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

$$MH'=\frac{\sqrt{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$$

$MH=MH'\Rightarrow$

$$\frac{\sqrt{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}=\frac{\sqrt{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}}{\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}$$

و یا:

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{[q(z-z_0)-r(y-y_0)]^2+[r(x-x_0)-p(z-z_0)]^2}{p^2+q^2+r^2}\\ \frac{+[p(y-y_0)-q(x-x_0)]^2}{p^2+q^2+r^2}=\frac{[q'(z-z_0)-r'(y-y_0)]^2}{p'^2+q'^2+r'^2}\\ \frac{+[r'(x-x_0)-p'(z-z_0)]^2+[p'(y-y_0)-q'(x-x_0)]^2}{p'^2+q'^2+r'^2}\end{array}}$$

معادلهٔ بالا، پس‌از انجام اعمال لازم و محاسبهٔ یک مجهول برحسب دو مجهول دیگر و یا تبدیل آن به‌صورت $(ax+by+cz+d)(a'x+b'y+c'z+d')=0$، معادلهٔ دو صفحه است که برنیمسازهای زوایای بین دو خط D و D' (خطوط Δ و Δ') می‌گذرند و شامل نقطهٔ $A(x_0, y_0, z_0)$ می‌باشند و برصفحه R عمودند، و هر نقطه آنها، از دو خط D و D' به یک فاصله می‌باشد. به عکس ثابت می‌شود هر نقطه‌ای که مختصاتش در معادلهٔ

بالا صدق کند از دو خط D و D' به یک فاصله است، بنابراین معادلهٔ فوق، معادلهٔ مکان‌هندسی نقاطی از فضا است که از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند.

مثال ۱ : معادلهٔ مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از دو خط $D: \frac{x-۱}{۲} = \frac{y+۲}{-۲} = z$ و $D': \frac{x-۱}{-۲} = y+۲ = \frac{z}{۲}$ به یک فاصله است.

حل : باتوجه به معادلهٔ دوخط D و D' نقطهٔ $A(۱, -۲, ۰)$ نقطهٔ تقاطع این دوخط، $\vec{V}(۲,-۲,۱)$ بردارهادی خط D و $\vec{V}'(-۲,۱,۲)$ بردارهادی خط D' است. بنابراین باتوجه به معادلهٔ مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو خط داریم:

$$\frac{|۱(z-۰)-۲(y+۲)|^۲+|۲(x-۱)+۲z|^۲+|-۲(y+۲)-۱(x-۱)|^۲}{۴+۱+۴} = \frac{|-۲(z-۰)-۱(y+۲)|^۲+|۱(x-۱)-۲z)|^۲+|۲(y+۲)+۲(x-۱)|^۲}{۴+۴+۱} \Rightarrow (z-۲y-۴)^۲+$$

$$(۲x+۲z-۲)^۲+(-x-۲y-۳)^۲=(-۲z-y-۲)^۲$$

$$+(x-۲z-۱)^۲+(۲y+۲x+۲)^۲ \Rightarrow (z-۲y-۴)^۲$$

$$+(۲x+۲z-۲)^۲+(x+۲y+۳)^۲-(۲z+y+۲)^۲$$

$$-(x-۲z-۱)^۲-(۲y+۲x+۲)^۲=۰ \Rightarrow -۳y^۲+۳z^۲$$

$$+۴xy+۸yz-۱۲xz+۸x-۱۶y+۲۸z-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow -۳y^۲+۴(x+۲z-۴)y+۳z^۲-۱۲xz+۸x+۲۸z-۲۰=۰$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۲(x+۲z-۴) \pm \sqrt{۴(x+۲z-۴)^۲+۳(۳z^۲-۱۲xz+۸x+۲۸z-۲۰)}}{-۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۲(x+۲z-۴) \pm \sqrt{۴x^۲+۲۵z^۲-۲۰xz-۸x+۲۰z+۴=(۲x-۵z-۲)^۲}}{-۳}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-۲(x+۲z-۴) \pm (۲x-۵z-۲)}{-۳} \Rightarrow y = \frac{-۹z+۶}{-۳} = +۳z-۲ \quad ,$$

$$y = \frac{-۴x+z+۱۰}{-۳} \Rightarrow$$

$$\boxed{y-۳z+۲=۰} \quad و \quad \boxed{۴x-۳y-z-۱۰=۰}$$

معادله‌های صفحات مکان‌هندسی مطلوب.

نکته: به‌روش دیگری نیز می‌توان معادلهٔ صفحات بالا را به‌دست آورد. بدین ترتیب که ابتدا معادلهٔ دوصفحه‌ای را که برخطهای D و D' گذشته و بر صفحهٔ R (صفحهٔ گذرنده بردو خط D و D') عمودند، پیدا می‌کنیم، آنگاه معادلات صفحات منصف فرجه‌های حاصل بین این دو صفحه را به‌دست می‌آوریم. درمورد همین مسأله داریم:

بردارهادی خط D $\quad \vec{V}(۲,-۲,۱)$

بردارهادی خط D' $\quad \vec{V}'(-۲,۱,۲)$

بردارنرمال صفحهٔ R $\quad \Rightarrow \vec{V} \wedge \vec{V}'(-۵,-۶,-۲) \Rightarrow \vec{W}(۵,۶,۲)$

بردارنرمال صفحهٔ $P_۱$ $\quad \Rightarrow \vec{V} \wedge \vec{W}(۱۰,-۱,-۲۲)$

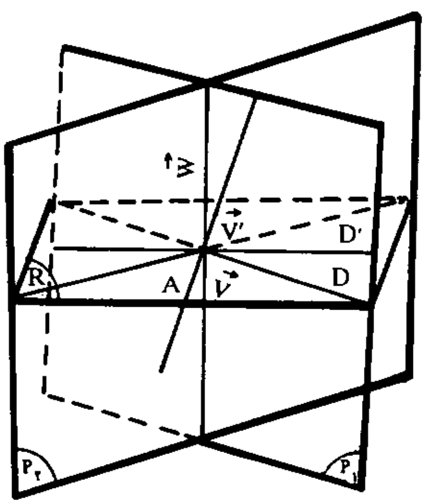
بردارنرمال صفحهٔ $P_۲$ $\quad \Rightarrow \vec{V}' \wedge \vec{W}(۱۰,-۱۴,۱۷)$

$$۱۰(x-۱)-۱(y+۲)-۲۲(z-۰)=۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۱$ $\quad \boxed{۱۰x-y-۲۲z-۱۲=۰}$

$$۱۰(x-۱)-۱۴(y+۲)+۱۷z=۰ \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ $P_۲$ $\quad \boxed{۱۰x-۱۴y+۱۷z-۳۸=۰}$



$$\Rightarrow \frac{|۱۰x-y-۲۲z-۱۲|}{\sqrt{۱۰۰+۱+۴۸۴}=\sqrt{۵۸۵}}$$

$$= \frac{|۱۰x-۱۴y+۱۷z-۳۸|}{\sqrt{۱۰۰+۱۹۶+۲۸۹}=\sqrt{۵۸۵}}$$

معادلات صفحات منصف فرجه‌های بین دو صفحهٔ P_1 و P_2.

$$\Rightarrow |10x - y - 22z - 12| = |10x - 14y + 17z - 38|$$

$$\Rightarrow 10x - y - 22z - 12 = 10x - 14y + 17z - 38$$

$$\Rightarrow 13y - 39z + 26 = 0$$

معادلهٔ یک صفحهٔ مکان : P $\quad \boxed{\Rightarrow y - 3z + 2 = 0}$

$$10x - y - 22z - 12 = -10x + 14y - 17z + 38$$

$$\Rightarrow 20x - 15y - 5z - 50 = 0$$

معادلهٔ صفحهٔ دیگر مکان: P' $\quad \boxed{\Rightarrow 4x - 3y - z - 10 = 0}$

مثال ۲: نقطه‌ای از خط $\Delta: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = z$ را تعیین کنید که از دو خط

$$D: \begin{cases} x - 2 = \frac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{و} \quad D': \begin{cases} x = 1 \\ y = t + 1 \\ z = 2t \end{cases}$$

به یک فاصله باشد.

حل: ابتدا معادلهٔ مکان هندسی نقاطی را که از دو خط D و D' به یک فاصله‌اند به دست می‌آوریم و سپس نقطهٔ تقاطع این مکان هندسی با خط Δ را تعیین می‌کنیم.

دو خط D و D' در نقطهٔ $A(1, 1, 0)$ متقاطعند. صفحهٔ گذرند بر D و D' را R و صفحهٔ گذرنده بر D و عمود بر R را P_1 و صفحهٔ گذرنده بر D' و عمود بر R را P_2 می‌نامیم. داریم:

$$D: \begin{cases} x - 2 = \frac{y+1}{-2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2 = \frac{t+1+1}{-2} \Rightarrow t = 0 \\ 2t = 0 \qquad \Rightarrow t = 0 \end{cases}$$

نقطهٔ تقاطع D و D' $\quad \Rightarrow t = 0 \Rightarrow A(1,1,0)$

بردارهادی خط D' $\vec{V'}(0,1,2)$ ، بردارهـادی خط D $\vec{V}(1,-2,0)$

بردار قائم صفحهٔ R $\quad \vec{W} = \vec{V} \wedge \vec{V'} \ (-4,-2,1)$

بردار قائم صفحهٔ P_1 $\quad \vec{V} \wedge \vec{W} \ (2,1,10)$

بردار قائم صفحهٔ P_2 $\quad \vec{V'} \wedge \vec{W} \ (-5,8,-4)$

معادلهٔ کلی صفحه $\Leftarrow$ $\quad a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$$2(x-1) + 1(y-1) + 10(z-0) = 0 \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ P_1: $\quad \Rightarrow \boxed{2x + y + 10z - 3 = 0}$

$$-5(x-1) + 8(y-1) - 4(z-0) = 0 \Rightarrow$$

معادلهٔ صفحهٔ P_2: $\quad \boxed{-5x + 8y - 4z - 3 = 0}$

$$\frac{|2x + y + 10z - 3|}{\sqrt{4+1+100} = \sqrt{105}} = \frac{|-5x + 8y - 4z - 3|}{\sqrt{25+64+16} = \sqrt{105}}$$

معادلهٔ صفحات نیمساز فرجه‌های بین دو صفحهٔ P_1 و P_2 (صفحات مکان هندسی مورد نظر).

$$\Rightarrow (2x + y + 10z - 3) = \pm(-5x + 8y - 4z - 3) \Rightarrow$$

$$2x + y + 10z - 3 = -5x + 8y - 4z - 3$$

$$\Rightarrow 7x - 7y + 14z = 0 \Rightarrow \boxed{x - y + 2z = 0}$$

معادلهٔ یک صفحهٔ مکان هندسی: P

$$2x + y + 10z - 3 = 5x - 8y + 4z + 3 \Rightarrow$$

$$-3x + 9y + 6z - 6 = 0$$

معادلهٔ صفحهٔ دیگر مکان‌هندسی: P' $\quad \Rightarrow \boxed{x - 3y - 2z + 2 = 0}$

$$\begin{matrix} P: \\ \Delta: \end{matrix} \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = z = t \end{cases} \Rightarrow 3t - (2t+3) + 2t$$

$$= 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow$$

یک نقطهٔ جواب مسأله M_1(۳ و ۵ و ۱)

$$\begin{matrix} P': \\ \Delta: \end{matrix} \begin{cases} x - 3y - 2z + 2 = 0 \\ \frac{x}{3} = \frac{y-3}{2} = z = t \end{cases} \Rightarrow 3t - 3(2t+3) - 2t + 2 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{-7}{5} \Rightarrow M_2\left(\frac{-21}{5}, \frac{1}{5}, \frac{-7}{5}\right)$$

نقطهٔ دیگر جواب مسأله